

УДК 62-50
ББК 30

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОДВЕСОМ НА ОСНОВЕ ВИХРЕВЫХ АЛГОРИТМОВ¹

Кочетков С. А.², Уткин А. В.³, Уткин В. А.⁴
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В статье разработаны вихревые алгоритмы управления для электромагнитного подвеса в задаче слежения за заданным положением якоря. Основной особенностью вихревых алгоритмов является инвариантность к внешним несогласованным возмущениям широкого класса. Показано, что предложенные алгоритмы позволяют обеспечить устойчивость замкнутой системы при неопределенности параметров электромагнитного подвеса (массы, параметров электрической цепи и т.д.). Результаты моделирования демонстрируют эффективность предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, вихревые алгоритмы, параметрические неопределенности.

¹ Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ №12-08-0865-а, 12-08-13105-офи_м_ржд, 14-01-31190-мол_а.

² Сергей Александрович Кочетков, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (kos@ipi.ru).

³ Антон Викторович Уткин, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (utkin-av@rambler.ru) (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-93-21).

⁴ Виктор Анатольевич Уткин, доктор технических наук, главный научный сотрудник (vicutkin@ipi.ru) (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-93-21).

1. Введение

Хорошо известно, что электромагниты [15] являются составной частью различных исполнительных устройств: электроклапанов, измерительных приборов [6, 8–9], электромагнитных подвесов [2, 4], ударных сейсмоисточников [5] и т.д. Такое широкое использование объясняется в первую очередь простотой конструкции электромагнита и способа получения требуемой силы. Однако даже простейший электромагнит представляет собой сложную нелинейную систему, управление которой является неэлементарной задачей. Стандартной задачей управления для электромагнитов является задача слежения для механических переменных (положения, скорости якоря).

В данной работе рассмотрена проблема применения электромагнитов для создания активных магнитных подвесов [2, 4]. Существует множество работ, посвященных тематике управления данными системами. В книге [4] рассмотрена линеаризованная модель электромагнитного подвеса и предложены линейные алгоритмы управления с использованием ПИД-регуляторов [1]. Нелинейные алгоритмы управления на основе скользящих режимов предложены в работах [16–18]. В статье [19] рассмотрена проблема оценивания неизвестных внешних возмущений на основе наблюдателя на скользящих режимах.

В статье рассмотрена проблема управления электромагнитным подвесом с массой, являющейся неизвестной функцией времени, при воздействии внешних неизвестных возмущений. Теоретической основой для разработанных алгоритмов управления являются так называемые «вихревые» алгоритмы [10–11], обеспечивающие в замкнутой системе инвариантность к внешним несогласованным возмущениям. Термин «несогласованные возмущения», по сути, означает, что возмущения не могут быть непосредственно компенсированы за счет управления простым вычитанием. Далее в статье будем называть такие возмущения не принадлежащим пространству управления. Строгое определение этого понятия можно найти в [14, 20]. Хорошо известно, что в электромеханических системах наиболее приемлемым с

точки зрения тепловых потерь в преобразователях, питающих электрическую цепь, является применение разрывных управляющих воздействий. Поскольку «вихревые» алгоритмы синтезируются в классе кусочно-непрерывных функций, постольку возникает теоретическая проблема адаптации разработанных в работах [10–11] алгоритмов для систем с релейными управляющими воздействиями.

В статье рассмотрены два варианта решения задачи слежения для электромагнитного подвеса. Первый алгоритм, разработанный в разделе 3, синтезирован в предположении, что все переменные системы (электрические и механические) доступны измерению и масса подвеса известна. В разделе 4 разработана модификация базового алгоритма для случая, когда масса подвешиваемого тела является неизвестной функцией заданного класса. В разделе 5 приведены результаты моделирования, которые показывают эффективность разработанных алгоритмов. Основные результаты, полученные в работе, и направления дальнейших исследований обсуждаются в заключении.

2. Постановка задачи

Рассмотрим в качестве примера типичную конструкцию электромагнитного подвеса, которая состоит из тягового электромагнита 1 и подвешиваемого тела 2 (рис. 1). Дифференциальные уравнения такой системы имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= v, \\ (1) \quad \dot{v} &= -\frac{k}{2m} \frac{I^2}{\delta^2} + g + q(t), \\ \dot{I} &= I \frac{v}{\delta} - \frac{r}{k} I \delta + \frac{u \delta}{k}, \end{aligned}$$

где δ – величина воздушного зазора; v – скорость движения подвешенного тела; g – ускорение свободного падения, $q(t) = [Q(t)/m]$ – внешнее неизвестное возмущение, которое характеризует действие внешней неизвестной силы $Q(t)$ в пересчете на единицу массы подвешиваемого тела; I – сила тока в

катушке электромагнита; u – напряжение на входе электромагнита; m – масса подвешиваемого тела; r – сопротивление катушки электромагнита; k – конструктивный коэффициент, который определяется количеством витков катушки, площадью сечения сердечника электромагнита и т.д.

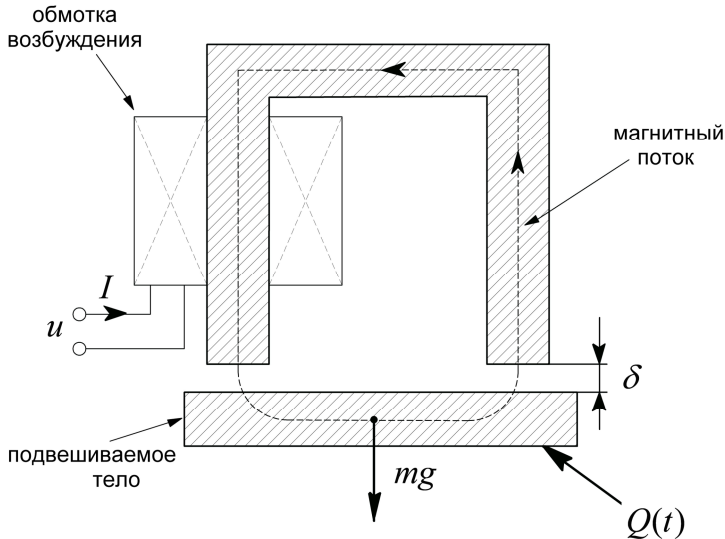


Рис. 1. Конструкция электромагнитного подвеса

В рассматриваемой задаче предполагается, что величина $-\left(\frac{r}{k}\delta - \frac{v}{\delta}\right) < 0$. Из этого неравенства следует, что токовый контур диссипативный, т.е. скорость движения подвешиваемого тела не такая большая, чтобы в токовом контуре начала генерироваться энергия за счет большой электродвижущей силы движения. Обозначим как T_{min} минимальную постоянную времени токового контура:

$$(2) \quad \frac{r}{k}\delta - \frac{v}{\delta} \geq T_{min}.$$

Ставится задача асимптотической стабилизации положения подвешенного тела относительно некоторой заданной траектории

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\delta(t) - \delta_r(t)| = 0,$$

где $\delta_r(t)$ – желаемое во времени положение; функция $\delta_r(t)$ ограничена вместе с тремя её первыми производными:

$$(4) \quad |\delta_r(t)| \leq \Delta_r, \quad |\delta_r^{(i)}(t)| = \Delta_{ir}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$|\cdot|$ – здесь и далее модуль числа; Δ_r, Δ_{ir} – некоторые известные положительные константы.

Предполагается, что численные значения $\delta_r(t)$ и ее первых двух производных $\dot{\delta}_r(t), \ddot{\delta}_r(t)$ известны.

Отметим, что наиболее приемлемым с точки зрения тепловых потерь в электрических преобразователях, питающих электромагнит, является использование разрывных управляющих воздействий [12, 15], т.е. напряжение на входе электромагнита u может принимать только два значения

$$(5) \quad u = \pm U,$$

где $U = \text{const} > 0$

3. Синтез базового алгоритма управления

В данном разделе приведена процедура синтеза системы управления электромагнитным подвесом в предположении, что все переменные системы (1), а также масса объекта $m = \text{const} > 0$ известны. Теоретической базой для синтеза являются вихревые алгоритмы управления [10–11], которые обладают свойством инвариантности к внешним несогласованным возмущениям заданного класса. Отличительной особенностью приведенных ниже алгоритмов является их адаптация под специфику решаемой задачи, когда управляющее воздействие может быть выбрано только в классе разрывных функций. Рассмотрим подробно синтез базового закона управления.

Вводя новую переменную

$$F = -\frac{k}{2m} \frac{I^2}{\delta^2} + g,$$

записывая дифференциальное уравнения относительно нее и объединяя с уравнениями (1), получим

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= v, \\ (6) \quad \dot{v} &= F + q(t), \end{aligned}$$

$$\dot{F} = -2 \frac{r\delta}{k} F - \frac{I}{m\delta} u + 2 \frac{r\delta}{k} g.$$

Далее приведена процедура синтеза алгоритма управления нас основе блочного подхода [3] и вихревых алгоритмов [10–11].

Шаг 1. С учетом поставленной задачи управления (3) запишем уравнение относительно невязки $\bar{\delta} = \delta(t) - \delta_r(t)$

$$(7) \quad \dot{\bar{\delta}} = v - \dot{\delta}_r(t).$$

В предположении, что желаемая траектория движения $\delta_r(t)$ и ее производная являются известными функциями, выберем согласно идеологии блочного подхода фиктивное управление v в уравнении (7) в виде

$$(8) \quad v = -l_1 \bar{\delta} + \dot{\delta}_r(t),$$

где параметр $l_1 = \text{const} > 0$ определяет темпы затухания ошибки слежения.

Шаг 2. Введем новую переменную $\bar{v} = v + l_1 \bar{\delta} - \dot{\delta}_r(t)$ и запишем дифференциальные уравнения с новыми переменными $\bar{\delta}$, \bar{v} с учетом (6)–(8):

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\delta}} &= -l_1 \bar{\delta} + \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} &= F - l_1^2 \bar{\delta} + l_1 \bar{v} + q(t) - \ddot{\delta}_r(t). \end{aligned}$$

Для обеспечения соотношения (8) согласно алгоритмам, приведенным в [10–11], выберем фиктивное управление во втором уравнении системы (9) в виде

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{F} &= F - l_1^2 \bar{\delta} + l_1 \bar{v} - \ddot{\delta}_r(t), \\ \dot{\bar{F}} &= -\alpha \bar{F} - \beta \bar{v} - M \text{sign}(\bar{v}), \end{aligned}$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$, $M = \text{const} > 0$ – параметры, выбор которых поясним ниже.

Шаг 3. Введем новую переменную

$$(11) \quad s = F - l_1^2 \bar{\delta} + l_1 \bar{v} - \ddot{\delta}_r(t) - \bar{F}$$

и запишем дифференциальное уравнение относительно нее с учетом (9)–(10):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\delta}} &= -l_1 \bar{\delta} + \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} &= \bar{F} + s + q(t), \\ (12) \quad \dot{\bar{F}} &= -\alpha \bar{F} - \beta \bar{v} - M \text{sign}(\bar{v}), \end{aligned}$$

$$\dot{s} = -\frac{I}{m\delta} u + \bar{q}(t, \bar{\delta}, \bar{v}, \bar{F}, s, g),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &= -\left(2\frac{r\delta}{k} - l_1\right)s + l_1\left(l_1^2 - 2\frac{r\delta}{k}l_1\right)\bar{\delta} + \left(2\frac{r\delta}{k} - l_1 - \frac{\beta}{l_1}\right)l_1\bar{v} - 2\frac{r\delta}{k}\ddot{\delta}_r(t) + \\ &+ 2\frac{r\delta}{k}g - \left(2\frac{r\delta}{k} - l_1 + \alpha\right)\bar{F} + l_1q(t) - \ddot{\delta}_r(t) - M \text{sign}(\bar{v}). \end{aligned}$$

Для обеспечения стабилизации переменных согласно (5) выбирается реальное управляющее воздействие в виде

$$(13) \quad u = U \text{sign}(sI).$$

При выполнении условия

$$(14) \quad \frac{|I|}{m\delta} U > |\bar{q}(t, \bar{\delta}, \bar{v}, \bar{F}, s, g)|$$

на поверхности $s = 0$ за конечное время возникает скользящий режим [20], и уравнения замкнутой системы принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\delta}} &= -l_1 \bar{\delta} + \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} &= \bar{F} + q(t), \\ (15) \quad \dot{\bar{F}} &= -\alpha \bar{F} - \beta \bar{v} - M \text{sign}(\bar{v}), \end{aligned}$$

$$F = -\frac{k}{2m} \frac{I^2}{\delta^2} + g = l_1^2 \bar{\delta} - l_1 \bar{v} + \ddot{\delta}_r(t) + \bar{F}.$$

Из последнего равенства можем записать «физическое» ограничение на коэффициент l_r и переменные $\bar{\delta}$, \bar{v} , $\ddot{\delta}_r(t)$, \bar{F} :

$$(16) \quad l_1^2 \bar{\delta} - l_1 \bar{v} + \ddot{\delta}_r(t) + \bar{F} \leq g,$$

которое обусловлено тем, что электромагнитная сила всегда направлена вверх (см. рис. 1).

Для выбора коэффициентов обратной связи приведенного алгоритма управления введем проектные ограничения на переменные замкнутой системы (12)–(13), исходной системы (1), внешнее возмущение $q(t)$ и класс функций задающего сигнала $\delta_r(t)$:

$$(17) \quad |s| \leq S, \delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}, v \leq N, |\bar{\delta}| \leq \bar{\Delta}, \bar{v} \leq \bar{N}, |\bar{F}| \leq \bar{F}, |q(t)| \leq Q, \\ |\dot{q}(t)| \leq Q_1, |\ddot{q}(t)| \leq Q_2.$$

С учетом (16) введем еще одно ограничение, позволяющее обеспечить соотношение (14):

$$(18) \quad |l_1^2 \bar{\delta} - l_1 \bar{v} + \ddot{\delta}_r(t) + \bar{F}| \leq pg, \quad p \in (0, 1).$$

Из уравнений (15) и (18) следует, что если амплитуда управляющего воздействия (13) выбрана таким образом, что обеспечивается попадание на поверхность скольжения $s = 0$ в некоторый момент времени $t = t_r$, то модуль величины тока ограничен снизу:

$$(19) \quad |I| \geq \delta \sqrt{\frac{2m(1-p)g}{k}},$$

откуда следует, что при $t \geq t_r$ траектории замкнутой системы также будут протекать на многообразии $s = 0$.

У т в е р ж д е н и е 1. При ограничениях (4), (17)–(18) существует область начальных условий

$$(20) \quad |s(t_0)| \leq S_0, |\bar{\delta}(t_0)| \leq \bar{\Delta}_0, v(t_0) \leq N_0, |I(t_0)| \leq I_0, |\bar{F}(t_0)| \leq \bar{F}_0,$$

амплитуда управляющего воздействия U и моменты времени $t = \bar{t}_0$ и $t = t_r$, такие, что при $t \geq \bar{t}_0$ выполняется неравенство (14), а в момент $t = t_r$ возникает скользящий режим на многообразии $s = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 1. Рассмотрим вначале случай, когда $s(t) > 0$. При этом согласно (13)

$u = U \text{sign}(I)$. Записывая из (1) дифференциальное уравнение для модуля тока $|\dot{I}|$, получим

$$(21) \quad |\dot{I}| = -\left(\frac{r}{k}\delta - \frac{v}{\delta}\right)|I| + \frac{\delta}{k}U.$$

Запишем нижнюю оценку решения уравнения (21) с учетом (2):

$$(22) \quad |I| \geq U \frac{\delta_{\min}}{k} \left(1 - e^{\frac{t-t_0}{T_{\min}}}\right).$$

При ограничениях (4), (17)–(18), (20) возмущение $\bar{q}(t, \bar{\delta}, \bar{v}, \bar{F}, s, g)$ в последнем уравнении системы (12) ограничено некоторой величиной

$$(23) \quad |\bar{q}(t, \bar{\delta}, \bar{v}, \bar{F}, s, g)| \leq \bar{Q},$$

где $\bar{Q} = k_s S + k_{\Delta} \bar{\Delta} + k_{\bar{N}} \bar{N} + 2 \frac{r\delta_{\max}}{k} \Delta_{2r} + 2 \frac{r\delta_{\max}}{k} g + k_{\alpha} \bar{F} + l_1 Q + \Delta_{3r} +$

$$+ M, \quad k_s = \max_{\delta \in [\delta_{\min}; \delta_{\max}]} \left| 2 \frac{r\delta}{k} - l_1 \right|, \quad k_{\Delta} = \max_{\delta \in [\delta_{\min}; \delta_{\max}]} \left| l_1 \left(l_1^2 - 2 \frac{r\delta}{k} l_1 \right) \right|,$$

$$k_{\bar{N}} = \max_{\delta \in [\delta_{\min}; \delta_{\max}]} \left| \left(2 \frac{r\delta}{k} - l_1 - \frac{\beta}{l_1} \right) l_1 \right|, \quad k_{\alpha} = \max_{\delta \in [\delta_{\min}; \delta_{\max}]} \left| 2 \frac{r\delta}{k} - l_1 + \alpha \right|,$$

$\max_{\delta \in [\delta_{\min}; \delta_{\max}]}$ (\cdot) означает максимальные значения коэффициентов в

указанной области.

Введем в рассмотрение некоторую величину тока $I_r = \text{const} > 0$ и выберем амплитуду управляющего воздействия U так, чтобы обеспечить выполнение неравенства (14) с некоторым запасом, задание которого будет определять скорость движения к многообразию $s = 0$

$$(24) \quad \frac{I_r U}{m \delta_{\max}} = \bar{Q} + \Delta_s.$$

Из неравенства (19) следует, что проектные ограничения (4), (17)–(18) должны быть выбраны таким образом, что

$$I_r < \delta_{\min} \sqrt{\frac{2m(1-p)g}{k}}.$$

В противном случае величины тока при движении в скользящем режиме не хватает для удерживания траекторий замкнутой системы на многообразии $s = 0$.

Из выражений (22)–(24) запишем максимальный интервал времени, за который модуль силы тока достигнет значения I_r :

$$(25) \quad \bar{t}_0 - t_0 \leq -T_{\min} \ln \left(1 - k \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}} (\bar{Q} + \Delta_s) \frac{m}{U^2} \right).$$

Как видно из (25), выбором амплитуды управления U может быть задан любой момент времени \bar{t}_0 , начиная с которого выполняется неравенство (14). Отметим, что в пределе

$$\lim_{U \rightarrow \infty} (\bar{t}_0 - t_0) = 0.$$

Из предельного соотношения следует, что выбором амплитуды U и области начальных условий S_0 всегда может быть обеспечено неравенство

$$s(\bar{t}_0) \leq S_0 + \bar{Q}(\bar{t}_0 - t_0) \leq S.$$

Запишем мажоранту для переменной $s(t)$ при $t > \bar{t}_0$ с учетом (24):

$$|s(t)| \leq s(\bar{t}_0) - \Delta_s(t - \bar{t}_0) \quad \forall t > \bar{t}_0.$$

Интервал попадания на поверхность скольжения

$$t_r - \bar{t}_0 \leq \frac{s(\bar{t}_0)}{\Delta_s}.$$

В момент времени $t = t_r$ возникает скользящий режим на многообразии $s = 0$, при этом траектории замкнутой системы не покинут его, если правильным образом выбрать область начальных условий (20), проектные ограничения на переменные $\bar{\delta}(t)$, $\bar{v}(t)$, $\bar{F}(t)$ и внешнее возмущение $q(t)$.

Рассмотрим решения первых трех уравнений системы (12) при $t > t_0$:

$$\bar{\delta}(t) = e^{-l(t-t_0)}\bar{\delta}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{l(t-\tau)}\bar{v}(\tau)d\tau,$$

$$\begin{pmatrix} \bar{v}(t) \\ \bar{F}(t) \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)} \begin{pmatrix} N(t_0) \\ \bar{F}(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} s(\tau) + q(\tau) \\ -M\text{sign}(\bar{v}(\tau)) \end{pmatrix} d\tau,$$

где собственные числа λ_i , $i=1, 2$, матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$

всегда имеют отрицательные действительные части, т.е. $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2$.

Из последних выражений запишем неравенства

$$(26) \quad \begin{aligned} |\bar{\delta}(t)| &\leq \bar{\Delta}_0 + \frac{\bar{N}}{l_1}, \\ \begin{pmatrix} |\bar{v}(t)| \\ |\bar{F}(t)| \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} N_0 \\ \bar{F}_0 \end{pmatrix} + \|A^{-1}\| \begin{pmatrix} S+Q \\ M \end{pmatrix}, \quad \|A^{-1}\| = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} & \frac{1}{\beta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где неравенства понимаются в покомпонентном смысле.

Выбирая проектные ограничения (4), (17)–(18), область начальных условий (20) и параметры обратной связи α , β , M согласно неравенствам (18), (26)

$$(27) \quad \bar{\Delta}_0 + \frac{\bar{N}}{l_1} \leq \bar{\Delta}, \quad \bar{N}_0 + \frac{\alpha}{\beta}(S+Q) + \frac{M}{\beta} \leq \bar{N}, \quad \bar{F}_0 + S + Q \leq \bar{F},$$

получим, что при движении в скользящем режиме для возмущения $\bar{q}(t, \bar{\delta}, \bar{v}, \bar{F}, s, g)$ будет справедливо неравенство (23) $\forall t \geq t_r$, т.е. траектории замкнутой системы (12) останутся на поверхности $s = 0$.

Приведенный алгоритм выбора параметров алгоритма управления гарантирует возникновение и существование скользящего режима для отрицательных начальных условий $s(t_0) < 0$. Действительно, в этом случае согласно (18) отсутствует фаза «накачки» тока (интервал времени $\bar{t}_0 - t_0$) и неравенство (14) выполняется при $t \geq t_0$.

Утверждение 1 доказано.

Перепишем уравнения (15) с новой координатой

$$y = \bar{F} + q(t)$$

$$\dot{\bar{\delta}} = -l_1 \bar{\delta} + \bar{v},$$

$$(28) \quad \dot{\bar{v}} = y,$$

$$\dot{y} = -\alpha y - \beta \bar{v} - M \text{sign}(\bar{v}) + \xi(t),$$

где $\xi(t) = \alpha q(t) + \dot{q}(t)$.

При движении в скользяще режиме справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть параметры алгоритма управления (10) выбраны таким образом, что справедливы неравенства:

1) возмущение $\xi(t)$ удовлетворяет ограничениям

$$|\xi(t)| \leq \alpha Q + Q_1 = \Sigma, \quad |\dot{\xi}(t)| \leq \alpha Q_1 + Q_2 = \bar{\Sigma};$$

2) параметры U, α, M алгоритма управления (10) выбраны согласно выражениям (27) и неравенствам

$$M > \Sigma, \quad \alpha(M - \Sigma) > 2\bar{\Sigma}.$$

Тогда выход системы (15) экспоненциально сходится к нулю независимо от внешних возмущений.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Перепишем уравнения (28) в новых координатах $y_1 = \left| \frac{\alpha^2}{4} - \beta \right|^{0,5} \bar{v}$, $y_2 = \frac{\alpha}{2} \bar{v} + y$ (далее рассматривается случай, когда $\alpha^2/4 - \beta \neq 0$)

$$\dot{\bar{\delta}} = -l_1 \bar{\delta} + \left| \frac{\alpha^2}{4} - \beta \right|^{-0,5} y_1$$

$$(29) \quad \dot{y}_1 = -\frac{\alpha}{2} y_1 + \gamma_1 y_2,$$

$$\dot{y}_2 = \gamma_2 y_1 - \frac{\alpha}{2} y_2 - M \text{sign}(y_1) + \xi(t),$$

где $\gamma_1 = \gamma_2 = \left| \frac{\alpha^2}{4} - \beta \right|^{0,5}$, при $\frac{\alpha^2}{4} - \beta > 0$, и $\gamma_1 = -\gamma_2 = \left| \frac{\alpha^2}{4} - \beta \right|^{0,5}$

при $\frac{\alpha^2}{4} - \beta < 0$.

Рассмотрим составную функцию Ляпунова

$$(30) \quad V = |y_1| - \frac{\xi}{M} y_1 + \frac{y_1^2}{2M} + \frac{y_2^2}{2M}.$$

Данная функция является положительной полуопределенной. Действительно,

$$\begin{aligned} V &= |y_1| - \frac{\xi}{M} y_1 + \frac{y_1^2}{2M} + \frac{y_2^2}{2M} \geq \\ &\geq |y_1| \left(1 - \frac{\Sigma}{M}\right) + \frac{y_1^2}{2M} + \frac{y_2^2}{2M} > 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} y_1 \neq 0, \\ y_2 \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

так как по условиям теоремы 1 $M > \Sigma$.

Дифференцируя функцию Ляпунова с учетом (29), получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{\alpha}{2} |y_1| + \frac{\alpha\xi}{2M} y_1 - \frac{\xi}{M} y_1 - \frac{\alpha}{2M} y_1^2 + \\ (31) \quad &+ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{M} y_1 y_2 - \frac{\alpha}{2M} y_2^2 \leq x^T Q x - \bar{\alpha} |y_1| \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(Q) [y_1^2 + y_2^2] - \bar{\alpha} |y_1|. \end{aligned}$$

где $x^T = (y_1 \quad y_2)$, матрица $P = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2M} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2M} \\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2M} & -\frac{\alpha}{2M} \end{pmatrix}$,

$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\Sigma}{M} - \frac{2\bar{\Sigma}}{\alpha M}\right)$; $\lambda_{\max}(Q)$ — максимальное собственное число матрицы Q .

Квадратичная форма $x^T Q x$ отрицательно определена при любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что легко может быть проверено по критерию Сильвестра. Как видно, при $\bar{\alpha} > 0$ или $\alpha(M - \Sigma) > 2\bar{\Sigma}$ производная функции Ляпунова отрицательна. Следовательно, переменные $y_1(t)$ и $y_2(t)$ асимптотически убывают к нулю.

Из выражения (30) можем записать неравенство

$$V \leq |y_1| \left(1 + \frac{\Sigma}{M}\right) + \frac{1}{2M} (y_1^2 + y_2^2) \leq c_0 (|y_1| + y_1^2 + y_2^2),$$

где $c_0 = \max \left\{ 1 + \frac{\Sigma}{M}, \frac{1}{2M} \right\}$.

Перепишем (31) с учетом последнего равенства:

$$\dot{V} \leq \lambda_{\max}(Q)[y_1^2 + y_2^2] - \bar{\alpha} |y_1| \leq c_1(|y_1| + y_1^2 + y_2^2) \leq -\gamma V,$$

где $\gamma = \frac{|c_1|}{c_0}$, $c_1 = \min\{-\lambda_{\max}(Q), \bar{\alpha}\}$.

Из этого выражения следует экспоненциальная сходимость переменных y_1, y_2 при α , удовлетворяющих условиям теоремы, и произвольном параметре $\beta > 0$.

Из экспоненциальной сходимости переменных y_1, y_2 следует экспоненциальная сходимость переменной $\bar{\delta}(t)$.

Теорема 1 доказана.

4. Синтез алгоритма управления при неизвестной массе подвешиваемого тела

Запишем модель электромагнитного подвеса для подвешиваемого тела с переменной массой в форме уравнения Мещерского [7, 13]:

$$\dot{\delta} = v,$$

$$(32) \quad \dot{v} = -\frac{k}{2m(t)} \frac{I^2}{\delta^2} + g + \frac{dm_1}{dt}(v_1 - v) - \frac{dm_2}{dt}(v_2 - v) + q(t),$$

$$\dot{I} = I \frac{v}{\delta} - \frac{r}{k} I \delta + \frac{u \delta}{k},$$

где $m(t)$ – масса подвешиваемого тела, изменяющаяся за счет обмена частицами с окружающей средой в произвольный момент времени t ; $g(t)=[Q(t)/m(t)]$; v_1 скорость присоединяющихся к подвешиваемому телу частиц; v_2 – скорость отделяющихся от подвешиваемого тела частиц; $[dm_1/dt]$ и $[dm_2/dt]$ скорости массообмена присоединяющихся и отделяющихся частиц соответственно.

Введем ограничения на класс функций $m(t)$:

$$(33) \quad m_{\min} \leq m(t) \leq m_{\max}, \quad |\dot{m}(t)| \leq m_1, \quad |\ddot{m}(t)| \leq m_2, \quad |\dddot{m}(t)| \leq m_3,$$

где $m_{\min}, m_{\max}, m_i, i = 1, 2, 3$, – некоторые положительные константы.

Величина

$$a_r = \frac{dm_1}{dt}(v_1 - v) - \frac{dm_2}{dt}(v_2 - v)$$

в (32) отражает ускорение, придаваемое реактивными силами, возникающими из-за изменения массы подвешиваемого тела. Природа возникновения реактивных сил может быть любая, однако далее полагается, что существуют ограничения на класс этих сил. Если ввести ограничения на переменные v_1 , v_2 , v их производные, учесть (33), то можно записать неравенства для переменной a_r и ее первых двух производных в виде

$$(34) \quad |a_r| \leq A_r, \quad |\dot{a}_r| \leq A_{1r}, \quad |\ddot{a}_r| \leq A_{2r},$$

где A_r, A_{1r}, A_{2r} – некоторые положительные константы.

Вводя новую переменную $F = -\frac{k I^2}{2 \delta^2} + m_{\max} g$, записывая

дифференциальное уравнения относительно нее и объединяя с уравнениями (32), получим

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{\delta} &= v, \\ \dot{v} &= \frac{1}{m(t)} F^* + \tilde{q}(t), \end{aligned}$$

$$F^* = -2 \frac{r \delta}{k} F^* - \frac{I}{\delta} u + 2 \frac{r \delta}{k} m_{\max} g,$$

где $\tilde{q}(t) = \left(1 - \frac{m_{\max}}{m(t)}\right) g + q(t) + a_r$.

Далее приведена процедура синтеза алгоритма управления при ограничениях на (33)–(34) на основе базового алгоритма, описанного в разделе 3.

Шаг 1. Совпадает с процедурой, приведенной в разделе 3.

Шаг 2. Введем новую переменную $\bar{v} = v + l_1 \bar{\delta} - \dot{\delta}_r(t)$ и запишем дифференциальные уравнения с новыми переменными $\bar{\delta}$, \bar{v} с учетом (7)–(8), (35):

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\delta}} &= -l_1 \bar{\delta} + \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} &= \frac{1}{m(t)} F^* - l_1^2 \bar{\delta} + l_1 \bar{v} + \tilde{q}(t) - \ddot{\delta}_r(t). \end{aligned}$$

Для обеспечения соотношения (8) выберем фиктивное управление во втором уравнении системы (36) в виде

$$(37) \quad \begin{aligned} \bar{F}^* &= \frac{F^*}{m_{\max}} - l_1^2 \bar{\delta} + l_1 \bar{v} - \ddot{\delta}_r(t), \\ \dot{\bar{F}}^* &= -\alpha \bar{F}^* - M \text{sign}(\bar{v}), \end{aligned}$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, $M = \text{const} > 0$ – параметры, выбор которых поясним ниже.

Шаг 3. Введем новую переменную

$$(38) \quad s^* = \frac{F^*}{m_{\max}} - l_1^2 \bar{\delta} + l_1 \bar{v} - \ddot{\delta}_r(t) - \bar{F}^*$$

и запишем дифференциальное уравнение относительно нее с учетом (36)–(38):

$$(39) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\delta}} &= -l_1 \bar{\delta} + \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} &= \frac{m_{\max}}{m(t)} \bar{F}^* + m_{\max} s^* + q^*(t), \\ \dot{\bar{F}}^* &= -\alpha \bar{F}^* - \beta \bar{v} - M \text{sign}(\bar{v}), \\ \dot{s}^* &= -\frac{I}{m_{\max} \delta} u + \bar{q}^*(t, \bar{\delta}, \bar{v}, \bar{F}^*, s^*, g), \end{aligned}$$

где $q^*(t) = \tilde{q}(t) + \left(1 - \frac{m_{\max}}{m(t)}\right) [-l_1^2 \bar{\delta} + l_1 \bar{v} - \ddot{\delta}_r(t)]$,

$$\begin{aligned} \bar{q}^*(t) &= -\left(2 \frac{r\delta}{k} - l_1\right) s^* + \frac{l_1}{m_{\max}} \left(l_1^2 - 2 \frac{r\delta}{k} l_1\right) \bar{\delta} + \left(2 \frac{r\delta}{k} - l_1\right) \frac{l_1}{m_{\max}} \bar{v} - \\ &- 2 \frac{r\delta \ddot{\delta}_r(t)}{k m_{\max}} + 2 \frac{r\delta}{k} g - \left(\left(2 \frac{r\delta}{k} - l_1\right) \frac{1}{m_{\max}} + \alpha\right) \bar{F}^* + l_1 q^*(t) - \frac{\ddot{\delta}_r(t)}{m_{\max}} - \\ &- M \text{sign}(\bar{v}). \end{aligned}$$

Для обеспечения стабилизации переменных выбирается реальное управляющее воздействие в виде

$$(40) \quad u = U \text{sign}(s^* I).$$

При выполнении условия

$$\frac{|I|}{m_{\max} \delta} U > |\bar{q}^*(t, \bar{\delta}, \bar{v}, \bar{F}^*, s^*, g)|$$

на поверхности $s = 0$ за конечное время возникает скользящий режим [20], и уравнения замкнутой системы принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\delta}} &= -l_1 \bar{\delta} + \bar{v}, \\ (41) \quad \dot{\bar{v}} &= \frac{m_{\max}}{m(t)} \bar{F}^* + q^*(t), \end{aligned}$$

$$\bar{F}^* = -\alpha \bar{F}^* - M \text{sign}(\bar{v}).$$

Алгоритм выбора амплитуды U и области начальных условий, из которой обеспечивается стабилизация переменных системы (39), аналогичен процедуре, приведенной в разделе 3. Отметим лишь ограничения на класс возмущения $q^*(t)$:

$$(42) \quad |q^*(t)| \leq Q^*, \quad |\dot{q}^*(t)| \leq Q_1^*, \quad |\ddot{q}^*(t)| \leq Q_2^*,$$

где $Q^* = \text{const} > 0$, $Q_1^* = \text{const} > 0$, $Q_2^* = \text{const} > 0$.

Перепишем уравнения (41) с новой переменной:

$$\begin{aligned} y &= \frac{m_{\max}}{m(t)} \bar{F}^* + q^*(t) \\ \dot{\bar{\delta}} &= -l_1 \bar{\delta} + \bar{v}, \\ (43) \quad \dot{\bar{v}} &= y, \\ \dot{y} &= -\left(\alpha + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\right) y - \frac{m_{\max}}{m(t)} M \text{sign}(\bar{v}) + \xi^*(t), \end{aligned}$$

где $\xi^*(t) = \dot{q}^*(t) + \left(\alpha + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\right) q(t)$.

Для возмущения $\xi^*(t)$ и его первой производной согласно (33)–(34), (42)–(43) могут быть записаны неравенства

$$\begin{aligned} |\xi^*(t)| &\leq Q_1 + \left(\alpha + \frac{m_1}{m_{\min}}\right) Q^* = \Sigma^*, \\ (44) \quad |\dot{\xi}^*(t)| &\leq \left(\alpha + \frac{m_2 m_{\max} + m_1^2}{m_{\min}^2}\right) Q^* + \left(\alpha + \frac{m_1}{m_{\min}}\right) Q_1^* + Q_2 = \bar{\Sigma}^*, \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть

1) возмущение $\xi(t)$ удовлетворяет ограничениям (44);

2) параметры алгоритма управления (37)–(38), (40) выбраны таким образом, что справедливы неравенства

$$M > \Sigma^*, \left(\alpha - 2 \frac{m_1}{m_{\min}} \right) M - \left(\alpha - \frac{m_1}{m_{\min}} \right) \Sigma > \bar{\Sigma}^*.$$

Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\delta}(t)| = 0.$$

Доказательство теоремы 2.

Введем систему сравнения

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{y},$$

$$(45) \quad \dot{\tilde{y}} = -\alpha_{\min} \tilde{y} - \frac{m_{\max}}{m(t)} M \text{sign}(\tilde{v}) + \xi^*(t),$$

где $\alpha_{\min} = \alpha - \frac{m_1}{m_{\min}} > 0$ по условиям теоремы 2.

Обозначим за t_i, \tilde{t}_i моменты времени, когда происходит обнуление переменных $\bar{v}(t)$ и $\tilde{v}(t)$ соответственно, и за t'_i, \tilde{t}'_i , когда происходит обнуление переменных $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{v}(t_i) = 0, \tilde{v}(\tilde{t}_i) = 0, t_i = \tilde{t}_i, \quad i = \overline{1, \infty}, \\ y(t'_i) = 0, \tilde{y}(\tilde{t}'_i) = 0, \end{aligned}$$

Рассмотрим фазовые портреты систем (43), (45) при $t > t_1$ и одинаковых начальных условиях $\bar{v}(t_1) = \tilde{v}(t_1) = 0, \tilde{y}(t_1) = y(t_1)$. В [10] приведено подробное доказательство справедливости неравенств

$$(46) \quad |\bar{v}(t'_i)| \leq |\tilde{v}(\tilde{t}'_i)|, \quad |y(t_i)| \leq |\tilde{y}(\tilde{t}_i)|, \quad i = \overline{2, \infty}$$

на основе сравнения фазовых скоростей систем (43), (45).

Рассмотрим функцию Ляпунова для системы (45)

$$V = \frac{m_{\max}}{m(t)} |\tilde{v}| - \frac{\xi^*}{M} \tilde{v} + \frac{(\tilde{y} + \alpha_{\min} \tilde{v})}{2M}.$$

Ее производная неположительная. Действительно,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\alpha_{\min} \frac{m_{\max}}{m(t)} |\tilde{v}| - \frac{m_{\max} \dot{m}(t)}{m^2(t)} |\tilde{v}| - \frac{\xi^*}{M} \tilde{v} + \alpha_{\min} \tilde{v} \frac{\xi^*}{M} \leq \\ &\leq -\frac{m_{\max}}{m(t)} \left(\alpha_{\min} \left(1 - \frac{m(t)\Sigma}{m_{\max}M} \right) - \frac{m_1}{m_{\min}} \right) |\tilde{v}| - \frac{\bar{\Sigma}^*}{M} |\tilde{v}| \leq \\ &\leq -\left(\alpha_{\min} \left(1 - \frac{\Sigma}{M} \right) - \frac{m_1}{m_{\min}} - \frac{\bar{\Sigma}^*}{M} \right) |\tilde{v}| = -\gamma^* |\tilde{v}|, \end{aligned}$$

где $\gamma^* = \left(\alpha - 2 \frac{m_1}{m_{\min}} \right) M - \left(\alpha - \frac{m_1}{m_{\min}} \right) \Sigma - \bar{\Sigma}^* > 0$ по условиям теоремы 2.

Из последнего неравенства следует, что переменная $\tilde{v}(t)$ системы сравнения убывает асимптотически:

$$(47) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{v}(t)| = 0.$$

Из соотношений (46)–(47) следует предельное соотношение для переменной $\bar{v}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{v}(t)| = 0,$$

и в силу устойчивости собственной динамики первого уравнения (42) выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\delta}(t)| = 0.$$

Теорема 2 доказана.

5. Результаты моделирования

Приведем результаты моделирования алгоритма управления, разработанного в разделе 4, для двух экспериментов. В опытах использовались следующие общие условия:

- активное сопротивление электромагнита $r = 80$ Ом;
- конструктивный коэффициент $k = 0,24 \cdot 10^{-2}$ Гн·м;
- $U = 220$ В;
- функция задающего воздействия:
 $\delta_r(t) = 0,04 + 0,01 \sin(2t) + 0,01 \sin(4t)$ м;

– функция возмущения, зависящая от внешних и реактивных сил:

$$q(t) + a_r = \sin(t) + \sin(2t) \text{ м/с}^2;$$

– параметры алгоритма управления (37)–(38), (40):

$$M = 100, \alpha = 20, l_1 = 4.$$

Эксперимент 1. Функция массы подвешиваемого тела

$$m(t) = [0,15 + 0,05 \sin(1,5t)] \text{ кг.}$$

Результаты моделирования в среде MATLAB/Simulink приведены на рис. 2. Для численного интегрирования использовался метод Дормана–Принса (ode 5) с шагами интегрирования $t_s = 10^{-5}$ с и $t_s = 10^{-6}$ с.

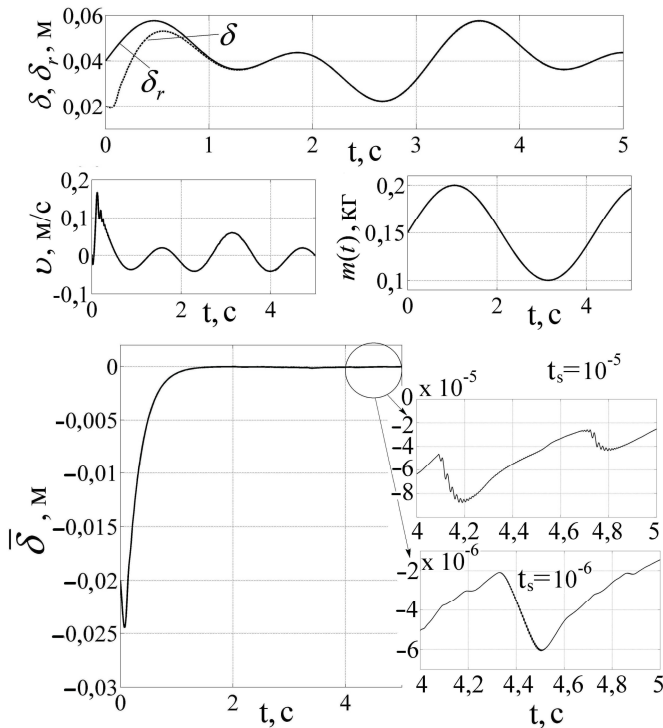


Рис. 2. Результаты моделирования первого эксперимента 1

Как видно, чем меньше шаг интегрирования, тем меньше установившаяся ошибка. Поскольку доказанный в теореме 1 теоретический результат справедлив только при бесконечной частоте переключения реле ($t_s = 0$), постольку такой результат вполне объясним.

Эксперимент 2. Функция массы подвешиваемого тела $m(t)$ в данном эксперименте является периодической и на первом периоде описывается в виде прямоугольного сигнала

$$m(t) = \begin{cases} 0,2 \text{ кг} & \text{при } 0 \leq t \leq 2 \text{ с}; \\ 0,12 \text{ кг} & \text{при } 2 \leq t \leq 4 \text{ с}. \end{cases}$$

Результаты моделирования приведены на рис. 3.

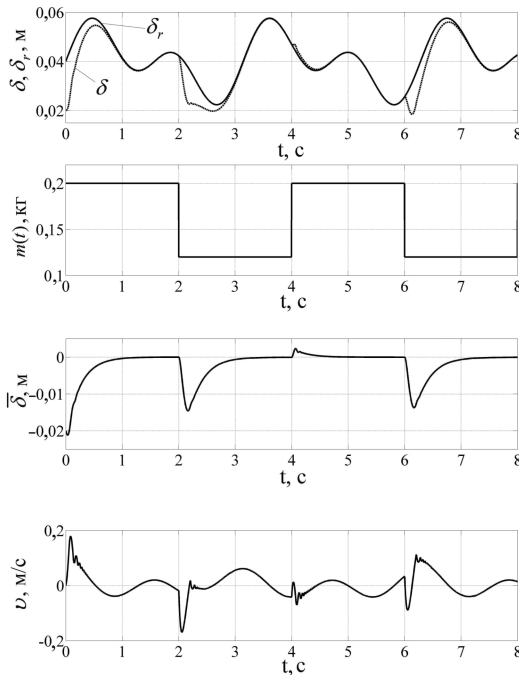


Рис. 3. Результаты моделирования эксперимента 2

Видно, что при нарушении условий теоремы 2 (масса изменяется скачком) траекторию движения подвешиваемого тела «вышибает». Однако после того как масса опять становится функцией заданного класса, ошибка слежения $\bar{\delta}(t)$ асимптотически стремится к нулю.

6. Заключение

В статье были предложены алгоритмы управления электромагнитным подвесом в робастной постановке, когда масса подвешиваемого тела неизвестна и на систему действует внешние неконтролируемые возмущения, не принадлежащие пространству управления. Основным направлением дальнейших исследований является разработка так называемого бездатчикового электромагнитного подвеса на основе идентификаторов состояния динамических объектов. Это направление представляется перспективным из-за сложности установки и дороговизны датчиков положения и скорости подвешиваемого тела. Кроме того, в ряде прикладных задач [5] установка таких датчиков из-за механической вибрации в принципе невозможна.

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю.Н. *Управление конечномерными линейными объектами*. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
2. ГЕРДИ В.Н., МАЙКОВ К.А., ОСОКИН Ю.А., СТАНКЕВИЧ Н.Н. *Теория и применение электромагнитных подвесов*. – М.: Машиностроение, 2006. – 284 с.
3. ДРАКУНОВ С.В., ИЗОСИМОВ Д.Б., ЛУКЪЯНОВ А.Г., УТКИН В.А., УТКИН В.И. *Принцип блочного управления // Автоматика и телемеханика*. – 1990. – №5. – С. 3–13; №6. – С. 20–31.
4. ЖУРАВЛЕВ Ю.Н. *Активные магнитные подшипники: теория, расчет, применение*. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с.

5. ИВАШИН В.В., КУДИНОВ А.К., ПЕВЧЕВ В.П. *Электромагнитные привода для импульсных и виброимпульсных технологий // Известия высших учебных заведений. Электромеханика.* – 2012. – №1. – С. 72–75.
6. КАНЦЕЛЬСОН О.Г., ЭДЕЛЬШТЕЙН А.С. *Автоматические измерительные приборы с магнитной подвеской.* – М.: Энергия, 1970. – 216 с.
7. КИЛЬЧЕВСКИЙ Н.А. *Курс теоретической механики.* Том 1. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
8. КОЧЕТКОВ С.А. *Повышение точности измерений в системах с дифференциальными датчиками // Датчики и системы.* – 2011. – №3. – С. 10–15.
9. КОЧЕТКОВ С.А. *Алгоритмы управления и идентификации для профилографа-профилометра при воздействии внешних возмущений // Проблемы управления.* – 2011. – №3. – С. 20–29.
10. КОЧЕТКОВ С.А., УТКИН В.А. *Инвариантность в системах с несогласованными возмущениями // Автоматика и телемеханика.* – 2013. – №7. – С. 46–83.
11. КОЧЕТКОВ С.А., УТКИН В.А. *Обеспечение инвариантности за счет создания колебательных режимов // Доклады академии наук.* – 2013. – Т. 452, №6. – С. 611–616.
12. СТЕПАНЕНКО И.П. *Основы теории транзисторов и транзисторных схем.* – М.: Энергия, 1973. – 671 с.
13. ТАРГ С.М. *Краткий курс теоретической механики.* – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.
14. УОНЕМ У.М. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход.* – М.: Наука, 1980. – 376 с.
15. ЧУНИХИН А.А. *Электрические аппараты.* – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 720 с.
16. CHIANG H.-K., CHEN C.-A., LI M.-Y. *Integral variable-structure grey control for magnetic levitation system // Electric Power Applications, IEE Proceedings.* – 2006. – Vol: 153, No.6. – P. 809–814.
17. GOSTKOV A.S., KOCHETKOV S.A., SHAVRIN P.A. *Sensorless sliding mode control for electromagnet // Proc. Nonlinear*

- Control Systems conference NOLCOS'07, South Africa, Pretoria. – 2007. – P. 1151–1155.
18. LIN F.-J., LI-TAO T., SHIEH P.-H. *Intelligent Sliding-Mode Control Using RBFN for Magnetic Levitation System* // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2007. – Vol. 54, No. 3. – P. 1752–1762.
 19. LU Y.-S.; CHEN J.-S. *Design of a perturbation estimator using the theory of variable-structure systems and its application to magnetic levitation systems* // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 1995. – Vol. 42, No. 3. – P. 281–289.
 20. UTKIN V.I., GULDNER J., SHI J. *Sliding mode control in Electromechanical Systems*. – L.: Tailor and Francis, 2009. – 328 p.

ROBUST CONTROL FOR ELECTROMAGNET ON THE BASE OF VORTEX ALGORITHM

Kochetkov Sergey, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (kos@ipu.ru).

Utkin Anton, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Cand.Sc., senior researcher (utkin-av@rambler.ru).

Utkin Victor, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Dr.Sc., chief researcher (vicutkin@ipu.ru).

Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-93-21.

Abstract: We design vortex control algorithms for electromagnet in a tracking problem. The main feature of these vortex algorithms is invariance property to unmatched external disturbances of the wide class. It is shown that the designed algorithms provide asymptotical convergence of output variables under influence of parametrical (unknown mass, active resistance of a coil, etc) and external disturbances. Simulation results show efficiency of the proposed procedure.

Keywords: magnetic levitation system, vortex algorithm, parametrical disturbances.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.Л. Фрадковым*

*Поступила в редакцию 22.10.2013.
Опубликована 31.01.2014.*