

УДК 519.63 + 519.246

ББК 22.161.6 + 22.193 + 22.171

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВАМИ ТРАЕКТОРИЙ, ОПИСЫВАЕМЫМИ СЛУЧАЙНОЙ СМЕСЬЮ ЭРЛАНГОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ¹

Кожевников А. С.², Рыбаков К. А.³

(Московский авиационный институт, Москва)

В статье рассматриваются стохастические системы управления с импульсными воздействиями, которые образуют гиперэрланговские потоки событий и приводят к разрывам траекторий системы. Решается задача нахождения плотности вероятности вектора состояния. В основе решения лежит использование спектральной формы математического описания систем управления.

Ключевые слова: гиперэрланговское распределение, задача анализа, скачкообразный процесс, спектральный метод, стохастическая система.

1. Введение

Многие окружающие нас явления и закономерности (природные, технические, экономические) имеют случайный характер, что позволяет их описывать с помощью случайных процессов. Для описания моделей явлений, учитывающих влияние случайных факторов, как правило, применяют стохастические дифференциальные уравнения (при условии, конечно, что время можно считать непрерывным).

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-08-00892-а).

² Александр Сергеевич Кожевников, аспирант (exequit@yandex.ru).

³ Константин Александрович Рыбаков, кандидат физико-математических наук, доцент (rkoffice@mail.ru).

Используя уравнения с диффузионной и скачкообразной компонентами, можно моделировать поведение довольно сложных систем, учитывая как непрерывные случайные воздействия, так и импульсные, приводящие к разрывам траекторий. Однако часто для описания скачкообразной компоненты ограничиваются общим пуассоновским процессом (или пуассоновской случайной мерой) [19, 23, 24]. Такой выбор обусловлен развитым математическим аппаратом (стохастические дифференциальные уравнения с пуассоновской составляющей, уравнения Колмогорова–Феллера), но следствием выбора общего пуассоновского процесса является использование только показательного закона распределения для промежутков времени между последовательными импульсными воздействиями (разрывами траекторий). В частности, для случайных величин, имеющих показательное распределение, среднее значение и стандартное отклонение совпадают, что вносит некоторые ограничения при решении прикладных задач [6].

Для того чтобы снять такие ограничения, можно использовать модели систем со случайным периодом квантования – частный случай систем со случайной структурой [4, 7, 12, 13, 20]. В них появлением разрывов траекторий управляет вспомогательный марковский процесс с конечным множеством состояний, задаваемый начальным распределением и интенсивностями переходов. Использование таких моделей приводит к ряду трудностей, в основном связанных со сложностью решения уравнений для нахождения плотности вероятности вектора состояния – системы обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (интегро-дифференциальных уравнений в частных производных), решение уравнений для моментов тоже сложнее, чем для моделей, использующих только общий пуассоновский процесс. Вторая сложность связана с тем, что большое количество параметров модели (интенсивности, параметры распределений приращений, которые получает вектор состояния при разрывах траекторий для различных переходов между состояниями вспомогательного марковского процесса) затрудняет их идентификацию. Поэтому целесообразно, взяв за основу модель

системы со случайным периодом квантования, рассмотреть некоторые частные случаи с обозримым числом параметров. Один из таких частных случаев сводится к описанию промежутков времени между последовательными импульсными воздействиями эрланговским законом распределения, т.е. когда состояния вспомогательного марковского процесса последовательно сменяются «по кругу», а переход из некоторого, заранее выбранного, состояния в следующее сопровождается разрывом траектории: моменты появления разрывов траекторий образуют эрланговский поток событий. Такие модели изучены, например, в [4, 10, 22]. Модель, рассматриваемая в этой статье, допускает, что моменты появления разрывов траекторий образуют гиперэрланговский поток событий и формируется два типа приращений при разрыве траектории, имеющих различные законы распределения. Распределение промежутков времени между последовательными разрывами можно задать смесью эрланговских распределений. Использование такого гиперэрланговского распределения позволяет включить показательное и эрланговское распределения как частные случаи и расширить множество решаемых прикладных задач. Аналогичный подход применен в [22, 25].

В последнее время системы, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями с диффузионной и скачкообразной компонентами, все чаще используются для моделирования цен акций [9, 21, 24]. Разумеется, задачи финансовой математики составляют только часть прикладных задач, при решении которых целесообразно использовать математический аппарат теории систем со случайным периодом квантования. Например, можно рассматривать асинхронные системы управления сложными техническими объектами [4], механические системы с импульсными воздействиями [22], изучать влияние случайных импульсных воздействий и помех на электрические цепи [2, 19] и др.

Все существующие методы анализа систем со случайной структурой, допускающих при смене структуры разрывы траекторий, можно применять и при анализе систем со случайным

периодом квантования. Один из них – метод Монте-Карло [1, 8]. Он сводится к многократному непосредственному моделированию реализаций случайного процесса и их статистической обработке. Существенное преимущество этого метода состоит в простоте реализации и универсальности. К его недостаткам можно отнести необходимость проведения большого количества вычислений для получения достаточной точности, особенно при оценке плотности вероятности вектора состояния.

Другие методы, так или иначе, связаны с уравнениями для нахождения плотности вероятности вектора состояния – обобщенными уравнениями Фоккера–Планка–Колмогорова: методы, основанные на задании структуры плотности вероятности вектора состояния, например, полигауссовская аппроксимация; переход к моментам; методы, связанные с представлением плотности вероятности или связанной с ней характеристики в виде функционального ряда: степенного, ортогонального; численные методы). Подробное описание таких методов содержится в монографиях [7, 20].

Предлагаемый метод решения основан на ортогональных разложениях функций с использованием спектральной формы математического описания систем управления [12, 18], он является развитием подхода, применяемого для более простых стохастических систем [2, 10, 11].

Отметим, что представление решения задачи в виде ортогонального ряда довольно часто используется при построении приближенно-аналитических методов. Но, как правило, для этого выбирается конкретная система ортогональных или биортогональных функций и выводятся соотношения для нахождения коэффициентов ряда. При таком подходе, конечно же, используются свойства выбранных функций (например, рекуррентные соотношения, связывающие эти функции; формулы, устанавливающие связи функций и их производных и т.п.). Основное отличие предлагаемого метода состоит в использовании произвольной ортонормированной системы, при этом соотношения для определения коэффициентов ряда не зависят от выбранных функций. Они представляются матричными уравне-

ниями, для которых можно получить формулы точного решения или сформировать методику приближенного решения. Свойства выбранных функций также используются, но несколько иначе, а именно от этих свойств зависит структура матриц, которые ставятся в соответствие линейным операторам (операторам умножения, дифференцирования, интегрирования и др.), определяющим исходную задачу. Выбор той или иной системы ортонормированных функций может привести к тому, что соответствующая матрица будет треугольной, ленточной, симметрической или кососимметрической. Для многих базисных систем, например, для полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Уолша и Хаара, обобщенных функций Лагерра (включающих полиномы и функции Лагерра) и обобщенных функций Эрмита (включающих полиномы и функции Эрмита), такие матрицы известны [12, 14, 16–18].

Для рассмотренной модели стохастической системы с разрывами траекторий, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений, получено аналитическое решение матричных уравнений для коэффициентов разложения функций, по которым определяется плотность вероятности вектора состояния. Это же решение можно использовать и как приближенное, получая конечное число коэффициентов разложения и представляя плотность вероятности в виде частичной суммы ряда. Для апробации предложенной методики решен пример задачи анализа одномерной нелинейной стохастической системы с двумя типами приращений при разрыве траектории: случайным гауссовским и детерминированным; промежутки времени между последовательными разрывами описываются эрланговским и показательным распределениями.

2. Постановка задачи

Будем предполагать, что поведение модели системы управления описывается случайным процессом в непрерывном времени, являющимся аддитивной смесью диффузионного и специ-

ального скачкообразного процессов и удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению Ито [13]:

$$(1) \quad dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

в котором $X \in R^n$ – вектор состояния; $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ – заданный отрезок времени функционирования системы;

$f(t, x): T \times R^n \rightarrow R^n$ – вектор-функция размеров $n \times 1$;

$\sigma(t, x): T \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$ – матричная функция размеров $n \times s$;

$W(t)$ – s -мерный стандартный винеровский процесс, который не зависит от начального состояния X_0 , определяемого заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

Случайный процесс $Q(t)$ представляется в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} (\xi_i Y_1(\tau_i) + (1 - \xi_i) Y_2(\tau_i)),$$

где $J(t)$ – гиперэрланговский процесс, ассоциированный со случайным потоком событий [4], состоящих в том, что вектор состояния X получает приращения $Y_1(\tau_i) \in R^n$ или $Y_2(\tau_i) \in R^n$ в случайные моменты времени τ_1, τ_2, \dots . Случайный вектор $Y_1(\tau_i)$ характеризуется плотностью вероятности $q_1(t, y)$, а случайный вектор $Y_2(\tau_i)$ – плотностью вероятности $q_2(t, y)$; $t = \tau_i$. Выбор приращения $Y_1(\tau_i)$ или $Y_2(\tau_i)$ зависит от случайной величины ξ_i , принимающей значения 1 с вероятностью $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ и 0 с вероятностью $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ (случайные величины ξ_1, ξ_2, \dots имеют распределение Бернулли):

$$X(\tau_i) = X(\tau_i - 0) + \left\{ \begin{array}{l} Y_1(\tau_i), \quad \xi_i = 1 \\ Y_2(\tau_i), \quad \xi_i = 0 \end{array} \right\}.$$

Заданные положительные числа λ_1 и λ_2 , а также натуральные числа N_1 и N_2 определяют гиперэрланговский закон распределения промежутков времени $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$ ($\tau_0 = t_0$), который является эрланговским с параметрами λ_1 и N_1 , если $\xi_i = 1$, или эрланговским с параметрами λ_2 и N_2 , если $\xi_i = 0$. Случайные величины ξ_i независимы, поэтому выбор закона распределения для случайного приращения – $q_1(t, y)$ или $q_2(t, y)$ – в момент времени τ_i не зависит от предыстории.

Возможно и другое описание схемы появления событий (разрывов в траекториях вектора состояния). Для этого рассмот-

рим случайный процесс $K(t)$ с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, N\}$, где $N = N_1 + N_2 - 1$. Интенсивности переходов задаются следующим образом (см. рис. 1): смена состояний $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, N_1 - 1 \rightarrow N_1$ и $N_1 \rightarrow 1$ происходит с интенсивностью λ_1 , а смена состояний $1 \rightarrow N_1 + 1, N_1 + 1 \rightarrow N_1 + 2, \dots, N - 1 \rightarrow N$ и $N \rightarrow 1$ – с интенсивностью λ_2 ; другие переходы невозможны. При переходе из состояния с номером N_1 в состояние с номером 1 вектор X получает случайное приращение $Y_1(\tau_i)$, а при переходе из состояния с номером N в состояние с номером 1 – случайное приращение $Y_2(\tau_i)$, что соответствует разрыву (скачку) траектории процесса $X(t)$ (см. рис. 2).

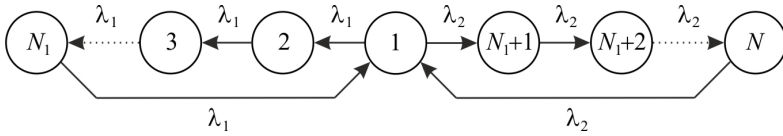


Рис. 1. Граф состояний случайного процесса $K(t)$

Если предположить, что $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$, то $J(t)$ будет эрланговским процессом порядка N_1 , а процессу $K(t)$ будет соответствовать кольцевой граф состояний (аналогично при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$). Этот случай рассмотрен в работе [10].

Заметим, что постановка задачи может быть изменена с предположением, что интенсивности λ_1 и λ_2 зависят от времени, т.е. $\lambda_1 = \lambda_1(t), \lambda_2 = \lambda_2(t)$. Далее будем рассматривать именно этот вариант.

Предполагается [24], что функции $f(t, x)$ и $g(t, x) = \sigma(t, x) \times \sigma^T(t, x)$ кусочно-непрерывны по t для всех $X \in R^n$; при фиксированном $t \in T$ функция $f(t, x)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка, а функция $g_{ij}(t, x)$ – непрерывные и ограниченные частные производные второго порядка по координатам вектора состояния, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ непрерывны на множестве T , а случайные величины, задаваемые плотностями вероятности $q_1(t, y)$ и $q_2(t, y)$, имеют конечные моменты второго порядка.

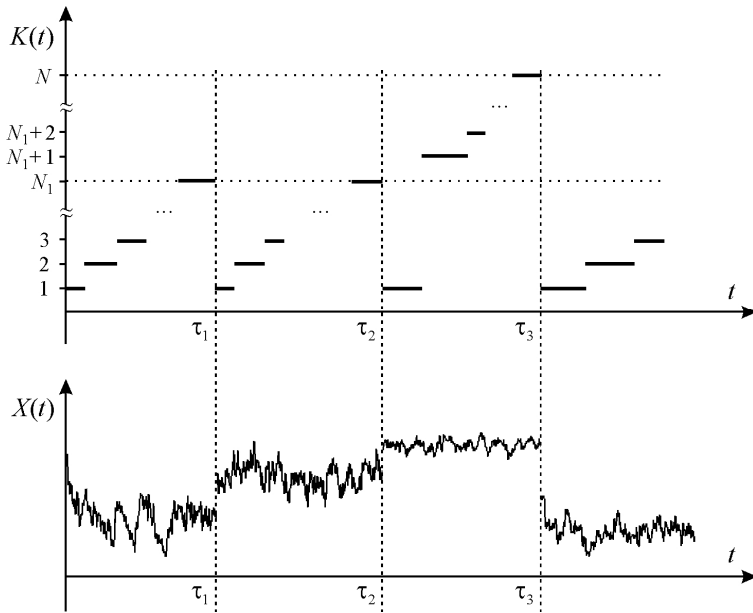


Рис. 2. Выборочные траектории процессов $K(t)$ и $X(t)$

Эти условия (иногда к ним добавляется дополнительное условие на матрицу диффузии $g(t, x)$, требуемое для разрешимости приведенных ниже параболических уравнений) обеспечивают существование и единственность сильного решения уравнения (1), однако они вносят слишком много ограничений при решении прикладных задач. Вопросы, связанные с ослаблением приведенных условий, рассмотрены в [3, 5]. В частности, можно рассматривать уравнения с разрывным коэффициентом сноса $f(t, x)$ или вырожденной матрицей диффузии $g(t, x)$, достаточно часто встречающиеся в задачах управления. Отметим, что в [3, 5] изучаются стохастические дифференциальные уравнения без скачкообразной компоненты или с пуассоновской составляющей, тем не менее эти результаты могут быть обобщены и на рассматриваемый случай. Кроме того, можно понимать решение уравнения (1) в слабом смысле, тем более что далее ставится задача нахождения плотности вероятности вектора состояния.

Таким образом, рассматривается стохастическая система с расширенным вектором состояния, непрерывная часть которого – X , а дискретная – $K \in \{1, 2, \dots, N\}$. Тогда плотность вероятности $\varphi(t, x)$ вектора X может быть представлена в виде суммы:

$$\varphi(t, x) = \sum_{k=1}^N \varphi^{(k)}(t, x),$$

где функции $\varphi^{(k)}(t, x)$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова [4, 7, 12, 20]:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi^{(1)}(t, x)}{\partial t} = A\varphi^{(1)}(t, x) - (\lambda_1(t) + \lambda_2(t))\varphi^{(1)}(t, x) + \lambda_1(t) \int_{R^n} q_1(t, x - z)\varphi^{(N_1)}(t, z)dz + \lambda_2(t) \int_{R^n} q_2(t, x - z)\varphi^{(N)}(t, z)dz,$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi^{(k)}(t, x)}{\partial t} = A\varphi^{(k)}(t, x) - \lambda_1(t)\varphi^{(k)}(t, x) + \lambda_1(t)\varphi^{(k-1)}(t, x),$$

$k = 2, \dots, N_1,$

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi^{(N_1+1)}(t, x)}{\partial t} = A\varphi^{(N_1+1)}(t, x) - \lambda_2(t)\varphi^{(N_1+1)}(t, x) + \lambda_2(t)\varphi^{(1)}(t, x),$$

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi^{(k)}(t, x)}{\partial t} = A\varphi^{(k)}(t, x) - \lambda_2(t)\varphi^{(k)}(t, x) + \lambda_2(t)\varphi^{(k-1)}(t, x),$$

$k = N_1 + 2, \dots, N,$

в которой

$$(6) \quad A\varphi^{(k)}(t, x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f_i(t, x)\varphi^{(k)}(t, x) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[g_{ij}(t, x)\varphi^{(k)}(t, x) \right], \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$g_{ij}(t, x) = \sum_{r=1}^s \sigma_{ir}(t, x)\sigma_{jr}(t, x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Для случайного процесса $K(t)$ начальное состояние фиксировано: $K(t_0) = 1$, поэтому с учетом заданной плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 имеем

$$(7) \quad \varphi^{(1)}(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad \varphi^{(k)}(t_0, x) = 0, \quad k = 2, \dots, N.$$

Последние два слагаемых в правой части уравнения (2) для дальнейших преобразований целесообразно представить в операторной форме, определив

$$(8) \quad H_r \varphi(t, x) = \lambda_r(t) \int_{R^n} q_r(t, x - z) \varphi(t, z) dz, \quad r = 1, 2,$$

для всех допустимых функций $\varphi(t, x)$; H_r – линейный оператор, а именно композиция оператора умножения на функцию $\lambda_r(t)$ и оператора Фредгольма с ядром $q_r(t, x - z)$.

Задача анализа стохастической системы управления, описываемой уравнением (1), заключается в нахождении плотности вероятности $\varphi(t, x)$ вектора состояния X при заданных функциях $f(t, x)$, $\sigma(t, x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $q_1(t, y)$, $q_2(t, y)$ и $\varphi_0(x)$. Далее предполагается, что это решение существует в классе функций $W_2^{1,1}(T \times R^n)$, т.е. плотность вероятности $\varphi(t, x)$ и ее производные первого порядка принадлежат пространству $L_2(T \times R^n)$, при этом решение $\{\varphi^{(1)}(t, x), \varphi^{(2)}(t, x), \dots, \varphi^{(N)}(t, x)\}$ системы (2)–(5) понимается в обобщенном смысле, т.е. эта совокупность удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} & \int_{T \times R^n} \psi^{(1)}(t, x) \frac{\partial \varphi^{(1)}(t, x)}{\partial t} dt dx = \int_{T \times R^n} \varphi^{(1)}(t, x) A^* \psi^{(1)}(t, x) dt dx - \\ & - \int_{T \times R^n} \psi^{(1)}(t, x) (\lambda_1(t) + \lambda_2(t)) \varphi^{(1)}(t, x) dt dx + \\ & + \int_{T \times R^n} \psi^{(1)}(t, x) \left(\lambda_1(t) \int_{R^n} q_1(t, x - z) \varphi^{(N_1)}(t, z) dz + \right. \\ & \left. + \lambda_2(t) \int_{R^n} q_2(t, x - z) \varphi^{(N)}(t, z) dz \right) dt dx, \\ & \int_{T \times R^n} \psi^{(k)}(t, x) \frac{\partial \varphi^{(k)}(t, x)}{\partial t} dt dx = \int_{T \times R^n} \varphi^{(k)}(t, x) A^* \psi^{(k)}(t, x) dt dx - \\ & - \int_{T \times R^n} \psi^{(k)}(t, x) (\lambda_1(t) \varphi^{(k)}(t, x) - \lambda_1(t) \varphi^{(k-1)}(t, x)) dt dx, \\ & k = 2, \dots, N_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{T \times R^n} \psi^{(N_1+1)}(t, x) \frac{\partial \varphi^{(N_1+1)}(t, x)}{\partial t} dt dx = \\
 & = \int_{T \times R^n} \varphi^{(N_1+1)}(t, x) A^* \psi^{(N_1+1)}(t, x) dt dx - \\
 & - \int_{T \times R^n} \psi^{(N_1+1)}(t, x) \left(\lambda_2(t) \varphi^{(N_1+1)}(t, x) - \lambda_2(t) \varphi^{(1)}(t, x) \right) dt dx, \\
 & \int_{T \times R^n} \psi^{(k)}(t, x) \frac{\partial \varphi^{(k)}(t, x)}{\partial t} dt dx = \int_{T \times R^n} \varphi^{(k)}(t, x) A^* \psi^{(k)}(t, x) dt dx - \\
 & - \int_{T \times R^n} \psi^{(k)}(t, x) \left(\lambda_2(t) \varphi^{(k)}(t, x) - \lambda_2(t) \varphi^{(k-1)}(t, x) \right) dt dx, \\
 & k = N_1 + 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

для любых бесконечно дифференцируемых функций $\psi^{(1)}(t, x)$, $\psi^{(2)}(t, x)$, ..., $\psi^{(N)}(t, x)$ с компактными носителями, где A^* – сопряженный оператор:

$$\begin{aligned}
 A^* \psi^{(k)}(t, x) &= \sum_{i=1}^n f_i(t, x) \frac{\partial \psi^{(k)}(t, x)}{\partial x_i} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \psi^{(k)}(t, x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad k = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned}$$

3. Применение спектральной формы математического описания

Сведем задачу анализа к поиску коэффициентов разложения $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ функции $\varphi(t, x)$ по ортонормированным функциям в пространстве $L_2(T \times R^n)$. Обозначим полную систему ортонормированных функций $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$, предполагая, что они представляются в виде произведения

$$e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, \dots, i_n, x), \quad i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots,$$

причем функции $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ образуют полные ортонормированные системы в пространствах $L_2(T)$ и $L_2(R^n)$ соответственно.

Применим спектральное преобразование [11, 12] к системе уравнений (2)–(5) с учетом условий (7), тогда

$$(9) \quad \begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) = \\ & = A(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0) - (\Lambda_1(n+1, n+1) + \\ & + \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0) + H_1(n+1, n+1) \cdot \\ & \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0) + H_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0), \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) - \\ & - \Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) + \Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \\ & k = 2, \dots, N_1, \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0) - \\ & - \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0) + \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0), \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) - \\ & - \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) + \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \\ & k = N_1 + 2, \dots, N. \end{aligned}$$

В этих соотношениях $P(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент; $A(n+1, n+1)$, $H_1(n+1, n+1)$ и $H_2(n+1, n+1)$ – спектральные характеристики операторов A , H_1 и H_2 , определенных выражениями (6) и (8); $\Lambda_1(n+1, n+1)$ и $\Lambda_2(n+1, n+1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ соответственно; $\Phi^{(k)}(n+1, 0)$ – спектральные характеристики функций $\varphi^{(k)}(t, x)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$. Далее, $q(1, 0; t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 ; $\Phi_0(n, 0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 , определенная относительно системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$.

Спектральная характеристика $\Phi(n+1, 0)$ плотности вероятности $\varphi(t, x)$, называемая также обобщенной характеристической

функцией [11, 12], выражается следующим образом ($\Phi(n+1, 0)$ – многомерная гиперстолбцовая матрица, образованная искомыми коэффициентами разложения $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$):

$$(13) \quad \Phi(n+1, 0) = \sum_{k=1}^N \Phi^{(k)}(n+1, 0).$$

В основе соотношений (9)–(12) лежат определения, форма представления и свойства спектральных характеристик функций и линейных операторов, подробно изложенные в [12, 17, 18]. Определение спектральной характеристики, аналогичной $H_1(n+1, n+1)$ и $H_2(n+1, n+1)$, дано в [10, 12]. В этих же работах приведено представление спектральной характеристики $A(n+1, n+1)$ с помощью спектральных характеристик операторов дифференцирования и умножения.

Система уравнений (9)–(12) – это система линейных матричных уравнений относительно неизвестных спектральных характеристик $\Phi^{(k)}(n+1, 0)$, или система линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно элементов матриц $\Phi^{(k)}(n+1, 0)$, т.е. коэффициентов разложения функций $\varphi^{(k)}(t, x)$ по функциям $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$. Перейдем к решению этой системы.

Из уравнений (10)–(12) следует, что

$$\begin{aligned} & (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda_1(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) = \\ & = \Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \quad k = 2, \dots, N_1, \\ & (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \\ & \cdot \Phi^{(N_1-1)}(n+1, 0) = \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0), \\ & (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) = \\ & = \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \quad k = N_1 + 2, \dots, N, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \Phi^{(k-1)}(n+1, 0) = \Lambda_1^{-1}(n+1, n+1) \cdot (P(n+1, n+1) - \\ & - A(n+1, n+1) + \Lambda_1(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = 2, \dots, N_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(n+1, 0) &= \Lambda_2^{-1}(n+1, n+1) \cdot (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \\ &+ \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(N_1-1)}(n+1, 0), \\ \Phi^{(k-1)}(n+1, 0) &= \Lambda_2^{-1}(n+1, n+1) \cdot (P(n+1, n+1) - \\ &- A(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = N_1 + 2, \dots, N,\end{aligned}$$

или кратко

$$\begin{aligned}\Phi^{(k-1)}(n+1, 0) &= W_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = 2, \dots, N_1, \\ \Phi^{(1)}(n+1, 0) &= W_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0), \\ \Phi^{(k-1)}(n+1, 0) &= W_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = N_1 + 2, \dots, N,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}W_1(n+1, n+1) &= \Lambda_1^{-1}(n+1, n+1) \cdot (P(n+1, n+1) - \\ &- A(n+1, n+1) + \Lambda_1(n+1, n+1)), \\ W_2(n+1, n+1) &= \Lambda_2^{-1}(n+1, n+1) \cdot (P(n+1, n+1) - \\ &- A(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1)).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(n+1, 0) &= W_1^{k-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \\ \Phi^{(k)}(n+1, 0) &= W_1^{N_1-k}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0), \quad k = 1, \dots, N_1, \\ \Phi^{(1)}(n+1, 0) &= W_2^{k-N_1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \\ \Phi^{(k)}(n+1, 0) &= W_2^{N-k}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0), \quad k = N_1 + 1, \dots, N,\end{aligned}$$

в частности

$$(14) \quad \Phi^{(1)}(n+1, 0) = W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0),$$

$$(15) \quad \Phi^{(1)}(n+1, 0) = W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0).$$

Значит,

$$(16) \quad \begin{aligned}W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0) &= \\ = W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0),\end{aligned}$$

т.е.

$$(17) \quad \begin{aligned}\Phi^{(N_1)}(n+1, 0) &= [W_1^{N_1-1}(n+1, n+1)]^{-1} \cdot \\ &\cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0),\end{aligned}$$

или

$$(18) \quad \Phi^{(N)}(n+1, 0) = [W_2^{N_2-1}(n+1, n+1)]^{-1} \cdot \\ \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0).$$

Перепишем уравнение (10) с учетом (14)–(16):

$$\begin{aligned} & (\Lambda_1(n+1, n+1) \cdot W_1^{N_1}(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \\ & \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) - H_1(n+1, n+1) - H_2(n+1, n+1) \cdot \\ & \cdot [W_2^{N_2-1}(n+1, n+1)]^{-1} \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0) = \\ & = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (\Lambda_2(n+1, n+1) \cdot W_2^{N_2}(n+1, n+1) + \Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \\ & \cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) - H_2(n+1, n+1) - H_1(n+1, n+1) \cdot \\ & \cdot [W_1^{N_1-1}(n+1, n+1)]^{-1} \cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0) = \\ & = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi^{(N_1)}(n+1, 0) &= (\Lambda_1(n+1, n+1) \cdot W_1^{N_1}(n+1, n+1) - H_1(n+1, n+1) + \\ & + \{\Lambda_2(n+1, n+1) - H_2(n+1, n+1) \cdot [W_2^{N_2-1}(n+1, n+1)]^{-1}\} \cdot \\ & \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1))^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi^{(N)}(n+1, 0) &= (\Lambda_2(n+1, n+1) \cdot W_2^{N_2}(n+1, n+1) - H_2(n+1, n+1) + \\ & + \{\Lambda_1(n+1, n+1) - H_1(n+1, n+1) \cdot [W_1^{N_1-1}(n+1, n+1)]^{-1}\} \cdot \\ & \cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1))^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)). \end{aligned}$$

Выразим спектральную характеристику $\Phi(n+1, 0)$, принимая во внимание (13):

$$\begin{aligned}
 \Phi(n+1,0) &= \sum_{k=1}^{N_1} \Phi^{(k)}(n+1,0) + \sum_{k=N_1+1}^N \Phi^{(k)}(n+1,0) = \\
 (19) \quad &= \sum_{k=1}^{N_1} W_1^{N_1-k}(n+1,n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1,0) + \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_2-1} W_2^{N_2-k-1}(n+1,n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1,0).
 \end{aligned}$$

В [10] было показано, что

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \sum_{k=1}^N W^{N-k}(n+1,n+1) &= \left(E(n+1,n+1) - W^N(n+1,n+1) \right) \cdot \\
 &\cdot \left(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1) \right)^{-1},
 \end{aligned}$$

поэтому с учетом (17)

$$\begin{aligned}
 \Phi(n+1,0) &= \left[\left(E(n+1,n+1) - W_1^{N_1}(n+1,n+1) \right) \cdot \right. \\
 &\cdot \left(E(n+1,n+1) - W_1(n+1,n+1) \right)^{-1} + \\
 &+ \left(E(n+1,n+1) - W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) \right) \cdot \\
 &\cdot \left(E(n+1,n+1) - W_2(n+1,n+1) \right)^{-1} \cdot \\
 &\left. \cdot \left[W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) \right]^{-1} \cdot W_1^{N_1-1}(n+1,n+1) \right] \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1,0),
 \end{aligned}$$

или с учетом (18)

$$\begin{aligned}
 \Phi(n+1,0) &= \left[\left(E(n+1,n+1) - W_1^{N_1}(n+1,n+1) \right) \cdot \right. \\
 &\cdot \left(E(n+1,n+1) - W_1(n+1,n+1) \right)^{-1} \cdot \left[W_1^{N_1-1}(n+1,n+1) \right]^{-1} \cdot \\
 &\cdot W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) + \left(E(n+1,n+1) - W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) \right) \cdot \\
 &\left. \cdot \left(E(n+1,n+1) - W_2(n+1,n+1) \right)^{-1} \right] \cdot \Phi^{(N)}(n+1,0).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \Phi(n+1, 0) = & \left[\left(E(n+1, n+1) - W_1^{N_1}(n+1, n+1) \right) \cdot \right. \\
 & \cdot \left(E(n+1, n+1) - W_1(n+1, n+1) \right)^{-1} + \left(E(n+1, n+1) - \right. \\
 & \left. - W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \right) \cdot \left(E(n+1, n+1) - W_2(n+1, n+1) \right)^{-1} \cdot \\
 (21) \cdot & \left. \left[W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \right]^{-1} \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \right] \cdot \left(\Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \right. \\
 & \cdot W_1^{N_1}(n+1, n+1) - H_1(n+1, n+1) + \{ \Lambda_2(n+1, n+1) - \\
 & \left. - H_2(n+1, n+1) \cdot \left[W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \right]^{-1} \} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)),
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \Phi(n+1, 0) = & \left[\left(E(n+1, n+1) - W_1^{N_1}(n+1, n+1) \right) \cdot \right. \\
 & \cdot \left(E(n+1, n+1) - W_1(n+1, n+1) \right)^{-1} \cdot \left[W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \right]^{-1} \cdot \\
 & \cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) + \left(E(n+1, n+1) - W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \right) \cdot \\
 (22) \cdot & \left. \left(E(n+1, n+1) - W_2(n+1, n+1) \right)^{-1} \right] \cdot \left(\Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \right. \\
 & \cdot W_2^{N_2}(n+1, n+1) - H_2(n+1, n+1) + \{ \Lambda_1(n+1, n+1) - \\
 & \left. - H_1(n+1, n+1) \cdot \left[W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \right]^{-1} \} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)),
 \end{aligned}$$

– решение рассматриваемой задачи в спектральной форме математического описания.

Для нахождения решения задачи анализа в пространстве функций времени и вектора состояния требуется применить формулу обращения [12]:

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (t, x) \in T \times R^n.$$

Обычно приближенно определяется конечное число коэффициентов $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$, поскольку задача нахождения всех коэффициентов разложения не является тривиальной. В этом случае бесконечные матрицы в (9)–(13) заменяются конечными матрицами, тогда

$$\varphi(t, x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x),$$

где натуральные числа L_0, L_1, \dots, L_n – выбранные порядки усечения спектральных характеристик, влияющие на точность решения. Проверка корректности расчетов обычно осуществляется путем сравнения результатов при использовании различных наборов базисных систем или усечений спектральных характеристик [18].

Для апробации разработанного метода рассмотрим стохастическую систему, заданную уравнением Ито

$$dX(t) = a \operatorname{sign} X(t) dt + \sigma dW(t) + dQ(t), \quad X(0) = X_0,$$

где $X \in R$ – состояние системы, $t \in [0, 1]$; a, σ – числовые параметры; $W(t)$ – скалярный стандартный винеровский процесс; $Q(t)$ – скачкообразный процесс, определяемый интенсивностями λ_1, λ_2 , порядками N_1, N_2 и плотностями вероятности $q_1(t, y), q_2(t, y)$.

Для численных расчетов положим $a = -0,5$; $\sigma = 0,75$; начальное состояние X_0 имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m_0 = 1$ и дисперсией $D_0 = 0,5$; интенсивности и порядки заданы следующим образом: $\lambda_1 = 6$; $\lambda_2 = 1,5$, $N_1 = N_2 = 2$; плотность распределения $q_1(t, y)$ приращения Y_1 – гауссовская с параметрами $m_1 = 0,5$ и $D_1 = 0,1$, $q_2(t, y) = \delta(y + 0,2)$, т.е. величина приращения Y_2 постоянна и равна $-0,2$.

При решении задачи спектральным методом в качестве базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ были выбраны косинусоиды [12, 17, 18], а в качестве базисной системы $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – функции Эрмита [14] с параметрами $m = 1$ и $D = 1$, порядки усечения $L_0 = L_1 = 16$.

Результаты вычислений для плотности вероятности состояния системы приведены на рис. 3, а на рис. 4 показаны ее сечения в моменты времени 0,0; 0,5; 1,0.

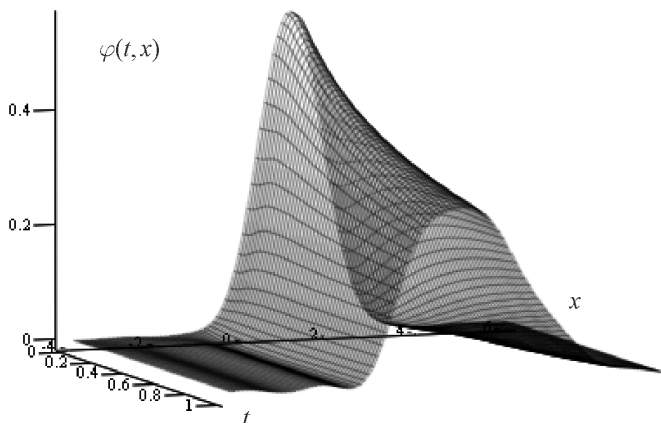


Рис. 3. Плотность вероятности состояния системы

Далее, на рис. 5 показано, как меняется плотность вероятности в конечном моменте времени в зависимости от порядка N_1 (дополнительные расчеты проводились для случаев $N_1 = 1$ и $N_1 = 3$, при этом интенсивность λ_1 определялась из условия $\lambda_1/N_1 = \text{const}$, которое обеспечивает постоянство среднего числа скачков в единицу времени для эрланговского закона с параметрами λ_1 и N_1 , т.е. $N_1 = 1, \lambda_1 = 3$ и $N_1 = 3, \lambda_1 = 9$). Видно, что максимальное значение для плотности вероятности и математическое ожидание состояния смещаются вправо. Это объясняется ростом вероятности выбора приращения Y_1 , а не Y_2 : при $\lambda_1 = 3$ эта вероятность равна $3/(3 + 1,5) = 2/3$, при $\lambda_1 = 6 - 6/(6 + 1,5) = 4/5$ и при $\lambda_1 = 9 - 9/(9 + 1,5) = 6/7$.

Асимметрию можно объяснить положительной средней величиной приращения Y_1 , которая по модулю превосходит детерминированное приращение Y_2 , и, конечно, соотношением интенсивностей λ_1, λ_2 .

Наконец, на рис. 6 показано, как зависит плотность вероятности в конечном моменте времени от различных усечений спектральных характеристик (дополнительные расчеты проводились для случаев $L_0 = L_1 = 8$ и $L_0 = L_1 = 24$ при номинальных параметрах $N_1 = 2, \lambda_1 = 6$).

Как следует из графиков, при выбранных порядках усечения (8; 16; 24) разница в приближенных решениях не столь заметна, однако при другом масштабе видно (см. рис. 7), что с ростом усечения растет и точность. В первую очередь это проявляется в минимизации интервалов, где оценка плотности вероятности отрицательна (появление таких интервалов при приближенном решении неизбежно и вызвано свойствами выбранных базисных функций).

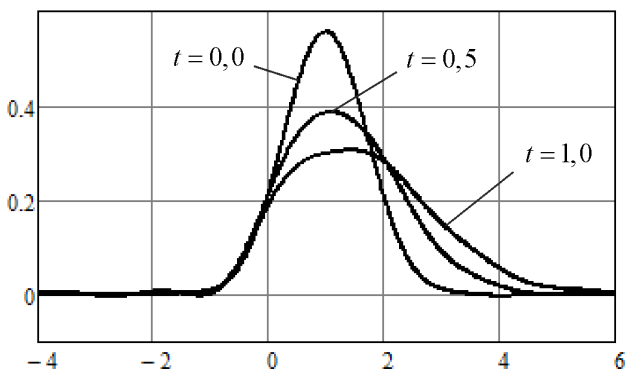


Рис. 4. Сечения плотности вероятности состояния системы в различные моменты времени

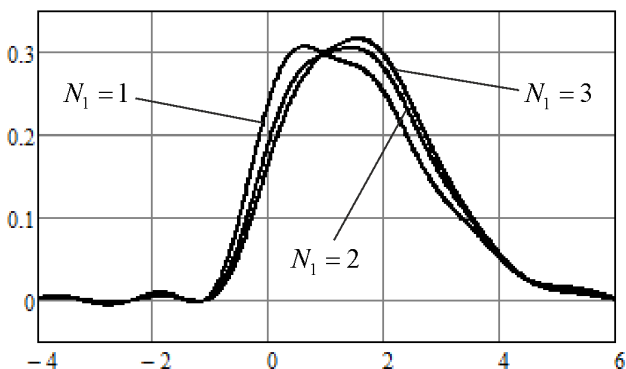


Рис. 5. Сечения плотности вероятности состояния системы в конечном моменте времени при различных значениях параметров λ_1 и N_1

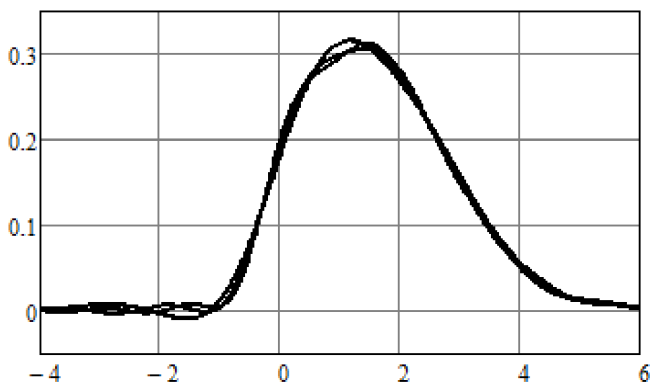


Рис. 6. Сечения плотности вероятности состояния системы в конечном моменте времени при различных порядках усечения

Отметим, что все численные расчеты были выполнены с помощью специализированного программного обеспечения Spectrum [15].

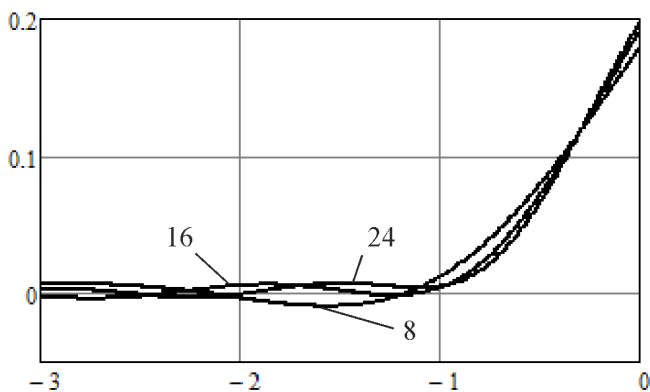


Рис. 7. Сечения плотности вероятности состояния системы в конечном моменте времени при различных порядках усечения

4. Заключение

В работе рассмотрено применение спектральной формы математического описания к задаче вероятностного анализа стохастических систем, которые характеризуются наличием разрывов (скачков) траекторий, образующих гиперэрланговский поток событий. Получены соотношения для нахождения плотности вероятности вектора состояния в спектральной форме математического описания систем управления. Использование гиперэрланговских потоков дает возможность учитывать более сложный характер поведения траекторий вектора состояния, а применение спектральной формы математического описания позволяет свести систему интегро-дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомой плотности вероятности по некоторой ортонормированной системе функций.

Рассмотренный подход упрощает процесс решения задачи анализа, делая его удобным для применения современных высокопроизводительных вычислительных систем.

Литература

1. АВЕРИНА Т.А. *Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайным периодом квантования* // Вестник СГТУ. – 2011. – №4(62), Вып. 4. – С. 212–218.
2. АВЕРИНА Т.А., РЫБАКОВ К.А. *Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники* // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – №1. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/content.html> (дата обращения: 09.09.2013).
3. АНУЛОВА С.В., ВЕРЕТЕННИКОВ А.Ю., КРЫЛОВ Н.В. И ДР. *Стохастическое исчисление* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 45. – М.: ВИНТИ, 1989. – С. 42–79.

4. АРТЕМЬЕВ В.М., ИВАНОВСКИЙ А.В. *Дискретные системы управления со случайным периодом квантования*. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 96 с.
5. ВЕРЕТЕННИКОВ А.Ю. *О сильных решениях стохастических уравнений Ито со скачками* // Теория вероятностей и ее применения. – 1987. – Т. 32., Вып. 1. – С. 159–163.
6. ГОРИЦКИЙ Ю.А., КАЗАКОВ В.А. *Дискретизация случайных процессов с конечным множеством состояний и эрланговским временем пребывания* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – №6. – С. 14–27.
7. КАЗАКОВ И.Е., АРТЕМЬЕВ В.М., БУХАЛЕВ В.А. *Анализ систем случайной структуры*. – М.: Физматлит, 1993. – 272 с.
8. КОЖЕВНИКОВ А.С. *Программное обеспечение для статистического моделирования и анализа случайных процессов со скачками, описывающих динамику цен акций предприятий авиационной отрасли* // Труды МАИ. – 2012. – № 59. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.mai.ru/science/trudy> (дата обращения: 09.09.2013).
9. КОЖЕВНИКОВ А.С. *Математические модели динамики цены акций с гиперэрланговскими скачками* // Научный альманах. Вып. 17: Материалы IX научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Инновационный менеджмент в аэрокосмической промышленности». – М.: Изд-во «Доброе слово», 2013. – С. 180–186.
10. КОЖЕВНИКОВ А.С., РЫБАКОВ К.А. *Анализ нелинейных стохастических систем управления с импульсными воздействиями, образующими эрланговские потоки событий* // Научный вестник МГТУ ГА. – 2012. – №184(10). – С. 37–45.
11. ПАНТЕЛЕЕВ А.В., РЫБАКОВ К.А. *Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №2. – С. 183–194.

12. ПАНТЕЛЕЕВ А.В., РЫБАКОВ К.А., СОТСКОВА И.Л. *Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления*. – М.: Вузовская книга, 2006. – 392 с.
13. ПУГАЧЕВ В.С., СИНИЦЫН И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
14. РОМАНОВ В.А., РЫБАКОВ К.А. *Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ*. – 2010. – №39. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.mai.ru/science/trudy> (дата обращения: 09.09.2013)
15. РЫБАКОВ К.А. *Программное обеспечение спектрального метода Spectrum // Труды МАИ*. – 2003. – №14. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.mai.ru/science/trudy> (дата обращения: 09.09.2013).
16. РЫБАКОВ К.А. *Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления*. – 2012. – №1. – С. 114–141. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal> (дата обращения: 09.09.2013).
17. РЫБИН В.В. *Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики*. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 220 с.
18. СОЛОДОВНИКОВ В.В., СЕМЕНОВ В.В. *Спектральная теория нестационарных систем управления*. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
19. ТИХОНОВ В.И., МИРОНОВ М.А. *Марковские процессы*. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
20. ФЕДОСОВ Е.А., ИНСАРОВ В.В., СЕЛИВОХИН О.С. *Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды*. – М.: Наука, 1989. – 272 с.

21. CONT R., TANKOV P. *Financial Modelling with Jump Processes*. – Chapman and Hall, 2004. – 560 p.
22. IWANKIEWICZ R., NIELSEN S.R.K. *Advanced Methods in Stochastic Dynamics of Non-Linear Systems*. – Aalborg tekniske Universitetsforlag, 1999. – 276 p.
23. HANSON F.B. *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation*. – SIAM, 2007. – 472 p.
24. ØKSENDAL B., SULEM A. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. – Springer, 2007. – 266 p.
25. TELLIER M., IWANKIEWICZ R. *Response of linear dynamic systems to non-Erlang renewal impulses: stochastic equation approach* // Probabilistic Engineering Mechanics. – 2005. – Vol. 20, №4. – P. 281–295.

**SPECTRAL METHOD FOR STOCHASTIC SYSTEMS
WITH DISCONTINUOUS TRAJECTORIES DESCRIBED
BY RANDOM MIXTURE OF ERLANG DISTRIBUTIONS**

Alexander Kozhevnikov, Moscow aviation institute, graduate student (exequit@yandex.ru).

Konstantin Rybakov, Moscow aviation institute, Cand.Sc., assistant professor (rkoffice@mail.ru).

Abstract: We consider stochastic control systems with impulses generated by hyper-Erlang flows of events leading to jumps in system trajectories. We employ the spectral form of mathematical description of the system to find the probability density function of its states.

Keywords: analysis problem, hyper-Erlang distribution, jump process, spectral method, stochastic system.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.П. Курдюковым*

Поступила в редакцию 17.01.2013.

Опубликована 30.09.2013.