УДК 656.02 + 51-74
ББК 22.18

КОНКУРЕНТНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ ПОСТАВЩИКАМИ УСЛУГ НАВИГАЦИИ

Захаров В. В.[1],
(*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург*)
Крылатов А. Ю.[2]
(*Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург*)

Исследована теоретико-игровая модель распределения транспортных потоков с множеством групп участников движения и с использованием BPR-функции задержки на сети из параллельных каналов. Доказано существование и единственность равновесия по Нэшу в игре $m \geqslant 2$ поставщиков услуг навигации, равновесные стратегии получены в явном виде. Показано, что появление конкурирующих на сети поставщиков услуг навигации приводит к увеличению среднего времени передвижения между районами отправления/прибытия.

Ключевые слова: конкурентная маршрутизация, равновесие по Нэшу, распределение транспортных потоков.

Введение

В условиях повышенной загрузки ограниченных инфраструктурных мощностей улично-дорожных сетей (УДС) крупных

[1] *Виктор Васильевич Захаров, доктор физико-математических наук, профессор,* (*mcvictor@mail.ru*).
[2] *Александр Юрьевич Крылатов, ассистент* (*СПбГУ*), *младший научный сотрудник* (*ИПТ РАН*), (*aykrylatov@yandex.ru*).

городов крайне актуальной является задача оценки распределения транспортных потоков на сети и маршрутизации транспорта. В современных условиях наибольшее влияние на распределение транспортных потоков могут оказывать администрация города, а также поставщики услуг навигации, количество клиентов у которых неуклонно возрастает. При этом, если административное влияние может быть реализовано через опосредованные инфраструктурные или организационные преобразования [2], то поставщики услуг навигации, предлагая маршруты движения своим клиентам, оказывают непосредственное влияние на процесс распределения транспортных потоков в режиме он-лайн [18]. В настоящей работе нас будут интересовать стратегии распределения транспортных потоков поставщиками услуг навигации. Следует также отметить, что вопрос организации работы различных систем навигации актуален и с точки зрения исследования киберфизических систем [19].

Важнейшей концепцией в области распределения транспортных потоков на УДС города является равновесие по Вардропу [5, 16], рассматриваемое в двух контекстах. Первый состоит в предположении, что транспортные потоки в течение определенного периода времени сами приходят в равновесное по Вардропу состояние [1]. Второй заключается в том, что администрация УДС доступными ей средствами приводит транспортные потоки на сети в равновесное по Вардропу состояние [17]. В данной работе мы будем исследовать проблему *конкурентной маршрутизации* (*competitive routing*) – когда на сети действует несколько поставщиков услуг навигации и каждый из них стремится распределить транспортный поток своих клиентов наилучшим образом (например, предлагая своим клиентам наиболее быстрые маршруты) [6, 7, 13]. Навигаторы, как правило, выбирают решения о маршрутах своих клиентов независимо от действий других навигаторов, ориентируясь лишь на имеющуюся у них информацию о текущей дорожной обстановке. Однако следует заметить, что время перемещения потока по выбранному навигатором маршруту будет зависеть не только от объёма этого потока, но и от потоков, направляемых по тому же маршруту другими навигаторами. В этом случае в качестве модели конкурентной маршрутизации представляется целесообразным использовать бескоалиционную игру (игроки – поставщики услуг навигации), а в качестве принципа оптимальности – равновесие по Нэшу. Ситуация равновесия по Нэшу представляет собой набор стратегий игроков, от которых невыгодно отклоняться каждому из них, если все другие игроки придерживаются своих равновесных стратегий. Известно, что если ситуация равновесия по Нэшу единственна, то игрокам для реализации равновесия не требуется прибегать к услугам какого-либо посредника, координирующего их действия. Естественно, что в таком случае вопрос о соотношении равновесных по Нэшу и по Вардропу состояний системы вызывает исследовательский интерес.

Впервые вопрос о соотношении равновесий по Нэшу и Вардропу был рассмотрен в [10], где в качестве игроков были взяты пары районов отправления/прибытия. В работе было показано, что при определённых условиях равновесие по Нэшу в поставленной задаче стремится к равновесию по Вардропу. Однако, несмотря на естественный интерес к такого рода исследованиям, работа [10] так и осталась, по большому счёту, единственной в своём роде. Конечно, существуют работы, в которых поднимается вопрос о соотношении двух видов равновесия, как например [8], однако, к сожалению, ставится он в большей степени в дискуссионной форме и, как правило, не касается аналитической формы представления оптимальных решений. Общая постановка транспортной задачи с несколькими перевозчиками, в которой затраты на перевозки по отдельным дугам каждого участника являются квадратичной функцией от объёмов перевозимых им грузов при фиксированных объёмах перевозок других участников, описана в работе [3]. В ней показано, что задача поиска равновесия Нэша для этой модели сводится к решению задачи выпуклого квадратичного программирования. Предлагаемая в нашей работе модель конкурентной маршрутизации, являясь частным случаем рассмотренной авторами модели, позволяет описать равновесные по Нэшу стратегии маршрутизации в аналитическом виде.

Исследуя проблему распределения транспортных потоков, мы будем опираться на идею, согласно которой УДС произвольной топологии следует представлять набором независимых подсетей, каждая из которых состоит из двух узлов (районы отправления и прибытия) и параллельных маршрутов [4]. Такая идея строится на том, что основные потоки между районами отправления и прибытия не должны пересекаться, а под основными потоками понимаются наиболее значимые по своей величине корреспонденции между районами отправления и прибытия на всей УДС. С одной стороны, данная идея базируется на исследованиях, согласно которым сужение дороги (использование несколькими маршрутами одной и той же дуги или системы дуг) всегда приводит к возникновению пробок при нарастании потока во времени [9]. С другой стороны, было показано, что для избегания парадокса Браесса следует конструировать транспортную сеть таким образом, чтобы из района отправления в район прибытия потоки распределялись по параллельным (непересекающимся) маршрутам [11, 12].

Будем считать, что УДС представлена в виде множества независимых (не имеющих общих дуг) подсетей, каждая из которых содержит одну пару районов отправления/прибытия и определённое количество параллельных маршрутов. В связи с этим мы можем сформулировать задачу конкурентной маршрутизации для любой пары районов отправления/прибытия и перенести полученные результаты на любую другую пару районов. Более того, сопоставление полученных равновесных по Нэшу стратегий распределения транспортных потоков со стратегиями, равновесными по Вардропу, мы также можем проводить для отдельно взятой пары районов отправления/прибытия (подсети) УДС.

Таким образом, в данной статье мы будем рассматривать задачу маршрутизации транспортных потоков конкурирующими поставщиками услуг навигации (Навигаторами) на УДС большого города, представленной как совокупность подсетей, включающих в себя пары районов оправления/прибытия. В силу того, что каждый Навигатор должен принимать решения о маршрутизации своих клиентов с учетом постоянно обновляющейся информации об улично-дорожной ситуации в режиме он-лайн, крайне важно для сокращения времени принятия решений иметь явный вид стратегий распределения транспортных потоков. Рассмотренная в данной статье постановка задачи конкурентной маршрутизации формулируется в следующей форме.

Пусть имеется $m \geqslant 2$ поставщиков услуг навигации на УДС. Все Навигаторы стремятся минимизировать общее время движения транспортных средств своих клиентов. При этом в качестве оценки времени движения транспортного потока по дуге любой подсети выберем BPR-функцию задержки [15], часто используемую Бюро общественных дорог в США. Ситуации равновесия по Нэшу в сформулированной игре на подсети из параллельных каналов будут найдены в явном виде. Более того, будет показано, что если на транспортной сети появляются конкурирующие между собой поставщики услуг навигации, то среднее время передвижения транспортных потоков между районами отправления/прибытия может только увеличиться по сравнению с тем, которое может обеспечить одна централизованная система навигации.

1. Математическая модель игры поставщиков услуг навигации на произвольной транспортной сети

В качестве модели транспортной сети будем рассматривать ориентированный граф G, состоящий из множества последовательно пронумерованных узлов и множества последовательно пронумерованных дуг. На сети G распределяют транспортные потоки своих клиентов $m \geqslant 2$ Навигаторов. Введем следующие обозначения: N – множество последовательно пронумерованных узлов графа G; A – множество последовательно пронумерованных дуг графа G; R – множество узлов, являющихся районами отправления, $R \subseteq N$; S – множество узлов, являющихся районами прибытия, $S \subseteq N$; подразумевается, что $R \cap S = \emptyset$; K_{rs} – множество маршрутов между районом отправления $r \in R$ и районом прибытия $s \in S$; x_a – транспортный поток по дуге $a \in A$, $x = (\ldots, x_a, \ldots)$; $d_a(x_a)$ – время передвижения (задержка) потока объемом x_a по дуге $a \in A$; $M = \{1, \ldots, m\}$ – множество номеров Навигаторов; $F^{j,rs} > 0$ – величина транспортного потока (число клиентов), распределяемого Навигатором j между районом отправления $r \in R$ и районом прибытия $s \in S$; $F^{rs} = \sum_{j=1}^{m} F^{j,rs}$ – совокупный транспортный спрос между районом отправления $r \in R$ и районом прибытия $s \in S$; x_a^j – величина транспортного потока, направляемого Навигатором j по дуге $a \in A$, $x^j = (\ldots, x_a^j, \ldots)$; $f_k^{j,rs}$ – величина транспортного потока, направляемого Навигатором j по маршруту $k \in K_{rs}$; $f^{j,rs} = (f_1^{j,rs}, \ldots, f_{|K_{rs}|}^{j,rs})^\top$ – стратегия распределения транспортного потока $F^{j,rs}$ Навигатора j по возможным маршрутам K_{rs}; $f^j = (\ldots, f^{j,rs}, \ldots)$ – стратегия распределения транспортных потоков $F^{j,rs}$ Навигатора j между всеми парами районов отправления/прибытия r-s, при этом $f^{-j} = (f^1, \ldots, f^{j-1}, f^{j+1}, \ldots, f^m)$; $f = (f^1, ..., f^m)$ – набор всех стратегий Навигаторов; $\delta_{a,k}^{j,rs}$ – индикатор:

$$\delta_{a,k}^{j,rs} = \begin{cases} 1, & \text{если Навигатор } j \text{ использует маршрут } k \in K_{rs}, \\ & \text{в который «входит» дуга } a \in A; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma\big(M, \{\mathfrak{F}^{j,rs}\}_{j \in M}^{r \in R, s \in S}, \{H_j\}_{j \in M}\big)$, где $\mathfrak{F}^{j,rs} = \{f^{j,rs} | f_k^{j,rs} \geqslant 0 \ \forall k \in K_{rs}, \ \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{j,rs} = F^{j,rs}\}$ $\forall j \in M$, а

$$H_j(f) = -\sum_{a \in A} d_a(x_a) x_a^j \quad \forall j \in M,$$

при условии, что

$$x_a^j = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{j,rs} \delta_{a,k}^{j,rs},$$

$$x_a = \sum_{j=1}^{m} x_a^j.$$

Максимизация функции выигрыша H_j Навигатора j ведёт к минимизации среднего времени движения всего транспортного потока F^j. В самом деле, максимизация функционала H_j равносильна минимизации функционала

$$v_j = \sum_{a \in A} d_a(x_a) x_a^j.$$

В свою очередь, минимизация функционала данного вида приведёт к минимизации среднего времени движения всего транспортного потока F^j в силу того, что для любого фиксированного f^{-j} мы получаем системный оптимум Вардропа клиентов j-го Навигатора [1, 14].

Таким образом, максимизация функций выигрышей игроков в игре Γ ведёт к минимизации среднего времени движения их клиентов. При этом для каждого $j \in M$ f^{-j} не является фиксированным, а формируется в результате реализации своих стратегий другими поставщиками услуг навигации. В связи с этим приходим к задаче конкурентной маршрутизации и, следовательно, поиску равновесия по Нэшу в игре Γ. Равновесие по Нэшу в игре Γ достигается реализацией таких стратегий f^*, что

$$H_j(f^*) \geqslant H_j(f^j, f^{-j*}) \quad \forall j \in M.$$

2. Математическая модель игры поставщиков услуг навигации на транспортной сети из параллельных каналов

Сформулированная в предыдущем пункте игра Γ является сложной вычислительной задачей. Проблемы, возникающие при решении подобных задач, описаны в [4]. Более того, в ряде исследований было показано, что для повышения эффективности транспортной сети её следует представлять набором независимых подсетей, каждая из которых состоит из двух узлов (районы отправления и прибытия) и параллельных маршрутов [9, 11, 12]. В таком случае сформулируем задачу конкурентной маршрутизации для любой пары районов отправления/прибытия, и полученные в процессе решения такой задачи результаты смогут быть перенесены на любую другую пару районов.

Рассмотрим граф, состоящий из двух районов отправления и прибытия, соединённых n параллельными дугами (маршрутами). На заданной сети распределяют транспортные потоки своих клиентов m Навигаторов. Введём следующие обозначения: $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество номеров маршрутов; $M = \{1, \ldots, m\}$ – множество номеров Навигаторов; i – номера маршрутов, $i \in N$; j, q – номера Навигаторов, $j, q \in M$; $F^j > 0$ – величина транспортного потока (число клиентов), распределяемого Навигатором j; $F = \sum_{j=1}^{m} F^j$ – величина транспортного потока, распределяемого в совокупности всеми Навигаторами; $f_i^j \geqslant 0$ – величина транспортного потока, направляемого Навигатором j по i-му маршруту; $f_i = (f_i^1, \ldots, f_i^m)$ – набор транспортных потоков всех Навигаторов, направленных по i-му маршруту, при этом $f_i^{-j} = (f_i^1, \ldots, f_i^{j-1}, f_i^{j+1}, \ldots, f_i^m)$; F_i – величина транспортного потока на i-ом маршруте; $t_i^0 > 0$ – время свободного движения по i-му маршруту; $c_i > 0$ – пропускная способность i-го маршрута; $d_i(F_i) > 0$ – время движения (задержка) транспортного потока F_i по i-му маршруту.

Определим набор стратегий j-го игрока в виде вектора $f^j = (f_1^j, \ldots, f_n^j)^\top$ такого, что

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^j = F^j. \tag{1}$$

Обозначим также $f = (f^1, \ldots, f^m)$.

Время движения транспортного потока j-го Навигатора по i-му маршруту зависит не только от величины этого потока, но и от величины потоков, направляемых всеми остальными Навигаторами по данному маршруту. Другими словами, время движения транспортного потока j-го Навигатора по i-му маршруту равно времени движения транспортного потока F_i по i-му маршруту. В качестве оценки времени движения транспортного потока F_i по i-му маршруту будем использовать BPR-функцию задержки:

$$d_i = t_i^0 \left(1 + \frac{F_i}{c_i} \right).$$

Следует отметить, что в общем случае в BPR-функции задержки отношение (F_i/c_i) возводится в степень β, значение которой определяется посредством оценки реального времени движения транспортных потоков по сегментам УДС.

Величина F_i равна сумме всех транспортных средств, использующих i-й маршрут для движения из района отправления в район прибытия. Таким образом, в рассматриваемом нами случае игры m Навигаторов $F_i = \sum_{j=1}^{m} f_i^j$, и, соответственно, время движения транспортного потока F_i по i-му маршруту примет вид

$$d_i = t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^{m} f_i^j}{c_i} \right).$$

Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma_m\big(M, \{\mathfrak{F}^j\}_{j\in M}, \{H_j\}_{j\in M}\big)$,
где $\mathfrak{F}^j = \{f^j | f_i^j \geqslant 0 \ \ \forall i = \overline{1,n}, \ \ \sum_{i=1}^{n} f_i^j = F^j\} \quad \forall j \in M$, а

$$H_j = -\sum_{i=1}^{n} t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^{m} f_i^q}{c_i} \right) f_i^j \quad \forall j \in M.$$

Максимизация функции выигрыша H_j Навигатора j ведёт к минимизации среднего времени движения всего транспортного потока F^j. В самом деле, максимизация функционала H_j равносильна минимизации функционала

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^{m} f_i^q}{c_i} \right) f_i^j. \tag{2}$$

В свою очередь, минимизация функционала данного вида приведёт к минимизации среднего времени движения всего транспортного потока F^j в силу того, что для любого фиксированного множества $\{f_i^{-j}\}_{i=1}^{n}$ мы получаем системный оптимум Вардропа клиентов j-го Навигатора [1, 14].

Таким образом, максимизация функций выигрышей игроков в игре Γ_m ведёт к минимизации среднего времени движения их клиентов. При этом для каждого $j \in M$ множество $\{f_i^{-j}\}_{i=1}^{n}$ не является фиксированным, а формируется из стратегий других поставщиков услуг навигации. В связи с этим приходим к задаче конкурентной маршрутизации и, следовательно, поиску равновесия по Нэшу в игре Γ_m.

3. Равновесие по Нэшу в игре поставщиков услуг навигации на сети из параллельных каналов

Лемма 1. *f^* является равновесием по Нэшу в игре Γ_m тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные ω_j (множители Лагранжа) такие, что*

(3)
$$t_i^0\left(1+\frac{\sum_{q=1}^{j-1} f_i^q + 2f_i^{j^*} + \sum_{q=j+1}^{m} f_i^q}{c_i}\right)\begin{cases} = \omega_j, \ \textit{при } f_i^{j^*} > 0,\\ \geqslant \omega_j, \ \textit{при } f_i^{j^*} = 0,\end{cases}$$
$\forall i = \overline{1,n}$ *и* $j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Воспользуемся условиями теоремы Куна – Таккера. Заметим, что в силу выпуклости функционалов (2), а также области допустимых решений $\mathfrak{F}^j$ $\forall j = \overline{1,m}$, условия Куна – Таккера являются как необходимыми, так и достаточными. Построим лагранжиан для задачи минимизации (2) с ограничением (1) и требованием $f_i^j \geqslant 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$:

$$L^j = \sum_{i=1}^{n} t_i^0\left(1+\frac{\sum_{q=1}^{m} f_i^q}{c_i}\right)f_i^j + \omega_j\left(F^j - \sum_{i=1}^{n} f_i^j\right) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^j\big(-f_i^j\big).$$

Продифференцируем лагранжиан по f_i^j и, приравняв полученное выражение к нулю, получим

$$\omega_j = t_i^0\left(1+\frac{\sum_{q=1}^{j-1} f_i^q + f_i^{j*} + \sum_{q=j+1}^{m} f_i^q}{c_i}\right) + \frac{t_i^0}{c_i} f_i^{j^*} - \eta_i^j,$$

$\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$. Из необходимости выполнения условия дополняющей нежёсткости $\eta_i^j f_i^{j^*} = 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$ следует, что если $f_i^{j^*} > 0$, то $\eta_i^j = 0$ и мы получаем первое условие из (3), а если $f_i^{j^*} = 0$, то, с учётом требования к множителям Лагранжа $\eta_i^j \geqslant 0$, мы получаем второе условие из (3). Лемма доказана.

Следствие 1. *f^* такое, что $f_i^{j*} > 0 \ \forall\, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ является равновесием по Нэшу в игре Γ_m тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные ω_j (множители Лагранжа) такие, что*

$$f_i^{1*} + \dots + 2f_i^{j*} + \dots + f_i^{m*} = \left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1\right)c_i, \tag{4}$$

$\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$,
при этом $\omega_j > t_i^0$, $\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Согласно Лемме 1, если $f_i^{j*} > 0 \ \forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$, то имеет место

$$f_i^{1*} + \dots + 2f_i^{j*} + \dots + f_i^{m*} = \left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1\right)c_i > 0,$$

из чего следует $t_i^0 < \omega_j$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Равновесие по Нэшу f^*, состоящее из положительных компонент, в игре Γ_m имеет форму $f^*(\omega_1, \dots, \omega_m)$ для некоторых $\omega_j > 0, j = \overline{1,m}$.*

Доказательство. Введём следующие обозначения

$$A = A_{m\times m} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}_{m\times m},$$

а $b_i = (b_i^1, \dots, b_i^m)^\top$, где

$$b_i^j = \left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1\right)c_i, \ \text{при } \omega_j > t_i^0, \tag{5}$$

$\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$.
Тогда (4) можно переписать в следующей матричной форме:

$$Af_i^* = b_i, \ \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Данное матричное уравнение имеет единственное решение, так как все строки квадратной матрицы $A_{m\times m}$ линейно независимы. Другими словами, в рассматриваемой игре Γ_m равновесие по Нэшу, состоящее из положительных компонент, единственно.

Матрицей, обратной к A, является следующая

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+1} & -\frac{1}{m+1} & \cdots & -\frac{1}{m+1} \\ -\frac{1}{m+1} & \frac{m}{m+1} & \cdots & -\frac{1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{m+1} & -\frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{m}{m+1} \end{pmatrix}_{m\times m}.$$

Вычислив f_i^* как $f_i^* = A^{-1}b_i$, получаем

$$f_i^{j*} = \frac{m}{m+1}b_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{q=1, q\neq j}^{m} b_i^q,$$

$\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$, или для удобства можно переписать в виде

$$f_i^{j*} = b_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{q=1}^{m} b_i^q, \tag{6}$$

$\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$.
В силу того, что $b_i^j = b_i^j(\omega_j)$, $\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$, приходим к тому, что $f_i^{j*} = f_i^{j*}(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ при $f_i^{j*} > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$. Следствие доказано.

Лемма 2. *Пусть $f^*(\omega_1, \ldots, \omega_m)$, состоящее из положительных компонент, является равновесием по Нэшу в игре Γ_m. Если $F^j > F^q$, то $\omega_j > \omega_q$, $\forall j, q = \overline{1,m}$.*

Доказательство. Подставив (6) в (1), получим

$$F^j = \sum_{i=1}^{n} b_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} b_i^s, \tag{7}$$

$\forall j = \overline{1,m}$.
Таким образом, получаем, что если мы хотим сравнить F^j и F^q, $\forall j, q = \overline{1,m}$, то нам необходимо сравнивать $\sum_{i=1}^n b_i^j$ и $\sum_{i=1}^n b_i^q$.

Предположим, что $F^j > F^q$, однако $\omega^j < \omega^q$. Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^j = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1\right)c_i \overset{\omega^j<\omega^q}{<} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\omega_q}{t_i^0} - 1\right)c_i = \sum_{i=1}^{n} b_i^q,$$

следовательно, согласно выражению (7) приходим к тому, что $F^j < F^q$. Получаем противоречие. Лемма доказана.

Без умаления общности перенумеруем маршруты таким образом, чтобы

(8) $$t_1^0 < t_2^0 < \dots < t_n^0.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Равновесие по Нэшу в игре Γ_m, при условии (8), достигается следующими стратегиями:*

(9) $$f_i^{j*} = b_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{q=1}^{m} b_i^q,$$

где

(10) $$b_i^j = \frac{c_i}{t_i^0}\frac{F^j + \sum_{s=1}^m F^s + \sum_{r=1}^n c_r}{\sum_{r=1}^n \frac{c_r}{t_r^0}} - c_i,$$

$\forall i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, *когда выполняется*

(11) $$F^j > \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{t_n^0}{t_i^0} - 1\right),$$

$\forall j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Выражение (9) напрямую следует из (6) доказательства Следствия 2.

В силу того, что $f_i^{1*} + \dots + 2f_i^{j*} + \dots + f_i^{m*} = b_i^j \ \forall j = \overline{1,m}$, получаем

(12) $$\sum_{i=1}^{n} b_i^j = F^1 + \dots + 2F^j + \dots + F^m,$$

$\forall j = \overline{1,m}$.

Подставив (5) в (12), получим

(13) $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\omega_j}{t_i^0} - 1\right)c_i = \sum_{s=1}^{m} F^s + F^j,$$

откуда

$$\omega_j = \frac{\sum_{s=1}^m F^s + F^j + \sum_{i=1}^n c_i}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t_i^0}}.$$

Подставляя полученное ω_j в (5), приходим к выражению (10).

Полученные выражения имеют место, когда $\omega_j > t_i^0 \ \forall\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$, что справедливо (в силу (8)) когда

$$\frac{\sum_{s=1}^m F^s + F^j + \sum_{i=1}^n c_i}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t_i^0}} > t_n^0$$

или

$$\sum_{s=1}^{m} F^s + F^j > \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{t_n^0}{t_i^0} - 1 \right),$$

$\forall\ j = \overline{1, m}$.

В матричной форме данная система примет вид:

$$A(F^1, \ldots, F^m)^\top > (1, \ldots, 1)^\top \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{t_n^0}{t_i^0} - 1 \right),$$

следовательно,

$$(F^1, \ldots, F^m)^\top > A^{-1} (1, \ldots, 1)^\top \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{t_n^0}{t_i^0} - 1 \right),$$

окончательно получаем $F^j > \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{t_n^0}{t_i^0} - 1 \right)$. Теорема доказана.

4. Соотношение равновесия по Нэшу и равновесия по Вардропу

В предыдущем разделе мы рассмотрели игру $m \geqslant 2$ поставщиков услуг навигации и получили m взаимозависимых задач минимизации с ограничениями, решение которых является равновесием по Нэшу. Рассмотрим случай, когда все транспортные средства потока пользуются услугами одного Навигатора. Получаем следующую задачу максимизации:

$$\max_{(F_1, \ldots, F_n)} H(F_1, \ldots, F_n) = \max_{(F_1, \ldots, F_n)} \left(- \sum_{i=1}^{n} t_i^0 \left(1 + \frac{F_i}{c_i} \right) F_i \right) \tag{14}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F, \tag{15}$$

$$F_i \geqslant 0 \ \ \forall i = \overline{1, n}, \tag{16}$$

решение которой является по определению равновесием по Вардропу (*системным оптимумом*) [14].

Если просуммировать целевые функционалы всех навигаторов (2), то получится функционал типа (14), в котором $F_i = \sum_{j=1}^{m} f_i^j$, и, следовательно, можно сравнивать величины H и $\sum_{j=1}^{m} H^j$ при разных значениях распределения транспортных потоков.

Теорема 2. *Сумма выигрышей игроков в игре Γ_m в ситуации равновесия по Нэшу строго меньше значения целевой функции задачи (14)–(16) в ситуации системного оптимума Вардропа (при положительности компонент равновесия и системного оптимума).*

Доказательство. Пусть имеется решение задачи (14)–(16) $({F_1}^*, \ldots, {F_n}^*)$ в ситуации системного оптимума. Значение целевой функции в этой ситуации равно

$$H^* = -\sum_{i=1}^{n} t_i^0 \left(1 + \frac{{F_i}^*}{c_i}\right) {F_i}^* = -\sum_{i=1}^{n} t_i^0 {F_i}^* - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^0}{c_i} \left[{F_i}^*\right]^2.$$

Пусть имеется ситуация равновесия по Нэшу в игре Γ_m: $({f_1^j}^*, \ldots, {f_n^j}^*)$ $\forall j = \overline{1, m}$. Суммарный выигрыш игроков в этой ситуации равен

$$\sum_{j=1}^{m} H^{j^*} = -\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_i^0 \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^{m} {f_i^j}^*}{c_i}\right) {f_i^j}^* =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} t_i^0 \sum_{j=1}^{m} {f_i^j}^* - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^0}{c_i} \left[\sum_{j=1}^{m} {f_i^j}^*\right]^2.$$

Поскольку для множеств $\mathfrak{F}^1, \ldots, \mathfrak{F}^m$ и $\mathfrak{F} = \{(F_1, \ldots, F_n) | F_i \geqslant 0 \ \forall i = \overline{1, n}, \ \sum_{i=1}^{n} F_i = F\}$ справедливо следующее соотношение $\cup_{j=1}^{m} \mathfrak{F}^j \supseteq \mathfrak{F}$, то имеет место неравенство $\sum_{j=1}^{m} {f_i^j}^* \geqslant {F_i}^* \ \forall i = \overline{1, n}$, из чего получаем

$$\sum_{j=1}^{m} H^{j^*} \leqslant H^*. \tag{17}$$

Равенство в (17) возможно тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{m} f_i^{j*} = F_i^* \; \forall i = \overline{1,n}$.

Согласно [4], равновесное по Вардропу (при положительных компонентах стратегии распределения транспортного потока) достигается следующими стратегиями:

$$F_i^* = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{F + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} c_r}{\sum_{r=1}^{n} \frac{c_r}{t_r^0}} - \frac{1}{2} c_i, \tag{18}$$

$\forall i = \overline{1,n}$, где $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$. Однако, если воспользоваться Теоремой 1 и найти сумму равновесно по Нэшу распределённых транспортных потоков $\sum_{j=1}^{m} f_i^{j*}$, получим

$$\sum_{j=1}^{m} f_i^{j*} = \frac{c_i}{t_i^0} \frac{F + \frac{m}{m+1}\sum_{r=1}^{n} c_r}{\sum_{r=1}^{n} \frac{c_r}{t_r^0}} - \frac{m}{m+1} c_i, \tag{19}$$

$\forall i = \overline{1,n}$.

Видим, что при любом $m \geqslant 2$ выражения (18) и (19) не совпадают. Окончательно получаем $\sum_{j=1}^{m} H^{j*} < H^*$. Теорема доказана.

Теорема 2 свидетельствует о том, что если на транспортной сети появляются конкурирующие между собой поставщики услуг навигации, то среднее время передвижения транспортных потоков между районами отправления/прибытия может только увеличиться по сравнению с тем, которое может обеспечить одна централизованная система навигации.

5. Заключение

В данной работе была рассмотрена задача конкурентной маршрутизации $m \geqslant 2$ поставщиков услуг навигации на сети, состоящей из района прибытия и района отправления, соединённых параллельными дугами. Все поставщики услуг навигации стремятся минимизировать общее время движения транспортного потока своих клиентов. При этом в качестве оценки времени движения транспортного потока по дуге использовалась BPR-функция задержки. Ситуации равновесия по Нэшу в сформулированной на сети из параллельных каналов игре была найдена в явном виде. Более того, было показано, что если на транспортной сети появляются конкурирующие между собой поставщики услуг навигации, то среднее время передвижения транспортных потоков между районами отправления/прибытия может только увеличиться по сравнению с тем, которое может обеспечить одна централизованная система навигации.

Литература

1. ГАСНИКОВ А.В., КЛЕНОВ С.Л., НУРМИНСКИЙ Е.А. И ДР. *Введение в математическое моделирование транспортных потоков* / Моск. физ.-техн. ин-т [под ред. А. В. Гасникова, с приложениями М. Л. Бланка, Е. В. Гасниковой, А. А. Замятина и В. А. Малышева, А. М. Райгородского]. – М.: Изд-во МФТИ, 2010. – 360 с.
2. ЗАХАРОВ В.В., КРЫЛАТОВ А.Ю. *Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, №4. – С. 23–44.
3. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., КИСЕЛЕВА М.А. *Равновесие Нэша в транспортной модели с квадратичными затратами* // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2008. – Т. 15, №3. – С. 31–42.
4. КРЫЛАТОВ А.Ю. *Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. – 2014. – №2. – С. 121–130.
5. ШВЕЦОВ В.И. *Математическое моделирование транспортных потоков* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №11. – С. 3–46.
6. ALTMAN E., BASAR T., JIMENEZ T., SHIMKIN N. *Competitive routing in networks with polynomial cost* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, №1. – P. 92–96.
7. ALTMAN E., COMBES R., ALTMAN Z., SORIN S. *Routing games in the many players regime* // Proc. 5th International

ICST Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools. – 2011. – P. 525–527.

8. ALTMAN E., WYNTER L. *Eguilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks* // Networks and Spatial Economics. – 2004. – Vol. 4. – P. 7–21.
9. DAGANZO C.F. *The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory* // Transpn. Res. B. – 1994. – Vol. 28. – P. 269–287.
10. HAURIE A., MARCOTTE P. *On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop Equilibria* // Networks. – 1985. – Vol. 15. – P. 295–308.
11. KORILIS Y.A., LAZAR A.A., ORDA A. *Architecting noncooperative networks* // IEEE Journal on selected areas in communications. – 1995. – Vol. 13, №7. – P. 1241–1251.
12. KORILIS Y.A., LAZAR A.A., ORDA A. *Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks* // J. Appl. Prob. – 1999. – Vol. 36. – P. 211–222.
13. ORDA A., ROM R., SHIMKIN N. *Competitive routing in multiuser communication networks* // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 1993. – Vol. 1, №5. – P. 510–521.
14. SHEFFI Y. *Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods*. – New Jersey: Prentice-Hall Inc; Englewood Cliffs, 1985. – 416 p.
15. U.S. BUREAU OF PUBLIC ROADS, EDITOR. *Traffic Assignment Manual*. – U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1964. – 358 p.
16. WARDROP J.G. *Some theoretical aspects of road traffic research* // Proc. Inst. Civ. Eng. – 1952. – Pt. 2, №1. – P. 325–378.
17. YANG H., HUANG H.-J. *The multi-class, multi-criteria traffic network equilibrium and systems optimum problem* // Transportation Research Pt B. – 2004. – Vol. 38. – P. 1–15.
18. ZAKHAROV V., KRYLATOV A., IVANOV D. *Equilibrium*

traffic flow assignment in case of two navigation providers // Collaborative Systems for Reindustrialization. Proc. of the 14th IFIP Conference on Virtual Enterprises PRO-VE 2013. – Dresden: Springer, 2013. – P. 156–163.

19. ZHUGE H. *Semantic linking through spaces for cyber-physical-socio intelligence: A methodology* // Artif Intell. – 2011. – Vol. 175, №5. – P. 988–1019.

COMPETITIVE ROUTING OF TRAFFIC NAVIGATION SYSTEMS

Victor Zakharov, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Doctor of Science, professor (mcvictor@mail.ru).
Alexander Krylatov, Institute of Transportation Problems of RAS, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Researcher, Tutor (aykrylatov@yandex.ru).

Abstract: We study a game-theoretic model of traffic flow assignment with multiple customer groups and a BPR-delay function on a network of parallel links. We prove existence of a unique Nash equilibrium in the game of $m \geqslant 2$ *traffic navigation systems and provide closed-form expressions for equilibrium strategies. Finally, we show that under navigation systems' competitions the average travel time between origin-destination areas increases.*

Keywords: competitive routing, Nash equilibrium, traffic flow assignment.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили

.

Поступила в редакцию 06.02.2014.
Опубликована 31.05.2014.