

УДК 519.83+519.86

**ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ  
СТИМУЛИРОВАНИЯ ИННОВАЦИЙ  
И ИХ ИДЕНТИФИКАЦИЯ  
(НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ)<sup>1</sup>**

**Антоненко А. В.<sup>2</sup>, Лошкарев И. В.<sup>3</sup>, Панков В. С.<sup>4</sup>,  
Угольницкий Г. А.<sup>5</sup>**

*(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)*

*Рассматриваются теоретико-игровые модели согласования интересов (на примере электроэнергетики). Представлена программная реализация расчетов по моделям. На основе полученных результатов сформированы рекомендации, сделаны выводы о целесообразности ввода счетчиков нового поколения при различных значениях параметров модели.*

Ключевые слова: теоретико-игровые модели, электроэнергетический сектор, математическое моделирование, программная реализация.

## **1. Введение**

Цель работы – создание программного комплекса для решения и исследования достаточно простых математических моделей, которые могут быть использованы для решения практических задач мотивационного управления в электроэнергетике, и обсуждение проблем их идентификации.

---

<sup>1</sup> Работа поддержана РФФИ, проект №15-01-00432а.

<sup>2</sup> Андрей Валерьевич Антоненко, кандидат технических наук, ассистент (andrei80586@yandex.ru).

<sup>3</sup> Илья Витальевич Лошкарев, ассистент (loshkarev.i@gmail.com).

<sup>4</sup> Владимир Сергеевич Панков, магистр прикладной математики и информатики (+79888987246).

<sup>5</sup> Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).

Математические модели в электроэнергетике представлены в работах [12–14, 16–18]. Взаимодействие субъектов электроэнергетики и согласование их интересов в настоящей статье рассматриваются в рамках теории активных систем [3–5, 10], информационной теории иерархических систем [6–7], теории контрактов [15], теории управления устойчивым развитием активных систем [11].

Основы идентификации математических моделей изложены в эконометрике [8] и теории идентификации [9]. Согласно традиционному подходу, предполагается наличие временных рядов данных, которые обрабатываются с помощью статистических методов.

В работе авторов [1] и предыдущей статье [2] предложен иной подход, который заключается в проведении вычислительных экспериментов для характерных значений параметров моделей. В этом случае можно увидеть зависимость решения от модельных параметров и сформулировать соответствующие рекомендации по управлению.

В работе рассматриваются теоретико-игровые модели; описание программного комплекса и его применение для исследования оптимизационных моделей приведены в статье [2]. Основное внимание здесь вновь уделяется анализу зависимости решений от модельных параметров с помощью программного комплекса.

Практическая значимость работы состоит в создании инструмента для анализа и идентификации параметров моделей стимулирования инноваций в электроэнергетике.

## **2. Модели стимулирования инноваций в электроэнергетике**

### **2.1. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ С СИММЕТРИЧНЫМИ ИГРОКАМИ**

Рассмотрим игру в нормальной форме с тремя игроками: местный орган управления ( $i = 1$ ), товарищество собственников жилья ( $i = 2$ ) и энергетическая компания ( $i = 3$ ). В целом модель можно записать в следующем виде:

$$(1) \quad g_i(u_1, u_2, u_3) \rightarrow \max, u_i \in U_i, i = 1, 2, 3,$$

где  $u_i$  – доля бюджета развития  $i$ -го игрока, ассигнуемая на инновации в электроэнергетике;  $g_i$  – доход игрока  $i$  от этих инноваций. Рассмотрим различные виды функций выигрыша  $g_i$ :

1. Степенные функции дохода центра и затрат агента:

$$(2) \quad g_i(u_1, u_2, u_3) = a_i(u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_i} - 0,5 b_i u_i^2,$$

$$a_i > 0, b_i > 0, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, 3.$$

Для нахождения равновесия Нэша необходимо решить систему уравнений

$$(3) \quad \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = 0,$$

$$\frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = a_i \alpha_i (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_i - 1} - b_i u_i, i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{cases} a_1 \alpha_1 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_1 - 1} - b_1 u_1 = 0, \\ a_2 \alpha_2 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_2 - 1} - b_2 u_2 = 0, \\ a_3 \alpha_3 (u_1 + u_2 + u_3)^{\alpha_3 - 1} - b_3 u_3 = 0. \end{cases}$$

В общем виде требуется численное решение. Упростим модель и рассмотрим частный случай:

$$a_i \equiv a, b_i \equiv b, \alpha_i \equiv \alpha,$$

тогда получаем:

$$a\alpha(3u)^{\alpha-1} = bu,$$

$$bu_1 = bu_2 = bu_3 = bu = a\alpha(3u)^{\alpha-1}, \text{ откуда}$$

$$(4) \quad u^* = \left[ \frac{3^{\alpha-1} a \alpha}{b} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}.$$

В безразмерном варианте  $a = b = 1$ , имеем:

$$(5) \quad u^* = [3^{\alpha-1} \alpha]^{\frac{1}{2-\alpha}}.$$

2. Экспоненциальные функции дохода центра и затрат агента:

$$(6) \quad g_i(u_1, u_2, u_3) = a_i \left( 1 - e^{-\alpha_i(u_1 + u_2 + u_3)} \right) - \frac{b_i}{\beta} (e^{\beta u_i} - 1),$$

$$a_i > 0, b_i > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Для нахождения равновесия Нэша необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = 0,$$

$$(7) \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = a_i \alpha_i e^{-\alpha_i(u_1+u_2+u_3)} - b_i e^{\beta u_i}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{cases} a_1 \alpha_1 e^{-\alpha_1(u_1+u_2+u_3)} - b_1 e^{\beta u_1} = 0, \\ a_2 \alpha_2 e^{-\alpha_2(u_1+u_2+u_3)} - b_2 e^{\beta u_2} = 0, \\ a_3 \alpha_3 e^{-\alpha_3(u_1+u_2+u_3)} - b_3 e^{\beta u_3} = 0. \end{cases}$$

В общем виде требуется численное решение. Упростим модель и рассмотрим частный случай:

$$a_i \equiv a, \quad b_i \equiv b, \quad \alpha_i \equiv \alpha,$$

тогда получаем  $\beta u_1 = \beta u_2 = \beta u_3 = \beta u = \ln\left(\frac{a\alpha}{b}\right) - 3\alpha u$ , откуда

$$(8) \quad u^* = \frac{\ln\left(\frac{a\alpha}{b}\right)}{3\alpha + \beta}.$$

В безразмерном варианте  $a = b = 1$ , имеем:

$$(9) \quad u^* = \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha + \beta}.$$

3. Показательные функции дохода центра и затрат агента:

$$(10) \quad g_i(u_1, u_2, u_3) = a_i \left(1 - \alpha_i^{u_1+u_2+u_3}\right) - \frac{b_i}{\ln \beta} (\beta^{u_i} - 1),$$

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \beta_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = 0,$$

$$(11) \quad \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i} = -a_i \ln \alpha_i \alpha_i^{u_1+u_2+u_3} - b_i \beta^{u_i}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{cases} a_1 \ln \alpha_1 \alpha_1^{u_1+u_2+u_3} + b_1 \beta^{u_1} = 0, \\ a_2 \ln \alpha_2 \alpha_2^{u_1+u_2+u_3} + b_2 \beta^{u_2} = 0, \\ a_3 \ln \alpha_3 \alpha_3^{u_1+u_2+u_3} + b_3 \beta^{u_3} = 0. \end{cases}$$

В общем виде требуется численное решение. Упростим модель и рассмотрим частный случай:

$$a_i \equiv a, \quad b_i \equiv b, \quad \alpha_i \equiv \alpha,$$

тогда получаем

$$(12) \quad 3u \ln \alpha - u \ln \beta = \ln\left(-\frac{b}{a \ln \alpha}\right),$$

откуда

$$(13) \quad u^* = \frac{\ln\left(-\frac{b}{a \ln \alpha}\right)}{3 \ln \alpha - \ln \beta}.$$

В безразмерном варианте  $a = b = 1$ , имеем:

$$(14) u^* = \frac{\ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right)}{3 \ln a - \ln \beta}.$$

Сравнительный анализ приводит к следующим результатам.

Степенные функции дохода центра и затрат агента. Доход центра вдвое больше затрат агента:  $a = 20, b = 10; 0 \leq \alpha \leq 1$ , шаг по  $\alpha = 0,1; 1 \leq \beta \leq 10$ , шаг по  $\beta = 1$ .

Итог: максимум  $u^*$  достигается при использовании значений параметров таких, что  $2\alpha \geq \beta$ , иначе выгодно использовать максимальные возможные значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Экспоненциальные функции дохода центра и затрат агента. Затраты агента равны доходу центра:  $a = b = 1; 0,2 \leq \alpha \leq 2$ , шаг по  $\alpha = 0,2; 0,2 \leq \beta \leq 2$ , шаг по  $\beta = 2$ .

Итог: максимум  $u^*$  достигается при использовании минимального значения параметра  $\beta$ , при параметре  $\alpha$  таком, что  $\alpha > \frac{\beta}{2}$  (в общем случае  $\alpha > \frac{\beta}{k}$ , где  $k = b/a$ ).

Показательные функции дохода центра и затрат агента. Затраты агента равны доходу центра:  $a = b = 1; 0,1 \leq \alpha \leq 0,9$ , шаг по  $\alpha = 0,1; 1 \leq \beta \leq 10$ , шаг по  $\beta = 1$ .

Итог: максимум  $u^*$  достигается при использовании значений параметра  $\beta$ , близких к 1 справа и при минимально возможных значениях параметра  $\alpha$ .

## 2.2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ГЕРМЕЙЕРА–ВАТЕЛЯ

Рассмотрим эту модель в иерархической постановке  $\Gamma_1$ . Первый игрок – компания, устанавливающая энергосберегающие счетчики «Аргус» [2], второй игрок – потребитель (например, ТСЖ). Каждый игрок выбирает, какую часть бюджета потратить на развитие инноваций, причем затраты игроков различаются. Функция общего интереса  $H$  характеризует повышение качество обслуживания в сфере энергопотребления, выгодное обоим игрокам (потребителю непосредственно, компании – для увеличения будущих продаж).

$$\begin{aligned} g_1(u_1, u_2) &= aH(u_1, u_2) - b_1u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1; \\ (15) \quad g_2(u_1, u_2) &= aH(u_1, u_2) - b_2u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1; \\ & a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0. \end{aligned}$$

Здесь  $u_i$  – часть бюджета развития, ассигнуемая  $i$ -м игроком на развитие инноваций;  $a$  – доход игроков при максимальном ассигновании бюджета на развитие инноваций обоими игроками;  $b_i$  – затраты  $i$ -го игрока при максимальном ассигновании бюджета на инновации.

Рассмотрим функции выигрыша следующего вида: степенные, показательные, экспоненциальные.

1. Степенные функции выигрыша игроков:

$$(16) g_1(u_1, u_2) = a(u_1 + u_2)^\alpha - b_1 u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1;$$

$$g_2(u_1, u_2) = a(u_1 + u_2)^\alpha - b_2 u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1;$$

$$0 < \alpha \leq 1, a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0.$$

Для нахождения оптимальной реакции ведомого надо решить уравнение (условия второго порядка здесь также выполнены):

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0,$$

$$(17) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = a\alpha(u_1 + u_2)^{\alpha-1} - b_2,$$

откуда

$$u_2^*(u_1) = \left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - u_1.$$

Поскольку функция выигрыша ведущего убывает по  $u_1$ :

$$(18) g_1(u_1, u_2^*(u_1)) = a\left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - b_1 u_1,$$

то:

$$(19) u_1^* = 0, u_2^*(u_1^*) = \left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Таким образом, равновесие по Штакельбергу в этой игре:

$$(20) ST_1 = \left\{ \left( 0; \left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right) \right\}.$$

Выигрыши игроков составляют

$$(21) g_1(u_1^*, u_2^*) = a\left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$(22) g_2(u_1^*, u_2^*) = (1 - \alpha)a\left(\frac{b_2}{a\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

2. Экспоненциальные функции выигрыша игроков:

$$(23) g_1(u_1, u_2) = a(1 - e^{-\alpha(u_1+u_2)}) - b_1 u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1;$$

$$(24) g_2(u_1, u_2) = a(1 - e^{-\alpha(u_1+u_2)}) - b_2u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1;$$

$a > 0, a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0.$

Для нахождения оптимальной реакции ведомого надо решить уравнение (условия второго порядка здесь также выполнены):

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0,$$

$$(25) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = a\alpha e^{-\alpha(u_1+u_2)} - b_2,$$

откуда

$$u_2^*(u_1) = \frac{\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}{\alpha} - u_1.$$

Поскольку функция выигрыша ведущего убывает по  $u_1$ :

$$(26) g_1(u_1, u_2^*(u_1)) = a(1 - e^{-\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}) - b_1u_1,$$

то

$$(27) u_1^* = 0, u_2^*(u_1^*) = \frac{\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}{\alpha}.$$

Таким образом, равновесие Штакельберга в этой игре:

$$(28) ST_1 = \left\{ \left( 0; \frac{\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}{\alpha} \right) \right\}.$$

Выигрыши игроков составляют

$$(29) g_1(u_1^*, u_2^*) = a(1 - e^{-\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}),$$

$$(30) g_2(u_1^*, u_2^*) = a \left( 1 - e^{-\ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)} \right) - \frac{b_2 \ln\left(\frac{a\alpha}{b_2}\right)}{\alpha}.$$

3. Показательные функции выигрыша игроков:

$$(31) g_1(u_1, u_2) = a(1 - \alpha^{u_1+u_2}) - b_1u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1;$$

$$g_2(u_1, u_2) = a(1 - \alpha^{u_1+u_2}) - b_2u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1;$$

$$0 < \alpha < 1, a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0.$$

Для нахождения оптимальной реакции ведомого надо решить уравнение (условия второго порядка здесь также выполнены):

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0,$$

$$(32) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = -a \ln \alpha \alpha^{u_1+u_2} - b_2,$$

откуда

$$\alpha^{u_2} = -\frac{b_2}{a \ln \alpha} \alpha^{-u_1},$$

$$(33) u_2^*(u_1) = \log_{\alpha} \left( -\frac{b_2}{a \ln \alpha} \right) - u_1.$$

Поскольку функция выигрыша ведущего убывает по  $u_1$ :

$$(34) g_1(u_1, u_2^*(u_1)) = \frac{b_2 + a \ln \alpha}{\ln \alpha} - b_1 u_1,$$

то

$$(35) u_1^* = 0, u_2^*(u_1^*) = \log_{\alpha} \left( -\frac{b_2}{a \ln \alpha} \right).$$

Таким образом, равновесие Штакельберга в этой игре:

$$(36) ST_1 = \left\{ \left( 0; \log_{\alpha} \left( -\frac{b_2}{a \ln \alpha} \right) \right) \right\}.$$

Выигрыши игроков составляют

$$(37) g_1(u_1^*, u_2^*) = \frac{b_2 + a \ln \alpha}{\ln \alpha},$$

$$(38) g_2(u_1^*, u_2^*) = \frac{b_2}{\ln \alpha} + a - b_2 \log_{\alpha} \left( -\frac{b_2}{a \ln \alpha} \right).$$

### 2.3. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим иерархическую игру, в которой первый игрок – ведущий (с правом первого хода), второй – ведомый. Интерпретация та же, что и в предыдущей модели, но теперь Ведущий стремится заинтересовать ведомого во внедрении инноваций, предлагая механизм управления типа  $\Gamma_2$ . Следуя базовой модели стимулирования [5], можно трактовать  $u_2$  как затраты потребителя на установку счетчиков, а  $u_1$  как компенсацию со стороны компании;  $g_i$  – общий доход игрока  $i$  от инноваций в ситуации  $(u_1, u_2)$ :

$$(39) g_1(u_1, u_2) \rightarrow \max, u_1 \in U_1;$$

$$g_2(u_1, u_2) \rightarrow \max, u_2 \in U_2.$$

Рассмотрим в качестве примера игру:

$$(40) g_1(u_1, u_2) = a_1 u_1 - 0,5 b_1 u_1^2 + c_1 u_2 \rightarrow \max, 0 \leq u_1 \leq 1;$$

$$g_2(u_1, u_2) = a_2 u_2 - 0,5 b_2 u_2^2 + c_2 u_1 \rightarrow \max, 0 \leq u_2 \leq 1,$$

$$a_1 < 0.$$

Для сравнения найдем сначала равновесие Штакельберга в игре  $\Gamma_1$ :

$$(41) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = a_2 - b_2 u_2 \Rightarrow u_2^* = R_2(u_1) = \frac{a_2}{b_2};$$



$$(42) \frac{\partial g_1(u_1, u_2^*)}{\partial u_1} = a_1 - b_1 u_1 \Rightarrow u_1^* = \frac{a_1}{b_1};$$

$$(43) ST_1 = \left\{ \left( \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right) \right\}.$$

$ST_1$  является также равновесием Нэша, так как уравнения

$$\frac{\partial g_1}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0 \text{ независимы.}$$

Теперь найдем решение игры  $\Gamma_2$ , используя теорему Гермейера [7]. В нашем примере доминантная стратегия первого игрока есть

$$(44) u_1^D(u_2) \equiv \frac{a_1}{b_1}.$$

Стратегия наказания второго игрока:

$$(45) u_1^P(u_2) \equiv \frac{a_1}{b_1}.$$

Множества:

$$(46) L_2 = \max_{0 \leq u_2 \leq 1} g_2(0, u_2) = g_2\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right) = \frac{a_2^2}{2b_2};$$

$$(47) E_2 = \left\{ \left( \frac{a_2}{b_2} \right) \right\};$$

$$(48) D_2 = \{(u_1, u_2) : g_2(u_1, u_2) > L_2\};$$

$$(49) K_2 = g_1(u_1^*, u_2^*) = \frac{a_1^2}{2b_1} + \frac{a_2 c_1}{b_2}.$$

Для нахождения величины  $K_1$  надо решить задачу

$$(50) a_1 u_1 - 0,5 b_1 u_1^2 + c_1 u_2 \rightarrow \max$$

$$(51) \begin{cases} a_2 u_2 - b_2 u_2^2 + c_2 u_2 > \frac{a_2^2}{2b_2}, \\ 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1. \end{cases}$$

Откуда вновь

$$(52) u_1^* = \frac{a_1}{b_1}, u_2^* = \frac{a_2}{b_2};$$

$$(53) K_1 = \frac{a_2^2}{2b_2} + \frac{a_1 c_2}{b_1}.$$

Так как  $E_2 = \{u_2^*\}$ , при любом соотношении  $(K_1, K_2)$  получаем

$$(54) \tilde{u}_1^*(u_2) = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1}, u_2 = \frac{a_2}{b_2}, \\ 0, u_2 \neq \frac{a_2}{b_2}. \end{cases}$$

Таким образом, в данном случае решения игр  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  совпадают.

### **3. Программная реализация комплекса**

#### **3.1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ЯЗЫКА И СРЕДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Для реализации программного комплекса был выбран язык программирования С#. В качестве среды разработки была выбрана Microsoft Visual Studio 2008.

При решении систем нелинейных алгебраических уравнений использован метод Зейделя (см. Приложение).

#### **3.2. СТРУКТУРА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА**

Структура программного комплекса показана на рис. 1.

Разработанная программа состоит из одного окна, на котором расположены четыре вкладки (рис. 2):

- классическая модель стимулирования;
- теоретико-игровая модель с симметричными игроками;
- модель типа Гермейера–Вателя;
- иерархическая теоретико-игровая модель.

Работа с моделью стимулирования описывается в статье [2].

### **4. Выполнение расчётов и анализ результатов**

#### **4.1. РАСЧЕТЫ ПО ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ МОДЕЛИ С СИММЕТРИЧНЫМИ ИГРОКАМИ**

После проведения расчетов в программном комплексе для моделей со степенными функциями в общем случае и различными значениями параметров  $a_i = b_i = 1$ ,  $a_i = 10$ ,  $b_i = 20$ ,  $a_i = 20$ ,  $b_i = 10$  и в случае, когда данные параметры не связаны друг с другом, можно сделать следующие выводы:

1. Относительно особенностей реализации решения методом Зейделя: в силу итерационного решения СНЛАУ при повышении точности при решении каждого следующего из уравнений стало видно, что наиболее точное решение получается для последних итераций. По этой же причине изменение порядка уравнений при решении влияет на погрешность.

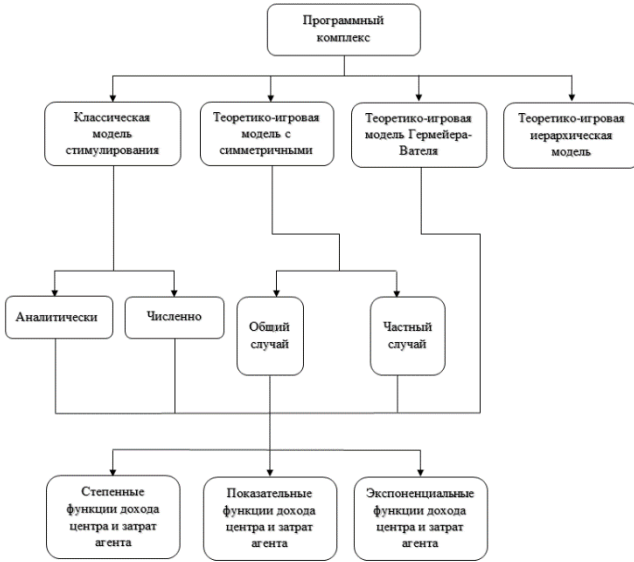


Рис. 1. Структура программного комплекса

Методы стимулирования инноваций в электроэнергетике

Классическая модель стимулирования | Теоретико-игровая модель с симметричными игроками | Модель типа Гермейера - Ватала | Теоретико-игровая иерархическая модель

Выбор типа функций:  Степенная,  Показательная,  Экспоненциальная

Случай:  Общий,  Частный

Общий случай: Вводные параметры модели:
 

Значение a1:	1	Значение a2:	2	Значение a3:	3
Значение b1:	4	Значение b2:	5	Значение b3:	6
Значение alpha1:	0.8	Значение alpha2:	0.3	Значение alpha3:	0.5
		Значение beta:	1		

Оптимальное значение в точке

Приближение:
 

u1*	0.1605483123	g1*	0.4819000915
u2*	0.0699820175	g2*	1.5678783405
u3*	0.2253688286	g3*	1.8732358227

Частный случай: Сетка по a: От: 0, До: 1, С шагом: 0.1

Построить таблицу оптимальных значений по параметру a

Параметры a и b:
 

Значение a:	1
Значение b:	1

Оптимальное значение в точке при заданном a:
 

Значение a:	0.5
Оптимум:	0.4367902323

Таблица значений u\*:

u*	
0	
0.1	0.1769
0.2	0.251
0.3	0.3133
0.4	0.3736
0.5	0.4368
0.6	0.5072
0.7	0.5898
0.8	0.6914
0.9	0.8223

Описание модели:
 

Модель имеет вид:

$$g_i(u_1, u_2, u_3) \rightarrow \max,$$

$$u_i \in U_i, i = 1, 2, 3$$

$$g_i(u_1, u_2, u_3) =$$

$$= a_i(u_1 + u_2 + u_3)^{a_i} - 0.5b_i u_i^2,$$

$$a_i > 0, b_i > 0, 0 \leq a_i \leq 1,$$

$$i = 1, 2, 3$$

Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений:
 
$$\begin{cases} a_1 a_1 (u_1 + u_2 + u_3)^{a_1 - 1} - b_1 u_1 = 0 \\ a_2 a_2 (u_1 + u_2 + u_3)^{a_2 - 1} - b_2 u_2 = 0 \\ a_3 a_3 (u_1 + u_2 + u_3)^{a_3 - 1} - b_3 u_3 = 0 \end{cases}$$

Рис. 2. Решение теоретико-игровой модели с симметричными игроками

2. Что касается непосредственно анализа влияния параметров  $\alpha_i$  на решение модели, стало понятно, что при равных между собой значениях параметра  $\alpha_i$  оптимальные значения  $u_i^*$  и выигрыши игроков  $g_i^*$  возрастают при росте  $\alpha_i$ . При не равных между собой значениях параметров  $\alpha_i$  наблюдается та же тенденция. Влияние параметра  $\alpha_i$  на решение не зависит от выбора параметров  $a_i$  и  $b_i$ . Основываясь на этом, можно сказать, что максимальные значения  $u_i^*$  и  $g_i^*$  достигаются при максимальных значениях параметров  $\alpha_i$ .

3. Также можно заключить, что решение модели растёт по параметрам  $a_i$  и убывает по параметрам  $b_i$ .

При решении модели с показательными функциями в общем случае были рассмотрены варианты со значениями параметров, представленными в таблице 1.

Таблица 1. Варианты значений рассматриваемых модельных параметров

Значения модельных параметров		
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,1$
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,3$
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,5$
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,7$
$a_i = 1$	$b_i = 1$	$\alpha_i = 0,9$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,1$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,3$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,5$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,7$
$a_i = 10$	$b_i = 20$	$\alpha_i = 0,9$
$a_i = 20$	$b_i = 10$	$\alpha_i = 0,1$

Анализируя полученные результаты, получаем, что по параметру  $\beta$  решение модели  $u_1^*$  и  $u_3^*$  стремится от  $+\infty$  к  $-\varepsilon$ , а  $u_2^*$  стремится от  $-\infty$  к  $-\varepsilon$ , где  $\varepsilon < 1$ ; при этом стремится неравномерно, то возрастая локально, то убывая. При росте параметров  $\alpha_i$  решение модели сходится к 0 при меньших значениях параметра  $\beta$ .

Для модели общего вида с показательным видом функций имеет место проблема выхода решения за пределы области допустимых значений переменных. В данном случае полагалось, что

$$(55) u^* = \begin{cases} 0, u^* < 0, \\ u^*, 0 \leq u^* \leq 1, \\ 1, u^* > 1. \end{cases}$$

Наименее заметна эта проблема в случае, когда  $a_i > b_i$ . Результаты расчетов модели с показательными функциями в общем виде представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты расчетов по модели с показательными функциями в общем случае;  $a_i = b_i = 1$ ;  $\alpha_i = 0,3$

№ п./п.	1	2	3	4	5	6	7	
Входные параметры модели	$a_1$	1	1	1	1	1	1	1
	$a_2$	1	1	1	1	1	1	1
	$a_3$	1	1	1	1	1	1	1
	$b_1$	1	1	1	1	1	1	1
	$b_2$	1	1	1	1	1	1	1
	$b_3$	1	1	1	1	1	1	1
	$\alpha_1$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	$\alpha_2$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	$\alpha_3$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	$\beta$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
Решение модели	$u_1^*$	1,793	0,275	-0,096	-0,245	-0,32	-0,362	-0,404
	$u_2^*$	-3,234	-0,029	0,161	0,133	0,083	0,039	-0,027
	$u_3^*$	6,667	0,195	0,08	0,096	0,099	0,092	0,067
	$g_1^*$	-0,323	0,129	0,252	0,241	0,197	0,146	0,078
	$g_2^*$	0,91	0,432	0,078	0,098	0,109	0,105	0,078
	$g_3^*$	-0,323	0,223	0,169	0,139	0,091	0,047	0,006

В случае экспоненциальных функций проводились расчеты со значениями параметров, представленными в таблице 3.

Можно сказать, что решение модели убывает по параметрам  $\beta$  и  $b_i$ , растёт по параметрам  $a_i$ , а по параметрам  $\alpha_i$  сначала растёт, а затем убывает.

Таблица 3. Значения параметров рассчитываемых моделей

Значения модельных параметров	
$a_i = 1$	$b_i = 1$
$a_i = 10$	$b_i = 20$
$a_i = 20$	$b_i = 10$

Анализ результатов расчетов степенных функций в частном случае показывает, что  $u^*$  возрастает по параметрам  $a$ ,  $\alpha$  и убывает по параметру  $b$ .

Проанализировав данные расчетов показательных функций со значениями параметров  $a = b = 1$ ,  $a = 10$ ,  $b = 20$ ,  $a = 20$ ,  $b = 10$ , получаем, что в случае, когда  $a \leq b$ , значение  $u^*$  убывает по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ . В случае же, когда  $a > b$ , значение  $u^*$  убывает по параметру  $\beta$ , а по параметру  $\alpha$  сначала возрастает, а затем убывает (в случае  $a = 20$ ,  $b = 10$ ,  $\beta = 1$ , возрастает до значения  $\alpha = 0,3$ ).

Для экспоненциальных функций в частном случае со следующими значениями параметров  $a = b = 1$ ,  $a = 10$ ,  $b = 20$ ,  $a = 20$ ,  $b = 10$ , значение  $u^* > 0$  в случае, когда  $a > b$ , иначе положительные значения  $u^*$  достигаются лишь при недопустимых значениях параметра  $\alpha$ :  $\alpha > 1$ . Значение  $u^*$  возрастает по параметру  $\alpha$  и убывает по параметру  $\beta$ .

#### 4.2. РАСЧЕТЫ ПО МОДЕЛИ ТИПА ГЕРМЕЙЕРА–ВАТЕЛЯ

Для данной модели также были проведены расчеты для степенных, показательных и экспоненциальных функций. Для степенных функций расчеты проводились при значениях параметров  $a = b_2 = 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Проанализировав данные, можно сказать, что значение  $u^*$  возрастает по параметру  $\alpha$ , выигрыш 1-го игрока  $g_1^*$  убывает, не считая крайнего значения параметра  $\alpha = 1$ , а выигрыш 2-го игрока  $g_2^*$  убывает на всём интервале по  $\alpha$ .

При значениях параметров  $a = 10$ ,  $b_2 = 20$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , шаг по  $\alpha = 0,1$ , значение  $u^*$  сначала возрастает по параметру  $\alpha$  до значения  $\alpha = 0,4$ , а затем убывает. Выигрыши 1-го и 2-го игроков  $g_1^*$ ,  $g_2^*$  убывают по параметру  $\alpha$  (не считая граничного значения параметра  $\alpha = 1$ ). В случае, когда значения параметров равны

$a = 20, b_2 = 10$ , значение  $u^*$  возрастает по параметру  $\alpha$ , а выигрыши 1-го и 2-го игроков  $g_1^*, g_2^*$  сначала убывают, а затем возрастают.

Были рассмотрены показательные функции. В случае значений параметров  $a = b_2 = 1$ , значение  $u^*$  убывает по параметру  $\alpha$ , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков  $g_1^*, g_2^*$ . Если значения параметров  $a = 10, b_2 = 20; 0 \leq \alpha \leq 1$ , шаг по  $\alpha = 0,1$  то  $u^*$  убывает по параметру  $\alpha$ , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков  $g_1^*, g_2^*$ . Когда параметры принимают значения  $a = 20, b_2 = 10$ , то  $u^*$  убывает по параметру  $\alpha$ , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков  $g_1^*, g_2^*$ .

В случае экспоненциальных функций и значений параметров:  $a = b_2 = 1$ ,  $u^*$  возрастает по параметру  $\alpha$ , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков  $g_1^*, g_2^*$ . Если значения параметров принять равными:  $a = 10, b_2 = 20; 0 \leq \alpha \leq 1$ , шаг по  $\alpha = 0,1$ , то  $u^*$  возрастает по параметру  $\alpha$ , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков  $g_1^*, g_2^*$ . При значениях, равных:  $a = 20, b_2 = 10; 0 \leq \alpha \leq 1$ , шаг по  $\alpha = 0,1$ ,  $u^*$  возрастает по параметру  $\alpha$ , как и выигрыши 1-го и 2-го игроков  $g_1^*, g_2^*$ .

## 5. Заключение

В статье проведён анализ решений ряда тестовых примеров для теоретико-игровых моделей стимулирования инноваций (на примере электроэнергетики). Подчеркнем, что основная цель работы состояла в изучении влияния модельных параметров на решения.

В этой связи можно заключить, что рассмотренные классы моделей описывают качественно различные ситуации. Например, частный случай теоретико-игровой модели с симметричными игроками с экспоненциальным видом функций описывает ситуацию, в которой установка интеллектуальных счётчиков оправдана лишь в случае, когда доход от инноваций каждого из органов управления трёх уровней превышает затраты на внедрение инноваций органа соответствующего уровня управления.

Тем самым решение задачи идентификации теоретико-игровых моделей совмещается с параметрическим исследованием чувствительности решения модели.

## 6. Приложение

### Алгоритм метода Зейделя:

1. Задать начальное приближение  $x^{(0)}$  и малое положительное число  $\varepsilon$  (точность), положить  $k = 0$ .
2. Вычислить  $x^{(k+1)}$ , пользуясь значениями, полученными для предыдущих уравнений на текущей итерации.
3. Если  $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ , то процесс завершить и положить  $x^* = x^{(k+1)}$ , иначе  $k = k + 1$  и перейти к п. 2.

**Теорема Гермейера [7].** Пусть функции выигрыша первого и второго игроков  $M_1(x_1, x_2)$ ,  $M_2(x_1, x_2)$  непрерывны на компактах  $X_1, X_2$  (множествах допустимых управлений игроков). Введем следующие функции: стратегию наказания игрока 2  $x_1^P(x_2)$  по правилу  $M_2(x_1^P, x_2) = \min_{x_1 \in X_1} M_2(x_1, x_2)$  и доминантную стратегию игрока 1  $x_1^D(x_2)$ , которая удовлетворяет условию  $M_1(x_1^D, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} M_1(x_1, x_2)$ . Кроме того, введем величины и множества:

$$(56) L_2 = \max_{x_2 \in X_2} M_2(x_1^P(x_2), x_2);$$

$$(57) E_2 = \{x_2 \in X_2 : M_2(x_1^P(x_2), x_2) = L_2\};$$

$$(58) D_2 = \{(x_1, x_2) : X_1 \times X_2 : M_2(x_1, x_2) > L_2\};$$

$$(59) K_1 = \sup_{(x_1, x_2) \in D_2} M_1(x_1, x_2) \leq M_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) + \varepsilon,$$

$$(D_2 \neq \emptyset \Rightarrow K_1 = -\infty);$$

$$(60) K_2 = \min_{x_2 \in E_2} \max_{x_1 \in X_1} M_1(x_1, x_2).$$

Тогда гарантированный выигрыш игрока 1 (ведущего) в игре  $\Gamma_2$  (игре, в которой первый игрок имеет информацию о выборе второго игрока) равен  $w_1 = \max(K_1, K_2)$ , а соответствующая  $\varepsilon$ -оптимальная гарантирующая стратегия имеет вид

$$(61) \tilde{x}_1^\varepsilon(x_2) = \begin{cases} x_1^\varepsilon, & x_2 = x_2^\varepsilon, K_1 > K_2, \\ x_1^D(x_2), & x_2 \in D_2, K_1 \leq K_2, \\ x_1^P(x_2) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вид систем нелинейных алгебраических уравнений, решаемых методом Зейделя:

1. Степенные функции:



$$(62) u_1^{(k+1)} = \frac{a_1 a_1 (u_1^{(k)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)})^{\alpha_1 - 1}}{b_1};$$

$$(63) u_2^{(k+1)} = \frac{a_2 a_2 (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)})^{\alpha_2 - 1}}{b_2};$$

$$(64) u_3^{(k+1)} = \frac{a_3 a_3 (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k+1)} + u_3^{(k)})^{\alpha_3 - 1}}{b_3}.$$

2. Экспоненциальные функции:

$$(65) u_1^{(k+1)} = \frac{\ln\left(\frac{a_1 a_1}{b_1}\right) - \alpha_1 (u_1^{(k)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)})}{\beta};$$

$$(66) u_2^{(k+1)} = \frac{\ln\left(\frac{a_2 a_2}{b_2}\right) - \alpha_2 (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)})}{\beta};$$

$$(67) u_3^{(k+1)} = \frac{\ln\left(\frac{a_3 a_3}{b_3}\right) - \alpha_3 (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k+1)} + u_3^{(k)})}{\beta}.$$

3. Показательные функции:

$$(68) u_1^{(k+1)} = \log_{\beta} \left( -\frac{a_1 \ln a_1}{b_1} \right) + \log_{\beta} (a_1) (u_1^{(k)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)});$$

$$(69) u_2^{(k+1)} = \log_{\beta} \left( -\frac{a_2 \ln a_2}{b_2} \right) + \log_{\beta} (a_2) (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)});$$

$$(70) u_3^{(k+1)} = \log_{\beta} \left( -\frac{a_3 \ln a_3}{b_3} \right) + \log_{\beta} (a_3) (u_1^{(k+1)} + u_2^{(k+1)} + u_3^{(k)}).$$

## Литература

1. АНТОНЕНКО А.В., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Модели мотивационного управления в электроэнергетике и проблемы их идентификации* // Управление большими системами. – 2014. – №47. – С. 92–124.
2. АНТОНЕНКО А.В., ЛОШКАРЕВ И.В., ПАНКОВ В.С. И ДР. *Решение задачи стимулирования инноваций в электроэнергетике. Ч.1. Оптимизационные модели* // Управление большими системами. – 2015. – №58. – С. 144–160.
3. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М., 1999. – 128 с.
4. БУРКОВ В.Н., ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Организационные механизмы управления в электроэнергетике* // Управление развитием крупномасштабных систем. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2012. – С. 261–278.

5. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Введение в теорию управления организационными системами.* – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. – 264 с.
6. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б., ВАТЕЛЬ И.А. *Игры с иерархическим вектором интересов* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – №3. – С. 54–69.
7. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
8. ДОУГЕРТИ К. *Введение в эконометрику.* – М.: ИНФРА-М, 1999. – 416 с.
9. ЛЬЮНГ Л. *Идентификация систем. Теория для пользователя.* – М.: Наука, 1991. – 432 с.
10. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* – М.: МПСИ, 2005. – 584 с
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление устойчивым развитием активных систем.* – Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2016. – 940 с.
12. BAYON L., SUAREZ P., MATIAS J.M. AND ETC. *Influence of forecasting electricity prices in the optimization of complex hydro-thermal systems* // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – No. 232. – P. 262–274.
13. FOLEY A.M., GALLACHOIR B.P., HUR J. ET AL. *A strategic review of electricity systems markets* // Energy. – 2010. – No. 35. – P. 4533–4530.
14. HASANI M., HOSSEINI S.H. *Dynamic assessment of capacity investment in electricity market considering complementary capacity mechanisms* // Energy. – 2011. – No. 36. – P. 277–293.
15. LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives. The Principal-Agent Model.* – Princeton, 2002. – 380 p.
16. MIRZA F.M., BERGLAND O. *The impact of daylight saving time on electricity consumption: Evidence from southern Norway and Sweden* // Energy Policy. – 2011. – No. 39. – P. 5008–5025.
17. SHI L., ZENG M., Li L. *A Novel Electricity Marketing Model Integrating Intelligent Disaster-Recovery System* // Systems Engineering Procedia. – 2012. – No. 4. – P. 133–142.

18. STADLER M., KRAUSE W., SONNENSCHNEIN M. ET AL. *Modelling and evaluation of control schemes for enhancing load shift of electricity demand for cooling devices // Environmental Modelling and Software.* – 2009. – No. 24. – P. 285–295.

**GAME THEORETIC MODELS OF MOTIVATION OF INNOVATIONS AND THEIR IDENTIFICATION (ON THE EXAMPLE OF THE ELECTRICITY POWER INDUSTRY).**

**Andrey Antonenko**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Ph.D., Assistant (andrei80586@yandex.ru)

**Ilya Loshkarev**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Assistant (loshkarev.i@gmail.com)

**Vladimir Pankov**, Rostov-on-Don, M.Sc. (+79888987246)

**Gennady Ugolnitsky**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (ougoln@mail.ru)

*Abstract: The article deals with game theoretic models of coordination of interests in the power industry. We consider the problem of multi-tariff electricity meters integration. Four game-theoretic models catching different aspects of the problem are investigated. The players represent local authorities, electricity consumers and power generating company. We developed software simulation toolbox implementing these models. The software can be used to specify parameters of the games and obtain numerical solutions. The results of software simulation are presented and interpreted. Recommendations and conclusions about the feasibility of new-generation electricity meters integration can be given based on the simulation results.*

**Keywords:** game theoretic models, electric power industry, hierarchical games, software simulation.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.И. Гераськиным.*

*Поступила в редакцию 15.01.2015.*

*Опубликована 31.07.2016.*