

УДК 62.50  
ББК Ж 30

## СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ СЕТЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАНКОВ СЕНСОРОВ И ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ<sup>1</sup>

Жучков Р. Н.<sup>2</sup>

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)  
Нижегородского Государственного технического университета  
им. Р.Е. Алексеева, Арзамас)*

*Рассматривается линейная система, в которой регулятор обменивается информацией с объектом управления через сеть, содержащую множество банков сенсоров и исполнительных устройств. Совокупность сенсоров и исполнительных устройств рассматривается как система случайной структуры. Строится динамический регулятор с обратной связью по вектору выхода.*

Ключевые слова: линейные дискретные системы, сетевое стабилизирующее управление, марковские цепи, линейные матричные неравенства.

### **Введение**

В работе автора [1] рассматривался случай, когда объект управления получал информацию через единственный набор сенсоров и передавал управление через единственный набор исполнительных устройств. В реальных системах могут иметь место другие схемы. Например, в системе управления летательным аппаратом обычно содержатся основная и резервная системы дат-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №13-08-01092\_а) и Министерства образования и науки РФ, ФЦП «КАДРЫ» (соглашение №8846).

<sup>2</sup> Роман Николаевич Жучков, аспирант ([roman\\_jkv@mail.ru](mailto:roman_jkv@mail.ru))

чиков курса и вертикали. Кроме того, для корректировки текущего положения может использоваться информация со спутников и других внешних устройств. Таким образом, имеем многоуровневую систему резервирования, а, значит, и систему управления, в которой возможны переключения между различными наборами сенсоров и исполнительных устройств. Дополнительные сложности появляются в случае сетевого управления, так как часть передаваемых пакетов может быть повреждена или потеряна.

Предыдущий подход рассматривал сетевую систему управления с одним набором сенсоров и исполнительных устройств как марковскую цепь с двумя возможными состояниями: пакет получен либо потерян. В дальнейшем стабилизирующее управление находилось из решения линейных матричных неравенств.

В данной работе рассматривается случай произвольного количества блоков сенсоров и исполнительных устройств, через которые происходит обмен данными между объектом и системой управления. Прямое обобщение результатов [1] на такие системы приводят к необходимости решения систем билинейных матричных неравенств сложной структуры, что связано со значительными трудностями.

Для получения эффективного алгоритма построения стабилизирующего управления предлагается новый подход, суть которого состоит в следующем. Как и ранее в [1], вводится гипотеза о возможности разделения процессов оценивания и управления. Затем вводится эвристическая модификация неравенств исходной системы, которая позволяет сравнительно легко получить решение. В качестве альтернативного способа рассмотрен подход с использованием наблюдателя Калмана.

Считается, что характеристики канала передачи данных известны, т.е. известны вероятности переключения между блоками сенсоров и регуляторов. Эта информация используется для построения матрицы переходов при построении марковской цепи.

## 1. Описание системы

Рассматривается система с множеством блоков сенсоров и регуляторов, схема которой представлена на рис. 1. Отметим

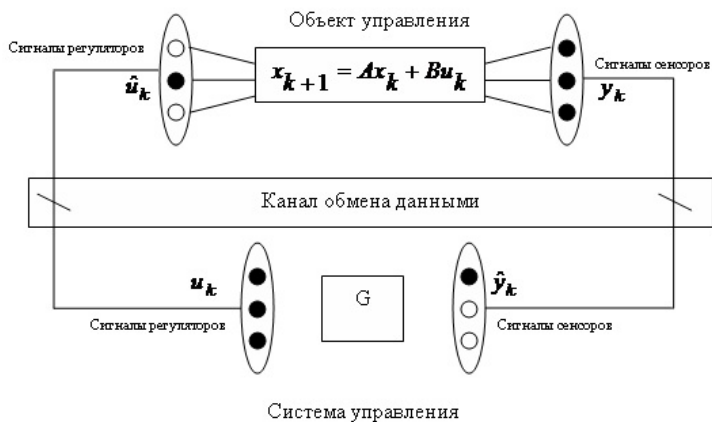


Рис. 1. Схема сетевой системы управления

здесь, что в качестве канала обмена данными можно подразумевать канал с протоколом *point-to-point*, который обычно используется для установления прямой связи между двумя узлами сети. Для простоты будем считать, что прямой канал «объект управления – система управления» и обратный канал организованы с использованием единой физической среды. При работе с такими сетями обычно возникает два типа проблем: запаздывание при передаче сигнала и потеря/порча пакета данных. В настоящей работе считается, что в используемом канале данных длительность задержки при передаче пакетов данных мала по отношению к интервалу дискретности системы управления. Другими словами, динамику каналов связи можно не учитывать в масштабе динамических процессов в рассматриваемом управляемом объекте.

В этой системе объект управления формирует массив дан-

ных для основных и резервных сенсоров системы управления ( $y_k$ ) и высылает их через сетевой канал данных. В процессе пересылки часть информации теряется либо портится (несовпадение контрольных сумм). Таким образом, система управления переключается на доступные в настоящий момент сенсоры ( $\hat{y}_k$ ).

При пересылке управляющей информации от системы управления объекту управления ситуация повторяется: система формирует сигналы для всех регуляторов ( $u_k$ ), но использован будет только тот, который не был потерян либо испорчен при пересылке.

Модель системы задаётся линейным разностным уравнением следующего вида:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_i u_k, \\ y_k &= C_i x_k, \end{aligned}$$

где  $x_{k+1}$  –  $n$ -мерный вектор состояния перехода;  $x_k$  –  $n$ -мерный вектор исходного состояния;  $u_k$  –  $m$ -мерный вектор управления;  $y_k$  –  $l$ -мерный вектор измерений;  $k$  – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности  $\Delta t$ ; матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – матрицы перехода вектора состояния и усиления вектора управления соответственно.

В каждый дискретный момент времени матрица выхода системы может находиться в одном из следующих структурных состояний:

$$(2) \quad \begin{aligned} S_1 : C_i &= C_1, \\ S_2 : C_i &= C_2, \\ S_N : C_i &= C_N. \end{aligned}$$

Кроме того, в случае потери сигнала информация может отсутствовать ( $C_i = 0$ ). Здесь  $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$  – матрицы, характеризующие  $i$ -й выход системы в различных структурных состояниях.

Аналогично, в зависимости от задействованного регулятора

матрица  $B_i$  переходит в одно из возможных состояний:

$$\begin{aligned} (3) \quad T_1 : \quad B_i &= B_1, \\ T_2 : \quad B_i &= B_2, \\ T_M : \quad B_i &= B_M. \end{aligned}$$

Закон управления формируется в виде обратной связи по оценке вектора состояния

$$(4) \quad u_{ki} = -G_i \hat{x}_k,$$

где  $G_i$  – набор матриц усиления обратной связи, соответствующих матрицам  $B_i$ .

Таким образом получаем систему с расширенным вектором состояния:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - B_i G_i) & -B_i G_i \\ 0 & (A - K_j C_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix}.$$

Аналогично подходу, изложенному в предыдущей статье [1], воспользуемся гипотезой о возможности разделения задач оценивания и управления и будем искать соответствующие матрицы усиления по отдельности. После того как матрицы будут найдены для разделенных систем, подставим их в общую систему (5) и проверим её на устойчивость. Отметим здесь, что при разделении системы предполагается, что пары матриц  $(A, B_i)$  полностью управляемы, а пары матриц  $(A, C_i)$  полностью наблюдаемы.

## 2. Построение стабилизирующего управления

В соответствии с подходом, изложенным в [2], набор матриц усиления обратной связи  $G_i$ , стабилизирующий систему (1) при условии переключения входов, может быть найден следующим образом:

$$(6) \quad G_i = [B_i^T S_i B_i + R_i]^{-1} [B_i^T S_i A_i + L_i],$$

где  $R_i > 0$  и  $L_i$  – неизвестные матрицы, которые могут быть найдены из решения системы матричных уравнений и неравенств (7). Кроме того, матрицы  $H_i = H_i^T > 0$  в системе (7) также

являются неизвестными.

$$(7) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} A^T S_i A - H_i + (1 + \mu_i) Q_i & A^T S_i B_i \\ B_i^T S_i A & B_i^T S_i B_i + R_i \end{bmatrix} > 0, \\ & S_i = \sum H_i p_{ij}, \\ & \begin{bmatrix} \mu_i Q_i & L_i^T \\ L_i & B_i^T S_i B_i + R_i \end{bmatrix} > 0, \\ & [B_i^T S_i B_i + R_i] = [B_{i+1}^T S_{i+1} B_{i+1} + R_{i+1}], \\ & [B_i^T S_i A + L_i] = [B_{i+1}^T S_{i+1} A + L_{i+1}], \\ & R_i = R_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Для того чтобы удостовериться, что найденные матрицы усиления обеспечивают устойчивость замкнутой системе, необходимо проверить на разрешимость следующую систему матричных неравенств:

$$(8) \quad (A - B_i G_i)^T \sum p_{ij} H_i (A - B_i G_i) - H_i < 0,$$

где  $H_i = H_i^T$  – неизвестная положительно определённая матрица. Данная система получена путём применения метода функций Ляпунова к системе (1)–(3).

### 3. Построение оценки вектора состояния

В ряде случаев алгоритм, изложенный в предыдущем пункте, может выдать идентичные матрицы усиления обратной связи для различных входов системы. В этом случае хотелось бы сконструировать такой алгоритм, который позволял бы получить единственную матрицу усиления и для построения оценки вектора состояния, с целью построить регулятор постоянной структуры.

Однако прежде чем рассмотреть частный случай, рассмотрим ситуацию, когда при решении задачи управления были получены различные матрицы усиления для различных структурных состояний системы.

### 3.1. НАБЛЮДАТЕЛЬ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассмотрим выход системы как однородную марковскую цепь с известными вероятностями перехода между структурными состояниями. Оценку вектора состояния будем искать в следующем виде:

$$(9) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K_i(y_k - C_i\hat{x}_k),$$

где смена структурных состояний  $C_i$  описана ранее.

Наблюдатель (9) будет устойчив, если выполнено неравенство Ляпунова [2]:

$$(10) \quad (A - K_i C_i)^T \sum p_{ij} H_j (A - K_i C_i) - H_i < 0, \quad i = 1 \dots N,$$

где  $H_i = H_i^T$  и  $K_i$  – неизвестные матрицы и  $p_{ij}$  – элементы матрицы вероятностей переходов между структурными состояниями системы. Непосредственное решение этого билинейного относительно неизвестных матриц неравенства приводит к связанной системе линейных матричных уравнений и неравенств. Однако можно ограничиться только решением линейных матричных неравенств, если использовать следующий эвристический прием. Рассмотрим систему неравенств

$$(11) \quad (A - K_i C_i) \sum p_{ij} H_j (A - K_i C_i)^T - H_i < 0, \quad i = 1 \dots N.$$

Эта система не является следствием применения какой-либо функции Ляпунова и сконструирована искусственно. Экспериментально было установлено, что решение системы (11) также является решением системы (10).

Система (11) при умножении ее слева и справа на  $X_i = H_i^{-1}$  и применении теоремы о дополнении Шура может быть приведена к следующему LMI:

$$(12) \quad \begin{bmatrix} X_i & (X_i A - Y_i C_i) \sqrt{p_{i1}} & (X_i A - Y_i C_i) \sqrt{p_{i2}} & \dots & (X_i A - Y_i C_i) \sqrt{p_{iN}} \\ (X_i A - Y_i C_i)^T \sqrt{p_{i1}} & X_1 & 0 & \dots & 0 \\ (X_i A - Y_i C_i)^T \sqrt{p_{i2}} & 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_i A - Y_i C_i)^T \sqrt{p_{iN}} & 0 & 0 & \dots & X_N \end{bmatrix} > 0,$$

где  $Y_i = X_i K_i$ . Если эти неравенства разрешимы и найденные значения  $K_i$  удовлетворяют неравенствам (10), в чем можно убедиться непосредственно, то они являются матрицами усиления наблюдателя.

### 3.2. НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОСТОЯННОЙ СТРУКТУРЫ

Попытаемся построить оценку состояния с помощью одной из модификаций робастного фильтра Калмана [7, 8]. Отличительной его особенностью является то, что он не требует знания матриц ковариаций шумов. И хотя робастный фильтр Калмана даёт субоптимальную оценку состояния системы, он будет гарантировать ограниченность ошибки оценивания в широком спектре параметров неопределённостей системы.

Приведем основные уравнения робастного фильтра Калмана, вывод которых содержится в [8].

Рассмотрим следующий класс дискретных систем с неопределённостями:

$$(13) \quad x_{k+1} = (A + \Delta A_k)x_k,$$

$$(14) \quad y_k = (C + \Delta C_k)x_k,$$

где  $x_k$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $y_k$  –  $l$ -мерный вектор измерений;  $A$  и  $C$  – известные матрицы соответствующей размерности.

Матрицы  $\Delta A_k$  и  $\Delta C_k$  – неизвестные матрицы, которые описывают неопределённости системы. Считается, что  $\Delta A_k$  и  $\Delta C_k$  имеют следующую структуру:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_k \\ \Delta C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F_k E,$$

где  $F_k$  – неизвестная матрица, удовлетворяющая соотношению

$$(15) \quad F_k^T F_k \leq I,$$

и  $H_1, H_2, E$  – известные матрицы подходящей размерности, показывающие, как элементы матриц  $A$  и  $C$  затрагиваются неопределённостями  $F_k$ .

Пример 1. В качестве иллюстрации приведем следующую линейную дискретную систему:

$$(16) \quad x_{k+1} = (1 + \delta)x_k,$$

$$(17) \quad y_k = x_k,$$



где  $\delta$  – неизвестный параметр, удовлетворяющий  $|\delta| \leq 0,1$ , тогда матрицы робастного фильтра Калмана могут иметь следующий вид:  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = 0$ ,  $E = 0,1$ , и  $F_k$  принимает значения в диапазоне  $-1 \leq F_k \leq 1$ .

Отметим ещё раз достоинство подхода: здесь не требуется знания характеристик случайной последовательности  $F_k$ , достаточно задать максимальное отклонение неопределённых параметров.●

Доказано, что робастный фильтр, гарантирующий ограниченность верхней границы ошибки оценивания, определяется следующими соотношениями:

$$(18) \quad \hat{x}_{k+1} = (A + \Delta A_{ek})\hat{x}_k + K_f[y_k - (C + \Delta C_{ek})\hat{x}_k],$$

где

$$(19) \quad \Delta A_{ek} = \varepsilon_k A S_k E^T (I - \varepsilon E S_k E^T)^{-1} E,$$

$$(20) \quad \Delta C_{ek} = \varepsilon_k C S_k E^T (I - \varepsilon E S_k E^T)^{-1} E,$$

$$(21) \quad K_f = (A Q_k C^T + \frac{1}{\varepsilon_k} H_1 H_2^T) (\frac{1}{\varepsilon_k} H_2 H_2^T + C Q_k C^T)^{-1},$$

и  $S_k = S_k^T > 0$  является решением уравнения Рикатти (22) и удовлетворяет  $Q_k^{-1} = S_k^{-1} - \varepsilon_k E^T E > 0$ .

Указанное уравнение Рикатти имеет следующий вид:

$$(22) \quad S_{k+1} = A Q_k A^T - (A Q_k C^T + \frac{1}{\varepsilon_k} H_1 H_2^T) \cdot \\ \cdot (\frac{1}{\varepsilon_k} H_2 H_2^T + C Q_k C^T)^{-1} (A Q_k C^T + \frac{1}{\varepsilon_k} H_1 H_2^T)^T + \\ + \frac{1}{\varepsilon_k} H_1 H_1^T$$

В уравнениях (18)–(22) параметр  $\varepsilon_k$  должен быть положительным.

Здесь необходимо отметить то обстоятельство, что хотя робастный фильтр Калмана и свободен от необходимости задания матриц ковариации шумов состояния и измерений, однако набор матриц  $H_1, H_2, E$  не является уникальным для каждой задачи,

и, более того, не при всех наборах этих матриц и параметра  $\varepsilon_k$  неравенство  $S_k^{-1} - \varepsilon_k E^T E > 0$  будет выполняться. Тем не менее структура робастного фильтра Калмана хорошо подходит для построения оценки вектора состояния с изменяемой структурой.

Аналогично случаю с наблюдателем переключаемой структуры найденную матрицу усиления  $K_f$  вместе с матрицей усиления обратной связи  $G$  необходимо подставить в исходную систему (5) для проверки её на устойчивость.

#### 4. Пример

В качестве примера рассмотрим линейную дискретную систему с двумя регуляторами:

$$x_{k+1} = Ax_k + B_i u_k,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1,0194 & 0,0199 & 0,0008 \\ -0,0829 & 0,9696 & 0,0821 \\ 0,0154 & 0,0002 & 0,9847 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [-0,0015 \quad -0,1458 \quad 0,0000]^T$$

$$B_2 = [-0,2565 \quad 0,0106 \quad -0,0020]^T.$$

Кроме того будем считать, что информация о системе может приходиться с двух сенсоров:

$$y_k = C_i x_k,$$

$$C_1 = [1 \quad 0 \quad 0],$$

$$C_2 = [0 \quad 0 \quad 1].$$

В данном случае модель поведения – цепь смены состояний, в которой входы и выходы системы переключаются синхронно, т.е. матрицы измерений и управлений взаимосвязаны:  $B_1 - C_1$ ;  $B_2 - C_2$ .

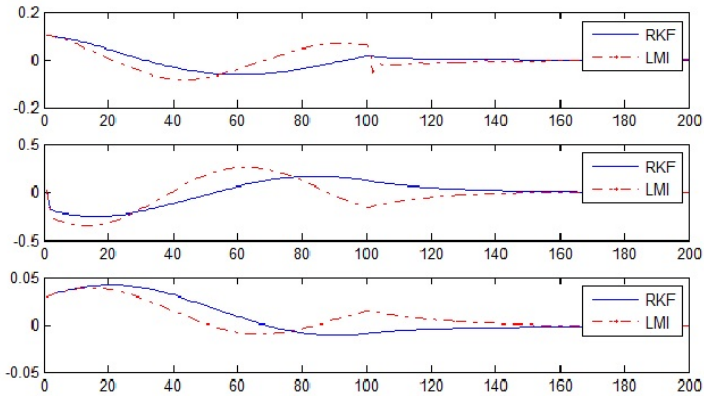


Рис. 2. Переключение по достижении 100 итераций

Рассмотрим два случая. В первом случае  $P_{11} = 0,99$ ,  $P_{12} = 0,01$ ,  $P_{21} = 0,01$ ,  $P_{22} = 0,99$ . Это соответствует тому, что вероятность перехода системы из структурного состояния 1 в 2 мала, с другой стороны, после перехода система с высокой степенью вероятности останется в структурном состоянии 2.

Во втором случае  $P_{11} = 0,5$ ,  $P_{12} = 0,5$ ,  $P_{21} = 0,5$ ,  $P_{22} = 0,5$ , что означает, что переход в другое структурное состояние и сохранение текущего состояния равновероятны.

В результате решения системы (6)–(7) получаем, что в случае редких переключений матрицы усиления обратной связи  $G_1 = G_2 = [-4,5792 \quad -4,3138 \quad -76,1954]$ . В случае равновероятных переключений  $G_1 = G_2 = [-4,2589 \quad -5,9491 \quad -83,3282]$ . Далее наблюдатель строился с использованием двух изложенных подходов.

При построении робастного фильтра Калмана матрицы  $H_1, H_2, E$ , базовую матрицу  $C$  и величину  $\varepsilon$  выберем следующим образом:  $H_1 = 0$ ,  $H_2 = [10 \quad 1]$ ,  $E = 0,005$ ,  $C = [0,5 \quad 0 \quad 0,5]$ ,  $\varepsilon = 1,00$ . При этом была найдена следующая матрица усиления  $K = [0,0162 \quad -0,0108 \quad 0,0116]$ , которая не зависит от структуры переключений состояний.

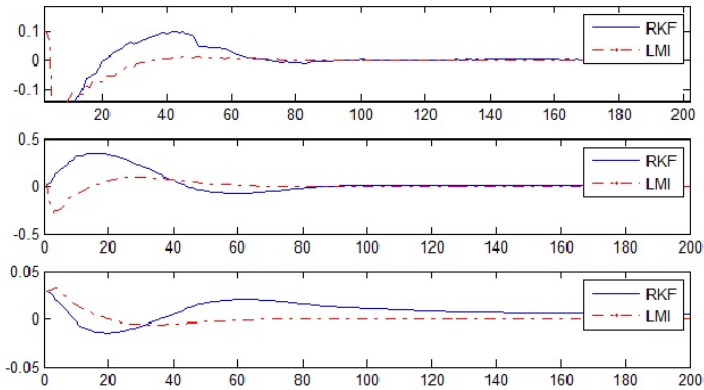


Рис. 3. Случайные переключения между входами

При построении с использованием марковской цепи были найдены следующие решения. Для редких переключений  $K_1 = [1,0199 \ -0,0548 \ 0,0303]$ ,  $K_2 = [2,8744 \ 0,5885 \ 1,0281]$ . Для частых переключений  $K_1 = [1,0200 \ -0,0546 \ 0,0016]$ ,  $K_2 = [0,0146 \ 0,1677 \ 0,9849]$ .

Будем моделировать поведение системы в течение 200 итераций. В первой системе для переключения входов выберем 100-ю итерацию, вторая система может переключиться на каждой итерации.

Анализируя полученные траектории системы (рис. 2 и 3), можно отметить, что оба предложенных алгоритма стабилизировали исходную систему. Таким образом, подтверждается работоспособность обоих методов, однако сложно сказать, какой из методов лучше справился с задачей, так как переходные процессы обладают близкими характеристиками.

### Литература

1. ЖУЧКОВ Р.Н., ПАКШИН П.В. *Стабилизирующее сетевое управление линейными дискретными системами в условиях потери пакетов данных* // Управление большими системами. Вып. 33. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 113–126.
2. ПАКШИН П.В. *Дискретные системы со случайными параметрами и структурой*. – М.: Физматлит, 1994.
3. HOUNKPEVI F.O., YAZ E.E. *Robust minimum variance linear state estimators for multiple sensors with different failure rates* // Automatica. – 2007. – Vol. 43. – P. 1274–1280.
4. JIA WANG, QING-LONG HAN, FUWEN YANG *Robust Dissipative Control for Networked Control Systems with Multiple Packet Dropouts* // Proc. 18th IFAC World Congress. – 2011. – Vol. 18. – P. 78–83.
5. KALMAN R.E. *A new approach to linear filtering and prediction problems* // Journal of Basic Engineering Transactions of the ASME. – 1960. – Vol. 82, No. 1. – P. 35–45.
6. MARYAM MOAYEDI, YUNG K. FOO, YENG C. SO *LQG Control for Networked Control Systems with Random Packet Delays and Dropouts via Multiple Predictive-Input Control Packets* // Proceedings of the 18th IFAC World Congress. – 2011. – Vol. 18. – P. 72–77.
7. XIE L., SOH Y.C., DE SOUZA C.E. *Robust Kalman filtering for uncertain discretetime systems* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1994. – Vol. 39, No. 6. – P. 1310–1314.
8. ZHU X., SOH Y. C., XIE L. *Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters* // Automatica. – 2007. – Vol. 38. – P. 1069–1077.

## STABILIZING NETWORKED CONTROL OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH SENSORS AND ACTUATORS BANKS

**Roman Zhuchkov**, graduate student (roman\_jkv@mail.ru).

*Abstract: We consider a stabilization problem for a networked plant with several banks of sensors and actuators. Banks of sensors and actuators are considered as a system with stochastic structure. We employ technique of linear matrix inequalities to build dynamic feedback control based on system outputs.*

**Keywords:** linear discrete systems, networked stabilizing control, Markov chains, Robust Kalman filter, linear matrix inequalities.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Б. Т. Поляком  
Поступила в редакцию 06.12.2012.  
Опубликована 31.05.2013.*