

УДК 681.5.011 + 519.853.4

ББК 32.965 + 22.19

## РЕДУКЦИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ ФОРМ В МЕТОДЕ АТОМНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ<sup>1</sup>

Поздяев В. В.<sup>2</sup>

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)*

*Нижегородского государственного технического университета*

*им. Р.Е. Алексеева, Арзамас)*

*Рассмотрены одномерные задачи оптимизации с полиномиальной целевой функцией и ограничениями в виде полиномиальных матричных неравенств. Для задач, двойственных к их линейным релаксациям, представлен механизм преобразования к форме, совместимой с методом атомной оптимизации как в базовой формулировке, так и в обобщённом варианте с уменьшенным числом атомов.*

Ключевые слова: нелинейное программирование, матричные неравенства, полиномиальные неравенства, теория моментов.

### **Введение**

Двойственные формы задач — один из фундаментальных инструментов теории (и практики) оптимизации, действующий одновременно на нескольких уровнях. На уровне постановки задачи он позволяет давать альтернативные интерпретации, менять точку зрения на неизвестные и ограничения. На уровне вычислительных схем он интегрируется в некоторые классы алгоритмов решения: напрямую или в виде комбинированных прямых-двойственных форм.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 13-08-1092\_а).

<sup>2</sup> Владимир Васильевич Поздяев, кандидат физико-математических наук, доцент (vpozdyayev@gmail.com).

Метод решения задач невыпуклой оптимизации с участием полиномиальных целевых функций и полиномиальных скалярных или матричных неравенств, представленный в [4, 5, 7] и других работах данных авторов, сводит такие задачи к иерархиям релаксаций, имеющих вид систем линейных матричных неравенств (ЛМН) и допускающих естественную трансформацию к двойственным формам.

Атомная оптимизация — модификация данного метода, ориентированная на задачи с относительно высокой формальной сложностью (выраженной порядками полиномов, их количеством и т. д.) и относительно невысокой фактической сложностью (выраженной количеством компонент связности области поиска, характером их невыпуклости и т. д.): в первую очередь, на задачи теории управления, использующие функции Ляпунова. Базовые результаты, связанные с атомной оптимизацией, опубликованы в [1, 2]; статья [3] расширяет эту технику на прямые-двойственные формы задач.

В настоящей статье представлено обобщение двойственных/прямых-двойственных форм, ассоциируемых с ЛМН-релаксациями, на случай редуцированных прямых задач (задач с количеством атомов, меньшим, нежели предписано оригинальным методом). Детально рассмотрены задачи одномерной оптимизации. Раздел 1 содержит краткие сведения о методах, составляющих фундамент построений данной статьи. В разделе 2 приводятся основные сведения о новых формах задач и их элементах. Раздел 3 описывает подход к построению данных форм. Разделы 4 и 5 содержат сведения о вычислении их ключевых элементов в исходном и редуцированном вариантах соответственно. В разделе 6 приведены примеры, демонстрирующие возможности и ограничения полученных результатов.

## **1. Базовые методы**

Рассмотрим задачу нахождения глобальных экстремумов полиномиальной целевой функции на множестве, заданном поли-

номиальными матричными неравенствами:

$$(1) \quad \begin{aligned} f^* &= \min f(x), \\ G_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где  $f(x)$  и элементы матриц  $G_i(x)$  — (не обязательно выпуклые) полиномы, а знак неравенства понимается как требование положительной полуопределенности. Далее данные задачи мы будем называть задачами ПМН.

Пусть  $b_r(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , — вектор, состоящий из одночленов, образующих базис пространства многочленов порядка не выше  $r$ , а  $s_n(r) = C_{n+r}^r = \frac{(n+r)!}{n!r!}$  — его размерность (в частности, для одномерных задач  $b_r(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^r]^\top$  и  $s_1(r) = r + 1$ ). Каждому одночлену из  $b_r(x)$  поставим в соответствие вектор  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $\sum_i \alpha_i \leq r$  (далее будем записывать как  $\alpha \leq r$ ) показателей степеней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; обозначим  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Для произвольного вектора  $p \in \mathbb{R}^{s_n(r)}$ , ассоциированного с пространством моментов  $x$  степени не выше  $r$ , будем индексировать его элементы двумя взаимозаменяемыми способами: по номеру элемента и по вектору показателей степеней; порядок элементов будем считать соответствующим структуре  $b_r(x)$ . Таким образом,  $p = [p_i]_{1 \leq i \leq s_n(r)} = [p_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \leq r}$ , в том числе  $p_1 = p_{[0,0,\dots,0]}$ ,  $p_2 = p_{[1,0,\dots,0]}$  и т. д. Аналогичным образом будем индексировать строки и столбцы матриц там, где это применимо.

Рассмотрим некоторую (неизвестную) меру  $\mu$  и соответствующий ей вектор моментов  $y$ :

$$y = \int b_{2k}(x) d\mu.$$

Пусть  $d_i = [\frac{1}{2} \deg G_i(x)]$ , а  $k$  удовлетворяет ограничениям  $2k \geq \deg f(x)$ ,  $k \geq d_i$ . Пусть  $f_\alpha$  — коэффициенты  $f(x)$  в базисе  $b_{2k}(x)$ , так что

$$\int f(x) d\mu = \int \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha x^\alpha d\mu = \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha.$$

ЛМН-релаксацией (1) называется задача

$$f^* = \min_y \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha,$$

$$M_k(y) \geq 0, M_{k-d_i}(G_i, y) \geq 0,$$

$$i = 1, \dots, m, y_{[0,0,\dots,0]} = 1,$$

где матрица моментов  $M_k(y)$  и локализирующие матрицы  $M_{k-d_i}(g_i, y)$  конструируются исходя из соотношений

$$(2) \quad M_k(y) = \int b_k(x) b_k(x)^\top d\mu,$$

$$M_{k-d}(G, y) = \int (b_{k-d}(x) b_{k-d}(x)^\top) \otimes G(x) d\mu.$$

В [5, 7] детально описан механизм данных построений и показано, что с учетом некоторых непринципиальных ограничений при  $k \rightarrow \infty$  величина экстремума ЛМН-релаксации стремится к величине экстремума исходной задачи ПМН. Более того, как правило, уже при конечных (и относительно небольших) значениях  $k$  данные величины становятся равны, а вектор моментов  $y^*$  решения  $x^*$  задачи ПМН является решением соответствующей ЛМН-релаксации. Общее же решение ЛМН-релаксации представляет собой вектор моментов  $r$ -атомной меры<sup>3</sup>, атомы которой  $x^{*j}$ ,  $j = 1, \dots, r$ , соответствуют глобальным минимумам (1). Данные атомы могут быть извлечены из  $y^*$  путем решения системы полиномиальных уравнений (в которую для  $r$ -атомных мер превращается (2)) с помощью алгоритма, представленного в [4].

Предложенный в [1, 2] метод атомной оптимизации переносит процедуру решения ЛМН-релаксации методом внутренней точки из пространства моментов  $y$  в пространство атомов или их конфигураций фиксированного размера. Это позволяет конструировать обобщения релаксаций, не подверженные эффекту комбинаторного взрыва при увеличении размерности задачи, порядка задействованных полиномов и порядка собственно релаксаций.

<sup>3</sup>  $N$ -атомная мера — мера, носитель которой является множеством из  $N$  точек («атомов»).

При этом в общем случае теряются гарантии нахождения истинного глобального экстремума, но при отсутствии у задачи патологической невыпуклости качество результата зачастую остаётся приемлемым; подробности приведены в оригинальных работах.

## 2. Двойственные формы

Рассмотрим одномерную задачу ПМН

$$\begin{aligned} f^* &= \min_x \bar{f}(\bar{x}), \\ G_i(\bar{x}) &\geq 0, \\ \bar{x} &\in \mathbb{R}, \quad G_i(\bar{x}) = G_i^\top(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

и её ЛМН-релаксацию порядка  $k$  [5]:

$$\begin{aligned} f^* &= \min_y f(y) = \min_y \sum_i f_i y_i, \\ (3) \quad F(y) &= F_0 + \sum_i F_i y_i \geq 0, \end{aligned}$$

$$y_{[0]} = 1,$$

где  $y = [y_i]_{i=1, \dots, k+1} = [y_{[i]}]_{i=0, \dots, k} = [\int \bar{x}^i d\mu]_{i=0, \dots, k}$  — вектор моментов неизвестной меры  $\mu$ ;  $F(y) = \text{diag}(F_k(y), F_{k-d_1}(G_1, y), \dots, F_{k-d_m}(G_m, y)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $F_k(y)$  и  $F_{k-d_i}(G_i, y)$  — матрица моментов и локализирующие матрицы;  $d_i = \lceil \frac{1}{2} \deg G_i(\bar{x}) \rceil$ . Соответствующие атомизированные прямая [1] и прямая-двойственная [3] формы задачи имеют вид

$$\begin{aligned} f^* &= \min_x f(y(x)), \\ (4) \quad F(y(x)) &\geq 0, \\ \nu_x^\top x &= 1, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} h^* &= \min_{x, Z} \text{tr} F(y(x))Z, \\ F(y(x)) &\geq 0, \\ (5) \quad Z &\geq 0, \\ \nu_x^\top x &= 1, \\ \left( \nu_x^\perp A_x \right) z &= \nu_x^\perp b_x. \end{aligned}$$

Здесь  $x = [x_i]_{i=1, \dots, 2r} = [\bar{x}_1 \dots \bar{x}_r p_1 \dots p_r]^\top$  — вектор в пространстве атомов ( $r = k + 1$  — количество атомов,  $\bar{x}_i$  — атомы,  $p_i$  — их веса);  $\nu_x = [0 \dots 0 1 \dots 1]^\top$ ;  $\nu_x^\perp$  — матрица наибольшего ранга, ортогональная к  $\nu_x$ ;  $y(x) = [\sum_{i=1}^r p_i x_i^j]_{j=0, \dots, 2k+1}$ ;  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — матрица двойственных переменных;  $z$  — представление  $Z$  в некотором базисе  $\mathcal{Z}_i$  симметричных матриц:  $Z = \sum_i \mathcal{Z}_i z_i$ . Далее мы будем считать размерность  $z$  равной количеству линейно независимых элементов  $Z$ , но отметим, что двойственное решение  $Z^*$  имеет блочно-диагональную структуру, аналогичную структуре  $F(y)$ ; если таковым будет и начальное приближение, то при решении задачи методом внутренней точки все промежуточные аппроксимации  $Z^{(i)}$  фактически будут находиться в подпространстве меньшей размерности. Кроме того, будем считать базис  $\mathcal{Z}_i$  состоящим из матриц вида  $[\delta_{ip}\delta_{jq}]_{pq}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = i$ ; и  $[\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}]_{pq}$ ,  $i = 2, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, i - 1$  ( $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера, пара  $(i; j)$  определяет элемент базиса).

Линейные ограничения на  $z$  в (5) задаются матрицами

$$(6) \quad A_x = \left[ \text{tr} \left( \frac{d}{dx_i} F(y(x)) \right) \mathcal{Z}_j \right]_{ij}, \quad b_x = \left[ \frac{d}{dx_i} f(y(x)) \right]_i,$$

и, в случае равенства размерностей пространств моментов и атомов, описывают подпространство, не зависящее от  $x$ .

### 3. Уменьшение количества атомов

В [1] было показано, что система (4) допускает обобщение на случай, когда порядок (некоторых из) полиномов  $f(x)$  и  $G_i(x)$  выше, чем максимальный порядок моментов в исходной ЛМН-релаксации, или, эквивалентно, когда порядки матриц моментов и/или локализирующих матриц меньше, чем минимально допустимые с точки зрения исходного метода [5] значения. Поскольку порядок матрицы моментов напрямую определяет число атомов ( $r = k + 1$ ), последнее соотношение может быть проинтерпретировано как снижение количества отслеживаемых атомов.

Покажем, что для прямых форм такого вида также могут быть сконструированы двойственная/прямая-двойственная фор-

мы, позволяющие давать оценки качества находимых экстремумов. Основное препятствие здесь заключается в том, что у редуцированных систем подпространство  $\{z \mid (\nu_x^\perp A_x) z = \nu_x^\perp b_x\}$  более не является константой по отношению к  $x$  (т.е. к положению атомов). Это приводит к появлению следующих проблем:

- понятие единственной матрицы  $Z$ , характеризующей поведение целевой функции и ограничений для системы атомов в целом, теряет смысл, поскольку окрестности разных атомов будут предписывать различные допустимые подпространства для  $Z$ ;
- по мере того как вычислительный метод находит новые, улучшенные системы атомов, допустимые подпространства для  $Z$  изменяются, что влечет необходимость коррекции  $Z$  и, как следствие, ухудшает сходимость процесса решения двойственной подзадачи. При этом сходимость процесса решения прямой подзадачи — нахождения самих атомов — в общем случае не затрагивается; это создает препятствия применению алгоритмов, параллельно обновляющих текущие приближения  $x^{(i)}$  и  $Z^{(i)}$ .

Предлагаемое в данной статье решение указанных проблем основано на следующих наблюдениях. Во-первых, сколько бы глобальных экстремумов ни было у задачи, каждый из них по отдельности, будучи взят с единичным весом, образует систему атомов, являющуюся решением релаксации достаточного порядка. (Остальные решения образованы всеми возможными сочетаниями атомов-экстремумов с весами  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$ .) Таким образом, подход к нахождению  $Z$  должен поддерживать одноатомные системы. Логическим развитием данной идеи является использование своей матрицы  $Z$  для каждого атома по отдельности.

Во-вторых, прямая и двойственная подзадачи могут решаться независимо; алгоритмы, осуществляющие одновременный поиск решений  $x^*$  и  $Z^*$ , делают это главным образом для повышения эффективности вычислений. Поскольку целью данной статьи

является не столько эффективностью, сколько формирование принципиального подхода к нахождению двойственных решений, мы будем рассматривать конфигурации, в которых набор атомов уже эволюционировал в соответствии с вычислительными схемами из предыдущих публикаций и находится в окрестности решения прямой задачи (возможно, не глобального).

#### 4. Линейные ограничения

Формат линейных ограничений, заданных (6), использует весь набор атомов и жёстко привязан к их количеству. Покажем, что данные ограничения могут быть преобразованы к виду, использующему лишь один атом (с единичным весом). Обозначим этот атом как  $x_0$ . Тогда в векторе  $x = x(x_0)$  единственными ненулевыми элементами являются  $x_i = x_0$  и  $x_{i+r} = 1$ , где  $i$  – порядковый номер данного атома в  $r$ -атомной конфигурации; вектор моментов имеет вид  $y_0(x_0) = y(x(x_0)) = \left[ x_0^j \right]_j$ ,  $j = 0, \dots, 2k+1$ .

**Теорема 1.** Для нередуцированной прямой-двойственной формы (5) подпространство  $\{z \mid (\nu_x^\perp A_x) z = \nu_x^\perp b_x\}$  совпадает с подпространством  $\{z \mid \bar{A}_x(x_0)z = \bar{b}_x(x_0)\}$ , где

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{A}_x(x_0) &= \left[ \operatorname{tr} \left( \frac{d^i}{dx_0^i} F(y_0(x_0)) \right) \mathcal{Z}_j \right]_{ij}, \\ \bar{b}_x(x_0) &= \left[ \frac{d^i}{dx_0^i} f(y_0(x_0)) \right]_i, \\ i &= 1, \dots, 2k, \quad j = 1, \dots, n_z, \end{aligned}$$

а  $n_z$  – размерность вектора  $z$ .

**Доказательство.** По построению (см. [3]),  $\{z \mid (\nu_x^\perp A_x) z = \nu_x^\perp b_x\}$  эквивалентно  $\{z \mid (\nu_y^\perp A_y) z = \nu_y^\perp b_y\}$ , где

$$\begin{aligned} A_y &= \left[ \operatorname{tr} \left( \frac{d}{dy_{[i]}} F(y) \right) \mathcal{Z}_j \right]_{ij}, \\ b_y &= \left[ \frac{d}{dy_{[i]}} f(y) \right]_i, \end{aligned}$$



$$\nu_y = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$i = 0, \dots, 2k + 1, \quad j = 1, \dots, n_z.$$

Напомним, что целью левого умножения на  $\nu_y^\perp$  является исключение первых строк из данных матриц. Последние же их строки равны 0 в силу того, что момент  $y_{2k+1}$  имеет формальное предназначение и не встречается в  $F(y)$  и  $f(y)$ . Таким образом, нужное нам подпространство задается подматрицами, образованными строками  $2, \dots, 2k + 1$ :  $(A_y)_{2\dots 2k+1,*}$  и  $(b_y)_{2\dots 2k+1}$ .

Пусть  $x_0 = 0$ . Тогда, поскольку каждая пара соответствующих элементов  $f(y)$  и  $f(y_0(x))$  имеет вид

$$(f(y))_i = c_0 y_{[0]} + c_1 y_{[1]} + c_2 y_{[2]} + \dots,$$

$$(f(y_0(x)))_i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

для некоторого набора коэффициентов  $c_j$  мы видим, что

$$\left. \frac{d^i}{dx^i} f(y_0(x)) \right|_{x=0} = i! \frac{d}{dy_{[i]}} f(y).$$

Следовательно,  $\bar{b}_x(0)$  отличается от  $(b_y)_{2\dots 2k+1}$  лишь левым умножением на матрицу  $\text{diag}(1!, 2!, 3!, \dots)$ . Чуть более сложно, но в целом аналогично доказывается то же соотношение для матриц  $\bar{A}_x(0)$  и  $(A_y)_{2\dots 2k+1,*}$ , откуда следует утверждение теоремы для  $x_0 = 0$ .

Пусть теперь  $x_0 \neq 0$ . Поскольку элементы  $f(y_0(x))$  — полиномы порядка не выше  $2k$ , то

$$\left. \frac{d^i}{dx^i} f(y_0(x)) \right|_{x=x_0} = \sum_{j=i}^{2k} \frac{x_0^{j-i}}{(j-i)!} \left. \frac{d^j}{dx^j} f(y_0(x)) \right|_{x=0},$$

откуда следует, что  $\bar{b}_x(x_0)$  отличается от  $\bar{b}_x(0)$  лишь левым умножением на невырожденную квадратную матрицу (верхнюю треугольную с единичной диагональю). То же соотношение может быть аналогичным образом продемонстрировано для матриц  $\bar{A}_x(x_0)$  и  $\bar{A}_x(0)$ , откуда следует утверждение теоремы для любых  $x_0$ .

Если  $x_0$  является глобальным экстремумом исходной задачи, то мера, описываемая моментами  $y_0(x_0)$ , является частным (вырожденным) случаем  $r$ -атомной меры с носителем в виде множества глобальных экстремумов. Тогда форма (5) может быть превращена в обычную двойственную задачу заменой  $F(y(x))$  на  $F(y_0(x_0))$ . Более того, если вместо такого  $x_0$  мы возьмём точку  $x'_0$ , не являющуюся глобальным экстремумом, целевая функция  $\text{tr } F(y_0(x'_0))Z$  будет (с учётом линейных ограничений двойственной задачи) отличаться от  $\text{tr } F(y_0(x_0))Z$  на

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \text{tr } (F(y_0(x'_0)) - F(y_0(x_0))) Z &= \\
 &= \sum_i (y_0(x'_0) - y_0(x_0))_i \text{tr } F_i Z = \\
 &= \sum_i (y_0(x'_0) - y_0(x_0))_i f_i = \text{const}(Z).
 \end{aligned}$$

Таким образом, при фиксированных линейных ограничениях на  $Z$  решение  $Z$  новой вариации задачи (5) не зависит от  $x'_0$ ; изменяется лишь итоговое значение целевой функции, которое может быть равно 0 только если  $x'_0$  совпадает с одним из глобальных экстремумов исходной задачи.

Ценность данных результатов определяется двумя факторами. Во-первых, мы получаем возможность выделить в наборе атомов наиболее подходящих кандидатов на роль глобальных экстремумов и дать им индивидуальные оценки качества в виде интервалов двойственности. Во-вторых, теорема 1 допускает естественное обобщение на случай редуцированных прямых двойственных форм (см. следующий раздел). При этом формулы для нахождения элементов  $\bar{A}_x$  и  $\bar{b}_x$  остаются идентичными, меняются лишь размеры матриц.

## 5. Понижение порядка

Рассмотрим полную и редуцированную прямые двойственные формы одной и той же задачи. Сохраним для полной формы использованные выше обозначения, а для редуцированной формы обозначим количество атомов как  $r' < r$ ,

порядок релаксации как  $k' < k$ , а также зададим такие  $d'_i$  (уже не связанные напрямую с порядками полиномов в  $G_i(x)$ ), что  $k' - d'_i \leq k - d_i$ .

Пусть  $x_0$  — анализируемый кандидат на точку глобального экстремума. Модифицируем исходную задачу так, чтобы сохранить в  $x_0$  локальные характеристики целевой функции и ограничений, и при этом уменьшить порядок задействованных полиномов до такой степени, чтобы редуцированная форма стала полной для новой задачи. Для этого заменим  $f(x)$  и  $G_i(x)$  на соответствующего порядка фрагменты их разложений в ряд Тейлора в окрестности  $x_0$ . Система (5) станет обычной двойственной формой и примет вид

$$(9) \quad \begin{aligned} g^* &= \min_{Z'} \operatorname{tr} F'(y_0(x_0))Z', \\ Z' &\geq 0, \\ \bar{A}'_x(x_0)z' &= \bar{b}'_x(x_0). \end{aligned}$$

Здесь  $Z'$  и  $z'$  связаны аналогично  $Z$  и  $z$ ;  $F'(y) = \operatorname{diag}(F_{k'}(y), F_{k'-d'_1}(G_1, y), \dots, F_{k'-d'_m}(G_m, y))$ ;  $\bar{A}'_x(x_0)$  и  $\bar{b}'_x(x_0)$  находятся из (7) с учётом новых порядков. Как показывает следующее утверждение, линейные ограничения в (9) тесно связаны с аналогичными ограничениями нередуцированной задачи.

**Утверждение 1.**  $\bar{A}'_x(x_0)$  и  $\bar{b}'_x(x_0)$  являются подматрицами  $\bar{A}_x(x_0)$  и  $\bar{b}_x(x_0)$ . Они образованы первыми  $2k'$  строками; столбцы  $\bar{A}'_x(x_0)$  представлены теми столбцами  $\bar{A}_x(x_0)$ , для которых скалярное умножение на  $Z'_j$  (при формировании  $\bar{A}'_x(x_0)$ ) выделяет из  $F'(y)$  те же элементы, что и скалярное умножение  $F(y)$  на  $Z_j$  (при формировании  $\bar{A}_x(x_0)$ ).

**Доказательство.** Утверждение следует из структуры (7) и того, что, с точностью до исключённых из рядов Тейлора слагаемых (не участвующих в  $\bar{A}'_x(x_0)$  и  $\bar{b}'_x(x_0)$ ), матрицы  $F_{k'}(y)$  и  $F_{k'-d'_i}(G_i, y)$  являются подматрицами  $F_k(y)$  и  $F_{k-d_i}(G_i, y)$ , а значит,  $F'(y)$  является подматрицей  $F(y)$ .

Если в исходной и редуцированной задачах имеет место сильная двойственность, а точка  $x_0$  является в них глобальным минимумом, обе они приведут к обнаружению нулевого интервала двойственности ( $\operatorname{tr} F(y_0(x_0))Z$  и  $\operatorname{tr} F'(y_0(x_0))Z'$ , соответ-

ственно). Условия, при которых глобальный экстремум исходной формы является таковым и для редуцированной формы, представляются нетривиальными. Тем не менее мы можем констатировать, что для каждой задачи существует такое значение  $r'' \leq r$ , что при  $r' \geq r''$  глобальный экстремум будет корректно детектирован прямой-двойственной формой.

## 6. Примеры

### 6.1. БАЗОВЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим пример, ранее приведённый в [1]:

$$f^* = \min_x x^2,$$

$$g_1(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1 \geq 0.$$

Графики  $f(x)$  и  $g_1(x)$  изображены на рис. 1. Неравенство  $g_1(x) \geq 0$  задаёт область поиска в виде двух отрезков, на которых  $f(x)$  имеет по одному локальному минимуму в точках  $\pm\sqrt{1 - \sqrt{2}/2} \approx \pm 0,5412$  соответственно.

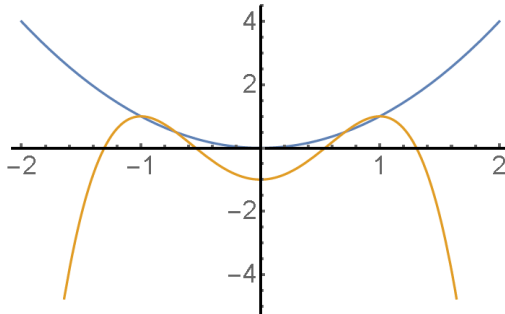


Рис. 1. Графики  $f(x)$  и  $g_1(x)$

Построим трансформированную прямую-двойственную форму ЛМН-релаксации данной задачи. Как и в оригинальной работе, размеры матриц в ЛМН-релаксации определяются параметрами  $d_1 = \lceil \frac{1}{2} \deg g_1(x) \rceil = 2$  и  $k \geq \max\{\frac{1}{2} \deg f(x), d_1\} = 2$ .

Для минимального порядка  $k = 2$  (и  $r = k + 1 = 3$ ) соответствующая ЛМН-релаксация (3) имеет вид

$$f^* = \min_y c^\top y,$$

$$F(y) = \begin{bmatrix} y_{[0]} & y_{[1]} & y_{[2]} & & 0 \\ y_{[1]} & y_{[2]} & y_{[3]} & & 0 \\ y_{[2]} & y_{[3]} & y_{[4]} & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2y_{[4]} + 4y_{[2]} - y_{[0]} & \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\nu_y^\top y = 1,$$

$$y = [y_{[0]} \ y_{[1]} \ y_{[2]} \ y_{[3]} \ y_{[4]} \ y_{[5]}]^\top,$$

$$c = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^\top,$$

$$\nu_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top.$$

Воспользуемся той же трансформацией пространства поиска, что и ранее:

$$y_{[j]} = \sum_{i=1}^r p_i x_i^j, \quad j = 0, 1, \dots, 2k + 1,$$

где  $x_i$  и  $p_i$  — новые неизвестные, составляющие вектор

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_r]^\top.$$

Тогда

$$(10) \quad F(y(x)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 p_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{i=1}^3 p_i g_1(x_i) \end{bmatrix},$$

$Z$  — симметричная матрица  $4 \times 4$ ;  $\nu_x = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^\top$ ; в качестве  $\nu_x^\perp$  можно взять матрицу

$$(11) \quad \nu_x^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Как было продемонстрировано в [1, 3], при использовании приведенного в данных работах метода атомы сходятся к экстремумам  $\pm\sqrt{1 - \sqrt{2}/2}$ . Подставив набор атомов  $x_1 = -\sqrt{1 - \sqrt{2}/2}$ ,  $x_2 = \sqrt{1 - \sqrt{2}/2}$ ,  $x_3 = 0$ ,  $p_1 = p_2 = 1/2$ ,  $p_3 = 0$  в (10), (6) и далее, вместе с (11), в форму (5), приходим к двойственной задаче, решение которой имеет вид

$$Z \approx \begin{bmatrix} 0,0607 & 0,0000 & 0,2071 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,2071 & 0,0000 & 0,7071 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,3536 \end{bmatrix}, \quad \text{tr } FZ \approx 0.$$

Оценим теперь данные экстремумы с помощью результатов, полученных в настоящей статье. Возьмем в качестве кандидата на экстремум точку  $x_0 = \sqrt{1 - \sqrt{2}/2}$ . Для нередуцированной задачи имеем, с учетом (7):

$$F(y_0(x_0)) \approx \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,5412 & 0,2929 & 0 \\ 0,5412 & 0,2929 & 0,1585 & 0 \\ 0,2929 & 0,1585 & 0,0858 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_x(x_0) \approx \begin{bmatrix} 0 & 2,0 & 2,2 & 0 & 1,1 & 1,8 & 0 & 0,6 & 0 & 3,1 \\ 0 & 0 & 4,0 & 0 & 2,0 & 6,5 & 0 & 3,5 & 0 & 1,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12,0 & 0 & 13,0 & 0 & -26,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24,0 & 0 & -48,0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_x(x_0) \approx [ 1,1 \quad 2,0 \quad 0 \quad 0 ]^T.$$

Подставив данные матрицы в (5) и решив полученную двойственную задачу, мы получим матрицу  $Z$ , идентичную приведенной выше.

Прделаем теперь те же операции для редуцированной задачи с  $k = 1$ . Получим:

$$F'(y_0(x_0)) \approx \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,5412 & 0 \\ 0,5412 & 0,2929 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}'_x(x_0) \approx \begin{bmatrix} 0 & 2,0 & 0 & 1,1 & 0 & 3,1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}'_x(x_0) \approx \begin{bmatrix} 1,1 \\ 2,0 \end{bmatrix}.$$

Решение соответствующей задачи (9) имеет вид

$$Z' \approx \begin{bmatrix} 0,2426 & -0,4483 & 0,0000 \\ -0,4483 & 0,8284 & 0,0000 \\ -0,0000 & 0,0000 & 0,3536 \end{bmatrix}, \quad \text{tr } F'Z \approx 0.$$

Таким образом,  $x_0$  является также экстремумом согласно редуцированной схеме.

Заметим, что, в силу параллелей между двойственными задачами и условиями Каруша–Куна–Таккера, которые в данном случае вырождаются в метод множителей Лагранжа, нижние правые элементы матриц  $Z$  и  $Z'$  (соответствующие ограничению  $g_1(x) = 0$ ) равны множителю Лагранжа  $\lambda$  в задаче

$$f^* = \min_x f(x), \\ g_1(x) = 0$$

с функцией Лагранжа  $f(x) + \lambda g_1(x)$ .

## 6.2. ОБНАРУЖЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ

Изменим целевую функцию:

$$f^* = \min_x (x - 1/10)^2, \\ g_1(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1 \geq 0.$$

Точка  $x_0 = \sqrt{1 - \sqrt{2}}/2$  по-прежнему является глобальным экстремумом данной задачи, но  $-x_0$  теперь — ложный экстремум.

Продельвая вычисления, аналогичные предыдущему примеру, мы получаем следующие результаты.

- Нередуцированная форма (5) корректно определяет глобальный экстремум, демонстрируя нулевой интервал двойственности в  $x_0$  и ненулевой — в  $-x_0$ .

- Редуцированная форма (9) приводит к нулевому интервалу двойственности в обоих точках. Таким образом, в данном случае редуцированная форма может использоваться для определения качества нахождения каждого из экстремумов (степени близости текущей аппроксимации к  $f(\pm x_0)$ ), но не для определения того, является ли он глобальным. Последнее нуждается в нахождении обеих точек и прямом сравнении соответствующих значений целевой функции.

### 6.3. ОГРАНИЧЕНИЯ РЕДУКЦИИ

Продемонстрируем теперь ситуацию, когда возможности редуцированных форм более ограничены. Усложним целевую функцию задачи, заменив её на полином, подобранный так, чтобы изменить знак второй производной в окрестности решения, сохранив само решение задачи:

$$f^* = \min_x x^2 - 6/5x^4 + x^6/2,$$

$$g_1(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1 \geq 0.$$

Графики  $f(x)$  и  $g_1(x)$  приведены на рис. 2. Глобальные экстремумы, как и в первом примере, находятся в  $\pm\sqrt{1 - \sqrt{2}/2}$ .

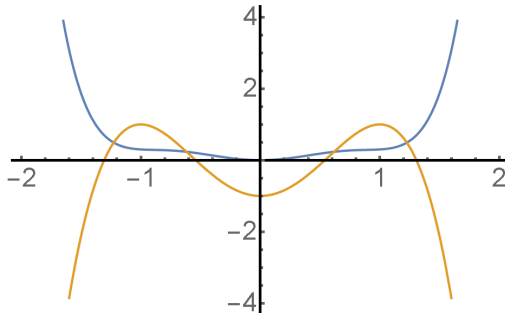


Рис. 2. Графики  $f(x)$  и  $g_1(x)$

Особенностью данной задачи является то, что для её решения методом моментов необходима ЛМН-релаксация существенно более высокого порядка, чем в предыдущих



примерах. Минимально допустимый порядок равен  $k = \max\{\lceil \frac{1}{2} \deg f(x) \rceil, \lceil \frac{1}{2} \deg g_1(x) \rceil\} = 3$ , но даже его недостаточно, в чём можно убедиться, попытавшись решить задачу с помощью GloptiPoly [6]:

```
mpol x 1
f = x^2-1.2*x^4+x^6/2
g1 = -2*x^4+4*x^2-1
P = msdp(min(f), [g1>=0]) % ***
[status, obj] = msol(P)
double(x)
```

Данный код приводит к сообщению о невозможности извлечения глобальных экстремумов. Решение становится доступным, только если увеличить порядок релаксации на единицу, заменив строку, помеченную «\*\*\*», на «P = msdp(min(f), [g1>=0], 4)». Структура матрицы  $F(y) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  в этом случае является блочно-диагональной с блоками  $F_4(y) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  и  $F_2(g_1, y) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Проверим с помощью двойственных форм точку  $x_0 = \sqrt{1 - \sqrt{2}/2}$  на экстремальность. Подстановка  $y_0(x_0)$  в базовую форму (5) приводит к решению  $Z \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ , также состоящему из блоков  $5 \times 5$  и  $3 \times 3$ . (Мы не приводим значения  $Z$ , а также  $\bar{A}_x \in \mathbb{R}^{8 \times 36}$  и  $\bar{b}_x \in \mathbb{R}^8$  ввиду их размеров.) Соответствующий интервал двойственности  $\text{tr} FZ \approx 0$ , так что проверка  $x_0$  на экстремальность пройдена.

Если мы попытаемся произвести редукцию двойственной формы, понизив значение  $k$ , то ближайшая комбинация порядков будет иметь вид  $k' = 3$ ,  $k' - d'_1 = 2$ , а соответствующая матрица  $F'(y_0(x_0)) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$  будет состоять из блоков  $F'_3(y) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  и  $F'_2(g_1, y) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  (кроме того,  $\bar{A}'_x \in \mathbb{R}^{6 \times 28}$  и  $\bar{b}'_x \in \mathbb{R}^6$ ). Решение редукционной задачи (9) в данном случае также даёт  $\text{tr} F'Z' \approx 0$  и таким образом проходит проверку.

Дальнейшая редукция задачи сопровождается переменным успехом. Некоторые из комбинаций  $k'$  и  $d'_1$  приводят к нулевому, некоторые — к существенно ненулевому значению целевой функ-

ции  $\text{tr } F'Z'$ , а для некоторых задача не имеет решения. Причину такого эффекта можно наглядно продемонстрировать на примере редукции до  $k = 1$ . Согласно описанной в разделе 5 процедуре, это преобразование эквивалентно замене  $f(x)$  и  $g_1(x)$  на их аппроксимации порядка 2 в окрестности  $x_0$ . Данные аппроксимации изображены на рис. 3. Мы видим, что в задаче с такими полиномами целевая функция неограниченно убывает при  $x \rightarrow -\infty$ , при этом значения  $x < -\sqrt{17 + 23/\sqrt{2}} \approx -5,7674$  являются допустимыми. Таким образом, экстремум модифицированной прямой задачи неограничен, а двойственная задача, соответственно, неразрешима.

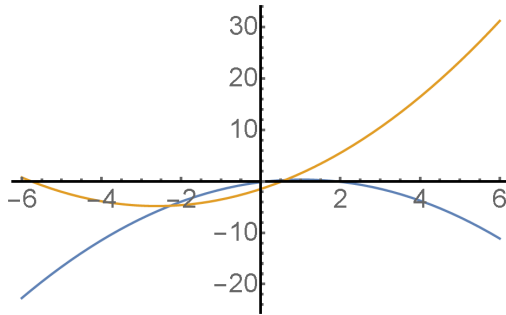


Рис. 3. Аппроксимации  $f(x)$  и  $g_1(x)$  в окрестности  $x_0 \approx 0,54$

## 7. Заключение

В статье продемонстрировано применение метода атомной оптимизации для получения редуцированных двойственных форм ЛМН-релаксаций в одномерных задачах невыпуклого программирования. Данный результат позволяет в ряде случаев давать глобальные или локальные оценки качества найденных экстремумов в виде интервалов двойственности. В дальнейшем предполагается распространение данной техники на многомерные задачи, а также определение допустимых степеней редукции в зависимости от класса задачи.

## Литература

1. ПОЗДЯЕВ В.В. *Атомная оптимизация, часть 1: трансформация пространства поиска и одномерные задачи* // Управление большими системами. – 2011. – №36. – С. 39–80.
2. ПОЗДЯЕВ В.В. *Атомная оптимизация, часть 2: многомерные задачи и полиномиальные матричные неравенства* // Управление большими системами. – 2013. – №43. – С. 95–123.
3. ПОЗДЯЕВ В.В. *Прямые и двойственные формы в методе атомной оптимизации для одномерных задач* // Динамика сложных систем – XXI век. – 2014. – №1. – С. 53–58.
4. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Detecting global optimality and extracting solutions in GloptiPoly* // Positive polynomials in control. – 2005. – P. 1–18.
5. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback* // IEEE Trans. Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, №2. – P. 192–202.
6. HENRION D., LASSERRE J.-B., LÖFBERG J. *GloptiPoly 3: moments, optimization and semidefinite programming* // Optimization Methods and Software. – 2009. – Vol. 24, №4–5. – P. 761–779.
7. LASSERRE J.-B. *Global optimization with polynomials and the problem of moments* // SIAM J. on Optimization. – 2001. – Vol. 11, №3. – P. 796–817.

## DUAL FORM REDUCTION IN THE ATOMIC OPTIMIZATION METHOD

**Vladimir Pozdyayev**, Arzamas Polytechnical Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas, Cand.Sc., associate professor (vpozdyayev@gmail.com).

*Abstract: Unidimensional optimization problems with polynomial objective function and inequality constraints are considered. For problems dual to their linear relaxations a transformation is presented that makes them compatible with the atomic optimization method, both in its basic and in the generalized form with a reduced number of atoms.*

Keywords: nonlinear programming, matrix inequalities, polynomial inequalities, moment theory.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым*

*Поступила в редакцию 05.10.2014.  
Дата опубликования 31.03.2015.*