УДК 519.177
ББК 22.18

РЕСУРСНЫЕ СЕТИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ЕМКОСТЬ АТТРАКТОРОВ. ФОРМАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

Жилякова Л. Ю.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Исследуются процессы распределения ресурса в сетях с ограничениями на емкость вершин-аттракторов. Устанавливается их сходимость при любом суммарном ресурсе. Формулируется критерий вторичной аттрактивности вершин, находятся векторы предельного состояния и потока, формула для второго порогового значения ресурса T^{II}. Вводится ряд дополнительных характеристик сетей с ограничениями.

Ключевые слова: ресурсная сеть, графовая динамическая пороговая модель, неоднородная цепь Маркова, ограничения на емкость.

1. Введение

Работа является продолжением исследования регулярных несимметричных ресурсных сетей с ограничениями на емкость аттракторов [9]. Ресурсная сеть без ограничений представляет собой графовую динамическую модель с одним пороговым переключением правил функционирования [6–8]. Свойство *регулярности* означает, что граф сильно связен (т.е. состоит из одной эргодической компоненты), и НОД длин всех его циклов

---

[1] *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ* (*проекты № 14-01-00422а, 15-07-02488а*).

[2] *Людмила Юрьевна Жилякова, доктор физико-математических наук* (*zhilyakova.ludmila@gmail.com*)

равен 1. Свойство *несимметричности* означает, что найдется такой номер i, что в матрице весов графа (пропускных способностей его ребер) сумма элементов i-й строки и i-го столбца будут различны. (Нетрудно показать, что если это условие выполняется, то таких номеров как минимум два). Иными словами, в графе существует как минимум две вершины, у которых суммарная пропускная способность входящих в нее ребер r_i^{in} не равна суммарной пропускной способности исходящих из нее ребер r_i^{out}.

В несимметричной сети необходимо существует хотя бы одна вершина, которая при большом ресурсе, т.е. ресурсе, большем единственного для каждой сети порогового значения, и любом начальном состоянии накапливает у себя все излишки. При этом остальные вершины в предельном состоянии имеют лишь некоторое небольшое количество ресурса, не превосходящее их суммарных выходных пропускных способностей, сколь бы ни был велик суммарный ресурс в сети. Вершины, притягивающие к себе ресурс, названы *аттракторами*. Это, как правило, вершины-приемники (те вершины, у которых $r_i^{in} > r_i^{out}$), однако не каждый приемник может быть аттрактором.

Для того чтобы дать возможность накопить ресурс другим вершинам, в сети вводятся ограничения на емкости аттракторов. При достижении заранее заданного значения аттракторы перестают накапливать ресурс, и тогда его излишки переходят в некоторое множество других вершин. Мы назвали эти вершины *вторичными аттракторами*.

В [8] исследована динамика суммарного предельного потока в зависимости от количества ресурса в сети. Доказано существование второго порогового значения $T^{\mathrm{II}} > T$, при котором начинается накопление ресурса во вторичных аттракторах.

Однако на многие вопросы ответы пока не получены. Вот некоторые из них:

1. Устойчива ли сеть с ограничениями? Существуют ли в ней предельные состояния и потоки при произвольном суммарном ресурсе и начальном состоянии? Если да, то каковы предельные состояния и предельные потоки в сети с ограничениями? (Пока установлено только то, что суммарный поток в сети

сходится к заданным величинам, но это не гарантирует отсутствия регулярных или нерегулярных колебаний потока в ребрах.)

2. Всегда ли вторичными аттракторами будут одни и те же вершины, или это зависит от начального распределения ресурса и его количества?

3. Существует ли точная нижняя грань, определяющая количество ресурса, при котором будет происходить накопление во вторичных аттракторах, или в зависимости от начального состояния это количество может быть разным? Иными словами, единственно ли значение T^{II} для каждой сети, и если да, то как его найти?

4. Какими еще качественными и количественными характеристиками обладают такие сети?

В настоящей работе приведены результаты, дающие ответы на эти вопросы.

Отметим, что все результаты, полученные для ресурсных сетей, носят в статье название *теорем*; результаты, касающиеся порождаемых ими матриц и векторов, сформулированы в виде *утверждений*.

2. Основные обозначения и свойства сети с ограничениями на емкость аттракторов

Определения и свойства ресурсных сетей без ограничений приведены в [6–8]. Здесь мы кратко остановимся на основных обозначениях и результатах, полученных для сетей с ограничениями.

Ресурсная сеть представляет собой взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$. Веса, соответствующие пропускным способностям ребер, задаются матрицей $R = (r_{ij})_{n\times n}$.

$Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ – состояние сети в момент t; $q_i(t)$ – количество ресурса в вершине v_i в момент t; Q^* – предельное состояние.

r_i^{in} и r_i^{out} – суммарные входная и выходная пропускные способности вершины v_i; W – суммарный ресурс сети; $Z^{-}(t)$ – множество вершин, для которых $q_i(t) \le r_i^{out}$; $Z^+(t)$ – множество вершин, для которых $q_i(t) > r_i^{out}$.

T – *пороговое значение ресурса*, такое что при $W \le T$ все вершины, начиная с некоторого t', переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ не пуста, начиная с некоторого t'' (*теорема* 3 [6]).

В [8] доказано, что T определяется по формуле

$$T = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

$\tilde{Q}$ и Q^{1*}– векторы предельного состояния при $W = T$ и при $W = 1$ соответственно.

Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру e_{ij} в момент t, приходит в вершину v_j в момент $t + 1$; между моментами t и $t + 1$ он находится в ребре e_{ij}. Этот ресурс назовем потоком $f_{ij}(t)$. Общий поток сети описывается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n \times n}$.

$F^{out}(t)$, $F^{in}(t)$ – векторы исходящего и входящего потока.

Доказано, что в сети без ограничений при любом значении $W \ge T$ суммарный поток в сети равен T [7].

Входные соседи вершины v_i – множество $V_i^{in} = \{v_k | r_{ki} > 0\}$; выходные соседи вершины v_i – множество $V_i^{out} = \{v_k | r_{ik} > 0\}$.

В ресурсной сети без ограничений при $W > T$ некоторые вершины в предельном состоянии начинают накапливать излишки ресурса. Такие вершины были названы *аттракторами*.

Вершина v_j несимметричной регулярной сети без ограничений является аттрактором тогда и только тогда, когда для нее выполняется [8]:

$$j = \arg \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}.$$

В данной модели будем называть эти вершины *первичными аттракторами*. На них накладываются ограничения на емкость. Ограничения имеют вид $r_j^{out} + p$. Это означает, что каждый аттрактор может набрать сверх своей выходной пропускной способности p единиц ресурса, $p \ge 0$. Значение r_j^{out} взято не произвольно. Именно такое количество ресурса в предельном состоянии имеет каждый аттрактор при $W = T$. Все неаттракторы v_k имеют при $W = T$ ресурс, равный $\tilde{q}_k$, строго меньший своей выходной пропускной способности. И при любом $W > T$ они уже не могут получить больше $\tilde{q}_k$ [7, 8].

Считается, что ограничение на емкость аттрактора работает лишь тогда, когда в начальном состоянии ресурс в нем был не больше чем $r_j^{out} + p$. Если специально не указано иное, будем всегда предполагать, что в начальном состоянии ресурс всех первичных аттракторов меньше, чем их ограничения на емкость.

Для сети с ограничениями доказано существование второго порогового значения суммарного ресурса $T^{\mathrm{II}} > T$, при переходе через которое изменяются функционирование сети и динамика суммарного потока.

По утверждению 2 [9] для значений суммарного ресурса W существует четыре промежутка, на которых функционирование сети различно.

При $W \in (0, T]$ с некоторого момента времени сеть описывается однородной цепью Маркова. Предельное состояние и векторы входного и выходного потоков в ней существуют, единственны и совпадают между собой. Суммарный предельный поток равен W и (естественно) возрастает с ростом W.

При $W \in (T, T + lp]$ предельное состояние и поток существуют. Предельный поток единственен, предельное состояние единственно при $l = 1$; при $l > 1$ предельное состояние единственно во всех вершинах, кроме аттракторов. Ресурс в аттракторах не меньше их выходной пропускной способности. Величины ресурса сверх пропускной способности в аттракторах зависят от начального распределения ресурса, однако сумма этих излишков не зависит от начального состояния и равна $W - T$. Суммарный предельный поток равен T и не изменяется с ростом W.

При $W \in (T + lp, T^{\mathrm{II}} + lp]$ все аттракторы достигают ограничения на емкость, и в остальных вершинах начинает накапливаться избыточный ресурс, но еще никакая из них не способна перейти в зону Z^{+*}. Суммарный предельный поток равен $W - lp$ и возрастает с ростом W.

При $W \in (T^{\text{II}} + lp, \infty)$ происходит насыщение вторичных аттракторов и стабилизация потока на значении T^{II}. При любом сколь угодно большом значении W суммарный предельный поток равен T^{II}.

Если ограничения на аттракторы равны нулю ($p = 0$), второй интервал исчезает и остаются три: $(0, T]$, $(T, T^{\text{II}}]$, (T^{II}, ∞).

3. Переходные процессы в сети с ограничениями

В сети с ограничениями, когда величина суммарного ресурса находится в первых двух из четырех указанных интервалов, функционирование не отличается от функционирования сети без ограничений. В данной работе интерес представляет лишь ресурс, больший величины $T + lp$. Именно на этих значениях проявляются новые свойства модели.

При граничном значении $W = T + lp$ сеть всё еще функционирует как сеть без ограничений. А это означает, что предельное состояние в ней существует и каждый аттрактор в нем имеет ресурс, равный $r_j^{out} + p$, а остальные вершины находятся в зоне Z^{-*} и их ресурс совпадает с компонентами вектора предельного состояния $\tilde{Q}$ (при $W = T$).

Рассмотрим функционирование сети при $W \in (T + lp, T^{\text{II}} + lp]$ на достаточно больших тактах времени, когда каждый аттрактор уже набрал ресурс, равный $r_i^{out} + p$, а все остальные вершины перешли в зону $Z^{-}(t)$.

Вектор состояния сети в момент времени t рассчитывается следующим образом.

Сначала находится поток, входящий в вершины, как если бы сеть работала без ограничений:

$$F^{in}(t) = F^{out}(t-1)R' = \left(r_1^{out}, \ldots,\ r_l^{out}, q_{l+1}(t-1), \ldots, q_n(t-1)\right)R',$$

где R' – стохастическая матрица: $R' = \operatorname{diag}(r_1^{out}, \ldots, r_n^{out})^{-1} R$.

Здесь первичные аттракторы имеют номера от 1 до l.

Затем определяются значения $\Delta q_i(t)$ потенциальных избытков в аттракторах и коэффициенты пропорционального уменьшения потока в аттракторы $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, l$, [9]:

$$\Delta q_i(t) = q_i(t) - \left(r_i^{out} + p\right);$$

$$c_i(t) = \frac{\Delta q_i(t)}{\sum_{k=l+1}^{n} f_{ki}(t)}.$$

После этого вычисляется вектор состояния на такте t:

$$Q(t) = P + F^{out}(t-1)R' + \left(-c_1(t)\sum_{j=l+1}^{n} f_{j1}(t), \ldots, -c_l(t)\sum_{j=l+1}^{n} f_{jl}(t), \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{l} c_i(t) f_{l+1,i}(t), \ldots, \sum_{i=1}^{l} c_i(t) f_{ni}(t)\right).$$

Здесь $P = (p, \ldots p, 0, \ldots, 0)$ – вектор ограничений с ненулевыми компонентами, соответствующими первичным аттракторам.

Вектор P – статичная часть вектора состояния, которая не изменяется в процессе функционирования. Не нарушая общности при вычислении изменения вектора состояния, положим $P = 0$. В этом случае после вычисления предельного состояния к получившемуся вектору нужно снова прибавить ненулевой вектор ограничений P.

Имеем:

$$Q(t) = F^{out}(t-1)R' + \left(-c_1(t)\sum_{j=l+1}^{n} f_{j1}(t), \ldots, -c_l(t)\sum_{j=l+1}^{n} f_{jl}(t), \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{l} c_i(t) f_{l+1,i}(t), \ldots, \sum_{i=1}^{l} c_i(t) f_{ni}(t)\right). \tag{1}$$

Поскольку $P = 0$, каждая вершина в сети с суммарным ресурсом $W \in (T, T^{\text{II}}]$, включая аттракторы, на каждом такте отдает весь свой ресурс, т.е. функционирует по правилу 2. Поэтому весь ресурс каждой вершины становится выходным потоком и выполняется равенство $F^{out}(t) = Q(t)$. Тогда равенство (1) можно переписать в виде

$$Q(t)+\left(c_1(t)\sum_{j=l+1}^{n} q_j(t)\frac{r_{j1}}{r_j^{out}},\ \ldots,\ c_l(t)\sum_{j=l+1}^{n} q_j(t)\frac{r_{jl}}{r_j^{out}},\right.$$

$$\left.-q_{l+1}(t)\sum_{i=1}^{l} c_i(t)\frac{r_{l+1i}}{r_{l+1}^{out}},\ \ldots,-q_n(t)\sum_{i=1}^{l} c_i(t)\frac{r_{l+1i}}{r_{l+1}^{out}}\right)=Q(t-1)R'.$$

Разделим стохастическую матрицу R' на четыре блока:

$$R'=\left(\begin{array}{c|c} R_0' & R_1' \\ \hline R_2' & R_3' \end{array}\right),$$

где блок R_0' имеет размер $l \times l$ и соответствует вершинам-аттракторам.

Тогда левую часть равенства можно записать в матричной форме следующим образом:

$$Q(t)\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline R_2'\operatorname{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & E-\operatorname{diag}\left((c_1(t),\ldots,c_l(t))R_2'^{\mathrm{T}}\right) \end{array}\right)=Q(t-1)R'.$$

Введем обозначение:

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline R_2'\operatorname{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & E-\operatorname{diag}\left((c_1(t),\ldots,c_l(t))R_2'^{\mathrm{T}}\right) \end{array}\right)=S'(t).$$

Тогда имеем:

$Q(t)S'(t) = Q(t-1)R'$.

Утверждение 1. $S'(t)$ – стохастическая матрица.[1]

Утверждение 2. $S'(t)$ – невырожденная матрица.

Доказательство этого утверждения очевидно, потому что $S'(t)$ является нижней треугольной матрицей с ненулевыми элементами на главной диагонали. □

Следовательно, $S'(t)$ обратима и справедливо равенство:

(2) $Q(t) = Q(t-1)R'S'^{-1}(t)$.

---

[1] *Все утверждения приводятся с доказательствами. Объемные доказательства утверждений и теорем вынесены в приложение.*

Нетрудно убедиться, что $S'^{-1}(t)$ имеет вид

$$(3)\quad S'^{-1}(t)=\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -D(t)R_2'\,\mathrm{diag}(c_1(t),\dots,c_l(t)) & D(t)\end{array}\right),$$

где $D(t)=\left(E-\mathrm{diag}\left((c_1(t),\dots,c_l(t))R_2'^{\,\mathrm{T}}\right)\right)^{-1}$.

Тогда

$$R'S'^{-1}(t)=\left(\begin{array}{c|c} R_0' & R_1' \\ \hline R_2' & R_3'\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -D(t)R_2'\,\mathrm{diag}(c_1(t),\dots,c_l(t)) & D(t)\end{array}\right)$$

Замечание. В граничном случае, если избытки в вершинах-аттракторах равны нулю ($c_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, l$), то $S'(t) = E$, и, соответственно, $S'^{-1}(t) = E$, и функционирование сети описывается однородной цепью Маркова со стохастической матрицей R'.

Утверждение 3. $S'^{-1}(t)\cdot\mathbf{1} = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – вектор-столбец, состоящий из n единиц.

Доказательство вытекает из того факта, что для любой матрицы, обратной стохастической, суммы элементов каждой строки равны единице (см., например, задачу 2 (с. 52) в [11]).□

Матрицу X, удовлетворяющую условию $X\cdot\mathbf{1} = \mathbf{1}$, и имеющую отрицательные элементы, следуя [13], назовем *псевдостохастической*.

Очевидно, что умножение вектор-строки слева на псевдостохастическую матрицу сохраняет сумму элементов вектора.

Кроме того, по построению матриц $S'(t)$ и, соответственно, $S'^{-1}(t)$, ни один из элементов вектора $Q(t)$ не может быть отрицательным. Этот факт следует из того, что $Q(t)$ – вектор состояния ресурсной сети, по определению содержащий неотрицательные элементы. И в самом деле, блок матрицы $S'^{-1}(t)$, содержащий отрицательные элементы, соответствует излишкам ресурса, которые аттрактор не может принять и которые заведомо не могут превысить приходящий ресурс.

Замечание. Два нижних блока матрицы $S'^{-1}(t)$ (формула (3)) таковы, что элементы блока $-D(t)\,R_2'\,\mathrm{diag}(c_1(t), \ldots, c_l(t))$ отрицательны; отрицательны и суммы по строкам этого блока. Блок $D(t)$ – диагональный с положительными элементами. Эти элементы больше единицы на абсолютную величину суммы одноименной строки матрицы $-D(t)\,R_2'\,\mathrm{diag}(c_1(t), \ldots, c_l(t))$.

Существуют примеры сетей, для которых матрица $R'S'^{-1}(t)$ является стохастической (см. пример 1 в разделе 7). Но существуют и контрпримеры. Для регулярных сетей с несколькими аттракторами при отсутствии ребер между аттракторами и петель в аттракторах (что соответствует случаю $R_0' = 0$) элементы верхнего левого квадратного блока $l \times l$ этой матрицы при достаточно больших t отрицательны. В самом деле, для таких матриц произведение $R'S'^{-1}(t)$ имеет вид

$$R'S'^{-1}(t) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & R_1' \\ \hline R_2' & R_3' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -D(t)R_2'\mathrm{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & D(t) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} -R_1'D(t)R_2'\mathrm{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & R_1'D(t) \\ \hline R_2' - R_3'D(t)R_2'\mathrm{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & R_3'D(t) \end{array}\right).$$

Из чего сразу следует, что верхний блок отрицателен при ненулевых значениях $c_i(t)$.

Одна из таких матриц приведена в примере 2 (раздел 7).

Если матрица $R'S'^{-1}(t)$ – стохастическая, то при $W \in (T, T^{\mathrm{II}}]$ функционирование сети описывается неоднородной цепью Маркова:

$$Q(t+k) = Q(t)\prod_{i=0}^{k-1} R'S'^{-1}(t+i).$$

4. Изменение потоков между аттракторами и инвариантные преобразования сети

Покажем, что всякой псевдостохастической матрице $R'S'^{-1}(t)$ с отрицательными элементами можно поставить в соответствие стохастическую матрицу. Причем компоненты вектора состояния, соответствующие неаттрактивным вершинам, при этом преобразовании не изменятся.

В этом случае любую ресурсную сеть с ограничениями можно будет описать неоднородной цепью Маркова.

Докажем, что в ресурсной сети с ограничениями и без ограничений при $W > T$ все компоненты вектора состояния $Q(t)$, за исключением компонент, соответствующих аттракторам (первичным для сети без ограничений и для сети с ограничениями при $W \in (T, T^{\mathrm{II}}]$ и первичным и вторичным для сети с ограничениями при $W > T^{\mathrm{II}}$) не зависят от увеличения или уменьшения величины пропускных способностей ребер между аттракторами и петель в аттракторах. Единственное условие, которое должно выполняться: пропускные способности этих ребер должны изменяться так, чтобы все аттракторы по-прежнему оставались аттракторами.

Пусть произвольная регулярная несимметричная ресурсная сеть с l аттракторами ($l > 1$) задана матрицей пропускных способностей

$$R = \left(\begin{array}{c|c} R_0 & R_1 \\ \hline R_2 & R_3 \end{array} \right),$$

где блок R_0 имеет размер $l \times l$ и соответствует вершинам-аттракторам. Рассмотрим матрицу

$$R_{new} = \left(\begin{array}{c|c} R_0 + R_S & R_1 \\ \hline R_2 & R_3 \end{array} \right),$$

где R_S – квазисимметричная матрица, у которой суммы элементов соответствующих строк и столбцов совпадают. Элементы этой матрицы могут быть как положительными, так и отрицательными, однако по абсолютной величине они не превосходят соответствующих элементов матрицы R_0. То есть матрица R_{new} неотрицательна.

Обозначим сумму всех элементов блока R_0 через r_{0sum}, сумму элементов матрицы R_S через r_{S_sum}; T_{new} – пороговое значение новой сети; $\tilde{Q}_{new}$ – предельное состояние при $W = T_{new}$.

Теорема 1. Матрица R_{new} полученная из исходной матрицы R, задает ресурсную сеть без ограничений, в которой

1) аттракторами являются те же вершины, что и в сети с матрицей R;

2) компоненты вектора $\tilde{Q}_{new}$ при $W = T_{new}$, соответствующие неаттрактивным вершинам совпадают с компонентами вектора $\tilde{Q}$ исходной сети $W = T$;

3) компоненты вектора $\tilde{Q}_{new}$ при $W = T_{new}$ для аттракторов равны суммам соответствующих строк матрицы R_{new}, и для них выполняется соотношение

$$r_{i\_new}^{out} = r_i^{out} + r_{i\_S}^{out}.$$

4) пороговое значение новой сети вычисляется по формуле

$$T_{new} = T + r_{S\_sum}.$$

Доказательство см. в приложении.

Если блок R_0 матрицы исходной сети заменяется блоком $R_0 + R_S$ в рамках условия теоремы 1, такие изменения будем называть *допустимыми.*

Таким образом, *допустимо* изменяя пропускные способности ребер между аттракторами, мы не влияем на остальные компоненты вектора предельного состояния, хотя при таких изменениях два верхних блока стохастической матрицы становятся другими.

Следующая теорема определяет параметры сети с ограничениями при таких изменениях.

Теорема 2. При любых допустимых изменениях матрицы R:

1) пороговое значение T^{II} изменяется и вычисляется по формуле

$$T_{new}^{\text{II}} = T^{\text{II}} + r_{S\_sum};$$

2) при фиксированном $W \in (T_{new}, T_{new}^{\text{II}}]$ компоненты вектора состояния в сети с ограничениями, соответствующие неаттрактивным вершинам, не изменяется;

3) в первичных аттракторах предельное состояние достигается за конечное время и количество ресурса равно новым выходным пропускным способностям этих вершин;

4) во вторичных аттракторах суммарное количество ресурса изменяется на величину, равную ($-\, r_{S\_sum}$).

Доказательство см. в приложении.

Из теорем 1 и 2 следует, что с помощью допустимых изменений можно увеличивать элементы матрицы R_0 на любую, сколь угодно большую величину.

Тогда вновь рассмотрим переходную матрицу $R'S'^{-1}(t)$:

$$R'S'^{-1}(t)=\left(\begin{array}{c|c} R_0' & R_1' \\ \hline R_2' & R_3' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -D(t)R_2'\mathrm{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & D(t) \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} R_0'-R_1'D(t)R_2'\mathrm{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & R_1'D(t) \\ \hline R_2'-R_3'D(t)R_2'\mathrm{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & R_3'D(t) \end{array}\right).$$

Блок $R_2' - R_3'D(t)\, R_2'\, \mathrm{diag}(c_1(t), \ldots, c_l(t))$ неотрицателен в силу определения сети с ограничениями. Пропускные способности ребер от неаттрактивных вершин к аттракторам уменьшаются, но всегда остаются положительными, если были положительны в исходной сети.

Отрицательные элементы могут присутствовать только в блоке $R_0' - R_1'D(t)\, R_2'\, \mathrm{diag}(c_1(t), \ldots, c_l(t))$. Однако с помощью допустимого изменения матрицы R_0 можно настолько увеличить элементы матрицы R_0', что все элементы блока будут неотрицательны, и матрица из псевдостохастической превратится в стохастическую. В самом деле, при увеличении элементов R_0' элементы матрицы R_1' уменьшаются. Остальные множители вычитаемого постоянны и ограничены. При этом все характеристики новой сети однозначно определяются по характеристикам прежней сети. Компоненты предельного вектора для неаттрактивных вершин не изменяются.

Таким образом, каждой псевдостохастической матрице можно поставить в соответствие стохастическую матрицу, которой описывается сеть, эквивалентная данной.

5. *Неоднородные цепи Маркова и пороговое значение T^{II}*

В этом разделе мы докажем существование предельного потока при $W \in (T, T^{II}]$. Если предельный поток при таком суммарном ресурсе существует, отсюда автоматически следуют

– существование предельного потока при $W > T^{II}$ (поскольку суммарный поток при этом перестает изменяться и совпадает с потоком при $W = T^{II}$);
– существование предельного состояния при любом $W > T$.

5.1. НЕОДНОРОДНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Исследуем закон функционирования (2), имеющий место при $W \in (T, T^{II}]$.

Если матрица $R'S'^{-1}(t)$ не стохастическая, поставим ей в соответствие стохастическую матрицу, *допустимо* увеличив пропускные способности ребер между аттракторами. Это преобразование всегда взаимно однозначно, и по вектору состояния новой сети восстанавливается вектор состояния исходной на любом такте. Поэтому, не нарушая общности, будем полагать, что матрица $R'S'^{-1}(t)$ – стохастическая.

Введем некоторые определения из теории неоднородных цепей Маркова.

Неоднородная цепь Маркова называется *слабо эргодической*, если все переходные матрицы регулярны и однотипны [2, 15, 16] (две матрицы называются *однотипными*, если все их ненулевые элементы находятся в одинаковых позициях). Слабая эргодичность означает, что в матрице

$$R_t^{'} = \prod_{i=1}^{t} R'(i)$$

при $t \to \infty$ разница между строками исчезает, однако предела может не существовать.

Для сильной эргодичности должно выполняться условие

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{t} R'(i) = 1\pi^{\mathrm{T}} ,$$

где **1** – вектор-столбец из n единиц, π – некоторый вероятностный вектор.

Рассмотрим неоднородную цепь Маркова, порожденную функционированием сети при $W \in (T, T^{\text{II}}]$.

$$Q(t+k) = Q(t)\prod_{i=0}^{k-1} R' S'^{-1}(t+i).$$

По построению она является слабо эргодической.

Тогда при $k \to \infty$ получим последовательность предельных матриц с одинаковыми строками. Обозначим их через R_j^∞, $j = 1, 2, \ldots$ Этим матрицам соответствует последовательность предельных векторов

$$Q^*_{j+1} = Q(t)R_j^\infty.$$

При этом $Q^*_{j+1} = Q^*_j R'S'^{-1}(t+j)$, где t – достаточно велико.

Докажем, что неоднородная цепь Маркова, заданная соотношением (2), сильно эргодическая, и векторы Q_j^* – это один и тот же вектор предельного состояния. Для этого докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Существует $\lim\limits_{t\to\infty} S'^{-1}(t)$.

Доказательство.

Первые l компонент векторов Q_j^* остаются неизменными, так как они соответствуют вершинам-аттракторам, на которые поставлены ограничения. Следовательно, при $t \to \infty$ в матрице

$$R'S'^{-1}(t) = \left(\begin{array}{c|c} R_0' - R_1'D(t)R_2'\operatorname{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & R_1'D(t) \\ \hline R_2' - R_3'D(t)R_2'\operatorname{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & R_3'D(t) \end{array}\right)$$

первые l столбцов имеют предел. Но это означает, что существуют пределы для двух левых блоков матрицы $R'S'^{-1}(t)$. Следовательно, последовательности $c_i(t)$ сходятся, и сходятся последовательности матриц

$$D(t) = \left(E - \operatorname{diag}\left((c_1(t),\ldots,c_l(t))R_2'^{\mathrm{T}}\right)\right)^{-1}.$$

Отсюда пределы матриц $R'S'^{-1}(t)$ и $S'^{-1}(t)$ существуют. □

Утверждение 4. Неоднородная цепь Маркова со стохастическими матрицами $R'S'^{-1}(t)$ сильно эргодическая.

Доказательство.

По лемме 1 существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} S'^{-1}(t) = S'^{*-1}$.

Тогда

$$Q^*_{j+1} = Q^*_j R' S'^{*-1}.$$

Но $R'S'^{*-1}$ – стохастическая матрица некоторой регулярной однородной цепи Маркова. Тогда предел ее степеней существует и равен стохастической матрице с одинаковыми строками.

Таким образом, совершив еще один предельный переход, получим:

$$\lim_{k\to\infty} Q^*_{j+k} = Q^*_j \lim_{k\to\infty}\left(R' S'^{*-1}\right)^k = Q^*_j R'^{*},$$

где R''^* – предельная матрица регулярной однородной цепи Маркова. При этом

$$\lim_{k\to\infty} Q^*_{j+k} = Q^*$$

– предельный вектор этой цепи Маркова, являющийся левым собственным вектором матрицы R''^*, соответствующим собственному числу $\lambda = 1$:

$Q^* = Q^* R''^*$.

Это означает, что исходная неоднородная цепь Маркова – сильно эргодическая и $\lim\limits_{t\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{t} R' S'^{-1}(i)$ существует и равен R''^*. □

Кроме того, матрица R''^* состоит из одинаковых строк, каждая из которых равна собственному вероятностному вектору матрицы R''^*. В терминах ресурсной сети это вектор предельного распределения единичного ресурса $Q^{1*''}$ для семейства сетей, заданного некоторой регулярной стохастической матрицей R'':

$Q^{1*''} R'' = Q^{1*''}$;

$R''^* = \mathbf{1} Q^{1*''}$;

$Q^{1*''} R''^* = Q^{1*''}$.

Обобщим полученные результаты на псевдостохастические матрицы и, соответственно, на любую сеть с ограничениями на аттракторы.

Теорема 3. В регулярной несимметричной сети с ограничениями на аттракторы при $W \in (T, T^{\mathrm{II}}]$ предельное состояние существует, единственно и является собственным вектором матрицы

$$R''^{*} = \lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{t} R' S'^{-1}(i).$$

Доказательство.

Если $R'S'^{-1}(i)$ – стохастические матрицы, доказательство следует из утверждения 4.

Если $R'S'^{-1}(i)$ – псевдостохастические матрицы, доказательство следует из того, что любой псевдостохастической матрице можно поставить в соответствие стохастическую матрицу, которая будет описывать сеть, все вершины которой (за исключением первичных аттракторов) при любом суммарном ресурсе функционируют идентично вершинам исходной сети и имеют то же количество ресурса на каждом такте. Ресурс в первичных аттракторах вычисляется по формулам теоремы 1.

Таким образом, между векторами состояния и переходными матрицами двух сетей установлено взаимно однозначное соответствие. И существование предельной матрицы и предельного состояния в одной сети влечет за собой их существование в другой. □

Предел произведений псевдостохастических матриц $R'S'^{-1}(i)$ является стохастической матрицей и существует стохастическая матрица R'', задающая регулярную однородную цепь Маркова, что $Q^{1*''}$ – ее предельный вектор распределения вероятностей и выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{t} R' S'^{-1}(i) = \mathbf{1}Q^{1*''} = R''^{*}.$$

Пока все вершины функционируют по правилу 2, любой вектор предельного состояния пропорционален $Q^{1*''}$:

$Q^{*} = WQ^{1*''}$.

Предельный вектор $Q^{1*''}$ является единственным собственным вектором регулярной стохастической матрицы R'', соответствующим максимальному собственному числу $\lambda = 1$.

При увеличении суммарного ресурса W компоненты вектора предельного состояния растут пропорционально. Закон распределения ресурса изменится тогда и только тогда, когда одна или несколько вершин получат ресурс, больший своей выходной пропускной способности, и перейдут на правило 1.

Напомним, что R''^* – предельная стохастическая матрица сети с ограничениями на аттракторы при $p = 0$. Первичные аттракторы уже ограничены. Поэтому при увеличении W на правило 1 перейдут вершины, отличные от них. Количество суммарного ресурса, при котором одна или несколько вершин, не являющихся первичными аттракторами, достигают значения r_k^{out}, является пороговым: $W = T^{\text{II}}$. При $W > T^{\text{II}}$ поток перестает увеличиваться (он стабилизируется на значении T^{II}), а закон распределения ресурса (2) изменяется. При $p > 0$ для стабилизации потока суммарный ресурс должен превзойти значение $T^{\text{II}} + lp$. Суммарный предельный поток при этом по-прежнему будет равен T^{II}.

5.2. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СЕТИ ПРИ $W = T^{\text{II}}$

Существование предельного состояния при $W \in (T, T^{\text{II}}]$ доказано в теореме 3. T^{II} – пороговое значение ресурса, при котором начинается накопление во вторичных аттракторах, а суммарный поток в сети перестает расти и стабилизируется на величине T^{II}. Существование T^{II} доказано в утверждении 2 [9]. Докажем его единственность.

Теорема 4. В регулярной несимметричной сети с ограничениями на аттракторы пороговое значение T^{II}, такое что при $W \leq T^{\text{II}} + lp$ функционирование сети происходит по закону (2), а при $W > T^{\text{II}} + lp$ в зоне $Z^+(t)$, начиная с некоторого момента t', находится хотя бы одна вершина, не являющаяся первичным аттрактором, единственно.

Доказательство вытекает из единственности (с точностью до множителя) собственного вектора Q^* регулярной матрицы R'', соответствующего собственному числу $\lambda = 1$. Из этого следует, что при $W \in (T, T^{\text{II}}]$ вектор предельного состояния единственен. T^{II} – такое значение ресурса, при котором компоненты вектора предельного состояния, соответствующие вторичным аттракторам, достигают значения r_j^{out}. T^{II} – сумма компонент такого вектора предельного состояния. □

Исследуем поведение сети при $W = T^{\mathrm{II}}$. Будем обозначать вектор предельного состояния при $W = T^{\mathrm{II}}$ через $\hat{Q}$.

Положим, что $W = T^{\mathrm{II}}$, и в равенстве (2) и перейдем к пределу по времени. Имеем:

(4) $$\hat{Q} = \hat{Q}R'\hat{S}'^{-1},$$

(5) $$\hat{S}'^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -\left(E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2'^{\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} R_2'\mathrm{diag}(\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l) & \left(E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2'^{\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} \end{array}\right).$$

Предельные значения коэффициентов $\hat{c}_i$ рассчитываются по формуле

$$\hat{c}_i = \frac{\Delta\hat{q}_i}{\sum\limits_{k=l+1}^{n} \dfrac{r_{ki}}{r_k^{out}}\hat{q}_k},$$

где в числителе находится i-я координата вектора $\Delta\hat{Q} = \hat{Q}R' - \left(r_1^{out},\ldots,r_l^{out},0,\ldots,0\right)$, $i = 1, \ldots, l$.

Матрица $R'\hat{S}'^{-1}$ в общем случае псевдостохастическая. Элементы ее верхнего левого блока могут быть отрицательными. Кроме того, строки этой матрицы различны. Это следует непосредственно из формул (4), (5). То есть матрица $R'\hat{S}'^{-1}$, являясь предельной, не совпадает ни с какой предельной матрицей регулярной однородной цепи Маркова, которая состоит из n одинаковых положительных строк. Однако для любой матрицы $R'\hat{S}'^{-1}$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. Предел степеней $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^t$ при $t \to \infty$ существует и равен предельной матрице однородной цепи Маркова с предельным распределением вероятностей $\dfrac{1}{T^{\mathrm{II}}}\hat{Q}$:

$$\lim_{t\to\infty}\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^t = \frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\left(\mathbf{1}\cdot\hat{Q}\right),$$

где **1** – вектор-столбец, состоящий из n единиц.

Доказательство. Существование предельной матрицы $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty}$ следует непосредственно из утверждения 4 (для стохастической) и теоремы 3 для псевдостохастической матрицы $R'\hat{S}'^{-1}$.

Для нахождения этой предельной матрицы рассмотрим два случая.

1) Матрица $R'\hat{S}'^{-1}$ – стохастическая. Тогда матрица $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty}$ – предел степеней стохастической матрицы, все ее строки одинаковы:

$$\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty} = \mathbf{1}\cdot\pi,$$

где π – некоторый вероятностный вектор-строка, причем π – левый собственный вектор матрицы $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty}$.

Вектор $\frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\hat{Q}$ также является левым собственным вектором этой матрицы. Поскольку этот вектор для регулярной цепи Маркова единственен (с точностью до множителя) [10], имеем

$$\pi = \frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\hat{Q}.$$

И непосредственно отсюда вытекает, что

$$\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty} = \frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\left(\mathbf{1}\cdot\hat{Q}\right).$$

2) Матрица $R'\hat{S}'^{-1}$ имеет отрицательные элементы. Так как предел ее степеней существует (см. доказательство теоремы 3), имеет место равенство:

$$\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty} = \left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty}.$$

Из теоремы 3 следует, что элементы матрицы $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty}$ неотрицательны. Каждый столбец матрицы $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty}$ является правым собственным вектором матрицы $R'\hat{S}'^{-1}$. Для регулярной сети это означает, что все столбцы матрицы $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty}$ пропорциональны единичному вектор-столбцу **1**. Из этого следует, что строки матрицы $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty}$ одинаковы, и теми же рассуждениями можно показать, что

$$\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty} = \frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\left(\mathbf{1}\cdot\hat{Q}\right). \square$$

Замечание. При доказательстве утверждения мы не прибегали к допустимым преобразованиям матрицы пропускных способностей. Поэтому вектор $\frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\hat{Q}$ и полученная предельная матрица являются характеристиками данной произвольной сети, независимо от наличия отрицательных элементов в ее переходных матрицах.

Непосредственно из утверждения 5 следует, что каждой сети с ограничениями можно единственным образом поставить в соответствие регулярную однородную цепь Маркова с матрицей R'', задающую новую сеть без ограничений со следующими параметрами:

1) предельный вектор распределения единичного ресурса:

$$Q^{1*''} = \frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\hat{Q};$$

2) пороговое значение: $T'' = T^{\mathrm{II}}$;

3) вектор предельного состояния при $W = T''$: $\tilde{Q}'' = \hat{Q}$;

4) предел степеней стохастической матрицы:

$$R''^{\infty} = \frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\left(\mathbf{1}\cdot\hat{Q}\right).$$

6. Предельные характеристики сети с ограничениями

Полученные результаты позволяют сформулировать критерий вторичной аттрактивности вершин, а также найти векторы предельного состояния и потока при разных суммарных ресурсах.

Лемма 2. Неаттрактивная вершина регулярной несимметричной сети без ограничений при наложении ограничений является вторичным аттрактором тогда и только тогда, когда при $W = T^{\text{II}}$ для нее выполняется $\hat{q}_k = r_k^{out}$.

Доказательство следует из того, что вектор $\hat{Q}$ единственен и поэтому равенство $\hat{q}_k = r_k^{out}$ будет выполняться при любом начальном состоянии для одних и тех же индексов *k*. Для всех остальных вершин выполняется строгое неравенство: $\hat{q}_j < r_j^{out}$. При увеличении суммарного ресурса сверх $W = T^{\text{II}}$ по утверждению 2 [9] предельный поток в сети неизменен. Это означает, что ресурс во всех вершинах, функционирующих по правилу 2, также не изменяется (поскольку они отдают и получают весь свой ресурс). Следовательно, все значения компонент вектора предельного состояния Q^*, соответствующие неаттрактивным вершинам, при любом, сколь угодно большом, ресурсе будут иметь значения $q_j^* = \hat{q}_j < r_j^{out}$. Все излишки будут скапливаться в вершинах, для которых $\hat{q}_k = r_k^{out}$, и при этом на них нет ограничений. А это и есть вторичные аттракторы. □

При $W = T^{\text{II}}$ выполняется равенство $\hat{Q} = \hat{Q}R''^*$. Однако предел произведений псевдостохастических матриц R''^* при этом также является пределом степеней некоторой стохастической матрицы *R*'', задающей однородную цепь Маркова. Определим одну из возможных таких стохастических матриц.

Если матрица $R'\hat{S}'^{-1}$ (формула (4)) псевдостохастическая, допустимыми изменениями матрицы *R* приведем ее к стохастической.

Любая стохастическая матрица задает семейство сетей, которому соответствует семейство матриц пропускных способностей, соответствующие строки которых пропорциональны, выберем ту из них, пороговое значение *T* которой совпадает с T^{II} исходной сети. При этом для всех первичных и вторичных аттракторов будет выполнено равенство $\tilde{q}_k = r_k^{out}$, т.е. и первичные, и вторичные аттракторы исходной сети являются первичными аттракторами индуцированной сети.

Зададим новую индуцированную сеть матрицей R^{new} по формуле

(6) $$R^{new} = \mathrm{diag}(r_1^{out},\ldots,r_n^{out})R'\hat{S}'^{-1}.$$

У этой сети аттракторами являются первичные и вторичные аттракторы сети, заданной матрицей R. В самом деле, у сети с матрицей R, имеющей вид

$$R = \mathrm{diag}(r_1^{out},\ldots,r_n^{out})R',$$

аттракторы (они же первичные аттракторы) – вершины $v_1, \ldots, v_l$, а у сети с матрицей R^{new} по построению $v_1, \ldots, v_l$ остаются аттракторами, но к ним добавляется еще одна или несколько вершин, способных в предельном состоянии при наличии ограничений (т.е. при умножении матрицы R' на матрицу $\hat{S}'^{-1}$), набрать ресурс, равный выходной пропускной способности – по определению вторичных аттракторов.

Таким образом, зная предельный вектор распределения ресурса при $W = T^{\mathrm{II}}$, можно построить однородную цепь Маркова, эквивалентную данной неоднородной в том смысле, что их предельные состояния при $W = T^{\mathrm{II}}$ совпадают.

Для $Q^{1*}{}''$ и $\hat{Q}$ выполняется соотношение

$$Q^{1*}{}'' = \frac{1}{T^{\mathrm{II}}}\hat{Q}.$$

Более того, легко обобщить этот результат и найти матрицу $S'^{*-1}(W)$, которая будет задавать эквивалентную однородную цепь Маркова для любого суммарного ресурса в исходной сети с ограничениями на интервале $W \in (T, T^{\mathrm{II}}]$. Она будет задаваться по формуле (5) с той лишь разницей, что коэффициенты $\hat{c}_i$ будут зависеть от суммарного ресурса. Обозначим их через $c_i^* = c_i^*(W)$:

(7) $$c_i^*(W) = \frac{\Delta q_i^*(W)}{\sum\limits_{k=l+1}^{n} \frac{r_{ki}}{r_k^{out}}\hat{q}_k},\ i = 1, \ldots, l;$$

$q_j^*(W)$ – значения соответствующих компонент вектора предельного состояния при суммарном ресурсе, равном W.

При этом матрица пропускных способностей этой сети такова, что пороговое значение T в ней равно суммарному ресурсу сети с ограничениями W. То есть,для каждого W строится сеть, для которой это значение будет пороговым. Предельное состояние этой сети совпадает с предельным состоянием исходной сети с ограничениями.

По лемме 2 вершина является вторичным аттрактором тогда и только тогда, когда при $W = T^{\mathrm{II}}$ для нее выполняется: $\hat{q}_k = r_k^{out}$ и она не является первичным аттрактором. Сформулируем критерий вторичной аттрактивности, позволяющий определять вторичные аттракторы по индуцированной однородной цепи Маркова и соответствующей ей матрице пропускных способностей.

Теорема 5 (*критерий вторичной аттрактивности*). Неаттрактивная вершина v_j регулярной несимметричной сети без ограничений с матрицей пропускных способностей R при наложении ограничений является вторичным аттрактором тогда и только тогда, когда в индуцированной сети R^{new} (формула (6)) для нее выполняется

$$(8)\qquad j = \arg\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}} .$$

Доказательство см. в приложении.

Полученный результат позволяет, зная параметры индуцированной сети без ограничений, найти величину порогового значения T^{II} для сети с ограничениями.

Теорема 6 (*о пороговом значении*). Пороговое значение T^{II}, такое что в регулярной несимметричной сети с ограничениями на емкость аттракторов, заданной матрицей пропускных способностей R, и такое что при $W > T^{\mathrm{II}} + lp$ начинается накопление ресурса сверх выходных пропускных способностей во вторичных аттракторах, находится по формуле

$$T^{\mathrm{II}} = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*new}},$$

где q_i^{1*new} – элементы вектора предельных вероятностей цепи Маркова со стохастической матрицей R'^{new}.

Доказательство см. в приложении.

Следующая теорема дает оценку границ, в которых может изменяться пороговое значение T^{II}.

Теорема 7 (*оценка порогового значения*). Для порогового значения T^{II} выполняется соотношение:

$$T + \sum_{k=l+1}^{m}\left(r_k^{out} - \tilde{q}_k\right) < T^{\mathrm{II}} < r_{sum},$$

где $\tilde{q}_k$, $k = l + 1, \ldots, m$, – компоненты вектора предельного состояния при $W = T$ во вторичных аттракторах.

Доказательство см. в приложении.

Сформулируем общую теорему о предельном состоянии сети с ограничениями.

Теорема 8 (*о предельном состоянии*). В регулярной несимметричной сети с ограничениями на аттракторы p предельное состояние Q^* существует при любом значении суммарного ресурса W. При этом существуют два пороговых значения T и T^{II} ($0 < T < T^{\mathrm{II}} < r_{sum}$), такие что:

1) при $W \in (0, T]$ предельное состояние единственно и находится по формуле $Q^* = W\,Q^{*1}$;

2) при $W \in (T, T + lp]$ предельное состояние единственно при $l = 1$; при $l > 1$ предельное состояние единственно во всех вершинах, кроме аттракторов:

$$Q^* = (r_1^{out} + \Delta q_1^*, \ldots, r_l^{out} + \Delta q_l^*, \tilde{q}_{l+1}, \ldots, \tilde{q}_n),$$

где $\tilde{q}_i$ – компоненты вектора предельного состояния при $W = T$: $\tilde{Q} = (r_1^{out},\ldots,r_l^{out},\tilde{q}_{l+1},\ldots,\tilde{q}_n)$.

3) при $W \in (T + lp,\ T^{\text{II}} + lp]$ предельное состояние единственно. Оно состоит из суммы двух векторов: $Q^* = P + Q_W^*$, где $P = (p, \ldots, p, 0, \ldots, 0)$, а Q_W^* является собственным вектором стохастической матрицы $R'S'^{*-1}(W)$ (формула (5)), параметры $c_i^* = c_i^*(W)$ которой рассчитываются по формуле (7). Матрица пропускных способностей индуцированной сети $R^{new}(W)$ находится по формуле

$$R^{new}(W) = \text{diag}(r_1^{out},\ldots,r_n^{out})R'S'^{*-1}(W).$$

На правом конце полуинтервала при $W = T^{\text{II}} + lp$ вектор предельного состояния имеет вид:

$$Q^* = P + \hat{Q} = \left(r_1^{out} + p,\ldots, r_l^{out} + p, r_{l+1}^{out},\ldots, r_m^{out}, \hat{q}_{m+1},\ldots, \hat{q}_n\right).$$

4) при $W \in (T^{\text{II}} + lp, \infty]$, предельное состояние единственно с точностью до излишков во вторичных аттракторах. Оно находится по формуле

$$Q^* = \left(r_1^{out} + p,\ldots,r_l^{out} + p, r_{l+1}^{out} + \Delta q_{l+1}^*,\ldots,r_m^{out} + \Delta q_m^*, \hat{q}_{m+1},\ldots,\hat{q}_n\right),$$

где вторичные аттракторы имеют номера от $l + 1$ до m; $\hat{Q}$ –собственный вектор стохастической матрицы $R'\hat{R}'^{-1}$, соответствующий собственному числу $\lambda = 1$; Δq_j^*, $j = l + 1, \ldots, m$, – излишки ресурса сверх $T^{\text{II}} + lp$, распределенные между вторичными аттракторами.

7. Примеры применения полученных результатов для нахождения вторичных аттракторов и предельных состояний

Пример 1. *Сеть с одним аттрактором.*

Пусть сеть с пятью вершинами задана матрицей пропускных способностей:

$$R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\3&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Введем ограничение на аттракторы: $p = 5$.

Нужно найти вторичный аттрактор, первое и второе пороговые значения и найти вектор предельного состояния на каждом из описанных интервалов.

Вычислим все характеристики сети. Всюду, где значения вычислены с некоторой точностью, будем полагать, что имеют место приблизительные равенства. В примере вычисления приводятся с довольно высокой точностью, потому что в противном случае погрешности не позволяют наглядно продемонстрировать эффект вторичной аттрактивности.

1. При $W = 1$ вектор предельного состояния: Q^{1*}= (0,2358; 0,2139; 0,1834; 0,1834; 0,1834);

2. Аттрактор в этой сети – вершина v_1. Для нее выполняется условие:

$$j=\arg\min_{i\in\{1,\dots,n\}}\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}};$$

3. $$T=\min_{i\in\{1,\dots,n\}}\frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}=\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}}=\frac{5}{0,2358}=21,204;$$

4. При $W = T$ вектор предельного состояния будет: $\tilde{Q}=(5;\,4,537;\,3,(8);\,3,(8);\,3,(8))$.

В полуинтервале $(T, T + lp]$ = (21,204; 26,204] предельный поток стабилен и равен 21,204, а все излишки ресурса скапливаются в первичном аттракторе – вершине v_1.

5. Найдем экспериментально значение T^{II}. Для этого рассмотрим функционирование сети с ограничением при заведомо большом ресурсе (заведомо выполняется: $W > T^{\mathrm{II}} + lp$).

По теореме 7 $T^{\mathrm{II}} < r_{sum}$. Для данной сети $r_{sum} = 28$; $l = 1$, $p = 5$. Тогда суммарный ресурс можно взять $W > 33$. Положим $W = 35$. Динамика ресурса в каждой вершине представлена на рис. 1.

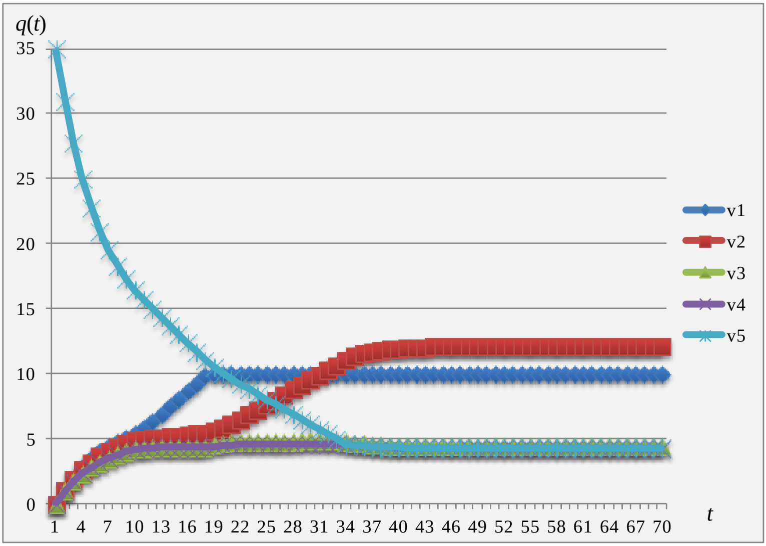

Рис. 1. Функционирование сети с ограничением на емкость аттрактора p = 5 и начальным состоянием $Q(0) = (0, 0, 0, 0, 35)$ (*вершина* v_2 *– вторичный аттрактор*)

Предельное состояние будет $Q^* = (10{,}0; 12{,}0867; 4{,}3768; 4{,}2610; 4{,}2754)$.

При $W > T^{\text{II}} + lp$ предельный поток в сети стабилизируется и равен T^{II}.

Поскольку $\hat{Q}$ – это вектор предельного состояния при $W = T^{\text{II}}$ и для него ресурс во вторичном аттракторе равен его выходной пропускной способности, ясно, что этот вектор отличается от Q^* только первыми двумя компонентами. Из q_1^* нужно вычесть ограничение $p = 5$, в q_2^* оставить ресурс, равный выходной пропускной способности этой вершины:

$\hat{Q} = (\mathbf{5{,}0}; \mathbf{5{,}0}; 4{,}37679; 4{,}26104; 4{,}27543)$.

Отсюда легко видно, что $T^{\text{II}} = 22{,}9133$; для ограничения $p = 5$: $T^{\text{II}} + lp = T^{\text{II}} + 1{\cdot}5 = 27{,}9133$.

В полуинтервале $(T + lp, T^{\text{II}} + lp] = (26{,}204; 27{,}913]$ предельный поток возрастает с возрастанием W и равен $W - lp$ (в данном случае $W - 5$).

При $W > 27{,}9133$ предельный поток стабилизируется на величине, равной $T^{\mathrm{II}} = 22{,}9133$.

6. Найдем новую стохастическую матрицу, задающую однородную цепь Маркова, с собственным вектором, который при $W = T^{\mathrm{II}}$ совпадает с вектором $\hat{Q}$. Это матрица $R'\hat{R}'^{-1}$, где R' – стохастическая матрица, полученная из матрицы пропускных способностей R:

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$\hat{S}'^{-1}$ вычисляется по формуле (5).

Для того чтобы найти $\hat{S}'^{-1}$, нужно вычислить коэффициенты $\hat{c}_i$, $i = 1, \ldots, l$. Поскольку аттрактор в сети один, нужно вычислить только $\hat{c}_1$:

$$\hat{c}_1 = \frac{\Delta\hat{q}_1}{\sum_{k=2}^{5} \frac{r_{k1}}{r_k^{out}} \hat{q}_k}.$$

В числителе стоит величина, на которую суммарный входной поток в аттрактор превосходит его выходную пропускную способность. В знаменателе стоит сам входной поток, за исключением потока, пришедшего по петле.

Чтобы найти эти значения, умножим вектор $\hat{Q}$ на матрицу R'. Имеем: $\hat{Q}R' = (5{,}4410;\ 4{,}9007;\ 4{,}1905;\ 4{,}1905;\ 4{,}1905)$. Отсюда

$$\Delta\hat{q}_1 = 5{,}4410 - 5 = 0{,}4410;$$

$$\sum_{k=2}^{5}\frac{r_{k1}}{r_k^{out}}\hat{q}_k = 5,4410 - 1 = 4,4410\,,$$

где 1 – поток, пришедший по петле. Все значения для расчета $\hat{c}_1$ известны.

$$c_1^* = \frac{0,4410}{4,4410} = 0,0993\,.$$

Найдем матрицу $\hat{S}'^{-1}$ по формуле (5). Для этого выпишем матрицу $R_2^{'}$. Разделим матрицу R' на блоки:

$$R' = \left(\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Тогда

$$R_2^{'} = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right)^{\mathrm{T}} = (0,2;\, 0,4286;\, 0,1667;\, 0,2)^{\mathrm{T}}\,.$$

Вычислим все блоки матрицы $\hat{S}'^{-1}$:

$$\hat{S}'^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -\left(E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2^{'\,\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} R_2^{'}\mathrm{diag}(\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l) & \left(E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2^{'\,\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} \end{array}\right);$$

$$\left(E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2^{'\,\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \left(E - \mathrm{diag}\left(0,0993(0,2;\, 0,4286;\, 0,1667;\, 0,2)\right)\right)^{-1} =$$

$$= \left(E - \mathrm{diag}\left((0,01987;\, 0,04256;\, 0,01655;\, 0,01987)\right)\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,0203 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0444 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0168 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0203 \end{pmatrix};$$

$$-\left(E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2^{'\,\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} R_2^{'}\mathrm{diag}(\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l) =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1,0203 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0444 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0168 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0203 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,01987 \\ 0,04256 \\ 0,01655 \\ 0,01987 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0203 \\ -0,0444 \\ -0,0168 \\ -0,0203 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\hat{S}'^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0,0203 & 1,0203 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0444 & 0 & 1,0444 & 0 & 0 \\ -0,0168 & 0 & 0 & 1,0168 & 0 \\ -0,0203 & 0 & 0 & 0 & 1,0203 \end{array}\right).$$

Новая стохастическая матрица однородной цепи Маркова будет иметь вид

$$R'\hat{S}'^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0,0203 & 1,0203 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0444 & 0 & 1,0444 & 0 & 0 \\ -0,0168 & 0 & 0 & 1,0168 & 0 \\ -0,00203 & 0 & 0 & 0 & 1,0203 \end{array}\right);$$

$$R'\hat{S}'^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \\ 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \\ 0{,}4140 & 0{,}1458 & 0{,}1492 & 0{,}1453 & 0{,}1458 \\ 0{,}1463 & 0{,}3401 & 0{,}1741 & 0{,}1695 & 0{,}1700 \\ 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли вектор $\hat{Q}$ = (5,0; 5,0; 4,37679; 4,26104; 4,27543) левым собственным вектором этой матрицы. Нетрудно убедиться, что

$$(5; 5; 4{,}37679; 4{,}26104; 4{,}27543)\begin{pmatrix} 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \\ 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \\ 0{,}4140 & 0{,}1458 & 0{,}1492 & 0{,}1453 & 0{,}1458 \\ 0{,}1463 & 0{,}3401 & 0{,}1741 & 0{,}1695 & 0{,}1700 \\ 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \end{pmatrix} =$$

= (5; 5; 4,37679; 4,26104; 4,27543).

Разделим компоненты вектора $\hat{Q}$ на величину T^{II} = 22,9133, чтобы получить равновесный вектор распределения единичного ресурса однородной цепи Маркова и предельную матрицу этой цепи R^{*}''.

Q^{1*}'' = (0,2182; 0,2182; 0,1910; 0,1860; 0,1866).

Матрица R^{*}'' состоит из n одинаковых строк Q^{1*}''.

Нетрудно проверить, что

$\hat{Q}R^{*}{''} = \hat{Q}$.

Матрица $\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{t}$ также сходится к матрице R^{*}''.

Умножим матрицу $R'\hat{S}'^{-1}$ слева на диагональную матрицу, полученную из вектора выходных пропускных способностей вершин сети:

$R^{new} = \operatorname{diag}(r_1^{out},\ldots,r_n^{out})R'\hat{S}'^{-1}$.

Тем самым образуем новую сеть, пороговое значение которой $T^{new} = T^{\text{II}}$, а предельный вектор состояний при $W = T^{\text{II}}$ совпадает с вектором состояний исходной сети с ограничениями на аттракторы при $W = T^{\text{II}}$.

$$R^{new} = \mathrm{diag}(5;5;7;6;5)\begin{pmatrix} 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \\ 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \\ 0{,}4140 & 0{,}1458 & 0{,}1492 & 0{,}1453 & 0{,}1458 \\ 0{,}1463 & 0{,}3401 & 0{,}1741 & 0{,}1695 & 0{,}1700 \\ 0{,}1796 & 0{,}2041 & 0{,}2089 & 0{,}2034 & 0{,}2041 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8982 & 1{,}0203 & 1{,}0444 & 1{,}0168 & 1{,}0203 \\ 0{,}8982 & 1{,}0203 & 1{,}0444 & 1{,}0168 & 1{,}0203 \\ 2{,}8982 & 1{,}0203 & 1{,}0444 & 1{,}0168 & 1{,}0203 \\ 0{,}8779 & 2{,}0405 & 1{,}0444 & 1{,}0168 & 1{,}0203 \\ 0{,}8982 & 1{,}0203 & 1{,}0444 & 1{,}0168 & 1{,}0203 \end{pmatrix}.$$

Эта сеть имеет два первичных аттрактора: вершины v_1 и v_2.

Убедимся в этом, вычислив отношения $\dfrac{r_i^{out}}{q_i^{1*"}}$ для каждой вершины:

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} = \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} = \frac{5}{0{,}2182} = 22{,}91 = T^{\mathrm{II}}, \quad \frac{r_3^{out}}{q_3^{1*}} = \frac{7}{0{,}1910} = 36{,}65,$$

$$\frac{r_4^{out}}{q_4^{1*}} = \frac{6}{0{,}1860} = 32{,}23, \quad \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} = \frac{5}{0{,}1866} = 26{,}79.$$

Как видно, на роль аттрактора третьей очереди претендует вершина v_5. Вычисленное отношение для нее наименьшее среди неаттрактивных вершин.

Пример 2. *Сеть с двумя аттракторами.*

Пусть сеть с пятью вершинами задана матрицей пропускных способностей:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой сети два первичных аттрактора – вершины v_1 и v_2. Причем аттракторы не имеют петель и не сообщаются ребрами.

Таким образом, для такой сети стохастическая матрица R' имеет нулевой блок R_0':

$$R' = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Примем, что $p = 0$.

Пороговое значение $T^{\mathrm{II}} = 21{,}1655$.

Вторичный аттрактор этой сети – нейтральная вершина v_5.

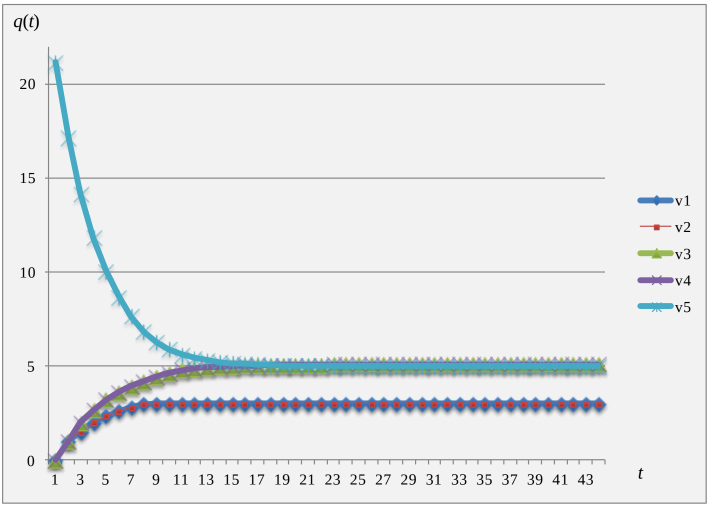

Рис. 2. Функционирование сети с ограничением на емкость аттрактора при $W = T^{\mathrm{II}}$ и $Q(0) = (0; 0; 0; 0; 21{,}1655)$ (вершина v_5 – вторичный аттрактор)

Вектор предельного состояния при $W = T^{\mathrm{II}}$:

$\hat{Q}$ = (3,0; 3,0; 5,0827; 5,0827; 5,0).

Вычислим все блоки матрицы $\hat{S}'^{-1}$. Для этого найдем $\hat{c}_1, \hat{c}_2$, умножив вектор $\hat{Q}$ на стохастическую матрицу R'.

$\hat{Q}R'$ = (3,5414; 3,5414; 4,6943; 4,6943; 4,6943).

Тогда

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \frac{0{,}5414}{3{,}5414} = 0{,}1529\,.$$

$$R_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,(3) & 0{,}1(6) \\ 0{,}1(6) & 0,(3) \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Промежуточные вычисления:

$$(\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2'^{\mathrm{T}} = (0{,}1529; 0{,}1529)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = (0{,}0765; 0{,}0765;\ 0{,}0612);$$

$$E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2'^{\mathrm{T}}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}9235 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9235 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9388 \end{pmatrix};$$

$$\left(E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2'^{\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}0828 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0828 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0652 \end{pmatrix};$$

$$-\left(E - \mathrm{diag}\left((\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)R_2'^{\mathrm{T}}\right)\right)^{-1} R_2'\mathrm{diag}(\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l) =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1{,}0828 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0828 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0652 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1529 & 0 \\ 0 & 0{,}1529 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}0552 & -0{,}0276 \\ -0{,}0276 & -0{,}0552 \\ -0{,}0326 & -0{,}0326 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\hat{S}'^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0{,}0552 & -0{,}0276 & 1{,}0828 & 0 & 0 \\ -0{,}0276 & -0{,}0552 & 0 & 1{,}0828 & 0 \\ -0{,}0326 & -0{,}0326 & 0 & 0 & 1{,}0652 \end{array}\right).$$

И, наконец, вычислим $R'\hat{S}'^{-1}$:

$$R'\hat{S}'^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0{,}0552 & -0{,}0276 & 1{,}0828 & 0 & 0 \\ -0{,}0276 & -0{,}0552 & 0 & 1{,}0828 & 0 \\ -0{,}0326 & -0{,}0326 & 0 & 0 & 1{,}0652 \end{array}\right);$$

$$R'\hat{S}'^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}0385 & -0{,}0385 & 0{,}3609 & 0{,}3609 & 0{,}3551 \\ -0{,}0385 & -0{,}0385 & 0{,}3609 & 0{,}3609 & 0{,}3551 \\ 0{,}3141 & 0{,}1474 & 0{,}1474 & 0{,}1805 & 0{,}1775 \\ 0{,}1474 & 0{,}3141 & 0{,}3141 & 0{,}1805 & 0{,}1775 \\ 0{,}1769 & 0{,}1769 & 0{,}2166 & 0{,}2166 & 0{,}2130 \end{pmatrix}.$$

Как видно, эта матрица является псевдостохастической, так как имеет отрицательные элементы.

Разделив компоненты вектора $\hat{Q}$ на пороговое значение T^{II}, получим предельный вектор распространения единичного ресурса, образующий предельную матрицу $R^{*''}$ однородной цепи Маркова:

$Q^{1*''} = (0{,}1417;\ 0{,}1417;\ 0{,}2401;\ 0{,}2401;\ 0{,}2362)$.

Матрица $R^{*''}$ состоит из n одинаковых строк $Q^{1*''}$.

Можно убедиться, что выполняется равенство

$$\hat{Q}R^{*''} = \hat{Q}.$$

При этом для предела степеней матрицы $R'\hat{S}'^{-1}$ выполняется равенство

$$\left(R'\hat{S}'^{-1}\right)^{\infty} = R^{*''}.$$

Таким образом, предел степеней псевдостохастических матриц с отрицательными элементами – стохастическая матрица с неотрицательными элементами.

Допустимые преобразования.

Произведем с исходной матрицей допустимые преобразования, с тем чтобы превратить псевдостохастическую матрицу $R'\hat{S}'^{-1}$ в стохастическую.

Увеличим все элементы блока R_0, прибавив к нему псевдостохастическую матрицу

$$R_S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$R^{new} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, R'^{new} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Вторичный аттрактор этой сети – также нейтральная вершина v_5.

Пороговое значение увеличилось на суммарную пропускную способность добавленных ребер $T^{\mathrm{II}new} = 30{,}1655$.

Вектор предельного состояния при $W = T^{\mathrm{II}new}$:

$\hat{Q}^{new} = (7{,}0;\ 8{,}0;\ 5{,}0827;\ 5{,}0827;\ 5{,}0) = \hat{Q} + (4;\ 5;\ 0;\ 0;\ 0)$.

Умножим новый вектор вектор $\hat{Q}^{new}$ на стохастическую матрицу R'^{new}:

$\hat{Q}^{new} R'^{new} = (7{,}5414;\ 8{,}5414;\ 4{,}6943;\ 4{,}6943;\ 4{,}6943)$.

Заметим, что

$\hat{Q}^{new} R'^{new} = \hat{Q}R' + (4,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0)$.

При этом на вычислении величин $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ это не отразилось. Их величины остались прежними. По определению

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \frac{0{,}5414}{3{,}5414} = 0{,}1529 .$$

Матрица R_2' не претерпела изменений. Тогда вновь:

$$\hat{S}'^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0{,}0552 & -0{,}0276 & 1{,}0828 & 0 & 0 \\ -0{,}0276 & -0{,}0552 & 0 & 1{,}0828 & 0 \\ -0{,}0326 & -0{,}0326 & 0 & 0 & 1{,}0652 \end{array}\right).$$

Имеем

$$R'^{new}\hat{S}'^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0{,}0552 & -0{,}0276 & 1{,}0828 & 0 & 0 \\ -0{,}0276 & -0{,}0552 & 0 & 1{,}0828 & 0 \\ -0{,}0326 & -0{,}0326 & 0 & 0 & 1{,}0652 \end{array}\right);$$

$$R'^{new}\hat{S}'^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2692 & 0,2692 & 0,1547 & 0,1547 & 0,1522 \\ 0,2356 & 0,3606 & 0,1354 & 0,1354 & 0,1332 \\ 0,3141 & 0,1474 & 0,1474 & 0,1805 & 0,1775 \\ 0,1474 & 0,3141 & 0,3141 & 0,1805 & 0,1775 \\ 0,1769 & 0,1769 & 0,2166 & 0,2166 & 0,2130 \end{pmatrix}.$$

Как видно, из псевдостохастической матрицы $R'\hat{S}'^{-1}$ допустимыми преобразованиями получилась одна из бесконечно многих стохастических матриц $R'^{new}\hat{S}'^{-1}$. Разница между ними заключается лишь в строках, соответствующих потенциальным аттракторам.

Убедимся, что вектор $\hat{Q}^{new}$ является собственным вектором этой матрицы.

Действительно,

$$(7;\ 8;\ 5,0827;\ 5,0827;\ 5) \begin{pmatrix} 0,2692 & 0,2692 & 0,1547 & 0,1547 & 0,1522 \\ 0,2356 & 0,3606 & 0,1354 & 0,1354 & 0,1332 \\ 0,3141 & 0,1474 & 0,1474 & 0,1805 & 0,1775 \\ 0,1474 & 0,3141 & 0,3141 & 0,1805 & 0,1775 \\ 0,1769 & 0,1769 & 0,2166 & 0,2166 & 0,2130 \end{pmatrix}$$

= (7; 8; 5,0827; 5,0827; 5).

Вектор Q^{1*}", задающий соответствующую однородную цепь Маркова, будет следующим:

Q^{1*}" = (0,2321; 0,2652; 0,1685; 0,1685; 0,16575).

Вычислим отношение $\dfrac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ для каждой вершины и найдем аттракторы:

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} = \frac{7}{0,2321} = 30,165 = T^{\mathrm{II}},\ \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} = \frac{8}{0,2652} = 30,165 = T^{\mathrm{II}},$$

$$\frac{r_3^{out}}{q_3^{1*}} = \frac{r_4^{out}}{q_4^{1*}} = \frac{6}{0,1685} = 35,61,\ \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} = \frac{5}{0,16575} = 30,165 = T^{\mathrm{II}}$$

Таким образом, в индуцированной сети, порожденной матрицей $R^{new} = \mathrm{diag}(r_1^{out},\ldots,r_n^{out})R'\hat{R}'^{-1}$, три аттрактора. В исходной сети два из них первичные – v_1 и v_2, и один вторичный – v_5. Однако с точки зрения новой сети эти аттракторы неразличимы.

8. Заключение

В работе исследованы основные свойства ресурсной сети с ограничениями на аттракторы. Доказана сходимость процессов перераспределения любого количества ресурса в регулярной несимметричной сети с ограничениями на аттракторы. Найдены предельные состояния и потоки. Сформулирован критерий вторичной аттрактивности вершин. Получено выражение для величины второго порогового значения T^{II} и произведена его оценка. Кроме того, получен ряд результатов относительно изменения пропускных способностей, названных *допустимыми*. Эти результаты применимы не только к сетям с ограничениями, но и к базовой модели ресурсной сети без ограничений. Они задают преобразования, инвариантные относительно неаттрактивных компонент вектора состояния сети.

Эта модель интересна не только с теоретической точки зрения. Она может иметь практические приложения в разных областях. Наиболее перспективным, как нам кажется, является выявление явных и скрытых лидеров в группах агентов. Эта задача в некоторой степени обратна задаче нахождения консенсуса [1, 2, 14] и похожа на модели расчета влиятельности, описанные в [4, 5, 12] и многих других работах. Если в агентной системе есть матрица влияний, ее можно рассматривать как граф ресурсной сети. Поместив в сеть достаточно большое количество ресурса, заведомо большее порогового значения T, можно выявить лидера группы – им будет вершина аттрактор. Для выявления «лидеров второго эшелона» – тех агентов, влиятельность и лидерский потенциал которых высоки, – представляется перспективным использовать предложенную модель с ограничениями. Ограничивая следом вторичные аттракторы и т.д., можно получить «круги лидерства», аналогичные кругам соседства вершины. Однако, в отличие от кругов соседства, лидерство является глобальным показателем системы. Продолжая итерационный процесс ограничения аттракторов всё больших степеней, можно ранжировать всю сеть по влиятельности входящих в нее агентов. Естественно, в социальных сетях топология (обозначающая влиятельность агентов друг на друга) не является жестко заданной и очень часто претерпевает изменения. Скрытые лидеры могут становиться явными. Предложенная модель легко расширяется до «дважды динамической»: с динамикой топологии и ресурса. В этом случае можно прогнозировать возможные изменения, а также исследовать сеть на наиболее уязвимые места, в которых малые воздействия могут привести к глобальной перестройке рангов аттракторов.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик* (*обзор базовых результатов*) // Управление большими системами. – 2010. – №30.1. – С. 470–505.
3. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ Г.М., ДИНИЦ Е.А., КАРЗАНОВ А.В. *Потоковые алгоритмы.* – М.: Наука, 1975. – 119 с.
4. БАЗЕНКОВ Н.И., ГУБАНОВ Д.А. *Обзор информационных систем анализа социальных сетей* // Управление большими системами. – 2013. – №41. – С. 357–394.
5. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Физматлит. – 2010. – 228 с.
6. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №4. – С. 133–143.
7. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. II. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №6. – С. 103–118.

8. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №7. – С. 67–77.
9. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Ресурсная сеть с ограничениями на емкость аттракторов* // Управление большими системами. – 2015. – №58. – С. 67–89.
10. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970. – 271 С.
11. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989. – 655 С.
12. BRIN S., PAGE L. *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine*. // Computer Networks. – 1998. – Vol. 30. – P. 107–117.
13. CHRUŚCIŃSKI D., MAN'KO V.I., MARMO G., VENTRIGLIA F. *On pseudo-stochastic matrices and pseudo-positive maps* // arXiv:1504.05221v2 [quant-ph] – [Электронный ресурс] – URL: http://arxiv.org/pdf/1504.05221v2.pdf (дата обращения: 15.06.2015).
14. DeGROOT M.H. *Reaching a consensus* // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118–121.
15. HAJNAL J. *The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1956. – Vol. 52. – P. 67–77.
16. HAJNAL J. *Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1958. – Vol. 54. – P. 233–246.

9. Приложение

Доказательство утверждения 1.

Докажем, что

$$S'(t) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline R_2' \mathrm{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) & E - \mathrm{diag}\left((c_1(t),\ldots,c_l(t)) R_2'^{\mathrm{T}} \right) \end{array} \right) -$$

стохастическая матрица.

Здесь

$$R_2^{'} = \begin{pmatrix} \frac{r_{l+1,1}}{r_{l+1}^{out}} & \cdots & \frac{r_{l+1,l}}{r_{l+1}^{out}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} & \cdots & \frac{r_{nl}}{r_n^{out}} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два нижних блока матрицы $S'(t)$.

1) Блок

$$R_2^{'}\mathrm{diag}(c_1(t),\ldots,c_l(t)) = \begin{pmatrix} \frac{r_{l+1,1}}{r_{l+1}^{out}} c_1(t) & \cdots & \frac{r_{l+1,l}}{r_{l+1}^{out}} c_l(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} c_1(t) & \cdots & \frac{r_{nl}}{r_n^{out}} c_l(t) \end{pmatrix}$$

Его k-я строка имеет вид

$$\left(\frac{r_{l+k1}}{r_{l+k}^{out}} c_1(t),\ldots,\frac{r_{l+k,l}}{r_{l+k}^{out}} c_l(t) \right).$$

Ее сумма равна

$$\left(\frac{r_{l+k1}}{r_{l+k}^{out}} c_1(t),\ldots,\frac{r_{l+k,l}}{r_{l+k}^{out}} c_l(t) \right) \cdot \mathbf{1} = \sum_{i=1}^{l} \frac{r_{l+k,i}}{r_{l+k}^{out}} c_i(t),$$

где **1** – вектор-столбец, состоящий из l единиц.

2) Найдем $E - \mathrm{diag}\left((c_1(t),\ldots,c_l(t)) R_2^{'\mathrm{T}} \right)$:

$$E - \mathrm{diag}\left((c_1(t),\ldots,c_l(t)) R_2^{'\mathrm{T}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\sum_{i=1}^{l} c_i(t)\frac{r_{l+1,i}}{r_{l+1}^{out}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\sum_{i=1}^{l} c_i(t)\frac{r_{l+2,i}}{r_{l+2}^{out}} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\sum_{i=1}^{l} c_i(t)\frac{r_{n,i}}{r_n^{out}} \end{pmatrix}.$$

Все ненулевые элементы положительны, поскольку $c_i(t) < 1$, $i = 1, \ldots, l$, по определению, и

$$\sum_{i=1}^{l} c_i(t) \frac{r_{l+k,i}}{r_{l+k}^{out}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{r_{l+k,i}}{r_{l+k}^{out}} = 1.$$

Сумма элементов строк с номером k двух блоков равна

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{r_{l+k,i}}{r_{l+k}^{out}} c_i(t) + \left(1 - \sum_{i=1}^{l} c_i(t) \frac{r_{l+k,i}}{r_{l+k}^{out}}\right) = 1. \square$$

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим функционирование исходной сети при $W > T$ с того момента времени, когда все аттракторы функционируют по правилу 1. При таком суммарном ресурсе в сети с матрицей R суммарный предельный поток стабилизируется на значении T. При этом, по определению T, все аттракторы на каждом такте отдают в каждое выходящее ребро ресурс, равный его пропускной способности. Когда произошла стабилизация, поток в каждой вершине сбалансирован, т.е. дивергенция в каждой вершине равна нулю и в сети происходит циркуляция [3]. Если пропускные способности ребер, связывающих аттракторы, соответствующие блоку R_0, изменить, прибавив блок R_S, в полученном блоке $R_0 + R_S$ суммы элементов соответствующих строк и столбцов изменятся на одну и ту же величину. А это означает, что в каждой вершине сохраняется нулевая дивергенция. Изменение пропускных способностей ребер, связывающих аттракторы, на элементы матрицы R_S не нарушает баланса между аттракторами. При этом поток от аттракторов к остальным вершинам остается неизменным. Следовательно, выполняются все утверждения теоремы:

1) аттракторы не теряют свой статус; новые аттракторы не появляются;
2) компоненты вектора $\tilde{Q}_{new}$, начиная с номера $l + 1$, совпадают с одноименными компонентами вектора $\tilde{Q}$;
3) компоненты, соответствующие аттракторам, имеют ресурс, равный $r_{i\_new}^{out}$: $r_{i\_new}^{out} = r_i^{out} + r_{i\_S}^{out}$.

4) пороговое значение T_{new} рассчитывается как сумма всех компонент вектора $\tilde{Q}_{new}$, т.е. отличаются от T суммой первых l слагаемых. □

Доказательство теоремы 2.

1. Новая величина порогового значения T^{II}_{new} изменяется на то же значение r_{S_sum}, что и величина порогового значения T_{new}.

2. Если $W \in (T_{new}, T^{\mathrm{II}}_{new}]$, это означает, что еще ни один вторичный аттрактор не перешел на функционирование по правилу 1. По правилу 1 функционируют только первичные аттракторы. Если мы снова изменим поток между аттракторами, не нарушая условия сбалансированности $\mathrm{div}(v_i) = 0$, $i = 1, \ldots, l$, потоки из аттракторов в неаттрактивные вершины останутся прежними. Следовательно соответствующие компоненты векторов потока и состояния не изменятся.

3. Как и в условиях теоремы 1, $r^{out}_{i\_new} = r^{out}_i + r^{out}_{i\_S}$.

4. При некотором фиксированном ресурсе W чем больше выходная пропускная способность первичных аттракторов, тем меньше излишка получают вторичные аттракторы, и наоборот. Изменение суммарной пропускной способности аттракторов на величину r_{S_sum} влечет за собой изменение излишка ресурса во вторичных аттракторах на противоположную величину $-r_{S\_sum}$. □

Доказательство теоремы 5.

Вектор $\hat{Q}$ – собственный вектор матрицы $(R'^{new})^{\infty} = R''^{*}$, имеющей пороговое значение $T^{new} = T^{\mathrm{II}}$. При ресурсе, равном T^{new}, все потенциальные аттракторы в предельном состоянии будут иметь ресурс, равный своей выходной пропускной способности (по определению порогового значения). По построению все аттрактивные вершины исходной сети с матрицей R будут аттракторами и в новой сети и для них условие (8) выполняется.

Поскольку при ресурсе, равном пороговому значению, сеть функционирует по правилу 2, предельное состояние существует, единственно и для него справедливо

$$\hat{Q} = T^{new} Q^{1*new} = \left(r_1^{out\_new}, \ldots, r_m^{out\_new}, \hat{q}_{m+1}, \ldots, \hat{q}_n \right), \ m \geq l.$$

Суммы строк матриц R и R^{new} совпадают, и поэтому $r_i^{out\_new} = r_i^{out}$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, формулу можно переписать в виде

$$\hat{Q} = T^{new} Q^{1*new} = \left(r_1^{out}, \ldots, r_m^{out}, \hat{q}_{m+1}, \ldots, \hat{q}_n \right), \ m \geq l. \tag{9}$$

Если $m = l$ и больше ни в одной вершине в предельном состоянии ресурс не достиг значения r_k^{out}, это означает, что поток в сети с ограничениями можно увеличить сверх T^{II} и при этом все вершины, за исключением первичных аттракторов, будут функционировать по правилу 2. А это противоречит определению T^{II}.

Таким образом, множество вершин, для которых выполняется условие (8), расширяется. Все вершины, не являющиеся первичными аттракторами, – вторичные аттракторы. □

Доказательство теоремы 6.

Рассмотрим формулу (9).

Для аттрактивных вершин выполняется

$T^{new} q_i^{1*new} = r_i^{out}$, $i = 1, \ldots, m$.

Для остальных вершин:

$T^{new} q_k^{1*new} < r_k^{out}$, $k = m + 1, \ldots, n$.

Непосредственно отсюда следует, что для всех аттрактивных вершин выполняется равенство

$\dfrac{r_1^{out}}{q_1^{1*new}} = \ldots = \dfrac{r_m^{out}}{q_m^{1*new}} = T^{new}$, для остальных – неравенство

$T^{new} < \dfrac{r_k^{out}}{q_k^{1*new}}$.

Таким образом, $T^{\mathrm{II}} = T^{new} = \min\limits_{i \in \{1, \ldots, n\}} \dfrac{r_i^{out}}{q_i^{1*new}}$. □

Доказательство теоремы 7.

1. $T^{\mathrm{II}} > T$ по определению. Накопление во вторичных аттракторах происходит только после того как насытились первичные. Во всех первичных аттракторах при $W = T$ выполняется $\tilde{q}_i = r_i^{out}$, $i = 1, \ldots, l$.

Во вторичных аттракторах при $W = T$ выполняется строгое неравенство: $\tilde{q}_k < r_k^{out}$, $k = l + 1, \ldots, m$.

T^{II} – такое значение суммарного ресурса, при котором будет выполняться $\hat{q}_k = r_k^{out}$, $k = l + 1, \ldots, m$.

Выпишем два предельных вектора – $\tilde{Q}$ для $W = T$ и $\hat{Q}$ для $W = T^{\mathrm{II}}$:

$$\tilde{Q} = \left(r_1^{out}, \ldots, r_l^{out}, \tilde{q}_{l+1}, \ldots, \tilde{q}_m, \ldots, \tilde{q}_n\right);$$

$$\hat{Q} = \left(r_1^{out}, \ldots, r_l^{out}, \ldots, r_m^{out}, \hat{q}_{m+1}, \ldots, \hat{q}_n\right).$$

Сумма компонент первого вектора равна T, сумма компонент второго равна T^{II}.

Сравним эти векторы покомпонентно. Для первых l компонент выполняется равенство, для остальных – строгое неравенство: $\tilde{q}_k < r_k^{out}$, $k = l + 1, \ldots, m$; $\tilde{q}_k < \hat{q}_k$, $k = m + 1, \ldots, n$. Второе неравенство строгое, потому что при $W = T^{\mathrm{II}}$ предельный поток в сети равен $T^{\mathrm{II}} > T$, а это означает, что в предельном состоянии все вершины, не являющиеся ни первичными, ни вторичными аттракторами, будут иметь ресурс больший, чем при $W = T$.

Отсюда

$$T^{\mathrm{II}} > T + \sum_{k=l+1}^{m} \left(r_k^{out} - \tilde{q}_k\right).$$

2. r_{sum} – суммарная пропускная способность сети. Рассмотрим вектор выходных пропускных способностей вершин:

$R^{out} = \left(r_1^{out}, \ldots, r_m^{out}, \ldots, r_n^{out}\right)$; сумма его компонент равна r_{sum}.

Сравним его с вектором предельного состояния при $W = T^{\mathrm{II}}$:

$\hat{Q} = \left(r_1^{out}, \ldots, r_m^{out}, \hat{q}_{m+1}, \ldots, \hat{q}_n\right)$, сумма компонент которого равна T^{II}.

$\hat{q}_k < r_k^{out}$, $k = m + 1, \ldots, n$.

Следовательно, $T^{\mathrm{II}} < r_{sum}$. □

RESOURCE NETWORKS WITH THE CAPACITY LIMITATIONS ON ATTRACTOR-VERTICES. FORMAL CHARACTERISTICS

Ludmila Zhilyakova, Institute of Control Sciences of RAS, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65), dr. sci., leader scientist, zhilyakova.ludmila@gmail.com.

Abstract: *We study the resource redistribution in networks with capacity limitations on so-called attractor-vertices. The stability of the processes for any total amount of resource in such networks is proved. We formulate the criterion of secondary attractivity, and find vectors of limit flow and limit state, formula for the second threshold value of resource T^{II}. As indirect results we get several additional characteristics of networks with limitations and without them.*

Keywords: resource network, graph dynamic threshold model, attractors, capacity limitation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.Ю. Чеботарёвым.

Поступила в редакцию 20.08.2015.
Опубликована 31.01.2016.