УДК 519.854.2
ББК 22.1

МЕТРИКА ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ[1]

Лазарев А. А.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», Москва
ФГБОУ ВПО «Московский физико-технический институт* (*государственный университет*)*», Москва,
ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва*)
Коренев П. С.[3],
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», Москва*)
Сологуб А. А.[4]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», Москва*)

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*гранты №11-08-01321, 11-08-13121, 13-01-12108, 15-07-07489 и 15-07-03141*), *ФЭН НИУ ВШЭ, DAAD* (*A/14/00328*).

[2] *Александр Алексеевич Лазарев, д.ф.-м.н., заведующий лабораторией ИПУ РАН, профессор МГУ, професор НИУ ВШЭ, профессор МФТИ* (*jobmath@mail.ru*).

[3] *Павел Сергеевич Коренев, техник ИПУ РАН, студент МГУ* (*pkorenev@rambler.ru*).

[4] *Александр Александрович Сологуб, техник ИПУ РАН, студент МГУ* (*sologub10@gmail.com*).

Рассматривается NP-трудная задача $1|r_j|\sum T_j$ теории расписаний. Предлагается подход, основанный на введении метрики для пространства параметров задачи, позволяющий за полиномиальное время находить решение задачи с гарантированной абсолютной погрешностью. Рассматриваются возможности применения аналогичного подхода для решения других задач теории расписаний.

Ключевые слова: теория расписаний, приближенные алгоритмы, NP-трудность, метрики.

1. Введение

Имеется множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$, состоящее из n требований, которые необходимо обслужить на одном приборе. Прибор готов начать обслуживание в момент времени $t_0 = 0$ и не может обслуживать более одного требования одновременно. Прерывания при обслуживании запрещены. Для каждого требования $j \in N$ заданы: момент поступления r_j, продолжительность обслуживания p_j и директивный срок d_j. Расписание $\pi = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ определяет порядок в котором обслуживаются требования. Естественно рассматривать ранние расписания, при которых

$$C_{j_1}(\pi) = r_{j_1} + p_{j_1},$$
$$C_{j_k}(\pi) = max\{r_{j_k}, C_{j_{k-1}}(\pi)\} + p_{j_k}, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

где $C_j(\pi)$ – момент окончания обслуживания требования j при расписании π. Необходимо построить оптимальное расписание π^*, минимизирующее целевую функцию – суммарное запаздывание $\sum\limits_{j \in N} T_j(\pi)$, где $T_j(\pi) = \max\{0, C_j(\pi) - d_j\}$ – запаздывание требования j при расписании π. В дальнейшем, если из контекста ясно о каком расписании идет речь, зависимость от π может опускаться. Данная задача является NP-трудной [5] и обозначается $1|r_j|\sum T_j$ [6].

Задача $1|r_j|\sum T_j$ полностью характеризуется $3n$ параметрами – директивными сроками, продолжительностями обслуживания и моментами поступления каждого из n требований. Будем говорить, что задан пример A задачи, если задано $3n$ параметров $\{r_j^A, p_j^A, d_j^A, j = 1, 2, \ldots, n\}$, характеризующих задачу.

Для частного случая $r_j = 0, j \in N$, задачи минимизации суммарного запаздывания ранее был предложен полиномиальный приближенный алгоритм сложности $O(\frac{n^7}{\varepsilon})$ операций [8], также для этого случая известен псевдополиномиальный алгоритм сложности $O(n^4 \sum p_j)$ [7]. В случае, если

$$\begin{gathered} p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n, \\ d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n, \end{gathered}$$

сложность псевдополиномиального алгоритма может быть уменьшена до $O(n^2 \sum p_j)$ операций [9]. Для случая $1|r_j, p_j = p| \sum T_j$ известен полиномиальный алгоритм сложности $O(n^7)$, предложенный P. Baptiste [4].

Далее в статье предлагается подход нахождения приближенного решения задачи $1|r_j| \sum T_j$ с гарантированной погрешностью, основанный на введении метрики для пространства параметров задачи, и рассматриваются возможности применения данного подхода к другим задачам теории расписаний. В последнем разделе описываются численные эксперименты, проведенные для проверки предложенного метода.

2. Метрика для пространства параметров

Задача $1|r_j| \sum T_j$ полностью характеризуется $3n$ параметрами, что позволяет нам рассматривать примеры задачи, как точки в $3n$-мерном пространстве параметров $\Omega = \{r_1, \ldots, r_n, p_1, \ldots, p_n, d_1, \ldots, d_n\}$.

Лемма 1. *Пусть примеры A и B имеют одинаковые продолжительности обслуживания и директивные сроки:*

$$p_j^A = p_j^B, d_j^A = d_j^B, j \in N.$$

Тогда для любого расписания π

$$(1) \qquad |\sum_{j\in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j\in N} T_j^B(\pi)| \leqslant n \max_{j\in N} |r_j^A - r_j^B|.$$

Доказательство леммы 1.

Используя определение запаздывания и известное неравенство

(2) $|\max\{a,b\}-\max\{c,d\}| \leqslant \max\{|a-c|,|b-d|\}, \forall a,b,c,d \in \mathbb{R},$

получим

$$(3) \qquad \begin{aligned} |\sum_{j\in N} T_j^A - \sum_{j\in N} T_j^B| &\leqslant \sum_{j\in N} |C_j^A - C_j^B + d_j^B - d_j^A| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j\in N} |C_j^A - C_j^B| + \sum_{j\in N} |d_j^A - d_j^B|. \end{aligned}$$

Или, учитывая равенство директивных сроков,

$$(4) \qquad |\sum_{j\in N} T_j^A - \sum_{j\in N} T_j^B| \leqslant \sum_{j\in N} |C_j^A - C_j^B|.$$

Учитывая свойства раннего расписания, заметим, что

$$|C_{j_1}^A - C_{j_1}^B| = |r_{j_1}^A - r_{j_1}^B| \leqslant \max_{j\in N} |r_j^A - r_j^B|,$$

$$|C_{j_k}^A - C_{j_k}^B| \leqslant \max\{|r_{j_k}^A - r_{j_k}^B|, |C_{j_{k-1}}^A - C_{j_{k-1}}^B|\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{j\in N} |r_j^A - r_j^B|, k = 2, \ldots, n.$$

Отсюда и из неравенства (4) получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть примеры A и B имеют одинаковые моменты поступления и директивные сроки:*

$$r_j^A = r_j^B, d_j^A = d_j^B, j \in N.$$

Тогда для любого расписания π

$$(5) \qquad |\sum_{j\in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j\in N} T_j^B(\pi)| \leqslant n \sum_{j\in N} |p_j^A - p_j^B|.$$

Доказательство леммы 2.

При условиях леммы также выполняется неравенство (4):

$$|\sum_{j\in N} T_j^A - \sum_{j\in N} T_j^B| \leqslant \sum_{j\in N} |C_j^A - C_j^B|.$$

Учитывая свойства раннего расписания и равенство моментов поступления, получим

$$|C_{j_1}^A - C_{j_1}^B| = |p_{j_1}^A - p_{j_1}^B| \leqslant \sum_{j\in N} |p_j^A - p_j^B|,$$

$$|C_{j_k}^A - C_{j_k}^B| \leqslant |p_{j_k}^A - p_{j_k}^B| + |C_{j_{k-1}}^A - C_{j_{k-1}}^B| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j\in N} |p_j^A - p_j^B|, k = 2, \ldots, n.$$

Отсюда и из неравенства (4) получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть примеры* A *и* B *имеют одинаковые моменты поступления и продолжительности обслуживания:*

$$r_j^A = r_j^B, p_j^A = p_j^B, j \in N.$$

Тогда для любого расписания π

$$(6) \qquad |\sum_{j\in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j\in N} T_j^B(\pi)| \leqslant \sum_{j\in N} |d_j^A - d_j^B|.$$

Доказательство леммы 3.

При условиях леммы $C_{j_k}^A = C_{j_k}^B, k \in N$, и неравенство (3) имеет вид

$$|\sum_{j\in N} T_j^A - \sum_{j\in N} T_j^B| \leqslant \sum_{j\in N} |d_j^A - d_j^B|.$$

То есть утверждение леммы выполняется.

Теорема 1. *Определенная на пространстве примеров* $\Omega \times \Omega$ *функция*

$$(7) \quad \rho(A, B) = n \max_{j\in N} |r_j^A - {}_j^B| + n \sum_{j\in N} |p_j^A - p_j^B| + \sum_{j\in N} |d_j^A - d_j^B|$$

удовлетворяет аксиомам метрики.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что функция $\rho(A, B)$ симметрична и неотрицательна, причем $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$. Неравенство треугольника выполняется в силу свойств модуля суммы.

Лемма 4. *Для любых примеров A и B и любого расписания π справедливо неравенство*

$$|\sum_{j\in N} T_j^A - \sum_{j\in N} T_j^B| \leqslant \rho(A,B). \tag{8}$$

Доказательство леммы 4. Пусть пример C имеет такие же моменты поступления и продолжительности обслуживания, как и пример A, а директивные сроки – как у примера B. Пусть далее пример D имеет моменты поступления как у примера A, а директивные сроки и продолжительности обслуживания – как у примера B, тогда, используя леммы (1)–(3) получим

$$|\sum_{j\in N} T_j^A - \sum_{j\in N} T_j^B| \leqslant |\sum_{j\in N} T_j^B - \sum_{j\in N} T_j^D| + |\sum_{j\in N} T_j^D - \sum_{j\in N} T_j^C| +$$
$$+|\sum_{j\in N} T_j^A - \sum_{j\in N} T_j^C| \leqslant n \max_{j\in N} |r_j^A - r_j^B| + n\sum_{j\in N} |p_j^A - p_j^B| +$$
$$+\sum_{j\in N} |d_j^A - d_j^B| = \rho(A,B).$$

3. Метод изменения параметров

Теорема 2. *Пусть π^A и π^B – оптимальные расписания для примеров A и B, тогда*

$$\sum_{j\in N} T_j^A(\pi^B) - \sum_{j\in N} T_j^A(\pi^A) \leqslant 2\rho(A,B). \tag{9}$$

Доказательство теоремы 2. Используя лемму 4, получим

$$\sum_{j\in N} T_j^A(\pi^B) - \sum_{j\in N} T_j^A(\pi^A) =$$
$$= (\sum_{j\in N} T_j^A(\pi^B) - \sum_{j\in N} T_j^B(\pi^B)) + (\sum_{j\in N} T_j^B(\pi^B) - \sum_{j\in N} T_j^B(\pi^A)) +$$
$$+(\sum_{j\in N} T_j^B(\pi^A) - \sum_{j\in N} T_j^A(\pi^A)) \leqslant 2\rho(A,B).$$

Доказанная теорема позволяет использовать метод решения задачи $1|r_j|\sum T_j$, названный методом изменения параметров. Метод состоит в том, чтобы использовать оптимальное расписание некоторого, (псевдо)полиномиального решаемого примера B в качестве расписания для примера A. Теорема 2 позволяет оценить сверху погрешность такого решения при помощи функции $\rho(A,B)$. Естественно конструировать пример B так, чтобы минимизировать функцию $\rho(A,B)$. Таким образом, задача $1|r_j|\sum T_j$ заменяется задачей на минимизацию функции метрики.

Рассмотрим случай, когда искомый пример B должен принадлежать некоторому полиномиально или псевдополиномиально разрешимому классу примеров, задаваемому системой неравенств

$$\mathcal{A}\cdot R^B+\mathcal{B}\cdot P^B+\mathcal{C}\cdot D^B\leqslant H,$$

где $R^B=(r_1^B,\dots,r_n^B)^\top$; $P^B=(p_1^B,\dots,p_n^B)^\top$; $D^B=(d_1^B,\dots,d_n^B)^\top$; $p_j^B\geqslant 0$, $r_j^B\geqslant 0$, $j\in N$; $^\top$ – символ транспонирования; $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ – матрицы $m\times n$ и H – столбец из m элементов.

В этом случае задача минимизации функции метрики может быть поставлена как задача линейного программирования.

$$\min n\cdot(y^r-x^r)+n\cdot\sum_{j\in N}(y_j^p-x_j^p)+\sum_{j\in N}(y_j^d-x_j^d), \tag{10}$$

при условиях

$$\begin{gathered}
x^r\leqslant r_j^A-r_j^B\leqslant y^r,\quad j\in N,\\
x_j^p\leqslant p_j^A-p_j^B\leqslant y_j^p,\quad j\in N,\\
x_j^d\leqslant d_j^A-d_j^B\leqslant y_j^d,\quad j\in N,\\
0\leqslant r_j^B, 0\leqslant p_j^B,\quad j\in N,\\
\mathcal{A}\cdot R^B+\mathcal{B}\cdot P^B+\mathcal{C}\cdot D^B\leqslant H.
\end{gathered}$$

Неизвестными в данной задаче являются $7n+2$ переменных: r_j^B, p_j^B, d_j^B, x_j^p, y_j^p, x_j^d, y_j^d, x^r, y^r, $j\in N$.

Тем не менее, сепарабельность функции $\rho(A,B)$ во многих случаях позволяет находить её минимум гораздо проще, без использования методов линейного программирования.

3.1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ДРУГИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Описанный метод не является жестко привязанным к виду целевой функции, что позволяет использовать его для решения других задач теории расписаний. Так, теорему 2 можно обобщить на случай общего вида целевой функции $F(\pi)$.

Теорема 3. *Пусть $F(\pi)$ – произвольная целевая функция, а $\rho(A, B)$ – функция метрики, для любых A, B, π удовлетворяющая неравенству*

$$|F^A(\pi) - F^B(\pi)| \leqslant \rho(A, B). \tag{11}$$

Пусть далее π^A и π^B – оптимальные расписания для примеров A и B, тогда

$$F^A(\pi^B) - F^A(\pi^A) \leqslant 2\rho(A, B). \tag{12}$$

Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 2 с заменой $\sum\limits_{j \in N} T_j$ на F.

Таким образом, для применения метода изменения параметров достаточно построить функцию $\rho(A, B)$, удовлетворяющую неравенству (11). Такие функции были построены ранее для задач $1||\sum T_j$ [1] и $1|r_j|L_{max}$ [3]. Здесь мы приведем вариант построения таких функций для общих случаев аддитивной и максимальной целевой функции.

Лемма 5. *В случае аддитивной целевой функции вида*

$$F(\pi) = \sum_{j \in N} \phi_j(\pi, r_1, \ldots, r_n, p_1, \ldots, p_n, d_j) \tag{13}$$

функция

$$\rho(A, B) = \sum_{j \in N} \sum_{i \in N} (R_{ji}|r_j^A - r_j^B| + P_{ji}|p_j^A - p_j^B|) + \sum_{j \in N} D_j |d_j^A - d_j^B| \tag{14}$$

удовлетворяет неравенству (11)*. Здесь R_{ji}, P_{ji} – константы Липшица для функции ϕ_i по переменным r_j и p_j, D_j – константа Липшица для функции ϕ_j по переменной $d_j, i, j \in N$.*

Лемма 6. *В случае максимальной целевой функции вида*

$$F(\pi) = \max_{j \in N} \phi_j(\pi, r_1, \ldots, r_n, p_1, \ldots, p_n, d_j) \tag{15}$$

функция

$$(16)\ \ \rho(A,B)=\sum_{j\in N}(R_j|r_j^A-r_j^B|+P_j|p_j^A-p_j^B|)+D\max_{j\in N}|d_j^A-d_j^B|$$

удовлетворяет неравенству (11). *Здесь* R_j, P_j *– наибольшие константы Липшица по переменным* r_j *и* p_j *из констант для функций* ϕ_i, D *– наибольшая из констант Липшица для функций* ϕ_j *по переменным* $d_j, i, j \in N$.

Заметим, что функции (14) и (16) сепарабельны, что значительно облегчает нахождение их минимумов.

4. Численные эксперименты

Для определения эффективности предложенной схемы была проведена серия численных экспериментов. Классы, в которых проводился поиск полиномиально разрешимых примеров, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Классы примеров, использованные в численных экспериментах

Класс примеров	**Метрика между примером** B **класса и произвольным примером** A
$\{\mathcal{PR}: p_j=p, r_j=r, j\in N\}$	$\rho(A,B)=n\cdot\sum_{j=1}^{n}\vert p_j^A-p\vert+$ $+n\cdot\max_{j\in N}\vert r_j^A-r\vert$
$\{\mathcal{PD}: p_j=p, d_j=d, j\in N\}$	$\rho(A,B)=n\cdot\sum_{j\in N}\vert p_j^A-p\vert+$ $+\sum_{j\in N}\vert d_j^A-d\vert$
$\{\mathcal{RD}: r_j=r, d_j=d, j\in N\}$	$\rho(A,B)=n\cdot\max_{j\in N}\vert r_j^A-r\vert+$ $+\sum_{j\in N}\vert d_j^A-d\vert$
$\{\mathcal{P}: p_j=p, j\in N\}$	$\rho(A,B)=n\cdot\sum_{j\in N}\vert p_j^A-p\vert$
$\{\mathcal{R}0: r_j=0, j\in N\}$	$\rho(A,B)=n\cdot\max_{j\in N}\vert r_j^A-r\vert$

В первых трех классах решением является расписание, упорядоченное по неубыванию свободного параметра. Алгоритмы решения задач последних двух классов представлены в [2] и [4] и имеют сложности $O(n^7)$ и $O(n^4 \sum p_j)$ операций соответственно.

Для нахождения в указанных классах полиномиально разрешимого примера B, ближайшего к заданному примеру, необходимо найти минимум функций

$$f(r) = n \cdot \max_{j \in N} |r_j^A - r|; \tag{17}$$

$$g(p) = n \cdot \sum_{j=1}^{n} |p_j^A - p|; \tag{18}$$

$$h(d) = \sum_{j \in N} |d_j^A - d|. \tag{19}$$

Лемма 7. 1) *Минимум функции (17) достигается в точке* $r = \frac{r_{max}^A + r_{min}^A}{2}$, *где* $r_{max}^A = \max_{j \in N} r_j^A$, $r_{min}^A = \min_{j \in N} r_j^A$.
2) *Минимум функции (18) достигается в точке* $p \in \{p_1^A, \ldots, p_n^A\}$.
3) *Минимум функции (19) достигается в точке* $d \in \{d_1^A, \ldots, d_n^A\}$).

Доказательство леммы 7.

Функция $f(r)$ представима в виде

$$n \cdot \max_{j \in N} |r_j^A - r| = n \max\{r - r_{min}^A, r_{max}^A - r\} =$$
$$= n\left(\frac{r_{max}^A - r_{min}^A}{2} + \left|r - \frac{r_{max}^A + r_{min}^A}{2}\right|\right)$$

и, очевидно, имеет минимум в точке $\frac{r_{max} + r_{min}}{2}$.

Пусть функция $g(p)$ имеет минимум в точке p_0, тогда либо $g'(p_0) = 0$, либо $p_0 \in \{p_1^A, \ldots, p_n^A\}$). Поскольку $g(p)$ — кусочно-линейная функция, обращение её производной в нуль означает, что функция является константой на некотором интервале $[p_k^A, p_{k+1}^A]$, $k = 1, \ldots, n-1$, а значит, граничные точки p_k^A и p_{k+1}^A также являются точками минимума.

Последнее утверждение леммы о минимуме функции $h(d)$ доказывается аналогично.

Было проведено несколько серий экспериментов. Во всех сериях использовались примеры с параметрами, распределенными равномерно на интервалах $[1, 100]$ для p_j^A, $[p_j, \sum\limits_{j \in N} p_j]$ для d_j^A и $[0, d_j - p_j]$ для r_j^A.

В первой серии экспериментов оценивалась величина различия между правой и левой частями неравенства леммы 4. Данная величина позволяет оценить погрешность метода. Для каждого $n = 10, 20, \ldots, 100$ генерировалось 10000 пар примеров. Использованные в экспериментах расписания генерировались случайным образом. Для каждой пары вычислялась величина $\frac{|\sum\limits_{j \in N} T_j^A - \sum\limits_{j \in N} T_j^B|}{\rho(A,B)}$. Также для определения параметров, имеющих наибольшее влияние на значение функции метрики, вычислялись процентные величины вкладов частей метрики, зависящих от продолжительностей обслуживания, директивных сроков и моментов поступления.

Результаты представлены в таблице 2. Среднее значение $\frac{|\sum\limits_{j \in N} T_j^A - \sum\limits_{j \in N} T_j^B|}{\rho(A,B)}$ меняется от 5% до 10% при росте n, а части функции метрики, зависящие от продолжительностей обслуживания, директивных сроков и моментов поступления дают вклады приблизительно $35\%, 20\%$ и 45% в общую величину функции соответственно.

Вторая серия экспериментов служила непосредственно проверке метода изменения параметров. Эксперименты проводились по следующей схеме. Рассматривались значения $n = 4, 5, \ldots, 10$, для каждого n генерировались по 10000 примеров. К каждому примеру применялась вышеописанная схема для нахождения приближенного решения со значением целевой функции F_e, затем при помощи алгоритма ветвей и границ искалось точное решение с оптимальным значением целевой функции F^*. Далее вычислялось Δ — отношение абсолютной погрешности схемы

$\delta = F_e - F^*$ к её верхней оценке, определяемой неравенством (9):

$$\Delta = \frac{F_e - F^*}{2\rho(A,B)}. \tag{20}$$

Таблица 2. Средняя разница между целевыми функциями и доли составных частей метрики

n	$\frac{\lvert\sum T_j^A - T_j^B\rvert}{\rho}$	$\frac{\rho_r}{\rho}$	$\frac{\rho_p}{\rho}$	$\frac{\rho_d}{\rho}$
10	11,7%	35,6%	42,3%	20,6%
20	10,4%	39,7%	39,4%	19,4%
40	8,9%	42,4%	37,4%	18,6%
60	7,8%	43,6%	36,6%	18,3%
80	7,3%	44,4%	34,4%	18%
100	6,7%	44,9%	35,7%	17,9%

Таблица 3. Средняя экспериментальная погрешность в процентах от теоретической

n	$\mathcal{PR}$	$\mathcal{PD}$	$\mathcal{RD}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{R}0$
4	2,5%	4,6%	20,8%	1,8%	2,9%
5	2,6%	4,8%	23,1%	1,9%	2,8%
6	2,6%	4,6%	24,6%	1,9%	2,7%
7	2,6%	4,7%	26%	1,9%	2,5%
8	2,5%	4,6%	27%	2%	2,3%
9	2,4%	4,7%	27,9%	2%	2,2%
10	2,4%	4,6%	28,6%	1,9%	2,1%

Было обнаружено, что если поиск полиномиально разрешимого примера ведется в классе RD, то средняя погрешность решения растет от 20% до 30% от верхней оценки (9) при увеличении n. Это показывает, что расписание по возрастанию продолжительностей обслуживание плохо применимо для примеров с выбранным распределением параметров. Для остальных классов средняя погрешность решения не зависит от n и составляет несколько процентов от максимальной теоретической. Столь малая погрешность обусловлена тем, что примерно в 20% случаев метод изменения параметров давал точное решение задачи. Зависимость средней ошибки Δ от n представлена в таблице 3.

5. Заключение

В статье представлен новый метод приближенного решения задачи минимизации суммарного запаздывания. Идея метода заключается во введении метрики для пространства параметров задачи и использовании вспомогательного примера, ближайшего к решаемому примеру во введенной метрике.

Дальнейшие исследования по этой теме могут быть направлены на конструирование более эффективных метрик для задач теории расписаний и поиск новых полиномиально или псевдополиномиально разрешимых классов примеров, которые могут быть использованы в данном методе.

Литература

1. ЛАЗАРЕВ А.А., КВАРАЦХЕЛИЯ А.Г. *Метрики в задачах теории расписаний* // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 432, №6. – С. 746–749.
2. ЛАЗАРЕВ А.А., ГАФАРОВ Е.Р. *Теория расписаний. Минимизация суммарного запаздывания для одного прибора.* – М.: ВЦ РАН, 2006. — 134 с.
3. ЛАЗАРЕВ А.А, САДЫКОВ Р.Р., СЕВАСТЬЯНОВ С.В *Схема приближенного решения задачи* $1|r_j|L_{max}$ // Дискретный анализ и исследование операций – 2006. – Сер. 2, т. 13, №1. – С. 57–76.
4. BAPTISTE P. *Scheduling equal-length jobs on identical parallel machines* // Discret. Appl. Math. – 2000. – No. 103. – P. 21–32 .
5. DU J., LEUNG J.Y.-T. *Minimizing total tardiness on one machine is NP-hard* // Math. Oper. Res. – 1990. – No. 15(3). – P. 483–495.

6. GRAHAM R.L., LAWLER E.L., LENSTRA J.K. AND OTHER. *Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey* // Ann. Discret. Math. – 1979. – No. 5. – P. 287–326.
7. LAWLER E.L. *A Pseudopolynomial Algorithm for Sequencing Jobs to Minimize Total Tardiness* // Ann. Discret. Math. – 1977. – No. 1. – P. 331–342.
8. LAWLER E.L. *A fully polynomial approximation scheme for the total tardiness problem* // Oper. Res. Lett. – 1982. – No. 1. – P. 207–208.
9. LAZAREV A.A., WERNER F. *Algorithms for Special Single Machine Total Tardiness Problem and an Application to the Even-Odd Partition Problem* // Math. and Comp. Model. – 2009. – No. 49. – P. 2078–2089.

METRIC FOR MINIMUM TOTAL DELAY PROBLEM

Alexander Lazarev, Doctor of Science, Professor of MSU, Professor of HSE, Professor of MIPT, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow (jobmath@mail.ru).
Pavel Korenev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, technician, Moscow (pkorenev@rambler.ru).
Alexander Sologub, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, technician, Moscow (sologub10@gmail.com).

Abstract: We consider the NP-hard $1|r_j|\sum T_j$ scheduling problem and suggest the polynomial time algorithm to find its approximate solution with the guaranteed absolute error. The algorithm employs the metric introduced in the parameter space. We also consider possible application of such an approach to the other scheduling problems.

Keywords: scheduling theory, approximation algorithms, NP-hardness, metrics.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Е.Н. Хоботовым.

Поступила в редакцию 23.06.2015.
Дата опубликования 30.09.2015.