

УДК 621.396  
ББК 22.172

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ<sup>1</sup>

Рудько И. М.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

*Для систем обнаружения, работающих в частотной области, реализующих алгоритм проверки двух статистических гипотез и использующих энергетический критерий обнаружения, разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на статистических свойствах усеченных порядковых статистик (УПС). Приведены сравнительные результаты моделирования системы обнаружения, реализующей «классический» (однопороговый) алгоритм и системы обнаружения, реализующей алгоритм на основе УПС (двухпороговый).*

Ключевые слова: дискретные составляющие, спектральная плотность мощности, теория случайных функций, проверка статистических гипотез, порядковая статистика, математическое моделирование.

### 1. Введение

Во многих системах обработки локационной информации, работающих в пассивном режиме, системах спектрального анализа и анализа вибраций решаются задачи обнаружения сигнала на фоне помехи, причем статистические свойства сигнала и помехи одинаковы и единственным их отличием являются энергии (дисперсии).

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 13-08-00744А.

<sup>2</sup> Игорь Михайлович Рудько, кандидат технических наук, с.н.с. (igor-rudko@mail.ru).

При этом, например, в пассивных локационных системах [1] сигнал появляется в случайные моменты времени, его продолжительность также случайна, известными параметрами являются только статистические свойства помехи, и даже энергетические спектры шума и сигнала близки по форме.

Рассмотрим обнаружитель, работающий по принципу сравнения некоторой скалярной функции от наблюдений (решающей статистики) с порогом, выбираемым из условия заданной вероятности ложной тревоги  $\alpha$ . По этому принципу устроены почти все системы обнаружения [1, 5]. Пусть решение о наличии или отсутствии сигнала принимается на основе полученной после предварительной обработки сигнала совокупности независимых гауссовских случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_N$  с нулевым математическим ожиданием. Обозначим через  $\sigma_{\text{ш}}^2$  дисперсию помехи, а через  $\sigma_c^2$  – дисперсию сигнала. При отсутствии сигнала случайные величины  $X_i$  имеют дисперсию  $\sigma_{\text{ш}}^2$  (гипотеза  $H_0: N(0, \sigma_{\text{ш}}^2)$ ), а при наличии сигнала – дисперсию  $\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_c^2$  (гипотеза  $H_1: N(0, \sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_c^2)$ ).

При сделанных предположениях решающая статистика представляет собой монотонное отношение правдоподобия, и тем самым в данном случае существует равномерно наиболее мощный критерий (правило решения) для проверки гипотезы  $H_0 - \sigma_c^2 = 0$  (сигнал отсутствует) против альтернативы  $H_1 - \sigma_c^2 > 0$  (сигнал есть) [7], а оптимальное правило принятия решения формулируется следующим образом: величина

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i^2$$

сравнивается с порогом  $h$ , и если  $Y \leq h$ , то принимается решение, что сигнала нет, а если  $Y > h$ , то принимается решение, что сигнал имеется. При этом порог  $h$  определяется из условия

$$\int_h^{\infty} f_{\text{ш}}(y) dy = \alpha,$$

где  $\alpha$  – заданная вероятность ложной тревоги, а  $f_{\text{ш}}(y)$  – плотность вероятности статистики  $Y$  в случае отсутствия полезного сигнала. При сформулированных выше предположениях

$$f(y) = \frac{1}{2^{N/2} \sigma^N \Gamma(\frac{N}{2})} \left(\frac{y}{\sigma^2}\right)^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2} k_N\left(\frac{y}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0,$$

где  $k_N(y)$  – плотность вероятности  $\chi^2$ -распределения с  $N$  степенями свободы, а нормирующий параметр  $\sigma^2 = \sigma_{ш}^2$  для гипотезы  $H_0$  и  $\sigma^2 = \sigma_c^2 + \sigma_{ш}^2$  для гипотезы  $H_1$ .

В настоящей работе для систем обнаружения, производящих обработку сигналов в частотной области, реализующих алгоритм проверки двух статистических гипотез и использующих энергетический критерий обнаружения, исследуется алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на статистических свойствах усеченных порядковых статистик (УПС) [9, 10].

## 2. Моменты усеченной порядковой статистики

В работах [9, 10] введено понятие усеченные порядковые статистики (УПС) и исследованы их моменты.

Рассмотрим выборку, состоящую из  $m$  независимых случайных величин  $X_i$ :  $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}$ . Пусть случайная величина  $X_i$  описывается функцией плотности распределения

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma^2} k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right), \quad x \geq 0,$$

где  $k_n(\cdot)$  – плотность центрального  $\chi^2$ -распределения с  $n$  степенями свободы;  $\sigma^2$  – дисперсия случайной величины  $X_i$  (нормирующий параметр). Функция распределения случайной величины  $X_i$  описывается формулой

$$(2) \quad K_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \sigma^n \Gamma(n/2)} \int_0^x u^{n/2-1} e^{-u/2\sigma^2} du = \int_0^{x/\sigma^2} k_n(u) du.$$

Сравним статистические свойства случайных величин  $Z$  и  $W$ , сформированных из случайной выборки  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , двумя различными способами:

- $Z = \sum_{i=1}^m X_i$  – имеет центральное  $\chi^2$ -распределение с  $nm$  степенями свободы и математическим ожиданием

$$(3) \quad \mu_Z = nm\sigma^2$$

и дисперсией

$$(4) \quad \sigma_Z^2 = 2nm\sigma^4,$$

и в силу центральной предельной теоремы при достаточно больших значениях  $m$  ее функция плотности распределения нормализуется

$$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2).$$

•  $W = \sum_{i=k}^m X_{(i)}$ , где  $X_{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , – упорядоченные величины

(порядковые статистики) выборки  $X_i$ , такие, что

$$(5) \quad X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(m)}, \text{ а } 1 \leq k \leq m.$$

Параметры  $m$  и  $k$  являются фиксированными параметрами.

Если случайные величины  $X_i$  статистически независимы и одинаково распределены, то случайные величины  $X_{(i)}$  зависимы из-за неравенств между ними. В дальнейшем будем называть статистику  $W$  усеченной порядковой статистикой (УПС), а параметр  $k$  – порогом отсечения.

В работе [4] приведены выражения для вычисления моментов порядковых статистик, используя которые можно вычислить моменты УПС  $W$ .

Для выборки, описываемой формулами (1), т.е. плотностью распределения  $f(x)$ , и (2) – функцией распределения  $K_n(x)$ , формулы для вычисления моментов приобретают следующий вид:

– математическое ожидание  $\mu_j$  величины  $X_{(j)}$  определяется по формуле

$$\mu_j = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \int_0^{\infty} K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j} x f(x) dx,$$

– дисперсия

$$\sigma_j^2 = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \int_0^{\infty} K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j} (x - \mu_j)^2 f(x) dx,$$

– ковариация

$$\sigma_{jk} = E[(X_{(j)} - \mu_j)(X_{(k)} - \mu_k)] = \frac{m!}{(m-k)!(k-j-1)!(j-1)!} \int_0^{\infty} \int_0^y C(x, y) x y f(x) f(y) dx dy,$$

где

$$C(x, y) = K_n \left( \frac{x}{\sigma^2} \right)^{j-1} \left[ K_n \left( \frac{y}{\sigma^2} \right) - K_n \left( \frac{x}{\sigma^2} \right) \right]^{k-j-1} \left[ 1 - K_n \left( \frac{y}{\sigma^2} \right) \right]^{m-k}.$$

Для случайной величины  $W$  математическое ожидание определяется по формуле

$$(6) \quad \mu_w(k) = \sum_{j=k}^m \mu_j, \quad 1 \leq k \leq m,$$

а дисперсия с учетом зависимости случайных величин  $X_{(i)}$  [6]:

$$(7) \quad \sigma_w^2(k) = \sum_{l=k}^m \sigma_l^2 + 2 \sum_{k \leq j < l \leq m} \sigma_{jl}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Аналитические исследования статистических свойств случайной величины  $W$  очень сложны, и поэтому большинство последующих результатов получено на ПК с использованием симульного программирования в среде *MATLAB*.

В работе [10] приведены примеры гистограмм для выборок  $Z$  и  $W$  и их аппроксимации нормальными распределениями  $Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$  и  $W \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$ . Наблюдается достаточно близкое совпадение гистограммы случайной величины  $W$  и нормального закона распределения, что позволяет ниже использовать аппроксимацию  $W \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$ .

На рис. 1 приведены рассчитанные по формулам (6) и (7) зависимости математических ожиданий  $\mu_w(k)$  и с.к.о.  $\sigma_w(k)$  от порога при следующих значениях параметров:  $n = 8$ ,  $m = 12$ ,  $\sigma = 1$ . Для случайной величины  $W$  порог  $k$  дискретный,  $1 \leq k \leq m$ . Из графиков видно, что  $\mu_w(k)$  и  $\sigma_w(k)$  – монотонно убывающие функции, причем, как следует из (3) и (4),  $\mu_w(1) = \mu_z = nm$  и  $\sigma_w(1) = \sigma_z = (2nm)^{1/2}$ .

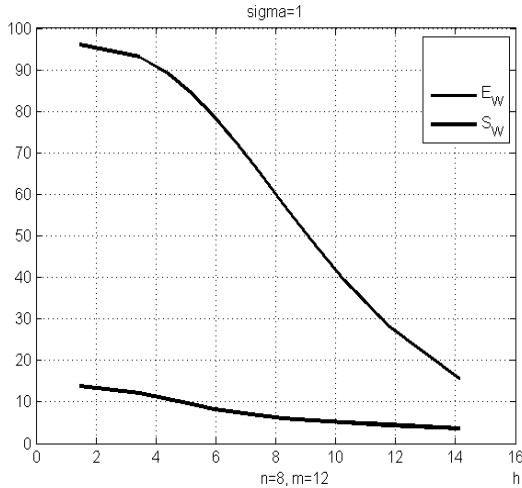


Рис. 1. Зависимости математических ожиданий  $\mu_w(k)$  (на рис. —  $E_w$ ) и с.к.о.  $\sigma_w(k)$  (на рис. —  $S_w$ ) от порога  $k$

### 3. Применение УПС в задачах обнаружения

Пусть на входе системы обнаружения принимается сигнал, описанный во Введении и состоящий из аддитивной смеси полезного сигнала  $\eta(t)$  и помехи  $\zeta(t)$ . Математической моделью сигнала и помехи служит случайный процесс, так что задача обнаружения сигнала на фоне помех решается на основе статистической теории принятия решений. Распределение случайного процесса будем считать гауссовским.

Рассмотрим систему обнаружения, состоящую из последовательно соединенных входного (преддетекторного) фильтра, детектора, интегратора и порогового устройства (устройства принятия решения), т.е. реализующую обнаружение по энергетическому критерию [5, 6]. Пусть  $S(t)$  — случайный процесс на выходе преддетекторного фильтра, имеющий равномерный энергетический спектр в полосе пропускания фильтра. После детектирования и интегрирования на интервале  $[0, T_0]$ , на выхо-

де интегратора имеем  $\int_0^{T_0} S^2(t)dt$ . Представляя непрерывный во времени случайный процесс  $S^2(t)$  дискретными отсчетами с шагом  $i \Delta t$ , где  $T_0 = N \Delta t$ ,  $\Delta t = 1/2 \Delta F$ ,  $\Delta t$  – интервал дискретизации по времени,  $\Delta F$  – полоса пропускания входного фильтра системы обнаружения, получаем

$$(8) \quad X = \sum_{i=1}^N S^2(i\Delta t).$$

Для некоррелированности отсчетов достаточно принять, что  $\Delta t \geq \tau_k$ , где  $\tau_k$  – интервал корреляции процесса  $S(t)$ .

### 3.1. «КЛАССИЧЕСКАЯ» ЗАДАЧА ПРОВЕРКИ ДВУХ ГИПОТЕЗ

Закон распределения энергии принимаемого сигнала, заданный плотностью вероятности  $f(x)$  случайной величины  $X$ , позволяет математически описать вероятностные характеристики обнаружения: вероятность правильного обнаружения и вероятность ложной тревоги:

$$P_{\text{лт}} = \int_h^{\infty} f_{\text{ш}}(x)dx, \quad P_{\text{обн}} = \int_h^{\infty} f_{\text{с+ш}}(x)dx,$$

где  $h$  – порог обнаружения;  $f_{\text{ш}}(x)$  – плотность вероятности случайной величины  $X$  при гипотезе  $H_0$ ;  $f_{\text{с+ш}}(x)$  – плотность вероятности  $X$  при гипотезе  $H_1$ .

Плотность распределения статистики  $X$  для гауссовского процесса  $S(t)$  описывается плотностью распределения (1). Поскольку распределение для гипотезы  $H_0$  отличается от распределения для гипотезы  $H_1$  только величиной дисперсии, то дисперсия статистики  $X$  с плотностью распределения (1) равна

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_0^2(X) = 2N\sigma_{\text{ш}}^4 & \text{в случае гипотезы } H_0, \\ \sigma_1^2(X) = 2N(\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_{\text{с}}^2)^2 & \text{в случае гипотезы } H_1. \end{cases}$$

Здесь  $N$  – число степеней свободы, которое в случае цифровой обработки равно числу слагаемых в сумме (8), а в случае аналоговой обработки определяется как  $N = 2T_0\Delta F$ .

Определим отношение сигнал/помеха в полосе  $\Delta F$  как

$$(10) \rho = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_{ш}^2}.$$

Тогда дисперсия в случае гипотезы  $H_1$  запишется в виде

$$\sigma_1^2(X) = 2N[\sigma_{ш}^2(1+\rho)]^2 = 2N\sigma_{ш}^4(1+\rho)^2.$$

Таким образом, для гипотезы  $H_0$  вероятность ложной тревоги  $P_{лт}$  является функцией от  $\sigma_{ш}^2$  и  $N$ , а для гипотезы  $H_1$  вероятность правильного обнаружения  $P_{обн}$  является функцией от  $\sigma_{ш}^2$ ,  $N$  и  $\rho$ .

Определим вероятность обнаружения как  $P_{обн} = \beta$ , тогда  $P_{необн} = 1 - \beta$ , и в соответствии с (2) и (4)

$$(11) P_{необн} = 1 - \beta = \int_0^h \frac{1}{\sigma_1^2} k_N \left( \frac{x}{\sigma_1^2} \right) dx = \int_0^{h/\sigma_1^2} k_N(u) du = K_N(h/\sigma_1^2).$$

Здесь порог  $h$  определяется из первого уравнения (9) путем задания вероятности ложной тревоги  $P_{лт} = \alpha$ . Тогда аналогично формуле (11)

$$1 - \alpha = \int_0^{h/\sigma_0^2} k_N(u) du = K_N(h/\sigma_0^2).$$

В работе [3] приведены соотношения, связывающие между собой величины  $P_{лт}$ ,  $P_{обн}$  и  $\rho$ . Если

$$P_{лт} = \alpha = 1 - \int_0^{h/\sigma_0^2} k_N(u) du = K_N(h/\sigma_0^2) = 1 - K_N(h_0),$$

то вероятность обнаружения согласно (11) определяется выражением:

$$P_{обн} = \beta = 1 - K_N \left( \frac{h}{\sigma_1^2} \right) = 1 - K_N(h_1) = 1 - K_N \left( \frac{h}{(1+\rho)} \right).$$

При больших  $N$   $\chi^2$ -распределение аппроксимируется гауссовским распределением  $N(\mu, \sigma^2)$  со следующими параметрами:

$$\begin{cases} \mu_0 = N\sigma_{ш}^2, & \sigma_0^2 = 2N\sigma_{ш}^4 & \text{в случае гипотезы } H_0, \\ \mu_1 = N(\sigma_{ш}^2 + \sigma_c^2), & \sigma_1^2 = 2N(\sigma_{ш}^2 + \sigma_c^2)^2 & \text{в случае гипотезы } H_1. \end{cases}$$

Тогда



$$(12) \begin{cases} P_{\text{лт}} = \alpha = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_0}{\sigma_0}\right) = 1 - \Phi(\tilde{h}_0), \\ P_{\text{обн}} = \beta = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma_1}\right) = 1 - \Phi(\tilde{h}_1). \end{cases}$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция нормального распределения.

Приведенный выше «классический» алгоритм базируется на существовании равномерно наиболее мощного критерия для проверки гипотезы  $H_0$  против альтернативы  $H_1$ . При этом используется вся информация, содержащаяся в оцениваемой выборке  $X$ .

### 3.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УПС В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ДВУХ ГИПОТЕЗ

Разобьем интервал наблюдения  $[0, T_0]$  на  $m$  равных частей. Тогда формулу (8) можно представить как

$$X = \sum_{i=1}^m X_i,$$

где  $X_i$  согласно свойству аддитивности  $\chi^2$ -распределения также имеют  $\chi^2$ -распределение с  $n = N/m$  степенями свободы.

В таком представлении  $X$  полностью совпадает с рассмотренной в п. 2 случайной выборкой, состоящей из  $m$  случайных независимых величин  $X_i$ :  $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}$ , причем  $Z$  описывает «классическую» задачу проверки двух гипотез, а  $W$  описывает задачу, рассматриваемую ниже.

Рассмотрим, как изменяется  $P_{\text{лт}}$ ,  $P_{\text{обн}}$  и  $\rho$  в зависимости от порога отсечения  $k$  в УПС  $W$ . Математическое ожидание  $\mu_w(k)$  и дисперсия  $\sigma_w^2(k)$  определяются формулами (6) и (7) и, так же как для случайной величины  $X$ , зависят только от дисперсии  $\sigma^2$ . Таким образом, распределения случайной величины  $W$  для шума ( $H_0$ ) и смеси сигнала с шумом ( $H_1$ ) различаются только дисперсией (мощностью)  $\sigma^2$  наблюдаемого сигнала  $S(t)$ , которая и для статистики  $Z$  и для УПС  $W$  одинакова. Следовательно, и отношения сигнал/помеха  $\rho$  для статистики  $Z$  и для УПС  $W$  также одинаковы.

Обычно для исследования зависимостей  $P_{лт}$ ,  $P_{обн}$  и  $\rho$  используют рабочие характеристики приемника (систему номограмм) [6], что требует достаточно трудоемких расчетов. В работе [9] используется более простой способ сравнения статистик для гипотез  $H_0$  и  $H_1$ , который может быть применен, если статистики описаны нормальными распределениями:  $N_0(\mu_0, \sigma_0^2)$  и  $N_1(\mu_1, \sigma_1^2)$ .

Вводится коэффициент разделимости

$$(13) \gamma = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0 + \sigma_1},$$

который определяется из условия равенства ошибок первого (ложная тревога) и второго (пропуск цели) рода, т.е.  $P_{ош} = P_{лт} = P_{проп}$ . Очевидно, что чем больше  $\gamma$ , тем меньше  $P_{ош}$ , или, что равносильно, при  $P_{лт} = const$  чем больше  $\gamma$  тем больше  $P_{обн}$ .

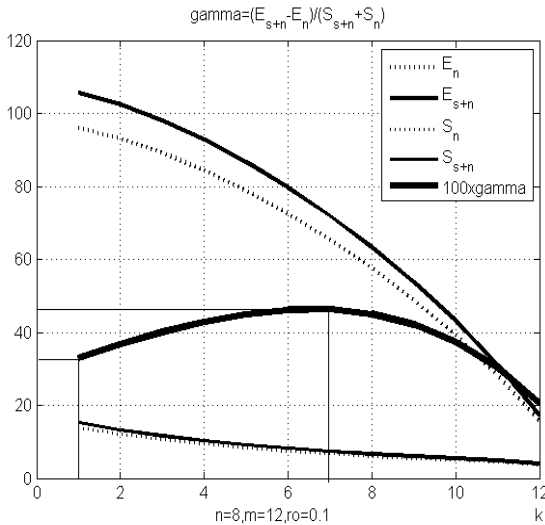


Рис. 2. Значения  $\mu_w(k)$  и  $\sigma_w(k)$  и соответствующие значения  $\gamma(k)$  для гипотез  $H_0$  ( $E_n$  и  $S_n$ ) и  $H_1$  ( $E_{s+n}$  и  $S_{s+n}$ )

На рис. 2 приведены рассчитанные по формулам (6) и (7) значения  $\mu_w(k)$  и  $\sigma_w(k)$  и соответствующие значения  $\gamma$ , рассчитанные по формуле (13) для гипотез  $H_0$  и  $H_1$ , для следующих значений параметров:  $n = 8$ ,  $m = 12$ ,  $\rho = 0,1$ . При  $k = 1$   $\mu_w(1) = \mu_z$ ,  $\sigma_w(1) = \sigma_z$  и, следовательно,  $\gamma_w(1) = \gamma_z$ . Существует также оптимальное значение порога отсечения  $k_{\text{опт}}$ , обеспечивающее максимальную разделяемость (параметр  $\gamma_{\text{max}}$ ) статистик  $W$  для гипотез  $H_0$  и  $H_1$ , что объясняется тем, что числитель в формуле (13) – монотонно убывающая выпуклая функция, а знаменатель – монотонно убывающая вогнутая функция (от параметра  $k$ ). Функция  $\gamma$  достаточно гладкая, а ее максимум приблизительно совпадает с медианой плотности распределения шума.

Таким образом, процесс принятия решения при использовании УПС  $W$  является двухшаговым:

- на первом шаге по случайной выборке  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , строится порядковая статистика  $X_{(i)}$ , по которой для заданного порога отсечения  $k$  (первый порог) формируется УПС  $W$ ;

- на втором шаге процесс принятия решения тот же, что и в «классическом» алгоритме: а именно, для УПС  $W$  по заданной  $P_{\text{лт}}$  выставляется порог обнаружения (второй порог), в случае превышения которого принимается решение о справедливости гипотезы  $H_1$ .

Как уже указывалось выше, известными параметрами являются только статистические свойства помехи, а именно, математическое ожидание  $\mu_0$  и дисперсия  $\sigma_0^2$  (см. (9) или (12)). Поэтому порог  $h$  определяется согласно формуле (9) из следующего уравнения:

$$\alpha = \int_0^h f_{\text{ш}}(x) dx = \frac{1}{2^{n/2} \sigma_0^n \Gamma(n/2)} \int_0^h x^{n/2-1} e^{-x^2/2\sigma_0^2} dx,$$

где  $\alpha$  – заданный уровень квантиля, который, как следует из рис. 2, должен быть близок к медиане шума, чтобы обеспечить максимальное значение коэффициента разделяемости  $\gamma$ .

Рассмотрим вопрос о выборе порога отсечения  $k$  (первый порог). Как показано в [10], выбирать фиксированный порог (равный, например, медиане шума) нельзя. Из определения УПС  $W$  следует, что для того чтобы сформировать УПС  $W$ , необхо-

димому обеспечить условие  $k = const$  для нескольких реализаций. Чтобы выполнить это условие, необходимо иметь несколько выборок  $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$ , где  $1 \leq j \leq r$ , из которых строится матрица  $X_{ij}$  размерностью  $m$  строк на  $r$  столбцов (будем называть  $r$  «глубиной» матрицы памяти). В каждом столбце матрицы  $X_{ij}$  строится порядковая статистика  $X_{(i)j}$ , затем в каждой строке полученной матрицы  $X_{(i)j}$  определяются оценки математических ожиданий (вектор-столбец  $\hat{m}$ )

$$\hat{m}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r X_{(i)j}, \text{ где } 1 \leq i \leq m.$$

Порог отсечения  $k$  (первый порог) определяется из условия (14)  $k = \arg \min_i |h - \hat{m}_i|$ , где  $1 \leq i \leq m$ .

И уже по этому порогу отсечения  $k$  по матрице порядковых статистик  $X_{(i)j}$  вычисляются УПС  $W_j$ , где  $1 \leq j \leq r$ .

Таким образом, для реализации предлагаемого алгоритма обнаружения необходимо предварительное накопление выборок  $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$ , где  $1 \leq j \leq r$  (в отличие от «классического» алгоритма), что приводит к задержке в принятии решения на время  $T = jT_0$ , где  $1 \leq j \leq r$ . Такая задержка во многих задачах не является существенной. Как показывает проведенное математическое моделирование [9] «глубина» матрицы памяти  $r$  может быть достаточно небольшой.

*Еще раз подчеркиваем, что если в «классическом» алгоритме для принятия решения используется только вектор  $X$ , то в предлагаемом алгоритме – матрица  $X_{(i)j}$ , в которой текущий вектор  $X$  является одним из столбцов.*

#### **4. Применение УПС в задачах обнаружения в частотной области**

Описанный выше алгоритм обнаружения на основе УПС предполагает работу с широкополосными сигналами во временной области, как следует из формул (8) и (14). Большой интерес представляет также применение УПС в задачах обнаружения в частотной области. Тем более что в задачах обнаружения про-

цессор, работающий во временной области и построенный на основе многоотводной линии задержки, можно заменить эквивалентным процессором, работающим в частотной области согласно алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ) [8].

В случае, когда спектральная плотность мощности (СПМ) широкополосного сигнала  $G_c(f)$  отличается от СПМ помехи  $G_n(f)$  (белого шума) и имеет локальные максимумы на некоторых неизвестных частотах, представляет интерес обнаружение таких максимумов.

Пусть на входе системы обнаружения принимается сигнал  $S(t)$ , который обрабатывается по алгоритму БПФ со следующими параметрами:  $\Delta t$  – интервал дискретизации по времени,  $T_0 = l \Delta t$  – длина реализации,  $\Delta f = 1 / T_0$  – разрешающая способность БПФ,  $\Delta F = l \Delta f / 2$  – полоса анализа БПФ (полоса пропускания входного фильтра системы обнаружения).

Известно [2], что для белого шума оценки СПМ в узкой полосе  $\Delta f$  имеют центральное  $\chi^2$ -распределение с  $n = 2N_c$  степенями свободы, где  $N_c$  – число сглаженных (накопленных) СПМ. За время  $T_N = N_c T_0$  формируется матрица размерностью  $(N_c \times l / 2)$  в координатах (время –  $j$ , частота –  $i$ ), каждый элемент которой  $g_{ij}$  имеет центральное  $\chi^2$ -распределение с двумя степенями свободы. Для получения сглаженных оценок СПМ производится накопление

$$(15) \hat{G}_i = \sum_{j=1}^{N_c} g_{ij}, \text{ где } 1 \leq i \leq l / 2.$$

Накопив по времени  $r$  оценок (15), получаем матрицу  $G_{ij}$ , статистические свойства которой полностью идентичны свойствам матрицы  $X_{ij}$ , описанной выше в п. 3.2, за исключением того, что матрица  $G_{ij}$  сформирована в координатах (частота –  $i$ , время –  $j$ ).

Как уже указывалось выше, при решении задачи обнаружения во временной области строится матрица  $X_{(ij)}$ , каждый столбец которой задается формулой (5), а число столбцов определяется «глубиной» матрицы памяти  $r$ .

Проводить обработку матрицы  $G_{ij}$  с применением УПС можно как по координате «время», так и по координате «частота»:

- В первом случае УПС строится по координате «частота», а координата «время» играет роль «глубины» матрицы памяти. Если при обработке во временной области отношение сигнал/помеха  $\rho$  в широкой полосе  $\Delta F$  определялось формулой (10), то в частотной области определяется обобщенным отношением сигнал/помеха в широкой полосе  $\Delta F$  [5]

$$(16) \quad \rho' = \frac{\sigma_{c\Sigma}^2}{\sigma_{m\Sigma}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{l/2} \sigma_{ci}^2}{\sum_{i=1}^{l/2} \sigma_{mi}^2},$$

где  $\sigma_c^2$  и  $\sigma_m^2$  – дисперсии, соответственно, сигнала и шума в узкой полосе  $\Delta f_i$ .

Очевидно, что если и сигнал и шум – «белый шум», то  $\rho' = \rho$ , а если сигнал отличается от «белого шума», то в силу теоремы Парсеваля [2], которую можно применить отдельно для сигнала и шума, получаем  $\sigma_{c\Sigma}^2 = \sigma_c^2$ ,  $\sigma_{m\Sigma}^2 = \sigma_m^2$  где  $\sigma_c^2$  и  $\sigma_m^2$  определяются по формуле (10), т.е. опять  $\rho' = \rho$ .

В каждом столбце матрицы  $G_{ij}$  строится порядковая статистика  $G_{(ij)}$ , затем в каждой строке полученной матрицы  $G_{(ij)}$  определяются оценки математических ожиданий (вектор-столбец  $\hat{m}$ )

$$\hat{m}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r G_{(ij)}, \text{ где } 1 \leq i \leq l/2.$$

Порог отсеечения  $k$  (первый порог) определяется из условия:

$$(17) \quad k = \arg \min_i |h - \hat{m}_i|, \text{ где } 1 \leq i \leq l/2.$$

И уже по этому порогу отсеечения  $k$  по матрице порядковых статистик  $G_{(ij)}$  вычисляются УПС  $W_j$ , где  $1 \leq j \leq r$ .

- Во втором случае УПС строится по координате «время», а координата «частота» играет роль «глубины» матрицы памяти.

В каждой строке матрицы  $G_{ij}$  строится порядковая статистика  $G_{i(j)}$ , затем в каждом столбце полученной матрицы  $G_{i(j)}$

определяются оценки математических ожиданий (вектор-строка  $\hat{m}$ )

$$\hat{m}_j = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{l/2} G_{i(j)}, \text{ где } 1 \leq j \leq r.$$

Порог отсечения  $k$  (первый порог) определяется из условия:

$$(18) \quad k = \arg \min_j |h - \hat{m}_j|, \text{ где } 1 \leq j \leq r.$$

И уже по этому порогу отсечения  $k$  по матрице порядковых статистик  $G_{i(j)}$  вычисляются УПС  $W_i$ , где  $1 \leq i \leq l/2$ .

При этом в каждом элементе разрешения БПФ  $\Delta f_i$  отношение сигнал/помеха  $\rho_i$  определяется по формуле

$$\rho_i = \frac{\sigma_{ci}^2}{\sigma_{ши}^2}.$$

Таким образом, в каждом элементе разрешения БПФ  $\Delta f_i$  можно проводить процедуру обнаружения независимо и обнаруживать локальные максимумы СПМ сигнала.

## 5. Результаты статистического моделирования

Как уже указывалось выше, аналитические исследования статистических свойств случайной величины  $W$  очень сложны, и даже с использованием символьного программирования в среде *MATLAB* на ПК не удастся рассчитать моменты статистики  $W$  для  $m > 16$ . В то же время реализация рассматриваемого алгоритма обнаружения на основе УПС достаточно проста и мало зависит от значений параметров  $m$  и  $n$ . Статистическое моделирование алгоритма обнаружения на основе УПС позволяет получить результаты для значительно больших значений параметров  $m$  и  $n$  и сравнить их с имеющимися аналитическими результатами.

### 5.1. МОДЕЛЬ «ЦВЕТНОГО» ШУМА

В качестве модели «цветного» шума используем процесс авторегрессии второго порядка над нормальным белым шумом с единичной дисперсией  $x_t \sim N(0, 1)$  [2]:

$$z_t = \alpha_1 z_{t-1} + \alpha_2 z_{t-2} + x_t.$$

Легко показать, что дисперсия  $\sigma_z^2$  этого процесса определяется по формуле:

$$\sigma_z^2 = \frac{(1 - \alpha_1)\sigma_x^2}{1 - \alpha_2(1 + \alpha_2 - \alpha_2^2) - \alpha_1^2(1 + \alpha_2)},$$

а плотность распределения  $f(z)$  определяется следующим образом:  $z_t(1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}) = x_t$ , где  $z$  — оператор  $Z$ -преобразования [2], тогда

$$z_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{t-k}$$

и в силу центральной предельной теоремы  $z_t \sim N(0, \sigma_z^2)$ .

Для выполнения условий стационарности  $z_t$  нужно, чтобы параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  лежали в области [2]

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1,$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 < -1,$$

$$-1 < \alpha_2 < 1.$$

Для приведения  $z_t$  к единичной дисперсии необходима нормировка  $\dot{z}_t = z_t / \sigma_z \sim N(0, 1)$ .

На языке MATLAB была создана программа, генерирующая процесс авторегрессии второго порядка  $\dot{z}_t$ , СПМ которого для различных значений  $\tau$  приведены на рис. 3, где  $\tau = \sqrt{-\alpha_2}$ ,  $\tau = 0$  — белый шум.



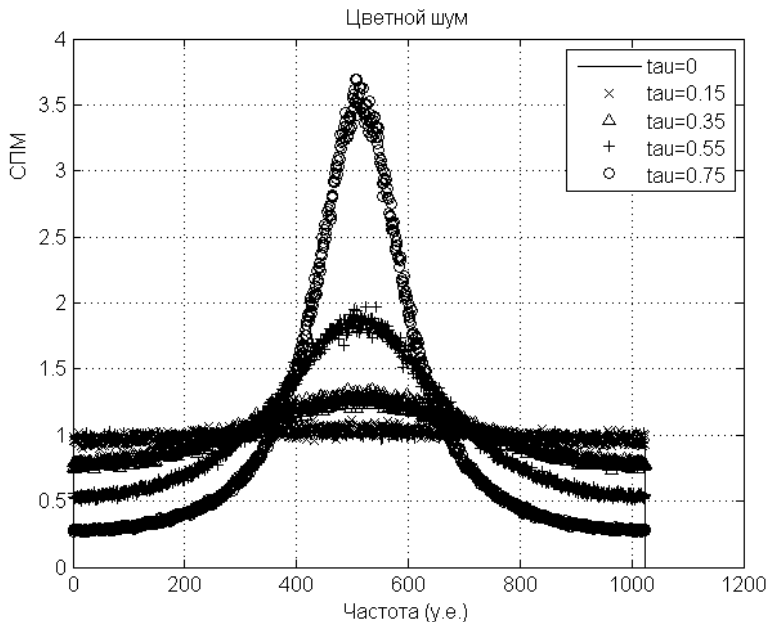


Рис. 3. СПМ процесса авторегрессии второго порядка  $\dot{z}_t$

### 5.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ

В качестве модели сигнала на входе системы обнаружения  $S(t) = \eta(t) + \zeta(t)$  используются генераторы случайных чисел, распределенных по нормальному закону с единичной дисперсией  $x_t \sim N(0, 1)$ .

Алгоритм моделирования следующий:

1. Формируются три выборки (вектора), состоящие из  $l$  случайных величин  $x_t$ :  $\{x_{t1}, \dots, x_{ti}, \dots, x_{tl}\} - X_{ш}, X_0$  и  $X_c$ .
2. Из выборки  $X_c$  согласно п. 5.2 формируется выборка «цветного» шума  $Z$  с заданным  $\tau$ .
3. Формируется выборка  $X_{c+ш} = X_0 + \rho Z$ , где  $\rho$  — отношение сигнал/помеха в широкой полосе  $\Delta F$ .
4. По алгоритму БПФ вычисляются оценки СПМ выборок  $X_{c+ш}$  и  $X_{ш}$  длиной  $l/2$ .

5. Пп. 1–4 повторяются  $N_c$  раз для получения по формуле (15) выборочных сглаженных спектральных оценок [2] СПМ  $\hat{G}_i$ , где  $1 \leq i \leq l/2$ , для случаев шума и сигнала + шума.

6. П. 5 повторяется  $m$  раз – формируются матрицы  $G_{ij}$  для случаев шума и сигнала + шума.

7. По матрице  $G_{ij}$  для координат «время» или «частота» по приведенному выше алгоритму строятся оценки УПС  $W$  и соответствующие им оценки  $Z$  для «классического» алгоритма (порог отсечения  $k = 1$ )

8. Пп. 1–7 повторяются  $M$  раз с целью получения массивов результатов для последующей статистической обработки.

### Параметры модели:

$l = 256$  – длина реализации;

$l/2 = 128$  – число частотных отсчетов БПФ;

$N_c = 8$  – число накопленных СПМ;

$h = 15,34$  – медиана  $\chi^2$ -распределения с  $n = 2N_c = 16$  степенями свободы (первый порог);

$P_{лт} = 0,01$  – вероятность ложной тревоги при определении порога для «однопорогового» алгоритма и второго порога для «двухпорогового» алгоритма.

$M = 8192$  – длина выборки для статистической обработки.

На рис. 4 приведены оценки СПМ:

- выборочный белый шум  $X_{ш}$  – линия 1;
- выборочный «цветной» шум  $Z$  с заданным  $\tau = 0,58$  – линия 3;
- выборочный для белого шума  $X_{с+ш} = X_0 + \rho X_c$ , где  $\rho = 0,1$  – линия 6;
- выборочный УПС для белого шума  $X_{с+ш} = X_0 + \rho X_c$ , где  $\rho = 0,1$  – линия 2;
- выборочный для цветного шума  $X_{с+ш} = X_0 + \rho Z$ , где  $\rho = 0,1$  – линия 4;
- выборочный УПС для цветного шума  $X_{с+ш} = X_0 + \rho Z$ , где  $\rho = 0,1$  – линия 5.

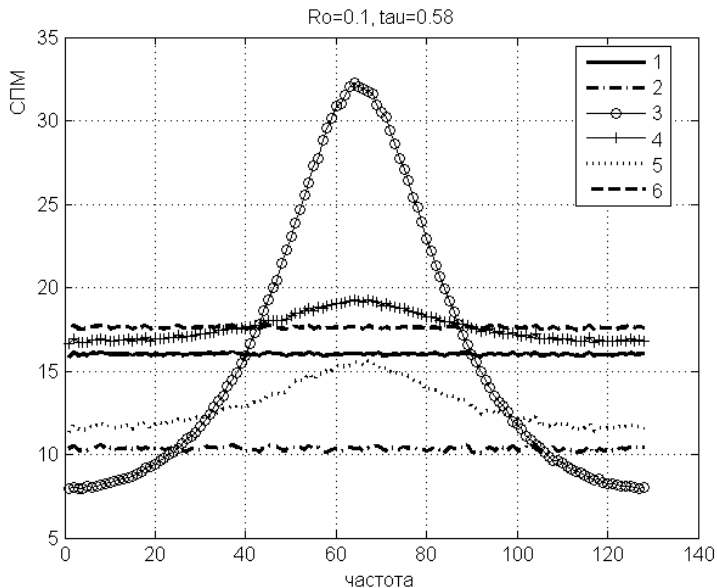


Рис. 4. Оценки СПМ моделируемых процессов

### 5.3. ПОСТРОЕНИЕ УПС ПО КООРДИНАТЕ «ЧАСТОТА»

В работе [9] рассматривалась работа «двухпорогового» алгоритма обнаружения на основе УПС во временной области и матрица  $X_{(ij)}$  для вычисления УПС строилась в координатах (время, время), моделировалось обнаружение сигнала (белого шума) на фоне помехи (белого шума).

В настоящей работе моделируется обнаружение сигнала (цветного шума) на фоне помехи (белого шума) в частотной области. Как указывалось выше, матрица  $G_{ij}$  формируется в координатах (время –  $j$ , частота –  $i$ ) из оценок СПМ (15).

Порог отсекается определяется по формуле (17).

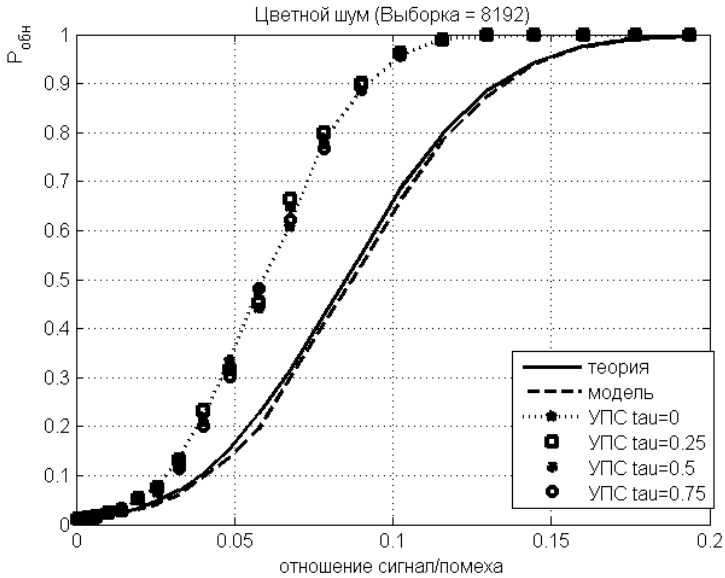


Рис. 5. Сравнение  $P_{\text{обн}}$  для «однорогового» и «двухорогового» алгоритмов с различными  $\tau$

На рис. 5 приведены вероятности обнаружения  $P_{\text{обн}}$  для «однорогового» и «двухорогового» алгоритмов при обнаружении сигнала, описываемого процессом авторегрессии второго порядка с различными  $\tau$  (см. п. 5.2). При  $\tau = 0$  сигнал – белый шум. Для «однорогового» алгоритма на рис. 5 приведены графики теоретический (теория) и рассчитанный по модели (модель).

Из приведенных графиков следует, что  $P_{\text{обн}}$  практически не зависит от значений  $\tau$ , а зависит только от обобщенного отношения сигнал/помеха в широкой полосе  $\Delta F$  (16), что и следовало ожидать в силу теоремы Парсевала [2]

Результаты моделирования обнаружения в частотной области совпадают с результатами моделирования во временной области, приведенными в работе [9].

#### 5.4. ПОСТРОЕНИЕ УПС ПО КООРДИНАТЕ «ВРЕМЯ»

В этом случае в каждом элементе разрешения БПФ  $\Delta f_i$  можно проводить процедуру обнаружения независимо и обнаруживать локальные максимумы СПМ сигнала.

Параметры модели те же, что в п. 5.3.

Порог отсеечения определяется по формуле (18).

Моделируется обнаружение сигнала (цветного шума) на фоне помехи (белого шума) для различных отношений сигнал/помеха в широкой полосе  $\Delta F$  при условии, что максимум узкополосной компоненты сигнала (дискретная составляющая – ДС) превышает в 2 раза (на 3 дБ) его непрерывную часть ( $\tau = 0,58$ ). Превышение на 3 дБ выбрано потому, что в инженерных приложениях [5] часто считают такое превышение минимально возможным для обнаружения реальных узкополосных сигналов.

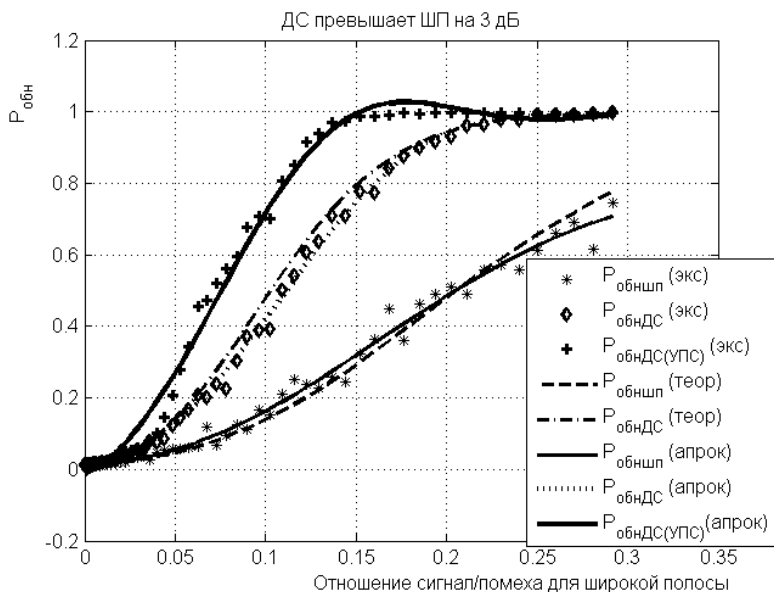


Рис. 6. Сравнение  $P_{обн}$  для «однопорогового» и «двухпорогового» алгоритмов при обнаружении локального максимума цветного шума (ДС)

На рис. 6 приведены результаты моделирования вероятности обнаружения  $P_{\text{обн}}$  для «однопорогового» и «двухпорогового» алгоритмов в элементе разрешения БПФ  $\Delta f_i$ , на котором находится максимум цветного шума ( $i = 64$ ).

Для «однопорогового» алгоритма приведены графики (теория и эксперимент) вероятности обнаружения  $P_{\text{обн}}$  для двух случаев (с одинаковыми отношениями сигнал/помеха в широкой полосе  $\Delta F$ ):

- обнаружения белого шума на фоне белого шума –  $P_{\text{обнШП(теор)}}$  и  $P_{\text{обнШП(экс)}}$ ;
- обнаружения цветного шума на фоне белого шума –  $P_{\text{обнДС(теор)}}$  и  $P_{\text{обнДС(экс)}}$ .

Приведены также графики полиномиальной аппроксимации экспериментальных данных –  $P_{\text{обнШП(апрок)}}$  и  $P_{\text{обнДС(апрок)}}$

Для «двухпорогового» алгоритма приведены график экспериментальных данных  $P_{\text{обнДС(УПС)(экс)}}$  и график его полиномиальной аппроксимации  $P_{\text{обнДС(УПС)(апрок)}}$ .

Из графиков рис.6 следует, что алгоритм с применением УПС обеспечивает существенный выигрыш в вероятности обнаружения  $P_{\text{обн}}$  по сравнению с классическим алгоритмом.

Из сравнения графиков 4 и 5 на рис. 4 видно, что СПМ УПС имеет более выраженный максимум, чем у исходной СПМ.

## 6. Заключение

Разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на свойствах усеченных порядковых статистик, который позволяет обеспечить большую вероятность обнаружения  $P_{\text{обн}}$  при заданной вероятности ложной тревоги  $P_{\text{лт}}$  по сравнению с «классическим» алгоритмом проверки двух гипотез. Выигрыш достигается за счет введения дополнительного порога, отсекающего малые значения обрабатываемого сигнала. Этот порог в случае временной обработки определяется с использованием информации, содержащейся в предыдущих реализациях сигнала, которая в «классическом» алгоритме не используется, а в случае обработки в частотной области с использованием ин-

формации, содержащейся во всем частотном диапазоне спектрального анализа.

Приводятся результаты статистического моделирования.

### **Литература**

1. БУРДИК В.С. *Анализ гидроакустических систем*. – Л.: Судостроение, 1988. – 392 с
2. ДЖЕНКИНС Г., ВАТТС Д. *Спектральный анализ и его приложения*. – Т. 1. – М.: Мир, 1971. – 316 с.
3. ДОБРОВИДОВ А.В., КУЛИДА Е.Л., РУДЬКО И.М. *Выбор траектории движения объекта в конфликтной среде* // Системы управления. – 2011. – №3. – С. 64–75.
4. ДЭЙВИД Г. *Порядковые статистики*. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
5. ЗАРАЙСКИЙ В.А., ТЮРИН А.М. *Теория гидролокации*. – Л.: ВМА, 1975. – 604 с.
6. ЛЕВИН Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники*. – Т. 1. – М.: Советское радио, 1969. – 752 с.
7. ЛЕМАН Э. *Проверка статистических гипотез*. – М.: Наука, 1964. – 408 с.
8. МОНЗИНГО Р.А., МИЛЛЕР Т.У. *Адаптивные антенные решетки*. – М.: Радио и связь, 1986. – 446 с.
9. РУДЬКО И.М. *Применение порядковых статистик в задачах обнаружения* // Управление большими системами. – 2012. – №37. – С. 63–83.
10. РУДЬКО И.М. *Статистические свойства суммы членов усеченного вариационного ряда* // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №1(14). – С. 124–130.

### **APPLYING ORDER STATISTIC TO DETECTION PROBLEMS IN THE FREQUENCY DOMAIN**

**Igor Rudko**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (igor-rudko@mail.ru).

*Abstract: We study detection systems operating in the frequency domain and implementing two statistical hypothesis testing with energy criterion. We propose an algorithm of signal detection in the presence of interference based on the statistical properties of the truncated order statistics (TOS). The performance of the algorithm is measured by simulation where the signal is modeled as colored noise and the interference modeled as white noise. The detection system that implements the algorithm-based two-threshold TOS criterion outperforms the “classic” one-threshold algorithm.*

**Keywords:** discrete components, spectral power density, the theory of random functions, statistical hypothesis testing, order statistic, mathematical modeling.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.А. Галяевым.*

*Поступила в редакцию 22.08.2015.  
Опубликована 31.07.2016.*