

УДК 681.5.011 + 519.853.4
ББК 32.965 + 22.18

АТОМНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, ЧАСТЬ 2: МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА¹

Поздяев В. В.²

(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического университета
им. Р. Е. Алексеева, Арзамас)

Рассмотрены многомерные задачи оптимизации с полиномиальной целевой функцией и ограничениями в виде полиномиальных матричных неравенств. Представлена трансформация основанного на теории моментов метода их решения, позволяющая существенно снизить его вычислительную сложность, сохранив способность решать задачи интересующего нас класса.

Ключевые слова: нелинейное программирование, матричные неравенства, полиномиальные неравенства, теория моментов.

Введение

Рассмотрим задачу нахождения глобальных экстремумов полиномиальной целевой функции на множестве, заданном полиномиальными неравенствами (ПН):

$$(1) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_x f(x), \\ g_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-08-31440.

² Владимир Васильевич Поздяев, кандидат физико-математических наук, доцент (vpozdyayev@gmail.com).

или полиномиальными матричными неравенствами (ПМН):

$$(2) \quad \begin{aligned} f^* &= \min f(x), \\ G_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $f(x)$ и $g_i(x)$ — (не обязательно выпуклые) полиномы; $G_i(x)$ — матрицы, элементы которых являются полиномами от x , а знак неравенства в (2) понимается как требование положительной полуопределенности. Далее данные задачи мы будем называть соответственно задачами ПН и ПМН.

В первой части данной статьи [1] рассматривался предназначенный для решения таких задач метод глобальной оптимизации [4, 5, 7], фундамент которого образуют теория разложения полиномов в сумму квадратов и двойственная ей теория моментов. Данный метод позволяет найти все глобальные экстремумы, используя для этого сведение исходной задачи к иерархии систем линейных матричных неравенств (так называемых ЛМН-релаксаций), решение которых представляет существенно меньшую трудность. Тем не менее, применимость данного метода ограничена двумя факторами:

- комбинаторным взрывом количества неизвестных и размера матриц в ЛМН-релаксациях;
- ухудшением обусловленности составляющих ЛМН-релаксации матриц и последующим снижением точности расчетов по мере рассмотрения последовательности ЛМН-релаксаций.

Обе проблемы вызваны тем, что в ЛМН-релаксациях пространством поиска является пространство не переменных исходной задачи, а их моментов соответствующих порядков. Для уменьшения влияния данных проблем на результат авторы метода применяют вспомогательные техники, такие как представление исходной задачи в форме с как можно меньшим количеством неизвестных; уменьшение количества моментов-переменных в ЛМН-релаксациях за счет использования линейных связей между ними

(если постановка задачи содержит зависимости такого рода); масштабирование переменных таким образом, чтобы искомые экстремумы удовлетворяли условию $\|x^*\| \leq 1$.

Существуют иные алгоритмы, основанные на подходе аналогичного вида (построение иерархии аппроксимаций исходной задачи и решение их более или менее стандартными методами). Возникающие при этом структуры в общем случае адаптированы к классу решаемых задач и могут иметь сниженную вычислительную сложность за счет усиления консерватизма аппроксимаций; см., например, сравнение методов решения задач бинарного программирования в [9]. Кроме того, модификация отдельных этапов метода [7] (в первую очередь методики построения аппроксимаций) может позволить решать задачи самого разного вида, в том числе имеющего неочевидное отношение к задачам ПМН (общая структура метода при этом остается неизменной); см., например, [3, 6, 8].

В [1] был предложен альтернативный подход, основанный на исключении из процедуры решения пространства моментов. Это достигается за счет дальнейшей трансформации ЛМН-релаксаций с целью возвращения задачи в (расширенное) исходное пространство поиска. Также была разработана вычислительная схема, позволяющая с минимальными изменениями применить к новой задаче метод внутренней точки в прямой форме, который может использоваться для решения ЛМН-релаксаций. Данные вопросы детально рассматривались для одномерных задач оптимизации в форме ПН.

Данная статья посвящена дальнейшему развитию техники преобразования пространства поиска применительно к многомерным задачам оптимизации и полиномиальным матричным неравенствам. Раздел 1 содержит сведения о базовом методе, относящиеся к такого рода задачам. В разделе 2 приведены результаты из [1], необходимые для дальнейших построений. Основной раздел 3 распространяет данные результаты на задачи ПМН вида, характерного для теории управления. В разделе 4 приведены примеры применения полученных результатов.

1. Базовый метод

Основные положения метода решения задач ПН (1), опубликованного в [7], были изложены в предыдущей части статьи. Приведем необходимые нам в дальнейшем элементы.

Пусть $b_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — вектор, состоящий из одночленов, образующих базис пространства многочленов порядка не выше r :

$$b_r(x) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1^2 & x_1x_2 & \dots \\ \dots & x_1x_n & x_2x_3 & \dots & x_n^2 & \dots & x_1^r & \dots & x_n^r \end{bmatrix}^T,$$

а $s_n(r) = C_{n+r}^r = \frac{(n+r)!}{n!r!}$ — его размерность. Каждому одночлену из $b_r(x)$ поставим в соответствие вектор $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\sum_i \alpha_i \leq r$ (далее будем записывать как $\alpha \leq r$), показателей степеней x_1, x_2, \dots, x_n ; обозначим $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Для произвольного вектора $p \in \mathbb{R}^{s_n(r)}$, ассоциированного с пространством моментов x степени не выше r , будем индексировать его элементы двумя взаимозаменяемыми способами: по номеру элемента и по вектору показателей степеней; порядок элементов будем считать соответствующим структуре $b_r(x)$. Таким образом, $p = [p_i]_{1 \leq i \leq s_n(r)} = [p_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \leq r}$, в том числе $p_1 = p_{[0,0,\dots,0]}$, $p_2 = p_{[1,0,\dots,0]}$ и т. д. Аналогичным образом будем индексировать строки и столбцы матриц там, где это применимо.

Рассмотрим некоторую (неизвестную) меру μ и соответствующий ей вектор моментов y :

$$y = \int b_r(x) d\mu.$$

Пусть $d_i = \lceil \frac{1}{2} \deg g_i(x) \rceil$, а k удовлетворяет ограничениям $2k \geq \deg f(x)$, $k \geq d_i$. Пусть f_α — коэффициенты $f(x)$ в базисе $b_{2k}(x)$, так что

$$\int f(x) d\mu = \int \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha x^\alpha d\mu = \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha.$$

ЛМН-релаксацией (1) будем называть задачу

$$(3) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_y \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha, \\ M_k(y) &\geq 0, \\ M_{k-d_i}(g_i, y) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ y_{[0,0,\dots,0]} &= 1, \end{aligned}$$

где матрица моментов $M_k(y)$ и локализирующие матрицы $M_{k-d_i}(g_i, y)$ конструируются исходя из соотношений

$$(4) \quad M_k(y) = \int b_k(x) b_k(x)^T d\mu,$$

$$(5) \quad M_{k-d}(g, y) = \int b_{k-d}(x) b_{k-d}(x)^T g(x) d\mu.$$

В [7] (теорема 4.2) показано, что, с учетом некоторых непринципиальных ограничений, при $k \rightarrow \infty$ величина экстремума ЛМН-релаксации стремится к величине экстремума исходной задачи ПН. Более того, как правило, уже при конечных (и относительно небольших) значениях k данные величины становятся равны, а вектор моментов решения задачи ПН является решением соответствующей ЛМН-релаксации. Достаточным условием достижения такого значения k является

$$r \equiv \text{rank } M_k(y^*) = \text{rank } M_{k-d}(y^*),$$

где y^* — решение ЛМН-релаксации, а $d = \max_i d_i$. Если оно выполняется, то y^* представляет собой вектор моментов r -атомной меры³, атомы которой x^{*j} , $j = 1, \dots, r$, соответствуют глобальным минимумам (1). Данные атомы могут быть извлечены из y^* путем решения системы полиномиальных уравнений (в которую для r -атомных мер превращается (4)) с помощью алгоритма, представленного в [4].

³ N -атомная мера — мера, носитель которой является множеством из N точек (атомов).

Одним из способов решения задач ПМН (2) является преобразование их к форме ПН с последующим применением описанного метода. Но более эффективным подходом является построение ЛМН-релаксаций непосредственно для исходной матричной формы неравенств способом, описанным в [5]. А именно: вместо (5) будем конструировать локализирующие матрицы, исходя из следующего соотношения:

$$M_{k-d}(G, y) = \int (b_{k-d}(x)b_{k-d}(x)^T) \otimes G(x) d\mu.$$

Например, для $n = 2, k - d = 1$ и

$$G(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 2 \\ 2 & x_2 \end{bmatrix}$$

локализирующая матрица имеет вид

$$M_2(G, y) = \int A d\mu = B,$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} x_1 & 2 & x_1^2 & 2x_1 & x_1x_2 & 2x_2 \\ 2 & x_2 & 2x_1 & x_1x_2 & 2x_2 & x_2^2 \\ \hline x_1^2 & 2x_1 & x_1^3 & 2x_1^2 & x_1^2x_2 & 2x_1x_2 \\ 2x_1 & x_1x_2 & 2x_1^2 & x_1^2x_2 & 2x_1x_2 & x_1x_2^2 \\ \hline x_1x_2 & 2x_2 & x_1^2x_2 & 2x_1x_2 & x_1x_2^2 & 2x_2^2 \\ 2x_2 & x_2^2 & 2x_1x_2 & x_1x_2^2 & 2x_2^2 & x_2^3 \end{array} \right],$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} y_{[1,0]} & 2y_{[0,0]} & y_{[2,0]} & 2y_{[1,0]} & y_{[1,1]} & 2y_{[0,1]} \\ 2y_{[0,0]} & y_{[0,1]} & 2y_{[1,0]} & y_{[1,1]} & 2y_{[0,1]} & y_{[0,2]} \\ \hline y_{[2,0]} & 2y_{[1,0]} & y_{[3,0]} & 2y_{[2,0]} & y_{[2,1]} & 2y_{[1,1]} \\ 2y_{[1,0]} & y_{[1,1]} & 2y_{[2,0]} & y_{[2,1]} & 2y_{[1,1]} & y_{[1,2]} \\ \hline y_{[1,1]} & 2y_{[0,1]} & y_{[2,1]} & 2y_{[1,1]} & y_{[1,2]} & 2y_{[0,2]} \\ 2y_{[0,1]} & y_{[0,2]} & 2y_{[1,1]} & y_{[1,2]} & 2y_{[0,2]} & y_{[0,3]} \end{array} \right].$$

2. Результаты части 1

Результаты, полученные в предыдущей части, были посвящены двум вопросам: определению эквивалентного направления

поиска в методе внутренней точки при трансформации пространства поиска; применению полученного результата к одномерным задачам ПН. Приведем подробности в форме, наиболее подходящей для дальнейших построений.

2.1. ЭКВИВАЛЕНТНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПОИСКА

Пусть задача ПМН

$$(6) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_x f(x), \\ F_i(x) &\geq 0, \\ \nu_x^T x &= 1, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

может быть получена из задачи ЛМН

$$(7) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_y c^T y, \\ \bar{F}_i(y) &\geq 0, \\ \nu_y^T y &= 1, \\ y &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

с помощью замены⁴ (трансформации пространства поиска) $y = y(x)$.

Далее мы будем рассматривать алгоритм решения (7) на основе метода внутренней точки в прямой форме с ньютоновским направлением поиска, представляющий собой серию подзадач минимизации целевых функций вида

$$\bar{f}^{(i)}(y) = c^T y - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \log \det \bar{F}_j(y),$$

где $\{\mu^{(i)}\}$ — монотонно невозрастающая сходящаяся к 0 вещественная последовательность. Каждая подзадача решается на

⁴ Одним из условий результатов [1] было отличие от 0 якобиана $y(x)$ внутри допустимой области. Здесь мы опускаем это условие, поскольку финальные результаты целенаправленно конструируются так, чтобы не содержать упоминаний о данной трансформации.

ограниченном неравенствами $\bar{F}_i(y) \geq 0$ отрезке прямой, проходящей через $y^{(i)}$ и имеющей предписываемое методом Ньютона направление, которое с учетом ограничения в виде равенства имеет вид

$$(8) \quad \Delta y(y^{(i)}) = H_y^- \left(-g_y + \frac{\nu_y^\top H_y^- g_y}{\nu_y^\top H_y^- \nu_y} \nu_y \right),$$

где H_y^- — произвольная⁵ обобщенная обратная к H_y матрица;

$$g_y = \nabla_y \bar{f}^{(i)}(y^{(i)}) = c - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_y \log \det \bar{F}_j(y^{(i)}),$$

$$H_y = \nabla_y^2 \bar{f}^{(i)}(y^{(i)}) = -\mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_y^2 \log \det \bar{F}_j(y^{(i)}),$$

а элементы слагаемых под знаками сумм могут быть найдены как

$$\begin{aligned} (\nabla_y \log \det \bar{F}(y))_i &= \text{tr} \left(\bar{F}^{-1}(y) \left(\frac{d}{dy_i} \bar{F}(y) \right) \right), \\ (\tilde{\nabla}_y^2 \log \det \bar{F}(y))_{ij} &= -\text{tr} \left(\bar{F}^{-1}(y) \left(\frac{d}{dy_i} \bar{F}(y) \right) \right. \\ &\quad \left. \bar{F}^{-1}(y) \left(\frac{d}{dy_j} \bar{F}(y) \right) \right). \end{aligned}$$

Как показано в предыдущей части, такой алгоритм естественным образом переносится в пространство поиска задачи (6). При этом вспомогательные целевые функции имеют вид

$$(9) \quad f^{(i)}(x) = f(x) - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \log \det F_j(x),$$

а направление поиска, эквивалентное в малом направлению (8), равно (см. теоремы 1, 2, 3 в [1] и комментарии к ним)

$$(10) \quad \Delta x(x^{(i)}) = \tilde{H}_x^- \left(-g_x + \frac{\nu_x^\top \tilde{H}_x^- g_x}{\nu_x^\top \tilde{H}_x^- \nu_x} \nu_x \right).$$

⁵ Свободно выбирается из множества обобщенных обратных матриц при первом упоминании. Все дальнейшие вхождения этой матрицы имеют то же значение.

Здесь \tilde{H}_x^- — произвольная обобщенная обратная к \tilde{H}_x матрица, а градиент g_x и модифицированный гессиан \tilde{H}_x находятся по формулам

$$g_x = \nabla_x f^{(i)}(x^{(i)}) = \nabla_x f(x^{(i)}) - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_x \log \det F_j(x^{(i)}),$$

$$\tilde{H}_x = \tilde{\nabla}_x^2 f^{(i)}(x^{(i)}) = -\mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \tilde{\nabla}_x^2 \log \det F_j(x^{(i)}),$$

где $\tilde{\nabla}_x^2 = \nabla_x^2 - \sum_i (\nabla_x^2 y_i) \frac{d}{dy_i}$; слагаемые под знаками сумм могут быть вычислены следующим образом:

$$(11) \quad \begin{aligned} (\nabla_x \log \det F(x))_i &= \text{tr} \left(F^{-1}(x) \left(\frac{d}{dx_i} F(x) \right) \right), \\ (\tilde{\nabla}_x^2 \log \det F(x))_{ij} &= -\text{tr} \left(F^{-1}(x) \left(\frac{d}{dx_i} F(x) \right) \right. \\ &\quad \left. F^{-1}(x) \left(\frac{d}{dx_j} F(x) \right) \right). \end{aligned}$$

Мы видим, что (10) не зависит от вида трансформации $y = y(x)$ и компонентов задачи (7). Более того, даже если не существует линеаризующей трансформации указанного вида⁶, полученный результат сохраняет свою применимость, хотя и теряет теоретические гарантии нахождения глобального минимума итоговым алгоритмом. Особо отметим сохранение при этом важного для метода Ньютона свойства $\tilde{H}_x \geq 0$, а также возможность использования в трансформации задачи (3) значений k и d_i , не ограничиваемых более порядками полиномов исходной задачи ПН/ПМН.

2.2. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Указанные результаты были применены к задачам ПН с $n = 1$. В качестве трансформации пространства поиска был взят переход из пространства атомов в пространство моментов $y = y(z)$.

⁶ Как видно из раздела 1, для задач ПН/ПМН линеаризующая трансформация найдется всегда, но минимально допустимая размерность y при этом может быть больше n . Если же в задаче фигурируют неполномиальные функции, такой трансформации с вектором y конечной размерности может и не быть.

Здесь z — вектор в пространстве атомов $\mathbb{R}^{r \times (n+1)} = \mathbb{R}^{2r}$, имеющий структуру

$$z = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_r]^T,$$

где $x_i \in \mathbb{R}$ — атомы; $p_i \in (0; 1)$ — их веса; вектор моментов y имеет размерность $s_1(2k) + 1 = 2k + 2$ и состоит из элементов вида

$$y_j = y_{[j-1]} = \sum_{i=1}^r p_i x_i^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, 2k + 2.$$

Старший, $(2k + 1)$ -й момент не входит ни в (3), ни в Δy , и нужен исключительно для равенства размерностей y и z , которое обеспечивается дополнительным соотношением $r = k + 1$.

Интерпретируя ЛМН-релаксацию рассматриваемой задачи как форму (7), мы можем записать эквивалентную задачу вида (6) без использования вектора моментов следующим образом:

(12)

$$f^* = \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j),$$

$$F_0(z) = \sum_{j=1}^r p_j (b_k(x_j) b_k(x_j)^T) \geq 0,$$

$$F_i(z) = \sum_{j=1}^r p_j (b_{k-d_i}(x_j) b_{k-d_i}(x_j)^T) g_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\nu_z^T z = \sum_{j=1}^r p_j = 1.$$

Данная форма задачи напрямую подходит для решения модифицированным методом внутренней точки с вычислением эквивалентного ньютоновского направления поиска $\Delta z(z^{(i)})$ по формуле (10).

3. Многомерные задачи

Задачи ПН/ПМН в общем случае являются NP-трудными [2], и предлагаемый способ их трансформации данную проблему не решает. С другой стороны, благодаря смене пространства поиска, вычислительная сложность процедуры решения задачи определяется теперь не столько формальными характеристиками последней, сколько фактической сложностью структуры области поиска и целевой функции. Например, даже если задача заведомо является выпуклой, но имеет относительно большое количество неизвестных и задействует полиномы не слишком малого порядка, оригинальный метод вынужденно столкнется с вышеупомянутым комбинаторным взрывом размера ЛМН-релаксаций. С помощью же новой схемы мы сможем сконструировать алгоритм с единственным атомом, реализующий локальную оптимизацию и требующий существенно меньших вычислительных ресурсов.

Далее мы будем ориентироваться на задачи родом из теории управления, зачастую изначально представляемые в виде ПМН и имеющие невысокий порядок полиномов, не слишком малое количество неизвестных, а также область поиска с относительно несложным характером невыпуклости (см. пример в разделе 4.2)⁷. Последнее условие подразумевает, что невыпуклость как таковая не приводит к наличию большого количества ложных локальных минимумов, сложному рельефу вспомогательных целевых функций и т. п. Таким образом, мы можем рассматривать невыпуклость задачи не как бинарный фактор, вынуждающий нас при его наличии в лучшем случае искать альтернативные формулировки задачи с более приемлемыми количественными характеристиками, а в худшем — смиряться с катастрофическим ростом объема вычислений — как неявную характеристику,

⁷ *Примером задачи с патологическим характером невыпуклости, который мы не рассматриваем, может служить любая задача оптимизации на множестве битовых векторов (такие задачи представимы в виде ПН, поскольку условие $x_i \in \{0; 1\}$ эквивалентно системе $x_i \geq 0$; $x_i \leq 1$; $x_i(x_i - 1) \geq 0$). В этом случае область поиска представляет собой дискретное множество из 2^n точек.*

под которую подбираются параметры алгоритма поиска решения (в первую очередь k и r).

Построим алгоритм поиска экстремума, основанный на описанной выше схеме и удовлетворяющий следующим требованиям:

- 1) он должен быть совместим как с задачами ПН, так и с задачами ПМН;
- 2) он должен избегать эффекта комбинаторного взрыва;
- 3) он должен позволять более тонко контролировать объем вычислений, в частности, выбирать необходимое количество атомов в зависимости от ожидаемого характера невыпуклости задачи и количества локальных экстремумов.

Комбинаторный взрыв является неизбежным результатом повышения порядка ЛМН-релаксации в оригинальном методе, и попытка конструирования эквивалентной трансформированной задачи дала бы в этом случае аналогичный эффект. Поэтому дальнейшие построения основаны на ЛМН-релаксациях с минимальными нетривиальными значениями k и d_i . Такие конфигурации, соответствующие первым двум требованиям, рассмотрены в разделе 3.1.

В разделе 3.2 представлено обобщение вычислительной схемы, позволяющее дополнительно уменьшать количество атомов до любого нужного значения, включая 1 (в соответствии с требованием 3).

Раздел 3.3 описывает способ компенсации консерватизма вычислительной схемы, вызванного отказом от использования ЛМН-релаксаций высоких порядков.

3.1. БАЗОВАЯ КОНФИГУРАЦИЯ

По аналогии с одномерными задачами рассмотрим пространство атомов, состоящее из векторов вида

$$(13) \quad z = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & \dots & x_{rn} & p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & \dots & x_r^T & p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{bmatrix}^T,$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$ — атомы, $p_i \in (0; 1)$ — их веса. Соответствующий вектор моментов имеет вид $y = y(z) = \sum_{i=1}^r p_i b_k(x_i)$.

Подставив $y = y(z)$ в релаксацию (3) задачи (2), получаем аналог (12), отличающийся структурой векторов z (имеющего указанный выше вид), ν_z (который теперь состоит из rn нулей и r единиц), $b_k(x)$, $b_{k-d_i}(x)$, а также матриц $F_i(z)$:

$$F_i(z) = \sum_{j=1}^r p_j (b_{k-d_i}(x_j) b_{k-d_i}(x_j)^T) \otimes G_i(x_j).$$

Базовая версия предлагаемого далее подхода использует минимальное нетривиальное значение $k = 1$ в сочетании с минимально возможным количеством атомов, дающим невырожденную матрицу $F_0(z)$: $r = s_n(k) = n + 1$. Величины d_i при этом могут принимать значения 0 и 1. Определим, какие из данных значений целесообразно использовать. Отметим, что $F_0(z)$ можно формально считать разновидностью $F_i(z)$ с $d_0 = 0$ и $g_0(x) = 1$.

Утверждение 1. Пусть $k = 1$, $r = s_n(k) = n + 1$, и $G(x) \in \mathbb{R}^{l \times l}$. *Определитель матрицы*

$$F(z) = \sum_{i=1}^r p_i (b_{k-d}(x_i) b_{k-d}(x_i)^T) \otimes G(x_i)$$

равен

$$(14) \quad \det F(z) = \left(\prod_{i=1}^r p_i^l \det G(x_i) \right) (\det V)^{2l}$$

при $d = 0$ и

$$\det F(z) = \det \sum_{i=1}^r p_i G(x_i)$$

при $d = 1$. Здесь $V \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r}$ — матрица, i -й столбец которой равен $b_1(x_i)$ (n -мерная матрица Вандермонда порядка 1 для векторов x_i):

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{r1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{rn} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Формула для $d = 1$ следует из $b_0(x) = [1]$. Пусть теперь $d = 0$; $H_i = H_i^T$ — произвольный квадратный корень из $p_i G(x_i)$; $W = W^T = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_r)$; $I_l \in \mathbb{R}^{l \times l}$ — единичная матрица. Тогда

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^r p_i (b_{k-d}(x_i) b_{k-d}(x_i)^T) \otimes G(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^r (b_{k-d}(x_i) \otimes H_i) (b_{k-d}(x_i) \otimes H_i)^T = \\ &= ((V \otimes I_l)W) ((V \otimes I_l)W)^T = \\ &= (V \otimes I_l)(WW^T)(V \otimes I_l)^T, \end{aligned}$$

так что (поскольку $V \otimes I_l$ и WW^T — квадратные матрицы)

$$\begin{aligned} \det F(z) &= \det(WW^T) (\det(V \otimes I_l))^2 = \\ &= (\det \text{diag}(p_1 G(x_1), p_2 G(x_2), \dots, p_r G(x_r))) (\det V)^{2l}, \end{aligned}$$

откуда получаем доказываемую формулу.

Мы видим, что при использовании $d_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, необходимым условием сохранения положительной определенности $F_i(z)$ в процессе решения задачи методом внутренней точки является положительная определенность каждой из матриц $G_i(x_j)$ по отдельности. Данное требование лишает атомы x_j возможности покидать допустимую область — что является одним

из ключевых аспектов алгоритма, особенно при исследовании областей поиска с несколькими компонентами связности. По этой причине использование таких значений d_i представляется нецелесообразным. Далее мы сохраняем $d_0 = 0$, но полагаем все остальные d_i равными 1. Задача (6) тогда приобретает вид

$$\begin{aligned}
 f^* &= \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j), \\
 F_0(z) &= V \operatorname{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r) V^T \geq 0, \\
 (15) \quad F_i(z) &= \sum_{j=1}^r p_j G_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \nu_z^T z &= \sum_{j=1}^r p_j = 1.
 \end{aligned}$$

3.2. РЕДУКЦИЯ

Представленная в предыдущем разделе схема имеет жесткое ограничение на количество атомов: $r = s_n(1) = n + 1$. Между тем, в реальных задачах ПМН данное число может быть довольно велико. Покажем, что выведенные ранее формулы допускают обобщение на случай $r < n + 1$.

Единственным элементом (15), несовместимым с изложенной схемой при $r < n + 1$, является неравенство $F_0(z) \geq 0$ (поскольку матрица $F_0(z)$ в этом случае вырождена). Возвращаясь к интерпретации $\log \det F_0(z)$ как потенциального поля, отталкивающего атомы друг от друга (см. [1], раздел 4), отметим, что при $r = 1$ данное неравенство теряет смысл и его можно исключить. Пусть теперь $r > 1$. Определим воздействие на атомы аналогичного поля, действующего в проходящей через x_1, x_2, \dots, x_r $(r - 1)$ -мерной гиперплоскости \mathbf{X} . Далее будем предполагать, что конфигурация атомов x_1, x_2, \dots, x_r не является вырожденной: они не лежат на гиперплоскости меньшей размерности.

Введем на указанной гиперплоскости ортонормированный базис, и пусть $M_0 \in \mathbb{R}^{n \times (r-1)}$ — матрица, столбцы которой являются элементами данного базиса. Эта матрица задает линейный

оператор, ставящий векторам $x \in \mathbf{X}$ в соответствие их координаты в новом базисе: $\bar{x} = M_0^T x$ (без ограничения общности будем считать началом координат в \mathbf{X} решение системы $M_0^T x = 0$, $x \in \mathbf{X}$). Пусть $\bar{x}_i = M_0^T x_i$, $i = 1, 2, \dots, r$. Обозначим также $W = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r)$, так что $F_0(z)$ из (15) будет иметь вид $F_0(z) = V W V^T$.

Примем в качестве эквивалента $F_0(z)$ на \mathbf{X} матрицу

$$\bar{F}_0(z) = \bar{V} W \bar{V}^T = M_0'^T V W V^T M_0' = M_0'^T F_0(z) M_0',$$

где

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \dots & \bar{x}_{r1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{1,r-1} & \bar{x}_{2,r-1} & \dots & \bar{x}_{r,r-1} \end{bmatrix},$$

$$M_0' = \text{diag}([1], M_0) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det \bar{F}_0(z) &= \det(M_0'^T V) \det(W) \det(V^T M_0') = \\ &= \det(W) \det(V^T M_0' M_0'^T V) = \left(\prod_{i=1}^r p_i \right) \det(V^T P' V), \end{aligned}$$

где $P' = \text{diag}([1], P)$; $P = M_0 M_0^T$ — матрица проекции на пространство столбцов M_0 , которую можно найти, построив M_0 , или же как $P = M(M^T M)^{-1} M^T$, где столбцы $M \in \mathbb{R}^{n \times (r-1)}$ образуют произвольный базис \mathbf{X} : например, $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_r - x_1$. Отметим, что матрицы V , $M_0'^T V$ и $P' V$ имеют полный ранг по столбцам.

Выражение $\det(V^T P' V)$ можно упростить. Для $r = 1$ данный определитель равен 1. Если $r > 1$, пусть

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det(V^T P'V) &= \det(R^T) \det(V^T P'^T P'V) \det(R) = \\ &= \det((P'VR)^T (P'VR)). \end{aligned}$$

Несложно видеть, что Px_1 линейно зависит от $P(x_2 - x_1) = x_2 - x_1, \dots, P(x_r - x_1) = x_r - x_1$, а следовательно, существует такая нижняя треугольная матрица L с единичной диагональю (описывающая вычитание из первого столбца $P'VR$ остальных с соответствующими коэффициентами), что, домножив на нее справа матрицу

$$P'VR = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline Px_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_r - x_1 \end{array} \right],$$

мы получим

$$P'VRL = \text{diag}([1], M),$$

$$M = [x_2 - x_1 \mid x_3 - x_1 \mid \dots \mid x_r - x_1],$$

так что $\det((P'VR)^T (P'VR)) = \det((P'VRL)^T (P'VRL)) = \det(M^T M)$. Финальная форма является грамианом системы векторов $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_r - x_1$, и, таким образом, $\det(V^T P'V)$ представляет собой квадрат $(r - 1)$ -мерного объема параллелепипеда, построенного на данных образующих (что согласуется с (14), поскольку при $r = n + 1$ определитель $\det V$ равен ориентированному объему параллелепипеда с образующими того же вида). Таким образом,

$$(16) \quad \det \bar{F}_0(z) = \left(\prod_{i=1}^r p_i \right) \det(M^T M).$$

Найдем теперь компоненты $\nabla_z \log \det \bar{F}_0(z)$ и $\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_0(z)$. Будем считать \mathbf{X} , M_0 и M константами (так что $\frac{1}{dz} M_0(z) = 0$ и $\frac{1}{dz} M(z) = 0$): это позволит избежать зависимости модифицированного гессиана $\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_0(z)$ от выбора базиса \mathbf{X} (напомним, что данный гессиан определяется не только инвариантной по отношению к базису функцией $\log \det \bar{F}_0(z)$, но и видом самой матрицы $\bar{F}_0(z)$). Мы можем

это сделать, поскольку нашей целью на данном этапе является определение воздействия барьерной функции, индуцированной неравенством $F_0(z) \geq 0$ на \mathbf{X} , на конкретную (текущую) конфигурацию атомов.

Теорема 1. Пусть $P', V, W, F_0(z)$ и $\bar{F}_0(z)$ – матрицы указанного выше вида, $U = (P'V)^{-1}$ – произвольная обобщенная обратная к $P'V$ матрица, и $G(z) = P'U^T W^{-1} U P'$. Тогда

$$\begin{aligned} (\nabla_z \log \det \bar{F}_0(z))_i &= \text{tr} \left(G(z) \left(\frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) \right); \\ (\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_0(z))_{ij} &= -\text{tr} \left(G(z) \left(\frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) G(z) \left(\frac{d}{dz_j} F_0(z) \right) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть M_0 – матрица указанного выше вида. Поскольку $\bar{F}_0(z)$ – невырожденная матрица, существует единственная обратная к ней матрица $\bar{G}(z)$, которая может быть найдена как $\bar{G}(z) = M_0^T U^T W^{-1} U M_0$. Это можно видеть, подставив данное выражение, а также $\bar{F}_0(z) = M_0'^T V W V^T M_0'$, в $\bar{F}_0(z) \bar{G}(z) \bar{F}_0(z)$ и упростив результат с учетом равенств $M_0' M_0'^T = P' = P'^T$ и $(P'V)^{-1} (P'V) = I$ (в силу полноранговости $P'V$ по столбцам). Результатом данных действий является выражение, идентичное $\bar{F}_0(z)$, а следовательно, $\bar{G}(z)$ является обобщенной обратной – и просто обратной – к $\bar{F}_0(z)$.

Согласно (11), имеем:

$$\begin{aligned} (\nabla_z \log \det \bar{F}_0(z))_i &= \\ &= \text{tr} \left(\bar{F}_0^{-1}(z) \left(\frac{d}{dz_i} \bar{F}_0(z) \right) \right) = \\ &= \text{tr} \left(M_0'^T U^T W^{-1} U M_0' M_0'^T \left(\frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) M_0' \right) = \\ &= \text{tr} \left(M_0' M_0'^T U^T W^{-1} U M_0' M_0'^T \left(\frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) \right) = \\ &= \text{tr} \left(P' U^T W^{-1} U P' \left(\frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) \right) = \\ &= \text{tr} \left(G(z) \left(\frac{d}{dz_i} F_0(z) \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогично для $(\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_0(z))_{ij}$.

Таким образом, при $r < n + 1$ задача (15) в основном сохраняет свой вид. Исключением является лишь неравенство $F_0(z) \geq 0$, заменяющееся на $\bar{F}_0(z) \geq 0$; соответствующие ему компоненты барьерной функции, ее градиента и обобщенного гессиана находятся согласно (16) и теореме 1.

3.3. РЕПАТРИАЦИЯ РЕШЕНИЙ

Если порядок релаксации k недостаточно велик, исходный метод [5] находит консервативную нижнюю границу значения экстремума. Наиболее разрушительным проявлением аналогичного эффекта в трансформированной задаче является возможность получения финальной конфигурации атомов, ни один из которых не принадлежит допустимой области.⁸

Чтобы избежать данной проблемы, добавим в трансформированную задачу серию неравенств вида $p_j G_i(x_j) + \lambda I \geq 0$:

$$f^* = \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j),$$

$$\bar{F}_0(z) = M_0'^T V \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r) V^T M_0' \geq 0,$$

$$(17) \quad F_i(z) = \sum_{j=1}^r p_j G_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\bar{F}_{ij}(z) = p_j G_i(x_j) + \lambda I \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$v_z^T z = \sum_{j=1}^r p_j = 1,$$

где $\lambda \geq 0$ — параметр, значение которого изначально выбирается достаточно большим для выполнения неравенств $\bar{F}_{ij}(z^{(0)}) \geq 0$ и далее систематически уменьшается по мере нахождения промежуточных приближений $z^{(i)}$ модифицированным методом внут-

⁸ Например, возможна ситуация, когда в задаче ПН с $m > 1$ часть атомов удовлетворяет только неравенству $g_1(x) \geq 0$, другая часть — только неравенству $g_2(x) \geq 0$ и т. д., так что ни один атом не удовлетворяет всем ограничениям одновременно — но при этом неравенства $F_i(z) = \sum_{j=1}^r p_j g_i(x_j) \geq 0$ выполняются.

ренной точки.⁹

Соответствующие новым неравенствам компоненты барьерной функции $\log \det \bar{F}_{ij}(z)$ вычисляются напрямую; компоненты градиента и модифицированного гессиана — с помощью (11):

(18)

$$\begin{aligned} (\nabla_z \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{x_{jk}} &= p_j \operatorname{tr} \left(\bar{F}_{ij}^{-1}(z) \left(\frac{d}{dx_{jk}} G_i(x_j) \right) \right), \\ (\nabla_z \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{p_j} &= \operatorname{tr} \left(\bar{F}_{ij}^{-1}(z) G_i(x_j) \right), \\ (\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{x_{jk}x_{jl}} &= -p_j^2 \operatorname{tr} \left(\bar{F}_{ij}^{-1}(z) \left(\frac{d}{dx_{jk}} G_i(x_j) \right) \right. \\ &\quad \left. \bar{F}_{ij}^{-1}(z) \left(\frac{d}{dx_{jl}} G_i(x_j) \right) \right), \\ (\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{x_{jk}p_j} &= -p_j \operatorname{tr} \left(\bar{F}_{ij}^{-1}(z) \left(\frac{d}{dx_{jk}} G_i(x_j) \right) \right. \\ &\quad \left. \bar{F}_{ij}^{-1}(z) G_i(x_j) \right), \\ (\tilde{\nabla}_z^2 \log \det \bar{F}_{ij}(z))_{p_j p_j} &= -\operatorname{tr} \left(\bar{F}_{ij}^{-1}(z) G_i(x_j) \bar{F}_{ij}^{-1}(z) G_i(x_j) \right); \end{aligned}$$

здесь x_{jk} и p_j в качестве нижних индексов обозначают элементы градиента и гессиана, соответствующие данным переменным; все неуказанные элементы равны 0. Отметим, что неравенства $\bar{F}_{ij}(z) \geq 0$ добавлены в систему искусственно и не имеют отношения к линейным релаксациям; поэтому использование здесь именно модифицированного гессиана $\tilde{\nabla}_z^2$ обусловлено не столько намерением построить эквивалентную трансформированную задачу, сколько гарантией положительной полуопределенности соответствующей компоненты \tilde{H}_z .

⁹ *Оптимальная стратегия формирования последовательности значений λ является предметом отдельного исследования.*

4. Примеры

4.1. ЗАДАЧА ПН

Рассмотрим задачу, иллюстрирующую работу нового алгоритма с несвязными областями поиска для $m = 1$, $n = 2$:

$$f^* = \min_x f(x) = \min_x (x_2 + 0,1)^2,$$

$$g_1(x) = 1 - 2x_1 - 2(x_2^2 - 1)^2 \geq 0.$$

На рис. 1 показана область поиска $g_1(x) \geq 0$ и отмечены локальные экстремумы $f(x)$ в данной области, из которых нижний является глобальным.

Решим данную задачу, используя конфигурации с $r = 1$, $r = 2$ и $r = 3$. Выберем случайные начальные позиции атомов в окрестности точки $(-0,5; 1)$. Будем делать серию из 15 шагов с $\mu = 1$, а после нее — 5 серий по 5 шагов, уменьшая μ в 4 раза в каждой новой серии. Положим также $\lambda = 1000$ (так что компоненты барьерных функций, соответствующие неравенствам $\bar{F}_{ij}(z) \geq 0$, не будут оказывать заметного влияния на решение).

Для $r = 1$, как и в одномерном случае, действие алгоритма эквивалентно локальному поиску с логарифмическими барьерными функциями и ньютоновским выбором направления с использованием модифицированного гессiana (рис. 2).

Для $r = 2$ и $r = 3$ отдельные атомы получают возможность переходить из одной компоненты связности в другую за счет временного уменьшения веса, позволяющего матрицам $F_i(z)$ оставаться положительно определенными (рис. 3 и рис. 4). Это позволяет одному из атомов найти глобальный минимум; положение остальных атомов впоследствии может стать произвольным, поскольку их веса стремятся к 0.

Дальнейшее увеличение количества атомов в рамках изложенного подхода для данной задачи невозможно, поскольку мы рассматриваем только конфигурации с $r \leq n + 1$.

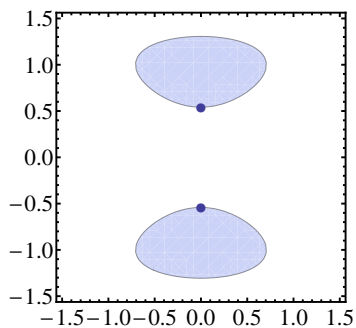


Рис. 1. Область поиска

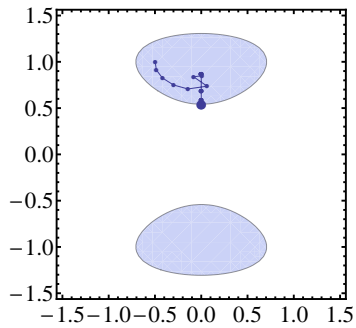


Рис. 2. График x для $r = 1$

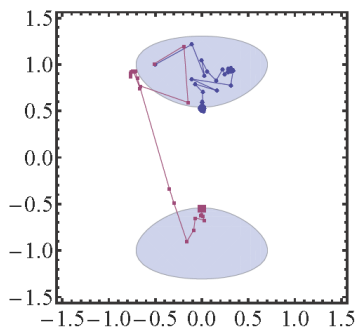


Рис. 3. Графики x и p для $r = 2$

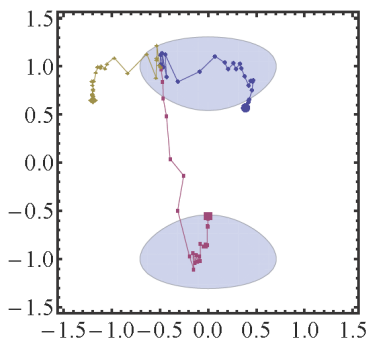


Рис. 4. Графики x и p для $r = 3$

4.2. ЗАДАЧА ПМН

В качестве более реалистичного примера рассмотрим задачу HE1 из библиотеки COMPl_eib [10]: нахождение стабилизирующей обратной связи по выходу $u = Ky$ для системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

где матрицы A , B и C заданы; размерности вектора состояния, управления и выхода равны 4, 2 и 1. Множество решений $K = [k_1 \ k_2]^T$ показано на рис. 5.

Модифицируем задачу с целью ее усложнения:

- с помощью замены переменных применим аффинное преобразование к плоскости K для усиления невыпуклости множества решений (что эквивалентно соответствующему изменению матриц A , B и C);
- дополнительно потребуем минимизации $k_1^2 + k_2^2$; начальные приближения в алгоритме будем генерировать в окрестности допустимой точки, близкой к ложному экстремуму.

Новое множество решений $K = [k_1 \ k_2]^T$ показано на рис. 6. Также на графике отмечены локальные экстремумы целевой функции с учетом ограничений. Правый экстремум является глобальным.

В отличие от [5], где данная задача также рассматривалась (в исходной постановке), мы можем напрямую воспользоваться ее представлением в форме ПМН: $(A + BKC)^T P + P(A + BKC) < 0$, где $K \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ и $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $P = P^T > 0$, — неизвестные матрицы. Добавив в систему ограничения на неизвестные величины, приходим к следующей задаче ПМН с 12 скалярными неизвестными и 4 неравенствами (левая часть каждого — матрица 4×4),

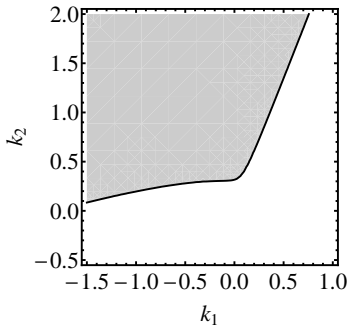


Рис. 5. Решения исходной задачи

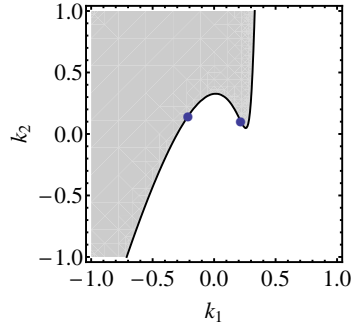


Рис. 6. Решения измененной задачи

из которых одно является билинейным:

$$f^* = \min_{P, K} k_1^2 + k_2^2,$$

$$G_1(P, K) = -(A + BK_0C)^T P - P(A + BK_0C) > 0,$$

$$G_2(P, K) = P - 10^{-2}I > 0,$$

$$G_3(P, K) = 10^2I - P > 0,$$

$$G_4(P, K) = \text{diag}(1 + k_1, 1 - k_1, 1 + k_2, 1 - k_2) > 0.$$

Начальные приближения будем формировать из $K_0 = [-0,9; 0]^T$ и случайных P_0 , находящихся в окрестности решения уравнения $(A + BK_0C)^T P + P(A + BK_0C) = -I$. Воспользуемся последовательностью значений μ , аналогичной предыдущему примеру, но через каждые 5 итераций будем делать вспомогательную короткую серию шагов, уменьшая на ней по мере возможности величину λ . Начальное значение последней — $\lambda = 10$; в процессе работы алгоритма оно уменьшается до величины порядка 10^{-3} .

Результаты для $r = 1$, $r = 2$ и $r = 3$ приведены на рис. 7, 8 и 9:

- при $r = 1$ алгоритм находит ближайший локальный экстремум;
- при $r = 2$ результат, как правило, тот же. Дополнительный атом теряет вес раньше, чем обнаружит правильный экстре-

мум, после чего его траектория становится малопредсказуемой;

- при $r = 3$ алгоритм достаточно стабильно локализует оба экстремума. Атом в глобальном экстремуме быстро набирает вес, вследствие чего точность нахождения последнего выше, чем точность нахождения ложного минимума.

Таким образом, атомная оптимизация позволяет получать адекватные результаты при решении практических задач с использованием относительно небольших конфигураций атомов.

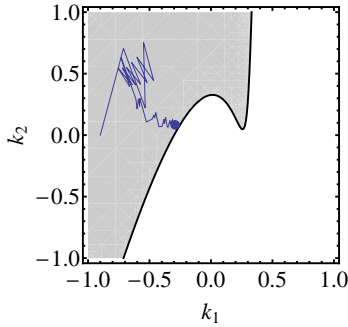


Рис. 7. График K для $r = 1$

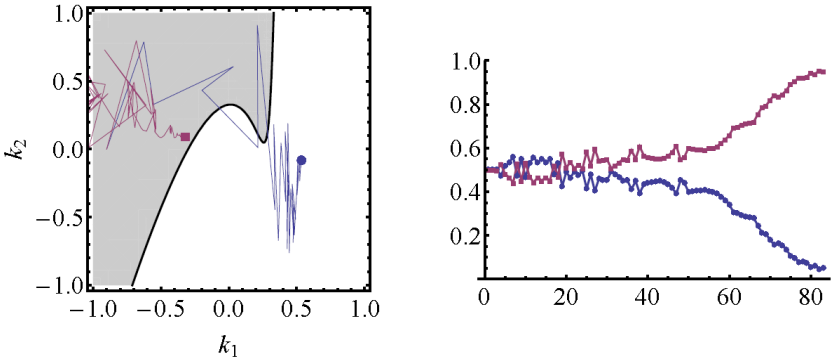


Рис. 8. Графики K и p для $r = 2$

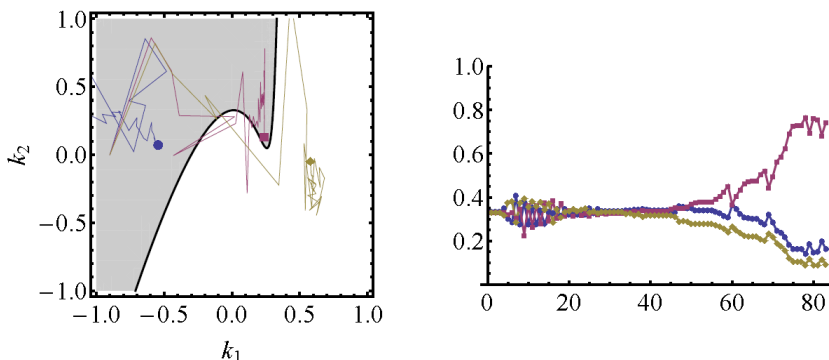


Рис. 9. Графики K и p для $r = 3$

5. Заключение

Мы рассмотрели применение техники атомной оптимизации к невыпуклым задачам на базе полиномиальных матричных неравенств и продемонстрировали следующие ее характеристики.

- Полиномиальная зависимость размера трансформированной задачи от размера исходной задачи ПМ/ПМН и количества атомов позволяет новому алгоритму иметь в целом существенно более низкую вычислительную сложность по сравнению с оригинальным алгоритмом на базе метода моментов за счет отказа от максимально полного исследования области поиска.
- В задачах ПМН интересующего нас вида (охарактеризованного в разделе 3) она позволяет получать адекватный результат при использовании конфигураций атомов относительно небольшого размера. Кроме того, ее одноатомный вариант может использоваться в задачах локальной оптимизации.
- Отметим также, что полученная вычислительная схема применима без изменений в том числе и к задачам, содержащим неполиномиальные функции и неравенства (при

выполнении некоторых базовых требований: в первую очередь, их дифференцируемости и гладкости).

Дальнейшие потенциально перспективные направления исследований включают: поиск оптимального представления и реализации изложенной вычислительной схемы; отработка полученных алгоритмов на существенно нелинейных и невыпуклых задачах теории управления; построение аналогичных вычислительных схем на базе более сложных методов внутренней точки.

Литература

1. ПОЗДЯЕВ В.В. *Атомная оптимизация, часть 1: трансформация пространства поиска и одномерные задачи* // Управление большими системами. – 2011. – №36. – С. 39–80.
2. BLONDEL V., TSITSIKLIS J. *NP-hardness of some linear control design problems* // SIAM J. on Control and Optimization. – 1997. – Vol. 35, №6. – P. 2118–2127.
3. GALEANI S., HENRION D., JACQUEMARD A., ZACCARIAN L. *Design of Marx generators as a structured eigenvalue assignment*: LAAS-CNRS Research Report. – 2013. – URL: <http://homepages.laas.fr/henrion/Papers/marx.pdf> (дата обращения: 15.05.13).
4. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Detecting global optimality and extracting solutions in GloptiPoly* // Positive polynomials in control. – 2005. – P. 1–18.
5. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback* // IEEE Trans. Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, №2. – P. 192–202.
6. KORDA M., HENRION D., JONES C.N. *Inner approximations of the region of attraction for polynomial dynamical systems*: LAAS-CNRS Research Report. – 2012. – URL: <http://homepages.laas.fr/henrion/Papers/roainner.pdf> (дата обращения: 01.12.12).

7. LASSERRE J.-B. *Global optimization with polynomials and the problem of moments* // SIAM J. on Optimization. – 2001. – Vol. 11, №3. – P. 796–817.
8. LASSERRE J.-B. *A new look at nonnegativity on closed sets and polynomial optimization* // SIAM J. on Optimization. – 2011. – Vol. 21. – P. 864–885.
9. LAURENT M. *A comparison of the Sherali-Adams, Lovász-Schrijver and Lasserre relaxations for 0-1 programming* // Mathematics of Operations Research. – 2001. – Vol. 28. – P. 470–496.
10. LEIBFRITZ F. *COMPl_eib: COntstraint Matrix-optimization Problem library – a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems*. – 2004. – URL: <http://www.compleib.de/> (дата обращения: 01.12.12).

**ATOMIC OPTIMIZATION, PART 2:
MULTIDIMENSIONAL PROBLEMS AND
POLYNOMIAL MATRIX INEQUALITIES**

Vladimir Pozdyayev, Arzamas Polytechnical Institute of
R. E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University,
Arzamas, Cand.Sc., associate professor (vpozdyayev@gmail.com).

Abstract: We investigate multidimensional optimization problems with polynomial objective function and polynomial matrix inequality constraints and suggest a transformation of the moment-theory-based solution technique. It allows reducing significantly the computational complexity while keeping the ability to solve the problems of the class under consideration.

Keywords: nonlinear programming, matrix inequalities, polynomial inequalities, moment theory.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П. С. Щербаковым
Поступила в редакцию 09.01.2013.
Опубликована 31.05.2013.*