

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ КОМПАНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

Акинфиев В. К.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассмотрена задача выбора инвестиционных решений компаний в конкурентной среде и в условиях неопределенности спроса на продукцию. Предложена математическая модель, описывающая инвестиционное поведение компаний на рынке типа «дуополия». Модель учитывает взаимосвязь между выбором компаниями инвестиционных решений и динамикой рыночной цены на продукцию. Решение задачи сведено к анализу биматричной игры, в которой матрица выигрышей формируется в результате численного моделирования. Приводится иллюстративный пример использования предложенного подхода.

Ключевые слова: выбор инвестиционных решений, дуополия, математическая модель, биматричная игра.

1. Введение

В [1, 2] предложен подход к моделированию и рассмотрена задача выбора инвестиционных стратегий компаний в условиях неопределенности, связанной с высокой волатильностью спроса на рынке. Решение было предложено для случая компании-монополиста или нескольких компаний, которые действуют согласованно (придерживаются одной инвестиционной стратегии).

В данной работе рассматривается обобщение этой задачи для рынка типа «олигополия», где две и более компании конкурируют между собой за долю рынка и, соответственно, долю

¹ Валерий Константинович Акинфиев, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник (akinf@ipu.ru).

прибыли (денежного потока, объема оборота на товарном рынке). Компании могут выбирать различные инвестиционные стратегии, зная, что будущая динамика спроса на рынке является неопределенной. Выбор той или иной инвестиционной стратегии, в зависимости от реализации сценария динамики спроса, может привести для каждой конкретной компании, как к выигрышу, так и к проигрышу. Причем, по-прежнему, при постановке задачи будет учитываться важный фактор взаимовлияния инвестиционных стратегий компаний и динамики цен на товарную продукцию.

Предполагаем, что выбор инвестиционной стратегии задает суммарный объем средств, направляемых компанией на инвестиции и распределение этих средств между инвестициями в расширение производства и сокращение производственных издержек.

Заметим, что большое значение в конкурентной борьбе имеет уровень удельных затрат на выпуск продукции (ниже среднеотраслевой или выше среднеотраслевой). Поэтому инвестиционная стратегия, направленная на сокращение производственных издержек, часто бывает более предпочтительной, чем стратегия расширения производства.

Современная теория инвестиций в условиях неопределенности сложилась, в основном, в последние двадцать – двадцать пять лет и связана с разработкой постановок задач и методов анализа решений, использующих идеологию оценки стоимости реальных опционов различного типа в непрерывном времени. Основы методологии этого подхода изложены в ряде публикаций [10, 15, 16], которые оказали большое влияние на развитие этого направления исследований. В настоящее время оно характеризуется широким арсеналом методов и большим разнообразием постановок задач. Их можно разделить на две большие группы.

Первая рассматривает задачи выбора инвестиционных решений для отдельной компании [9–11, 14, 16]. Так, например, в [9] рассмотрена задача выбора оптимального времени инвестирования в условиях неопределенности прогнозируемой динамики денежного потока инвестиционного проекта в децентрализованной компании. Использование методов оценки реальных

опционов позволяет учесть условия асимметричности информации, которой обладают владельцы и агенты относительно параметров проекта.

Во второй группе фокус переносится на анализ равновесия на товарном рынке, на котором присутствуют несколько компаний-производителей, и задача выбора инвестиционных решений компаний рассматривается в игровой постановке. Большой поток работ по этой тематике основан на сочетании методологии и методов оценки «реальных опционов» и игрового подхода [12, 15, 17].

Наиболее популярные постановки задач рассматривают рынок типа «дуополия» и ситуацию выбора игроками либо наилучшего времени инвестирования (оценка опциона на отсрочку начала реализации инвестиционного проекта), либо наилучшего объема инвестирования (оценка опциона на расширение производства), либо на их сочетание. Задача может рассматриваться как в симметричном, так и в не симметричном случае (одна из компаний является лидером в отрасли, а другая – последователем).

В [12] исследуется, например, ситуация, когда каждая компания обладает последовательностью инвестиционных возможностей, которые описываются с помощью вечных американских опционов проектов расширения мощностей. Каждая фирма максимизирует свою стоимость с учетом стратегии конкурентов. Рассмотрен случай симметрии, который предполагает, что все фирмы равны и обладают одинаковой технологией производства продукта. В качестве эндогенного параметра рассматривается спрос на рынке, который является неопределенным и моделируется в непрерывном времени стохастического процесса типа GBM. Стоимость исполнения опциона зависит от цены продукции на рынке, которая определяется стохастическим спросом и суммарным расширением мощностей всех компаний. В [17] рассматривается аналогичная задача выбора времени и объема инвестирования в условиях неопределенности.

Для большинства вариантов этих задач качественные или количественные результаты решения получены при следующих достаточно сильных допущениях:

1. Предполагается, что инвестиционные вложения происходят мгновенно и сразу после этого возникает бесконечный во времени денежный поток, который и является основным фактором неопределенности в оценке эффективности (оптимальности) инвестиционной стратегии компаний. В ряде работ неопределенность денежного потока определяется стохастическим спросом и предложением продукции на рынке.

2. Предполагается также, что денежный поток или спрос на рынке ведет себя как случайный процесс определенного вида. Подавляющее число работ используют для моделирования этой неопределенности геометрическое броуновское движение (GBM), который вначале был использован в модели оценки опционов Блэка – Шоулза – Мертона на финансовых рынках и состоит в следующем:

случайный процесс S_t является геометрическим броуновским движением (GBM), если он удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$(1) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

В данной модели параметр μ – неслучайный тренд, σ – степень волатильности и W_t – стандартный винеровский процесс (броуновское движение). Заметим, что в данном подходе предполагается, что в стохастическом уравнении параметры μ и σ являются постоянными величинами.

Данный подход, как считают его сторонники, хорошо описывает волатильность цены активов на финансовых рынках и с большой долей осторожности его можно применять к оценке стоимости реальных активов, в частности, к оценке инвестиционных проектов и инвестиционных стратегий. Сейчас существует определенная степень пессимизма по отношению практической ценности данного подхода [5]. Кроме того, указанные модели дают только первое приближение к сложным процессам, происходящим на современных финансовых и особенно товарных рынках.

Ряд экономистов считает, что броуновское движение W в этой модели должно быть заменено либо на другой гауссовский процесс, скажем, процесс Орнштейна – Уленбека, либо на негауссовский процесс с независимыми и однородными приращениями (коротко – процесс Леви), имеющий более «тяжелые» хво-

сты приращений, либо на гауссовский процесс дробного броуновского движения (ДБД), которому присуща «долгая память». При этом возникают большие трудности, связанные, в частности, с проблемой построения стохастического интеграла по процессу Леви или процессу ДБД, которые даже не являются семимартингалом.

Другое усложнение модели связано с введением дополнительно к диффузионному процессу «дискретной» скачкообразной компоненты, которая в модели рынков отражает появляющиеся и влияющие на цены новости макроэкономического и политического характера. В ряде работ были исследованы эмпирические свойства доходностей, которые не соответствуют модели GBM, предлагая рассматривать более широкий класс Леви-устойчивых вероятностных распределений. Дальнейшее развитие финансовой теории привело к тому, что волатильность сама стала рассматриваться не как параметр (пусть даже изменяющийся во времени), а как случайный процесс. Хороший обзор современных достижений и нерешенных проблем в области стохастическая финансовая математики содержится в [8].

Следует заметить, что набор специальных уравнений, для которых можно явно построить решение, полученное для стохастических процессов типа GBM, очень невелик. Исследования пока ограничиваются «индивидуальными» теоремами о состоятельности или асимптотической нормальности предлагаемых оценок, не ставя большей частью вопрос об асимптотике минимаксного риска ввиду сложности этой задачи. По этим причинам более сложные модели, чем GBM в задачах, использующих методику оценки реальных опционов, не используются.

Следует еще раз подчеркнуть, что в уравнении (1) параметр μ (неслучайный тренд) считается константой и не зависит от времени. Это допущение значительно снижает реалистичность моделирования динамики спроса на рынке, скорость изменения которого также может существенно изменяться во времени, если мы рассматриваем большие промежутки времени (несколько лет), что является характерной особенностью инвестиционных проектов в реальных секторах экономики. И, конечно, функция $\mu(t)$ также заранее неизвестна.

Для крупных инвестиционных проектов горизонт прогнозирования составляет, как правило, 10–15 лет. В течение этого периода могут происходить «шоки» спроса, когда $\partial\mu(t)/\partial t$ может сильно изменяться, вплоть до смены знака. Так, например, «шоки спроса» на рынках произошли в 2008–2009 годах (мировой экономический кризис) и в 2014–2015 годах (падение цен на нефть и санкции). Например, спрос на металл на российском рынке упал в 2009 году на 20–25% и стал частично восстанавливаться лишь к 2010–2011 годам. В начале 2015 году внутренний спрос на металл уже снизился на 10–15% и продолжит снижаться, в том числе благодаря существенному снижению объемов производства и продаж в отрасли автомобилестроения (–30%) и снижению объемов строительной отрасли. На примере экономики США экономические кризисы различного масштаба и, соответственно, «шоки спроса» на рынках происходят достаточно регулярно.

Еще одно важное замечание состоит в том, что для целей оценки инвестиционных решений компаний более важным в формуле (1) является параметр $\mu(t)$, чем второй стохастический член. Влияние второго члена в формуле (1) снижается, если учесть, что для оценки эффективности инвестиционных решений используются интегральные характеристики, усредненные по времени, такие, например, как показатель NPV.

Исходя из этого, в данной работе для учета неопределенности спроса на рынке будет использоваться методология стохастического сценарного моделирования, которая состоит в рассмотрении конечного набора характерных сценариев изменения $\mu(t)$ и задании для каждого из них вероятностных характеристик их осуществления.

Что касается первого допущения, то хорошо известно, что процесс инвестирования компании является непрерывным процессом. Продолжительность инвестиционной фазы инвестиционного проекта может составлять существенный промежуток времени и эффект от инвестиций (денежный поток) появляется с некоторым запаздыванием (лагом) по отношению к началу инвестирования. Кроме того, денежный поток может существенно изменяться в разные периоды времени, в том числе и под воздействием случайного спроса, результатов выбора инвестици-

онных стратегий компаний и цен на продукцию, складывающихся на рынке.

Как было показано, существует существенный разрыв в степени реалистичности моделирования инвестиционных процессов между теоретическими работами, основанными на методологии реальных опционов, и традиционными методами моделирования инвестиционных проектов, основанных на методологии DCF. Последние модели с большей степенью реалистичности позволяют моделировать денежные потоки на разных этапах осуществления инвестиционных проектов, что объясняет их широкое использование в практической оценке и выборе инвестиционных решений компаний.

Тем не менее, эти методы плохо работают в условиях неопределенности исходных данных модели, включая волатильность цен и спроса, связанные, в том числе, с действиями на рынке компаний-конкурентов. Это является одним из основных аргументов против них со стороны сторонников подхода, связанного с применением методологии «реальных опционов» [10].

В данной работе предпринята попытка ослабить недостатки обоих подходов: используя методы сценарного стохастического моделирования рыночной неопределенности и построения агрегированных моделей оценки эффективности инвестиционных стратегий компаний, основанных на подходе DCF и включающих механизмы принятия инвестиционных решений на основе изменяющейся информации о рынке, которые более адекватно описывают инвестиционные процессы в бизнесе.

2. Модель

Рассмотрим рынок, на котором присутствует N компаний. Каждая компания может принимать инвестиционные решения в соответствии с некоторой выбранной стратегией и исходя из информации, поступающей с рынка. Инвестиционные решения компаний направлены на усиление ее конкурентных преимуществ на рынке, которые выражаются в увеличении ее доли прибыли, объема или рентабельности продаж. Компании стремятся увеличивать свой свободный денежный поток и, в конечном счете, интегральный показатель успешности своей инвести-

ционной стратегии – NPV (суммарный дисконтированный свободный денежный поток компании за прогнозный период).

Как было показано ранее, на выбор инвестиционных решений существенное влияние оказывает прогноз величины спроса и цен на товарную продукцию. Мы будем рассматривать ситуацию высокой волатильности спроса на товарных рынках, в том числе ситуацию, когда на прогнозном периоде рынки могут несколько раз менять тренд. Данная ситуация является наиболее сложной для оценки и анализа эффективности инвестиционных решений. Сложность заключается в том, что компании не в состоянии прогнозировать эти изменения на весь прогнозный период и ограничиваются лишь оценкой тренда, наблюдаемого в период, в котором принимаются инвестиционные решения (формируется инвестиционный бюджет компании).

Возникает следующий важный вопрос – какова должна быть инвестиционная стратегия компаний в условиях неопределенности спроса и неопределенности действия компаний-конкурентов? Понятие «инвестиционная стратегия компании» будет формализовано далее. Как должна меняться инвестиционная стратегия в условиях нестабильности рынков, для того чтобы обеспечить максимальный уровень эффективности инвестиций и, соответственно, максимальный рост стоимости компании.

Ситуация еще более усложняется, если принять во внимание взаимосвязь между инвестиционной активностью компаний, которая может дополнительно провоцировать нестабильность рынков, и динамикой рынков, которая определяет во многом выбор стратегии. Излишняя инвестиционная активность компаний, как правило, приводит к появлению «лишних» производственных мощностей и, в периоды снижения спроса, к значительному снижению цены на продукцию [1, 2].

Далее мы рассматриваем ситуацию, когда кампании в начале каждого периода (года) формируют свои инвестиционные бюджеты (объем финансовых ресурсов, выделяемых на реализацию инвестиционных проектов различных типов) на основе некоторых рациональных правил, использующих результаты анализа тенденций динамики спроса и цены на продукцию.

В данной работе термин «выбор инвестиционной стратегии» включает:

– выбор инвестиционной активности компании в различные периоды времени, которая определяет объем средств компании, направляемых на реализацию инвестиционных проектов;

– выбор направлений инвестирования, которые определяют соотношение и объем финансовых средств компании, направляемых на реализацию инвестиционных проектов двух типов:

▪ проектов развитие производственных мощностей и расширения производства и, соответственно, увеличение предложения продукции на рынке;

▪ проектов, направленных на сокращение производственных издержек, которые не увеличивают предложение продукции на рынке, а влияют только на рентабельность производства и свободный денежный поток компаний.

Рассмотрим временной промежуток (прогнозный период) равный T периодам, $t = 1, \dots, T$.

Пусть $NCF_i(t)$ – свободный денежный поток компании i ($i = 1, \dots, N$) в период t , равный чистой прибыли, полученной компанией за этот период, за вычетом средств, направленных на инвестиции:

$$(1) \quad NCF_i(t) = (P(t) - C_i(t)) \cdot B_i(t) \cdot (1 - p) - I_i(t),$$

где $P(t)$ – рыночная цена на продукцию в период t . В каждый период времени цена формируется на основе соотношения спроса на продукцию $D(t)$ и суммарного предложения со стороны компаний-производителей $S(t)$. $S(t)$ определяется в каждый период t : $S(t) = \sum_{i=1}^N S_i(t)$, где $S_i(t)$ – уровень производственных мощностей компании i .

Тогда

$$P(t) = P(0) \cdot \left(1 + \gamma \cdot \frac{D(t) - S(t)}{D(t)} \right),$$

где параметр γ – эластичность цены по величине превышения спроса над предложением. Здесь $P(0)$ – цена на рынке на начало прогнозного периода (начальные условия). Если $D(t) - S(t) \geq 0$, то возникает дефицит предложения на рынке и

цена продукции растет, в противном случае – избыток предложения и, соответственно, цена падает.

Следует отметить, что, в свою очередь, $D(t)$ также может зависеть от динамики цены $P(t)$. Увеличение $P(t)$ может приводить к снижению $D(t)$, что учитывается введением отрицательной обратной связи в модель. Степень влияния цены на спрос задается через параметр эластичности спроса по отношению изменения рыночной цены на продукцию. Далее рассматривается рынок с неэластичным спросом, к которым, в частности, относятся металлургическая отрасль.

Пусть $B(t)$ – общий объем продаж на рынке в период t , который в модели рассчитывается по следующей формуле: $B(t) = \min\{D(t), S(t)\}$. Предположим, что загрузка мощностей всех компаний одинакова, тогда объем продаж компании i вычисляется следующим образом:

$$B_i(t) = B(t) \cdot \frac{S_i(t)}{S(t)}.$$

$C_i(t)$ – себестоимость продукции компании i в период t ; p – ставка налога на прибыль.

Заметим, что все величины, входящие в формулу расчета $NCF_i(t)$, зависят от случайного спроса $D(t)$ и выбора инвестиционных стратегий компаний, которые определяют уровень их производственных мощностей $S_i(t)$ и себестоимости продукции $C_i(t)$.

Далее рассмотрим модель, которая позволяет оценивать эффективность инвестиционных стратегий компаний с учетом рыночной неопределенности спроса. Общая структура разработанной модели применительно к рынку типа «дуополия» приведена на рис. 1. Динамика спроса на продукцию (потребление) – $D(t)$ – это экзогенная переменная модели, график изменения которой задается заранее для различных внешних по отношению к модели макроэкономических сценариев.

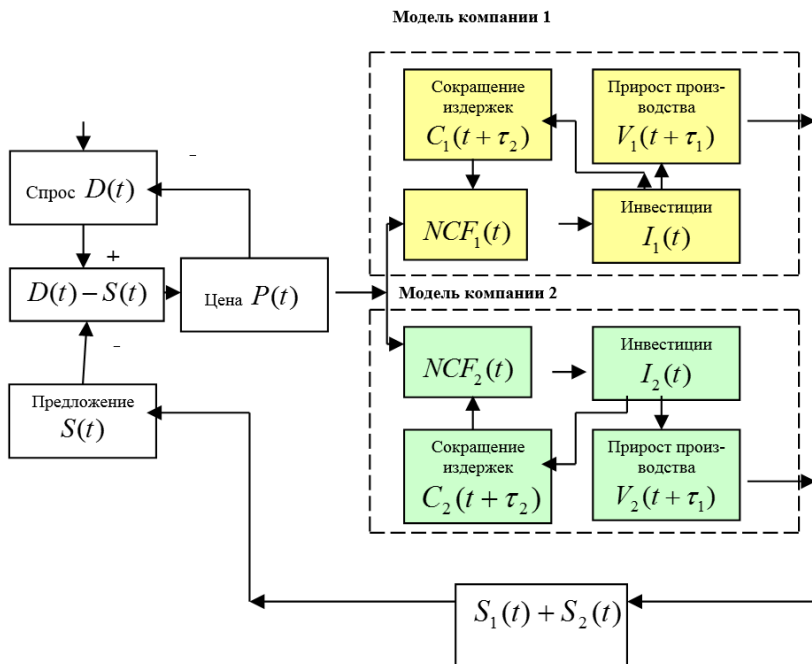


Рис 1. Структура модели

2.1. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ КОМПАНИИ

Далее предполагается, что компании принимают инвестиционные решения в условиях высокой волатильности рынков и неопределенности относительно прогнозной динамики спроса на продукцию компаний $D(t)$.

Компании могут наблюдать в каждом периоде t лишь за изменением своих финансовых показателей (чистая прибыль, цена продукции, объем продаж) и (или) прогнозировать их изменение на следующие несколько периодов. Модель позволяет варьировать глубину «достоверного» прогноза динамики рынков, доступного участникам рынка. Это позволяет учитывать при анализе фактор «дальновидности» компаний. Очевидно, что в случае низкой волатильности рынков глубина «достоверного» прогноза может быть увеличена.

Компания на каждом шаге t принимает инвестиционные решения на основе этой доступной информации в соответствии

с некоторым наперед заданным алгоритмом, который будет описан далее.

Пусть далее, если $P(t) - P(t - 1) > 0$ или $B_i(t) - B_i(t - 1) > 0$ (что сигнализирует компании о повышательном тренде на рынке), то часть накопленного к периоду t чистого денежного потока компании в доле равной величине α_i может быть направлено на инвестирование в ее развитие $- I_i^*(t)$. Величина α_i определяет **инвестиционную активность** компании i . Чем больше величина α_i (доля), тем выше ее инвестиционная активность. Таким образом,

$$I_i^*(t) = \alpha_i \cdot \sum_{t=1}^{t-1} NCF_i(t).$$

Как было отмечено ранее, общий объем инвестиций компания может направлять в проекты двух типов: проекты, направленные на увеличение производственной мощности (проекты первого типа) и проекты, направленные на сокращение издержек (проекты второго типа) в некотором соотношении α_i^1 и α_i^2 , ($\alpha_i^2 = 1 - \alpha_i^1$).

Величины α_i , α_i^1 и α_i^2 являются параметрами модели, которые могут выбираться компанией в зависимости от их прогнозов динамики рынков.

Таким образом, размер инвестиций $I_i(t)$ определяется в результате анализа фактических данных и возможного прогноза динамики рынка в соответствии с алгоритмом, описанным ниже, и не может превышать величину равную $I_i^*(t)$, которая определяется, в свою очередь, через варьируемый параметр инвестиционной активности. $I_i(t) = I_i^1(t) + I_i^2(t)$, где $I_i^1(t)$ и $I_i^2(t)$ – размер инвестиций в проекты первого и второго типа соответственно, которые определяются в соответствии с некоторыми правилами и алгоритмами, описываемыми далее.

2.2. ИНВЕСТИЦИИ ПЕРВОГО ТИПА

Компания i инвестирует в проекты первого типа в соответствии со следующим алгоритмом:

Если в период t наблюдается восходящий тренд на рынке (спрос – предложение > 0), то компания инвестирует в проекты первого типа следующим образом:

$$I_i^1(t) = \min\{\alpha_i^1 \cdot I_i^*(t), I_{np}^1\},$$

где I_{np}^1 – предельно допустимый за период уровень инвестиций в проекты первого типа.

Если в период t наблюдается нисходящий тренд на рынке, то это сигнализирует компании о появлении избыточных производственных мощностей и в соответствии с этим компания в этом периоде не инвестирует в проекты первого типа, т.е. $I_i^1(t) = 0$.

Предположим, что существует временной лаг τ_1 между периодом инвестирования и периодом соответствующего прироста производственных мощностей – $V_i(t)$. Пусть также величина E_1 характеризует прирост производственных мощностей на единицу инвестиционных вложений. Тогда $V_i(t) = E_1 \cdot I_i^1(t - \tau_1)$. Соответственно, производственные мощности рассчитывается с помощью рекуррентного соотношения $S_i(t) = S_i(t - 1) + V_i(t)$. Для $t = 1$ задается начальная мощность производства компании i – $S_i(0)$.

2.3. ИНВЕСТИЦИИ ВТОРОГО ТИПА

Рассмотрим влияние принимаемых инвестиционных решений компании на динамику изменения себестоимости производства продукции. Себестоимость продукции в период t рассчитывается по следующей формуле:

$$(2) \quad C_i(t) = C_i(t - 1) - E_2(t) \cdot I_i^2(t - \tau_2),$$

где $E_2(t)$ – удельная эффективность инвестиций в проекты снижения производственных издержек (энерго- и ресурсосбережение), τ_2 – временной лаг между периодом инвестирования и периодом соответствующего изменения себестоимости. Для $t = 1$ задается $C_i(0)$ – себестоимость продукции на начало прогнозного периода;

Величина $E_2(t)$ характеризует снижение себестоимости продукции на единицу инвестиционных вложений в проекты второго типа. В расчетах используется модель «Снижающейся эффективности инвестиций». В соответствии с этой моделью $E_2(t)$ снижается при изменении себестоимости продукции $C_i(t)$ и приближении его к некому пороговому значению $C_{пр}$.

C_{np} – оценка предельно возможного снижения себестоимости продукции, при достижении которого эффективность инвестиций становится равной нулю: $E_2(t) = 0$.

$$(3) \quad E_2(t) = E_2(0) \cdot \left(1 - \frac{C_i(0) - C_i(t)}{C_{np}}\right).$$

Компания инвестирует в проекты второго типа в соответствии со следующим алгоритмом:

$$I_i^2(t) = \min \left\{ I_i^*(t) \cdot (1 - \alpha_i^1) \cdot \frac{E_2(t)}{E_2(0)}, I_{np}^2 \right\},$$

где I_{np}^2 – предельно допустимый за период уровень инвестиций в проекты второго типа. В соответствии с описанным алгоритмом, если начиная с периода t $E_2(t)$ становится равной нулю, то и величина инвестиций $I_i^2(t)$ также становится равной нулю.

В соответствии с этим механизмом объем инвестиций компании i в период t завит от размера денежного потока, накопленного к этому периоду, выбранных параметров α_i и α_i^1 , а также отношения текущего показателя эффективности инвестиций к эффективности инвестиций на начало прогнозного периода.

3. Постановка задачи

Модель, описанная в предыдущем разделе, позволяет, задавая на ее входе параметры инвестиционных стратегий компаний $(\alpha_i, \alpha_i^1, i = 1, \dots, N)$ и варианты динамики изменения спроса на рынке ψ , рассчитать свободный денежный поток компаний.

Пусть $NCF_i(t)$ – свободный денежный поток компании i ($i = 1, \dots, N$), который зависит от выбора всеми компаниями вариантов своих инвестиционных стратегий и реализации сценария динамики рыночного спроса. Тогда показатель эффективности выбранной инвестиционной стратегии рассчитывается как разница между свободным денежным потоком компании, реализующей инвестиционную стратегию с параметрами α_i, α_i^1 , и свободным денежным потоком компании при отсутствии инвестиций, т.е. $\alpha_i = 0, \alpha_i^1 = 0$.

$$(4) \quad NPV_i = \sum_{t=1}^{t=T} (NCF_i(t, \alpha_i, \alpha_i^1) - NCF_i(t, 0, 0)) \cdot \frac{1}{(1+d)^t},$$

где d – ставка дисконтирования.

Компании стремятся максимизировать показатель эффективности (4), выбирая соответствующую инвестиционную стратегию. Заметим, что компании не знают заранее выбора инвестиционных стратегий компаний конкурентов и динамики спроса на рынке.

Если предположить, что существует некоторый координирующий орган, который сам выбирает инвестиционные стратегии компаний исходя из своего критерия (отражающего понимание общей полезности), то тогда задача сводится к задаче оптимизации выбранного критерия, значения которого при различных сочетаниях варьируемых переменных $(\alpha_i, \alpha_i^1, i = 1, \dots, N)$ вычисляются с помощью имитационной модели.

Для каждого сценария рыночной конъюнктуры ψ определяются оптимальный набор параметров инвестиционных стратегий компаний, которые максимизируют некоторую целевую функцию. Можно использовать различные критерии, например:

1. Максимизировать суммарный выигрыш всех компаний:

$$\sum_{i=1}^N NPV_i(\alpha_i, \alpha_i^1, \psi) \rightarrow \max.$$

2. Максимизировать минимальное значение NPV на множестве компаний:

$$\min_i NPV_i(\alpha_i, \alpha_i^1, \psi) \rightarrow \max.$$

Данный вариант решения задачи позволяет найти такие стратегии игроков, которые обеспечивают более равномерный выигрыш компаний.

Данная задача сводится к задаче многопараметрической оптимизации, в которой значения выбранного критерия оптимальности вычисляется с помощью имитационной модели, описанной в предыдущем разделе. Решение может быть получено с использованием имитационно-оптимизационных методов, включая различные методы направленного перебора и методы случайного поиска [3].

И далее, выбор инвестиционных стратегий компаний, учитывающих фактор неопределенности реализации того или иного

сценария рыночного спроса на продукцию ψ (игра с природой), может быть выполнен на основе применения стандартных методов выбора статистических решений.

Заметим, что в рамках данной постановки задачи в определенной степени сохраняется свойство «активности» компаний. Координирующий орган выбирает только общую инвестиционную стратегию для каждой компании, на основе которой компании формируют свои инвестиционные бюджеты самостоятельно, исходя из некоторых алгоритмов принятия инвестиционных решений.

4. Задача в игровой постановке

Рассмотрим далее случай, когда координирующий орган на рынке отсутствует. Компании принимают решения инвестировать в расширение своего производства или сокращение производственных издержек по правилам, описанным в предыдущих разделах. Для каждого ψ сценария рыночной конъюнктуры компании выбирают инвестиционные стратегии $(\alpha_i, \alpha_i^1, i = 1, \dots, N)$, которые максимизируют их целевые функции (4) с учетом возможного выбора инвестиционных стратегий остальными игроками.

Задача может быть сведена к исследованию модели одношаговой непрерывной игры с ненулевой суммой, в которой функции выигрышей игроков (компаний) задаются имитационной моделью. Поэтому в качестве основного метода исследования данной задачи будет использоваться методы численного моделирования.

Большинство рынков в современной экономике относятся к рынкам несовершенной конкуренции, на которых каждый производитель в состоянии существенно влиять на цену продукции. Наиболее интересным для исследования типом рыночных структур, в силу большого спектра стратегий поведения участников и нетривиальности выводов, является олигополия. Как правило, число олигополистов ограничено несколькими фирмами, хотя в некоторых случаях при информационной открытости (облегчающей координацию фирм) может достигать до несколь-

ких десятков. Причем размер каждой фирмы должен позволять ей значимо влиять на ситуацию на рынке. Именно для олигополии в наибольшей степени характерно стратегическое взаимодействие участников.

Различным аспектам олигополистического поведения посвящено большое количество как зарубежной, так и российской литературы, включая исследование классических моделей (Курно, Бертран и др.). Как правило, в этих работах анализируются рыночные стратегии компаний, которые состоят в выборе либо объема производства (поставок продукции на рынок), либо в выборе цены поставки продукции.

Исследуемая задача лежит в русле данного научного направления и развивает методы анализа рыночных стратегий компаний в области инвестиционных решений, направленных на повышение их конкурентных преимуществ (увеличение производственных мощностей и сокращения производственных издержек).

Основные характерные черты рассматриваемой игры:

1. Рассматривается рынок с неэластичным спросом, динамика которого является неопределенной и задается эндогенно несколькими характерными сценариями.

2. Компании выпускают однородную продукцию.

3. Рыночная конкуренция. Компании конкурируют за счет увеличения мощности производства продукции и (или) за счет снижения производственных издержек, которые предполагают реализацию определенного набора инвестиционных проектов. Связь между параметрами модели задается в классе функций, заданных алгоритмически через выбор игроками параметров своих инвестиционных стратегий.

4. Единая рыночная цена, которая определяется в каждый период времени на основе соотношения между суммарной мощностью всех компаний, представленных на рынке, и рыночным спросом на продукцию.

6. Возможны коалиции.

7. Компании максимизируют выбранный показатель эффективности инвестиционной стратегии, в том числе:

- суммарный дисконтированный денежный поток компании за прогнозный период (NPV);

- долю рынка в конце прогнозного периода.

8. Совершенное знание или рациональные ожидания компаний относительно п.п. 1–7.

Заметим, что множество возможных инвестиционных стратегий каждой компании совпадает с множеством точек единичного квадрата на плоскости. Без потери общности можно рассматривать конечный набор стратегий, используя, например, сеточные методы. Пусть далее, для большей наглядности и простоты изложения, компании используют несколько базовых инвестиционных стратегий. Рассмотрим, например, набор стратегий, приведенный ниже.

Стратегия 1. $\alpha_i = 1$, $\alpha_i^1 = 1$. Вкладывать капитал в расширение производства (интенсивный вариант развития). Данная стратегия позволяет наращивать объемы производства и при растущем рынке приводит к увеличению объема продаж и, соответственно, денежного потока. При падающем рынке эта стратегия приводит к снижению загрузке производственного оборудования и увеличению себестоимости и, соответственно, уменьшению денежного потока.

Стратегия 2. $\alpha_i = 1$, $\alpha_i^1 = 0$. Вкладывать капитал в сокращение производственных издержек (экстенсивный вариант развития). Данная стратегия позволяет, не наращивая объемы производства, сокращать издержки и снижать себестоимость продукции. При растущем рынке это приводит к сохранению объема продаж и, соответственно, увеличению денежного потока за счет увеличения рентабельности. При падающем рынке эта стратегия позволяет за счет более низкой «точки безубыточности», сохранить или уменьшить падение денежного потока.

Часто компании используют более осторожные стратегии, состоящие в том, предполагаемый объем инвестиций распределяется равномерно между инвестициями первого и второго типа (параметр $\alpha_i^1 = 0,5$). При этом варьируется только инвестиционная активность, которая зависит от прогнозируемой компанией динамики рыночной конъюнктуры. Как правило, с предполагаемым улучшением рыночной конъюнктуры компании повышают свою инвестиционную активность (параметр α_i).

Стратегия 3. $\alpha_i = 1, \alpha_i^1 = 0,5$. Высокая инвестиционная активность.

Стратегия 4. $\alpha_i = 0,5, \alpha_i^1 = 0,5$. Умеренная инвестиционная активность.

Стратегия 5. $\alpha_i = 0, \alpha_i^1 = 0,5$. Низкая инвестиционная активность.

Далее будем рассматривать рынок типа «дуополия», на котором представлены две компании. Пусть задано множество инвестиционных стратегий компании 1 ($k = 1, \dots, K$) и компании 2 ($j = 1, \dots, J$). По результатам проведения серии расчетов на модели для каждого сценария ψ можно построить матрицы выигрышей компаний $NPV_{k,i}^1, NPV_{k,i}^2$.

В данной постановке решение задачи сводится к анализу биматричной игры с платежными матрицами $NPV_{k,j}^1, NPV_{k,j}^2$. Даная задача достаточно хорошо исследована. Как известно, условием существования хотя бы одной равновесной точки Нэша в чистых стратегиях (k_0, j_0) является выполнение следующих неравенств:

$$(5) \quad NPV_{k_0, j_0}^1 \geq NPV_{k_0, j}^1, k = 1, \dots, K ;$$

$$(6) \quad NPV_{k_0, j_0}^2 \geq NPV_{k, j_0}^2, j = 1, \dots, J .$$

Если такая точка существует, то она считается решением данной задачи.

Возможность получения решения (равновесной точки Нэша) биматричной игры в чистых стратегиях в общем случае не гарантировано и зависит от свойств матриц $NPV_{k,j}^1, NPV_{k,j}^2$. Метод решения данной задачи включает проведение серии численных расчетов на имитационной модели, построение платежной матрицы, ее анализ и поиск решения.

В смешанных стратегиях равновесная точка всегда существует и может быть найдена различными методами: например, сведением к задаче ЦЛП или к линейной задаче дополнителности. Заметим, что смешанное равновесие Нэша служит не очень «удобной» вариантом решения данной игры, поскольку игровая ситуация разыгрывается только один раз.

В качестве иллюстрации предложенного подхода в следующем разделе статьи приведены результаты численных расче-

тов и анализ решений задачи для случая трех инвестиционных стратегий и двух сценариев динамики рыночной конъюнктуры. Будет показано, что во многих случаях существует возможность получения решения данной игры (равновесной точки Нэша) в чистых стратегиях, анализ которых позволяет сделать ряд интересных для практики качественных выводов.

Результатом этого этапа анализа инвестиционных стратегий компаний является ответ на следующий вопрос: если реализуется сценарий ψ , то каковы должны быть рациональные (оптимальные) стратегией компаний в смысле критерия (4). Решение задачи предполагает, что обе компании считают наиболее вероятным осуществление одного и того же сценария рыночной конъюнктуры.

Представляет интерес анализ решений данной задачи для случая, когда оценки вероятности осуществления того или иного сценария у компаний не совпадают.

Пусть игроки придерживаются различной оценки вероятности осуществления того или иного сценарий ψ и выбирают инвестиционную стратегию исходя из собственного прогноза рыночной конъюнктуры. Можно рассматривать различные модификации этой задачи в зависимости от того, обладают ли игроки информацией относительно выбора конкурентом сценария ψ . Если предположить, что игроки обладают различной степенью оптимизма (оптимисты, реалисты или пессимисты), то мы получаем более сложную конструкцию биматричной игры, в которой каждый игрок выбирает решение (равновесную стратегию) на матрице, соответствующей его сценарию ψ . При этом этот выбор не обязательно является равновесной стратегией на матрице, соответствующей сценарию ψ его соперника.

Интересным направлением исследования данной задачи является также учет рефлексии при выборе компаниями своих инвестиционных стратегий. Обзор работ по теории рефлексивных игр, включая стратегическую рефлексия, можно найти в [13].

Стратегическая рефлексия – процесс и результат размышления игрока о принципах принятия решений оппонентами.

Базовая модель стратегической рефлексии опирающейся на понятие ранг рефлексии: считается, что если игрок использует гарантирующую стратегию, то его ранг рефлексии равен 0. Если

игрок считает, что его оппонент будет использовать свою гарантирующую стратегию, то его ранг рефлексии равен 1 и т. д. Игрок ранга k считает, что его оппонент имеет ранг рефлексии $(k - 1)$. Если оба игрока осознают, что выбор ранга рефлексии является их стратегией, тогда возникает игра рангов [4, 7]. В случае конечных игр игра рангов, в которой игроки выбирают свои ранги рефлексии, также является конечной игрой; кроме того, в такой игре максимальный целесообразный ранг рефлексии ограничен [13]. Пример применения данного подхода к исследованию матричной игры, матрица выигрышей которой вычисляется с помощью имитационной модели, содержится в [6].

5. Моделирование инвестиционных стратегий. Анализ результатов

В данном разделе для иллюстрации предлагаемого подхода приводятся результаты численных экспериментов с разработанной моделью и их анализ.

Рассмотрим рынок типа «дуополия», на котором представлены, например, компании металлургической отрасли. В расчетах использованы следующие параметры модели:

предполагается, что в период $t = 0$ спрос и предложение на рынке сбалансированы, т.е. $B(0) = D(0) = S(0)$ и равны 10 млн т в год. $P(0)$ – равновесная рыночная цена на продукцию, равная 500 долл. США за тонну; $C(0)$ – себестоимость производства одной тонны продукции равна 400 долл. США.

Параметр эластичности цены γ равен 0,5. Это означает, что при отклонении величины небаланса в период t от равновесного значения (в период $t = 0$) на b процентов, соответственно, цена продукции изменится по отношению к ее равновесному значению на $0,5b$ процентов (с тем же знаком).

$E_1(t) = 0,03$, т.е. при инвестировании 100 млн долл. США происходит прирост производственных мощностей компании на величину 3,0 тыс. т за период τ_1 , равный 2 годам, что соответствует средней продолжительности реализации инвестиционных проектов в металлургии, направленных на увеличение производственных мощностей. $I_{пр}^1$ – предельно допустимый за период

объем инвестиций в проекты первого типа принят на уровне 100 млн долл. США в год.

$E2(0) = 0,015$, т.е. при инвестировании 100 млн долл. США происходит снижение себестоимости производства 1 т продукции на величину 1,5 долл. Величина τ_2 в расчетах принята равной 1 году.

Данные параметры модели получены на основе анализа данных реализации инвестиционных проектов и программ ряда компаний в черной металлургии и, естественно, отражают оценку средних значений этих параметров. Для компаний других отраслей экономики данные параметры модели должны быть уточнены. Рассматривается прогнозный период с 2014 года по 2029 год.

5.1. СИММЕТРИЯ

Пусть обе компании обладают одинаковой начальной мощностью (5 млн т продукции в год).

Сценарий 1 (равномерный рост спроса на всем прогнозном периоде). В соответствии с этим сценарием рыночный спрос на продукцию компаний на протяжении прогнозного периода растет равномерно с темпом 4% в год (рис. 2). Матрица выигрышей компаний приведена в таблице 1.

Таблица 1. Матрица выигрышей компаний (сценарий 1)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	7120 \7120	8097 \6414	9221 \4262
$k = 2$	6414\ 8097	7481\7485	9056\4801
$k = 3$	4262\ 9221	4801\9056	6965\6965

Первый элемент матрицы соответствует выигрышу первого игрока, а второй элемент – выигрышу второго игрока. В таблице жирным шрифтом выделены максимальные элементы столбцов

матрицы первого игрока и максимальные элементы строк матрицы второго игрока. Анализ полученной матрицы показывает наличие единственной равновесной точки Нэша, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 1 ($k = 1$ и $j = 1$). Элементы матрицы первого и второго игрока в этой точке выделены жирным шрифтом.

На рис. 2 показана динамика предполагаемого рыночного спроса на продукцию для сценария 1 и динамики роста производственных мощностей и, соответственно, предложения со стороны конкурирующих компаний (компания 1 и компания 2). На рис. 3 показана динамика рыночной цены на продукцию.

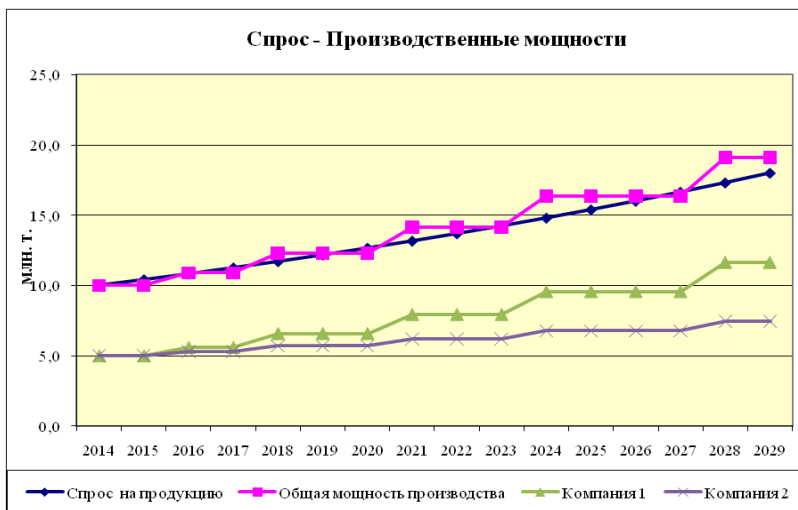


Рис. 2. График спрос – производственные мощности

Следует заметить, что, в отличие от матричных игр, в биматричных играх может оказаться так, что совместное отклонение двумя игроками от равновесия Нэша приводит к увеличению выигрыша обоих игроков. Эта ситуация иллюстрируется примером (таблица 1). В точке равновесия выигрыш обоих игроков одинаков и равен 7120 млн \$. Однако если компании условятся выбрать другую точку, которая соответствует выбору инвестиционной стратегии 2 ($k = 2$ и $j = 2$), то выигрыш обеих

игроков также будет одинаков и равен 7481 млн \$, что превышает их выигрыш в равновесной точке.



Рис. 3. Динамика цены

Выходом в таких ситуациях является кооперация игроков, т.е. сотрудничество, состоящее в том, что игроки могут договориться о согласованном выборе инвестиционных стратегий. В реальных экономических ситуациях конкурирующие участники рынка могут взаимодействовать друг с другом, вступая в переговоры и заключая соглашения, часто не официальные. Если в платежной матрице игры существует множество точек, оптимальных по Парето (т.е. недоминируемых другими), то такое множество называется переговорным. Существуют различные способы достижения игроками договоренности о совместном выборе точки из переговорного множества, включая различные так называемые арбитражные схемы.

Анализ матрицы игры (таблица 1) иллюстрирует полезность такой кооперации для обеих компаний. Если кооперация между игроками невозможна, им выгоднее придерживаться равновесных стратегий.

Сценарий 2 (2014–2018 гг. – период роста спроса, далее в 2019–2020 гг. – резкое падение спроса и в 2021–2029 гг. – медленное равномерное восстановление спроса до уровня 2018 г.) (рис. 6).

Матрица выигрышей компаний при реализации сценария 2 приведена в таблице 2.

В таблице жирным шрифтом выделены максимальные элементы столбцов матрицы первого игрока и максимальные элементы строк матрицы второго игрока. Анализ полученной матрицы показывает наличие единственной равновесной точки Нэша, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 1 ($k = 1$ и $j = 1$). Элементы матрицы первого и второго игрока в этой точке выделены жирным шрифтом.

Таблица 2. Матрица выигрышей компаний (сценарий 2)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	4750\4750	4285\3507	5764\2980
$k = 2$	3507\4285	4087\4087	5941\3715
$k = 3$	2980\5764	3715\ 5941	5098\5098

Заметим, что равновесная точка Нэша для обоих сценариев совпадает. Это говорит о том, в условиях конкурентной борьбы и отсутствия кооперации, вне зависимости от сценария, наиболее выгодной стратегией для обеих компаний является стратегия максимальной инвестиционной активности.

Переговорное множество состоит из единственной точки, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 3 ($k = 3$ и $j = 3$), соответствующей стратегии минимальной инвестиционной активности. Данный набор стратегий игроков обеспечивает им в случае их кооперации максимальный выигрыш.

На рис. 4 показана динамика предполагаемого рыночного спроса на продукцию для сценария 2 и динамики роста производственных мощностей и, соответственно, предложения со стороны конкурирующих компаний (компания 1 и компания 2). На рис. 5 показана динамика рыночной цены на продукцию.

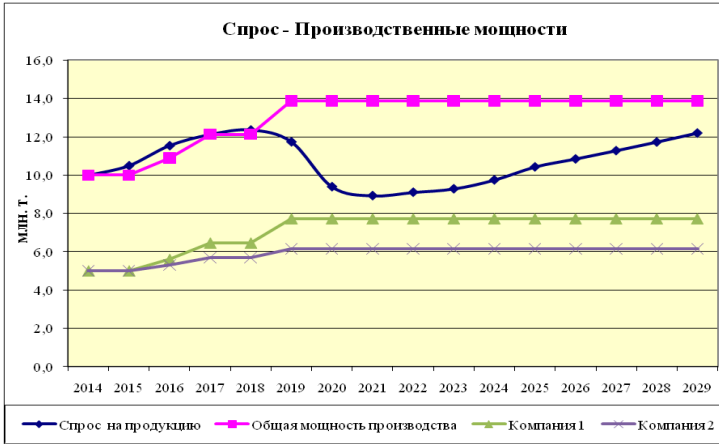


Рис. 4. График спрос – производственные мощности

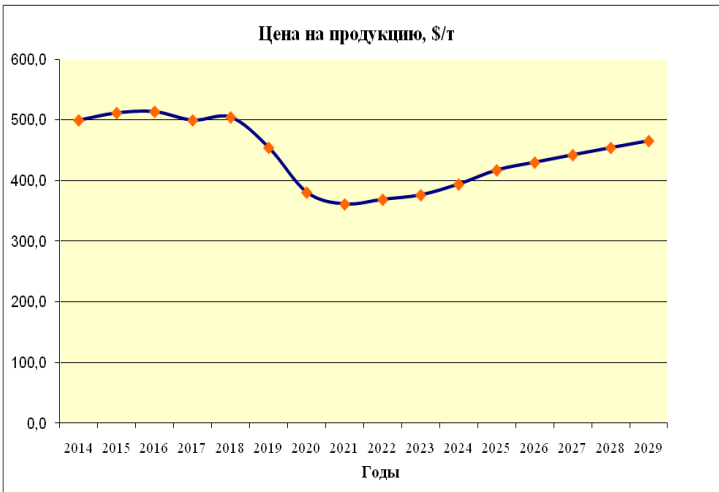


Рис. 5. Динамика цены

5.2 НЕСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть компании отличаются начальной мощностью производства и, соответственно, долей рынка. Начальная мощность производства компании 1 составляет 7 млн т продукции в год, а компании 2, соответственно, 3 млн т продукции в год. Доля рынка компаний составляет 70% и 30% соответственно.

Матрица выигрышей компаний при реализации сценария 1 приведена в таблице 3 и, при реализации сценария 2, в таблице 5.

В таблицах жирным шрифтом выделены максимальные элементы столбцов матрицы первого игрока и максимальные элементы строк матрицы второго игрока. Анализ полученных матриц показывает наличие единственной равновесной точки Нэша, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 1 ($k = 1$ и $j = 1$). Элементы матрицы первого и второго игрока в этой точке выделены жирным шрифтом.

Заметим, что равновесная точка Нэша для обоих сценариев также совпадает.

Таблица 3. Матрица выигрышей компаний (сценарий 1)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	10841\3581	11948\3297	12151\2563
$k = 2$	10216\4379	11304\3868	12189\2799
$k = 3$	4262\9221	4801\9056	9751\4179

Переговорное множество состоит из единственной точки, которая соответствует выбору обеими компаниями инвестиционной стратегии 2 ($k = 2$ и $j = 2$), соответствующей стратегии умеренной инвестиционной активности. Данный набор стратегий игроков обеспечивает им в случае их кооперации максимальный выигрыш.

Таблица 4. Матрица суммарного выигрыша компаний

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	14421	15245	14714
$k = 2$	14595	15175	14988
$k = 3$	12775	13230	13930

В таблице 4 приведен суммарный выигрыш компаний для различных сочетаний, выбранных ими стратегий. Анализ показывает, что точка, соответствующая максимальному суммарному выигрышу компаний ($k = 1$ и $j = 2$), не совпадает ни с равновесной точкой Нэша ($k = 1$ и $j = 1$), ни с точкой из переговорного множества ($k = 2$ и $j = 2$). Возможна и другая форма кооперации, которая состоит в следующем: игроки договариваются выбрать точку, соответствующую суммарному выигрышу компаний, и далее эффект, полученный от такого решения, делится между участниками так, чтобы выигрыш каждого участника был больше, чем выигрыш в точке переговорного множества.

Таблица 5. Матрица выигрышей компаний (сценарий 2)

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = 1$	7303\2290	8086\2253	6541\1290
$k = 2$	6400\2460	6340\1988	7743\1878
$k = 3$	4671\3450	5648\3408	7137\3059

Анализ матрицы (таблица 5) показывает, что для случая реализации сценария 2 матрица не содержит точек переговорного множества. В тоже время точка, соответствующая максималь-

ному суммарному выигрышу компаний ($k = 1$ и $j = 2$), не совпадает с равновесной точкой Нэша ($k = 1$ и $j = 1$). Поэтому возможна форма кооперации, описанная выше, которая позволяет игрокам увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в равновесной точке.

6. Заключение

Исследована задача анализа и выбора инвестиционных стратегий компании на рынке типа «дуополия», направленных на повышение их конкурентных преимуществ (увеличение производственных мощностей и сокращения производственных издержек).

Задача сведена к анализу биматричной игры, в которой матрица выигрышей формируется в результате численного моделирования. Метод решения данной задачи включает проведение серии численных расчетов на имитационной модели, построение платежной матрицы и ее анализ.

Показано, что во многих случаях существует решение данной игры (равновесной точки Нэша) в чистых стратегиях. Анализ решений с учетом возможных коалиций игроков и различного типа договоренностей между ними позволил сделать ряд интересных для практики качественных выводов.

Следует заметить, что предлагаемый подход к исследованию задачи выбора инвестиционных стратегий компаний в условиях конкуренции открываются широкие возможности исследовать различные модификации данной задачи. Например, варьируя параметры модели, можно рассматривать различные типы асимметрии на рынке:

- одна из компаний является лидером отрасли по объемам производства и доле рынка ($D_1(0) > D_2(0)$);
- одна из компаний является технологическим лидером отрасли, имеет более низкие производственные издержки ($S_1(0) > S_2(0)$);
- одна из компаний обладает лучшим менеджментом, что выражается в более эффективном использовании средств, выделяемых на инвестиции ($E_1(0) > E_2(0)$).

Литература

1. АКИНФИЕВ В.К. *Инвестиционные стратегии компаний и цикличность рынков металлопродукции* // Управление большими системами. – 2010. – №28. – С. 179–196.
2. АКИНФИЕВ В.К. *Выбор инвестиционных стратегий компаний в условиях нестабильности рынков* // Управление большими системами. – 2014. – №51. – С. 107–129.
3. АКИНФИЕВ В.К., ЦВИРКУН А.Д. *Выбор программ развития крупномасштабных систем на основе оптимизационно-имитационный методов* // Сборник научных трудов «Управление развитием крупномасштабными системами MLSO-2014». – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 87–95.
4. ГУБАНОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *О стратегической рефлексии в биматричных играх* // Управление большими системами. – 2008. – №21. – С. 49–57.
5. ДЖУЛИАН РОШ. *Стоимость компании: от желаемого к действительному*. – Минск: Гривцов Паблшер, 2008. – С. 352.
6. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегического поведения в задаче о диффузионной бомбе* // Проблемы управления. – 2015. – №2. – С. 38–44.
7. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 3–23.
8. СУББОТИН А.В. *Моделирование волатильности: от условной гетероскедастичности к каскадам на множественных горизонтах* // Прикладная эконометрика. – 2009. – №3(15). – С. 94–138.
9. BOLTON P., YANG J., WANG N. *Investment, Liquidity, and Financing under Uncertainty* // Working Papers/ Columbia University, 2014. [Электронный ресурс] – URL: <https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/pbolton/papers/SSRN-id2364067.pdf> (дата обращения: 17.04.2016).
10. DIXIT A.K., PINDYCK R.S. *Investment under Uncertainty*. – Princeton University Press. Princeton, 1994. – 488 p.
11. GRENADIER S.R., WANG N. *Investment timing, agency, and information* // Journal of Financial Economics. – 2005. – Vol. 75. – P. 493–533.

12. GRENADIER S.R. *Option exercise games: an application to the equilibrium investment strategies of firms* // Review of Financial Studies. – 2002. – Vol. 15, No. 3. – P. 691–721.
13. NOVIKOV D., CHKHARTISHVILI A. *Reflexion and Control: Mathematical Models*. – London: CRC Press, 2014. – 298 p.
14. MASON R., WEEDS H. *Investment, Uncertainty and Pre-emption* // International Journal of Industrial Organization. – 2010. – Vol. 28. – P. 278–287.
15. SCHWARTZ E.S., TRIGEORGIS L. *Real Options and Investment under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*. – The MIT Press, Cambridge, Mass, USA, 2001. – 261 p.
16. SMIT H.T.J., TRIGEORGIS L. *Strategic Investment: Real Options and Games*. – Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2004. – 504 p.
17. XIUMEI LV, SHIQIN XU, XIAOLING TANG. *Investment Timing and Capacity Choice under Uncertainty* // Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis. – 2014. – Vol. 2014, Article ID 801862. – P. 172–184.

SIMULATION OF INVESTMENT STRATEGIES OF FIRMS UNDER UNCERTAINTY

Valerij Akinfiyev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (akinf@ipu.ru).

Abstract: This paper examines the problem of investment strategies choice of firms under demand uncertainty and competition in the market. A mathematical model describing the investment behavior of firms in a Duopoly Market is proposed. We study the impact of Investment Strategy of Firms on its financial performance and the efficiency of investment under demand uncertainty and competition in the market. Solution is reduced to the analysis of a bimatrix game, wherein the payoff matrix is formed by numerical simulation. We present an illustrative example of the proposed approach.

Keywords: investment decisions of firms, duopoly market, mathematical model, bimatrix game.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым*

*Поступила в редакцию 15.11.2015.
Опубликована 31.05.2016.*