УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

ОПТИМАЛЬНЫЕ СОГЛАСОВАННЫЕ МЕХАНИЗМЫ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ И ЗАДАЧА ТЕОРИИ КОНТРАКТОВ

Еналеев А. К.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва*)

Исследуется механизм функционирования двухуровневой активной системы, в которой целевая функция центра может явно зависеть от системы стимулирования, доказывается оптимальность согласованных механизмов для этого случая и устанавливается связь задачи синтеза оптимальных механизмов с задачей стимулирования в теории контрактов.

Ключевые слова: согласованность планирования и стимулирования, принцип открытого управления, неманипулируемость, синтез оптимального механизма, теория контрактов.

1. Введение

В постановках задач управления в активных системах в основном (за исключением, пожалуй, работ [6, 7, 12]) целевая функция центра не зависит явно от системы стимулирования, применяемой центром в отношении активных элементов. При этом в [6, 7] исследовался в основном случай полной информированности центра, а в [12] – случай со стохастическим активным элементом. В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в работах [4, 10, 11], и рассматриваются задачи управления при неполной информации, в которых вводится явная зависимость целевой функции центра от системы стимулирования. Результатами работы являются доказательство для

---

[1] *Анвер Касимович Еналеев, кандидат технических наук, старший научный сотрудник* (*anver.en@gmail.com*).

рассматриваемых задач оптимальности согласованных механизмов, обеспечивающих неманипулируемость (сообщение активным элементом достоверной информации и выполнение плана) и выявление связи с задачей построения соответствующего механизма в теории контрактов [6, 15, 17]. В частности, показывается, что одна из базовых постановок задач и, соответственно, результаты решения задачи теории контрактов являются частным случаем решения рассмотренной задачи синтеза оптимального согласованного механизма.

2. Модель и постановка задачи

Пусть активная система состоит из центра и активного элемента (АЭ). Обозначим $f(x, y, r)$ целевую функцию АЭ. Здесь x – назначаемый центром план; X – множество допустимых планов; y – выбираемое активным элементом состояние; Y – множество допустимых состояний; r – параметр, характеризующий систему; A – множество допустимых значений параметра r. Далее для простоты примем $X = Y$. Предположим, что X, Y, также как и A, являются ограниченными замкнутыми множествами.

Будем рассматривать целевые функции АЭ вида

(1) $f(x, y, r) = s(x, y) - \zeta(y, r)$,

где $\zeta(y, r)$ – функция затрат АЭ при выборе состояния y; $s(x, y) = \sigma(y) - \chi(x, y)$ – функция стимулирования за выбор активным элементом состояния y при плане x. Здесь функция $\sigma(y)$ – поощрение за выбор величины y, $0 \leq \sigma(y) \leq g$, где g – фонд поощрения, а $\chi(x, y)$ – функция штрафов за отклонение состояния y от плана x, причем $\chi(x, y) \geq 0$, $\chi(y, y) = 0$. Будем считать далее, что функции $\sigma(y)$ полунепрерывны сверху, а $\chi(x, y)$ полунепрерывны снизу.

Обозначим $\Phi(x, y, \sigma(x), \chi(x, y), r)$ целевую функцию центра и предположим

(2) $\Phi(y, y, \sigma, \chi(y, y), r) = \Phi(y, y, \sigma, 0, r) \geq \Phi(x, y, \sigma, \chi(x, y), r) \geq 0$,

где функция $\Phi(y, y, \sigma, \chi, r)$ непрерывна, невозрастает по σ и строго вогнута по y при всех $r \in A$[1]. План x назначается центром в соответствии с некоторой выбранной процедурой планирования $x = \pi(.)$, где $\pi(.)$ отображает множество A в множество X; π: $A \to X$. Далее предполагается непрерывность отображения $\pi(.)$.

Совокупность процедуры планирования $x = \pi(.)$ и функции стимулирования $s(x, y)$ составляет механизм функционирования $\mu = \{\pi(.), s(x, y)\}$.

Введем предположения об информированности и порядке функционирования в рассматриваемой активной системе.

Активному элементу известно значение параметра r, а центру известно только множество A допустимых значений этого параметра. Функционирование рассматриваемой активной системы описывается следующим образом (порядок ходов). Центр выбирает и сообщает механизм μ, после этого АЭ сообщает оценку ρ параметра r, затем в соответствии с процедурой планирования $\pi(.)$ назначается план $x = \pi(\rho)$, затем АЭ выбирает состояние y, стремясь максимизировать по y свою целевую функцию $f(x, y, r)$.

Обозначим функцию предпочтения активного элемента $\varphi(x,r) = \max_{y \in Y} f(x,y,r)$ и функцию предпочтения центра

$$\Psi(x,\sigma(x),r) = \inf_{y \in Z(x,r)} \Phi(x,y,\sigma(x),\chi(x,y),r),$$

где $Z(x, r)$ – множество рациональных стратегий активного элемента при выборе состояния y (определение используемого в данной работе множества рациональных стратегий $Z(x, r)$ приведено ниже).

Для заданного механизма функционирования μ определим показатель его эффективности

(3) $$K(\mu) = \inf_{r \in A}[\inf_{\rho \in R(r)} \Psi(\pi(\rho),\sigma(\pi(\rho)),r) / \Psi_{\text{в}}(r)],$$

---

[1] *Условие* (2) *было введено еще в работах* [1, 3] *и означает, что центр несет потери от невыполнения плана.*

где $R(r)$– множество рациональных стратегий АЭ при выборе им сообщения ρ (определение множества $R(r)$ приведено ниже); $\Psi_в(r)$ –заданная нормирующая функция. В качестве нормирующей функции могут быть могут быть выбраны, например, одна из следующих функций: $\Psi_в(r) = \max_{x \in X} \Phi(x, x, 0, 0, r)$, либо $\Psi_в(r) = \text{const} > 0.$

Далее будем предполагать выполнение «слабого условия благожелательности АЭ» [10, 11], при котором множества рациональных стратегий АЭ принимают следующий вид:

$$Z(x,r) = \begin{cases} \{x\}, \text{если } x \in \operatorname{Arg}\max_{y \in Y} f(x,y,r), \\ \operatorname{Arg}\max_{y \in Y} f(x,y,r) \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

$$R(r) = \begin{cases} \{r\}, \text{если } r \in \operatorname{Arg}\max_{\rho \in A} \varphi(\pi(\rho),r), \\ \operatorname{Arg}\max_{\rho \in A} \varphi(\pi(\rho),r) \text{ в противном случае}. \end{cases}$$

Содержательно это условие означает, что если для АЭ сообщение достоверной информации является рациональной стратегией, то сообщается именно достоверная информация, и, соответственно, если стратегия выполнения плана является рациональной, то выбирается именно она. Нетрудно убедиться, что «слабое условие благожелательности» выполняется, если справедливо «условие благожелательности», используемое в работах [8, 9, 13].

Особый интерес представляют собой механизмы, которые обеспечивают выполнение планов и сообщение достоверной информации (неманипулируемость), т.е.

(4) $Z(x,r) = \{x\}$,

(5) $R(r) = \{r\}$.

Такие механизмы $\mu_{пр}$ в теории активных систем принято называть правильными. Заметим, что для правильных механизмов $\mu_{пр}$ выражение для критерия эффективности существенно упрощается (по сравнению с (3)):

(6) $\mathrm{K}(\mu_{пр}) = \min_{r \in A}[\Phi(\pi(r),\pi(r),\sigma(\pi(r)),0,r) / \Psi_в(r)]$.

Обозначим $M_{\text{пр}}$ множество правильных механизмов (то, что множество $M_{\text{пр}}$ непусто, подтверждается, например, результатами работы [11]).

В теории активных систем ставится следующая общая задача синтеза оптимального механизма функционирования μ^*:

$$(7) \quad K(\mu^*) = \sup_{\mu \in M} K(\mu) - \varepsilon ,$$

где M – некоторое заданноемножество механизмов, а ε – достаточно малое положительное число.

Итак, пусть задано некоторое множество M такое,что

$$M \bigcap M_{\text{пр}} \neq \varnothing .$$

Задача. Охарактеризовать множества допустимых механизмов M, для которых выполняется[1]

$$K(\mu^*) = \max_{\mu \in M} K(\mu) = \max_{\mu \in M \bigcap M_{\text{пр}}} K(\mu) ,$$

т.е. оптимальный механизм на множестве M принадлежит множеству правильных механизмов,

$$(8) \quad \mu^* \in M \bigcap M_{\text{пр}} .$$

Ниже будут найдены и исследованы достаточные условия выполнения (8), характеризующие множество механизмов M для рассматриваемой модели активной системы.

Забегая вперед, скажем, что эти условия будут представлять собой некоторые условия согласованности механизмов функционирования.

Дальнейшее изложение потребует дополнительных предположений о свойствах модели АЭ.

Во-первых, будем предполагать, что $Y = X = [x^{\text{н}}, x^{\text{в}}]$, $A = [r^{\text{н}}, r^{\text{в}}]$, т.е. множества допустимых состояний, планов и значений параметра r представляют собой отрезки на числовой оси.

---

[1] *Здесь вместо sup используется max и принимается $\varepsilon = 0$, так как для принятых в работе предположений (правильность механизма, свойства функции затрат, условия благожелательности АЭ) $\max_{\mu \in M \bigcap M_{\text{пр}}} K(\mu)$ достижим.*

Во-вторых, предположим, что функция затрат $\zeta(x, r)$ дважды дифференцируема по x, дифференцируема по r и $\zeta'_x(x,r) > 0$, $\zeta''_{xx}(x,r) > 0$, $\zeta'_r(x,r) < 0$, $\zeta''_{xr}(x,r) < 0$ при всех $x \in X$, $r \in A$.

Первые два неравенства указывают, соответственно, на возрастание функции затрат и ее выпуклость. Третье неравенство характеризует монотонность функции затрат по параметру r. Четвертое неравенство соответствует хорошо известным в микроэкономике *условиям Спенса–Мирлиса* [18] и характеризует упорядоченность АЭ по возможным значениям параметра r, причем с увеличением r происходит снижение затрат и темпа роста затрат с увеличением x.

В качестве множества допустимых систем стимулирования примем

$$S = \{s(x, y) \mid 0 \le \sigma(x) \le g, \chi(x, y') - \chi(x, y) \le u_\chi(y, y'),$$
$$x, y, y' \in Y\},$$

где g – заданное положительное число (фонд поощрения), а $u_\chi(y, y')$ – заданный показатель максимального роста функции штрафов за невыполнение плана [11], функция $u_\chi(., .)$удовлетворяет неравенству «треугольника»: $u_\chi(x, y) + u_\chi(y,y') \ge u_\chi(x, y')$.

Отметим, что, вообще говоря, функция максимального роста $u_\chi(x, y)$ может явно зависеть от значений функции стимулирования σ в точках x, либо y, т.е. может быть, что $u_\chi(x, y) = u_{\chi\sigma}(x, y, \sigma(x))$ или $u_\chi(x, y) = u_{\chi\sigma}(x, y, \sigma(y))$.

Обозначим множество выгодных для АЭ планов, а значит планов, согласованных с интересами АЭ,

$$P(r) = \{x \in X \mid f(x, y, r) \le f(x, x, r), \forall y \in Y\}.$$

Таким образом, центр, назначая планы из множества $P(r)$, некоторым образом согласовывает свои интересы с интересами АЭ. Это множество будем называть *множеством согласованных планов.*

В [11]доказано, что множество согласованных планов $P(r)$ при сделанных предположениях о свойствах функции затрат представимо в виде отрезка $P(r) = [x^{н}, x^P(r)]$, где $x^P(r)$ – неубывающая функция.

Пусть $y^* = y^*(x)$ – выбор состояния АЭ при плане x, т.е. $y^* \in Z(x, r)$. Известно [11], что если функция штрафов является сильно согласованной, т.е. удовлетворяет неравенству «треугольника», и план x^c удовлетворяет условию согласования $x^c \in P(r)$, то $y^* = x^c$, если же $x \notin P(r)$, то $y^* \in P(r) = [x^н, x^P(r)]$.

Тогда функцию предпочтения АЭ можно записать в виде

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \sigma(x) - \zeta(x,r), \text{если } x \in P(r), \\ \sigma(y^*) - \zeta(y^*,r) - \chi(x,y^*), \text{если } x \notin P(r), \end{cases}$$

где $y^* = y^*(x)$.

Соответственно, функцию предпочтения центра можно представить в виде

$$\Psi(x,r) = \begin{cases} \Phi(x,x,\sigma(x),0,r), \text{если } x \in P(r), \\ \Phi(x,y^*,\sigma(x),\chi(x,y^*),r), \text{если } x \notin P(r). \end{cases}$$

Заметим, что в силу предположения (2) имеет место $\Phi(y^*, y^*, \sigma, 0, r) \geq \Phi(x, y^*, \sigma, \chi(x, y), r)$. Но так как $y^* \in P(r)$, то выбором плана $x = y^*$ всегда можно обеспечить выбор активным элементом состояния y^*, т.е. функцию предпочтения центра достаточно рассматривать в области определения $x \in P(r)$, а следовательно достаточно рассматривать только те процедуры планирования $\pi(.)$, значение которых принадлежит множеству $P(\rho)$.

В [2] показано, что оптимальная процедура планирования содержится в множестве так называемых *процедур открытого управления*[1]. По определению процедура открытого управления $\pi^{ОУ}(.)$ задается условием «совершенного согласования» [2]:

$$(9) \quad \forall \rho \in A: \varphi(\pi^{ОУ}(\rho), \rho) = \max_{x \in X_c} \varphi(x, \rho),$$

где X_c – устанавливаемое центром замкнутое подмножество множества X, не зависящее от сообщаемой активным элементом оценки ρ. Именно заданием центром множества X_c и условия (9) определяется процедура открытого управления.

В [2] доказано, что процедура открытого управления стимулирует АЭ сообщать достоверную информацию $\rho = r$, так как $\forall \rho, r \in A$: $\varphi(\pi^{ОУ}(\rho), r) \leq \varphi(\pi^{ОУ}(r), r)$.

Отсюда следует, что для процедур открытого управления функция предпочтения центра имеет вид $\Psi(\pi^{ОУ}(r), \sigma(\pi^{ОУ}(r)), r)$. Из этого свойства вытекает, что для процедуры открытого управления критерий эффективности (3) имеет вид

$$K(\mu) = \min_{r \in A}[\Phi(\pi^{ОУ}(r), \pi^{ОУ}(r), \sigma(\pi^{ОУ}(r)), 0, r) / \Psi_{в}(r)].$$

Поскольку оптимальной процедурой планирования при произвольной фиксированной целевой функции АЭ [2] является процедура открытого управления (9), то определение оптимального механизма сводится к нахождению оптимальной системы стимулирования $s^*(x, y) = \sigma^*(x) - \chi^*(x, y)$.

Таким образом, ниже для рассматриваемого случая неполной информированности центра будет исследована задача (7) синтеза оптимального механизма μ^* на множестве

$$M = \{\mu \mid s(x, y) \in S, x = \pi(\rho), x, y \in X, \rho \in A\},$$

где $\pi(\rho)$ – непрерывные функции, определенные на множестве A и принимающие значения в X.

3. Оптимальность согласованного механизма

В [10, 11] показано, что процедура открытого управления $\pi^{ОУ}(r)$ представляет собой неубывающую непрерывную функцию, принимающую значения в множестве согласованных планов $P(r)$.

Зафиксируем некоторое значение γ показателя эффективности механизма μ. Введем в рассмотрение множество $N_{\gamma\sigma}$ неубывающих непрерывных функций $x = \pi_\gamma(r)$, отображающих множество A в множество $P(r)$ при выполнении также условия

(10) $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) \geq \gamma \Psi_{в}(r)$,

т.е.

$$\forall r \in A, x = \pi_\gamma(r) \in P(r) : \Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) \geq \gamma \Psi_{в}(r).$$

Справедливо следующее утверждение [10].

Утверждение. Предположим, что функция $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ непрерывна и строго квазивогнута по x, и пусть γ таково, что неравенство $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) \geq \gamma\Psi_{в}(r)$ разрешимо в множестве X при $\forall r \in A$, тогда множество $Q_{\gamma\sigma}$ всех точек (x, r), удовлетворяющих этому неравенству, можно представить в виде

$$Q_{\gamma\sigma} = \left\{ (x,r) \middle| q_1^\sigma(\gamma,r) \le x \le q_2^\sigma(\gamma,r), r \in A, x \in X \right\},$$

где $q_1^\sigma(\gamma,r)$ и $q_2^\sigma(\gamma,r)$ – непрерывные функции.

Замечание. Проверка условия непрерывности и квазивогнутости функции $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$, когда она явно зависит от искомой функции $\sigma(x)$, может представлять нетривиальную задачу. Поэтому ниже приводятся примеры, когда условие непрерывности и квазивогнутости заведомо выполняются. Примером является функция $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) = \Phi^*(x, x, r) - \sigma(x)$, где $\Phi^*(x, x, r)$ – непрерывная, строго вогнутая функция по x, а $\sigma(x)$ – выпуклая, непрерывная функция. В этом случае $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ строго вогнутая функция. Достаточным условием квазивогнутости функции $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ является представление ее в виде $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r) = \omega(\Phi^*(x, x, 0, r) - \sigma(x))$, где $\omega(.)$ – неубывающая функция, а $\Phi^*(x, x, 0, r) - \sigma(x)$ удовлетворяет условиям предыдущего примера [16].

Рассмотрим функции

$$\overline{q_1^\sigma}(\gamma,r) = \max_{r^н \le p \le r} q_1^\sigma(\gamma,p), \quad \underline{q_2^\sigma}(\gamma,r) = \min_{r \le p \le r^в} q_2^P(\gamma,p),$$

где $q_2^P(\gamma,p) = \min\{\ q_2^\sigma(\gamma,p), x^P(p)\ \}$.

Очевидно, что $\overline{q_1^\sigma}(\gamma,r)$ и $\underline{q_2^\sigma}(\gamma,r)$ – неубывающие, непрерывные функции.

Справедливо также следующее утверждение (доказательство приведено в [10]).

Утверждение. Если $Q_{\gamma\sigma} \ne \phi$, то $\overline{q_1^\sigma}(\gamma,r) \le \underline{q_2^\sigma}(\gamma,r)$ при всех $r \in A$, и условие (10) в определении множества $N_{\gamma\sigma}$ можно заменить условием $\overline{q_1^\sigma}(\gamma,r) \le x(r) \le \underline{q_2^\sigma}(\gamma,r)$, т.е.

(11) $$N_{\gamma\sigma} = \left\{ x(r) \in P(r) \mid \overline{q_1^\sigma}(\gamma,r) \le x(r) \le \underline{q_2^\sigma}(\gamma,r), r \in A \right\},$$

где $x(r)$ – непрерывные, неубывающие функции.

Заметим, что $N_{\gamma_1\sigma} \subseteq N_{\gamma_2\sigma}$, если $\gamma_1 > \gamma_2$.

Пусть γ такое, что $N_{\gamma\sigma} \neq \phi$. Обозначим $\alpha = \underline{q_2^\sigma}(\gamma, r^н)$.

Рассмотрим процедуру планирования

(12) $$\pi_\gamma^\sigma(r) = \begin{cases} \alpha^\sigma, \text{если } r^н \le r \le \beta, \\ \overline{q_1}^\sigma(\gamma, r), \text{если } \beta < r \le r^в; \end{cases}$$

где $\beta = r^в$, если $\alpha^\sigma \ge \overline{q_1^\sigma}(\gamma, r^в)$, либо β определяется как решение уравнения $\overline{q_1^\sigma}(\gamma, \beta) = \alpha^\sigma$, если $\alpha^\sigma < \overline{q_1^\sigma}(\gamma, r^в)$.

Заметим, что по построению $\pi_\gamma^\sigma(r)$ является неубывающей непрерывной функцией. Отсюда следует, что существует функция $\tilde{r}_\gamma^\sigma(x)$,обратная к $\pi_\gamma^\sigma(r)$, определенная на множестве допустимых планов X за исключением, быть может, счетного числа точек, при этом $\tilde{r}_\gamma^\sigma(x)$ является неубывающей.

Обозначим:

(13) $K(\mu) = \gamma$,

(14) $$x = \pi_\gamma(r) = \begin{cases} \alpha^\sigma, \text{если } r^н \le r \le \beta, \\ \overline{q_1}^\sigma(\gamma, r), \text{если } \beta < r \le r^в, \end{cases}$$

(15) $\chi(x, y) = u_\chi(x, y)$,

(16) $$\sigma(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x^н \le x \le \alpha^\sigma, \\ \int\limits_{\alpha^\sigma}^{x} \zeta_t'(t, \tilde{r}_\gamma(t))dt \quad \text{при } \alpha^\sigma < x \le \pi_\gamma(r^в), \\ \overline{g} \quad \text{при } \pi_\gamma(r^в) < x \le x^в. \end{cases}$$

(17) $$\overline{g} = \int\limits_{\alpha^\sigma}^{\pi_\gamma(r^в)} \zeta_t'(t, \tilde{r}_\gamma(t))dt.$$

Теорема. Существует оптимальный механизм μ^* такой, что справедливы (13)–(17) и показатель эффективности оптимального механизма функционирования γ^* удовлетворяет условиям

$$\gamma^* = \max\,\{\gamma \mid Q_{\gamma\sigma} \neq \phi\},\quad \overline{g} = \int\limits_{\alpha^\sigma}^{\pi_{\gamma^*}(r^в)} \zeta_t'\,(t, \tilde{r}_\gamma^*(t))dt \leq g.$$

Примечание. В математических выражениях(16),(17) и в формулировке теоремы $\zeta_t'\,(t, \tilde{r}_\gamma^*(t))$ обозначает частную производную по первой переменной функции затрат АЭ.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

В содержательных терминах теорема показывает, что для рассмотренной модели активной системы выполнение планов обеспечивается применением штрафов с максимальным показателем роста, а процедура планирования конструируется таким образом, чтобы функция стимулирования, при которой эта процедура планирования удовлетворяла условиям совершенного согласования, возрастала с минимальной скоростью.

Рассмотрим теперь случай, когда множество «ограниченных» функций штрафа задается следующим образом

(18) $u_\chi(x,y) = u^C(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x, \\ C(x), & \text{если } y \neq x, \end{cases}$

где $C(x) \geq 0$. Здесь ограничивающая функция $C(x)$ зависит уже не от y, как рассматривалось в примере, приведенном в [11], а от x.

Нетрудно проверить, что функция штрафов вида (18) является сильно согласованной, т.е. удовлетворяет «неравенству треугольника».

Выберем $C(x) = \zeta(\alpha, r^н) + \sigma(x)$, отсюда получаем важное

Следствие. На множестве механизмов

$$M = \{\mu \,|\, s(y,x) \in S, x = \pi(\rho), y, x \in Y, \rho \in A\},$$

где

$$S = \{s(y,x) \,|\, 0 \leq \sigma(x) \leq g, 0 \leq \chi(x,y) \leq \zeta(a, r^н) + \sigma(x), x, y \in Y\},$$

механизм, удовлетворяющий (14), (15), (17) при использовании функции штрафов

$$\chi^*(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x, \\ \zeta(a, r^н) + \sigma^*(x), & \text{если } y \neq x, \end{cases}$$

является оптимальным.

4. Связь с одной из базовых задач теории контрактов

Рассмотрим частный случай представленной выше модели.

А) Положим, что целевая функция центра имеет вид $\Phi(x, y, \sigma(y), \chi(x, y), r) = H(y) - \sigma(y)$, где $H(y)$ – неубывающая вогнутая функция дохода центра.

Б) Весовая функция $\Psi_{\text{в}}(r) = 1$.

В) Исключим из рассмотрения ограничение $\sigma(y) \le g$ (например, фонд стимулирования g является настолько большой величиной, что ограничение $\sigma(y) \le g$ можно не учитывать).

Г) Штрафы за невыполнение плана имеют вид

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x, \\ \sigma(x), & \text{если } y \ne x. \end{cases}$$

При использовании функции штрафов, определенной в пункте Г), в силу ее сильной согласованности выбираемое состояние y совпадает с назначаемым согласованным планом x.

В этом случае рассматриваемую в настоящей статье задачу синтеза механизма (7) можно представить в виде задачи

$$\min_{r\in A}[H(x(r)) - \sigma(x(r))] \to \max_{\sigma},$$

где $x(r) = \arg\max_{x\in X}[-\zeta(x,r) + \sigma(x)]\cdot$

Эта модель соответствует одной из базовых моделей теории контрактов [15, 17]. Тем самым установлена связь рассматриваемой в теории активных систем задачи с одной из задач теории контрактов.

5. Заключение

В настоящей статье обобщены ранее полученные результаты в теории активных систем на случай явной зависимости целевой функции центра от функции поощрения.

Отметим, что требование строгой квазивогнутости функции $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ по x введено здесь только для обеспечения однозначности определения процедур планирования в (14). Вообще говоря, если функция $\Phi(x, x, \sigma(x), 0, r)$ является многопиковой, то необходимо рассматривать несколько множеств, определяемых согласно (11), и анализировать несколько процедур планирования вида (14). Это усложнило бы анализ задачи и отвлекло бы от рассмотрения основного направления исследования.

Важным выводом из приведенного выше исследования является установление связи базовой постановки задачи и соответствующих результатов теории активных систем с постановкой и результатами решения одной из базовых задач теории контрактов.

Приложение

Доказательство теоремы. Пусть задана некоторая неубывающая непрерывная функция $\sigma(x)$, такая, что $\sigma(x) \leq g$. Рассмотрим множество всех неубывающих непрерывных функций $x = \pi(r)$, удовлетворяющих неравенству

$$\Phi(\pi(r), \pi(r), \sigma(x), r) \geq \gamma \Psi_в(r)$$

при всех $r \in A$, где γ таково, что рассматриваемое множество не пусто. Для этого множества определим множество $N_{\gamma\sigma} \neq \varnothing$ согласно с (11) и построим функцию $\pi_\gamma^\sigma(r)$ вида (14). Для этой процедуры планирования построим функцию поощрения $\sigma^*(x)$, имеющую вид

$$\sigma^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x^н \leq x \leq \alpha^\sigma, \\ \int_{\alpha^{\sigma^*}}^{x} \zeta_t'(t, \tilde{r}_\gamma^\sigma(t))dt & \text{при } \alpha^{\sigma^*} < x \leq \pi_\gamma^\sigma(r^в), \\ \overline{g} \quad \text{при } \pi_\gamma^\sigma(r^в) < x \leq x^в. \end{cases}$$

Функция $\sigma^*(x)$ построена так, что при ее выборе функция $\pi_\gamma^\sigma(r)$ является процедурой открытого управления. Пара $\pi_\gamma^\sigma(r)$ и $\sigma^*(x)$ обеспечивают эффективность механизма не меньше, чем γ. Из доказательства теоремы в [10] и по построению функции $\sigma^*(x)$, следует неравенство $\sigma^*(x) \leq \sigma(x)$.

Отсюда следует, что $N_{\gamma\sigma} \subseteq N_{\gamma\sigma^*}$ Увеличивая величину γ до тех пор, пока при превышении некоторого γ^* множество $N_{\gamma\sigma^*}$ станет пустым или будет нарушено неравенство $\sigma(x) \le g$, получим предельное значение эффективности γ^* оптимального согласованного механизма.
Теорема доказана.

Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем.* – М.: Наука, 1977. – 256 с.
2. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К. *Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах* // Автоматика и телемеханика. – 1985. – №3. – С. 73–80.
3. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Двухуровневые активные системы. IV.Цена децентрализации механизмов функционирования* // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №6. – С. 110–116.
4. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., ЛАВРОВ Ю.Г. *Синтез оптимальных механизмов планирования и стимулирования в активной системе* // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №10. – С. 113–120.
5. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем.* – М.: Наука. 1981. – 384 с.
6. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Введение в теорию управления организационными системами: Учебник.* – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 264 с.
7. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять организациями.* – М.: Синтег, 2004.– 400 с.
8. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. – М.: Наука, 1978. – 327 с.
9. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.

10. ЕНАЛЕЕВ А.К. *Оптимальный механизм функционирования в активной системе с обменом информацией* // Управление большими системами. – 2010.– №29. – С. 108–127.
11. ЕНАЛЕЕВ А.К. *Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах* // Управление большими системами. – 2011. – №33. – С. 143–166.
12. ЕНАЛЕЕВ А.К., ЛАВРОВ Ю.Г. *Оптимальное стимулирование в активной системе со стохастическим элементом* // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №2. – С. 104–113.
13. КОНОНЕНКО А.Ф. *Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // ЖВМиМФ. – 1973. – №2. – С. 311–317.
14. *МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ: Учебное пособие*/Под ред. Д.А. Новикова. – М.:ЛЕНАНД,2011. – 192 с.
15. МИЛЬГРОМ П., РОБЕРТС ДЖ. *Экономика, организация и менеджмент*: в 2-х томах. – СПб: Экономическая школа, 2004. – 890 с.
16. CHIANG A.C. *Fundamental Methods of Mathematical Economics.ThirdEdition*. –McGraw Hill Book Company, 1984. – 788 p.
17. BOLTON P., DEWATRIPONT M. *Contract Theory*. – Cambridge, Mass & London, England: MIT Press, 2005. – 740 p.
18. MAS-COLLEL A., WHINSTON M.D. GREEN J.R. *Microeconomic theory*. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 977 p.

OPTIMAL COORDINATED MECHANISMS IN ACTIVE SYSTEMS AND CONTRACT THEORY

Anver Enaleev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., chief researcher (anver.en@gmail.com).

The principal-agent model is considered, where the principal's payoff depends on the monetary incentive she provides to the agent. We seek an optimal incentive scheme and prove that the, so-called, coordinated mechanisms are optimal for the principal. We also establish connection between the considered model and the adverse selection model in contact theory.

Keywords: plans and incentives coordination, open control principle, information reliability, optimal mechanism design, contract theory.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым

Поступила в редакцию 06.09.2013.
Опубликована 31.05.2014.