

УДК 519.177+519.217.2+517.977.1
ББК 22.18

ОБ АСИМПТОТИКЕ В МОДЕЛЯХ КОНСЕНСУСА¹

Чеботарев П. Ю.², Агаев Р. П.³

(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РАН, Москва)

Показано, что предельный вектор состояния в дифференциальной модели консенсуса с произвольным орграфом коммуникаций выражается произведением собственного проектора лапласовской матрицы модели на вектор начального состояния. Указанный собственный проектор совпадает со стохастической матрицей максимальных исходящих лесов взвешенного орграфа коммуникаций. Эти утверждения составляют теорему о лесах и консенсусе. Аналогичный результат для дискретной модели Де Гроота в общем случае включает предел по Чезаро. Теорема о лесах и консенсусе полезна при анализе моделей децентрализованного управления многоагентными системами.

Ключевые слова: консенсус, собственный проектор, исходящий лес, теорема о лесах и консенсусе, модель Де Гроота.

¹ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 13-07-00990 и Программы № 14 ОЭММПУ РАН.

² Павел Юрьевич Чеботарев, д.ф.-м.н., в.н.с. (pavel4e@gmail.com, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-88-69).

³ Рафиг Паашаевич Агаев, д.ф.-м.н., с.н.с. (agaraf@rambler.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-88-69).

1. Введение

Рассмотрим дифференциальную модель поиска консенсуса в многоагентной системе [8, 22]:

$$(1) \quad \dot{x}_i(t) = u_i(t),$$

$$(2) \quad u_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $x_i(t)$ – состояние i -го агента, $a_{ij} \geq 0$ – вес, с которым он учитывает расхождение по состоянию с j -м агентом. Перепишем модель (1)–(2) в матричной форме:

$$(3) \quad \dot{x}(t) = -Lx(t),$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, L – лапласовская матрица модели (1)–(2), определяемая соотношением

$$(4) \quad L = \text{diag}(A\mathbf{1}) - A,$$

$A = (a_{ij})_{n \times n}$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$, $\text{diag}(v)$ – диагональная матрица с вектором v на диагонали.

Несимметричные лапласовские матрицы – класс матриц, к которому относится матрица L в модели (3), – изучались, в частности, в [1, 4, 13].

В настоящей работе получена *теорема о лесном представлении консенсуса* (более кратко, *теорема о лесах и консенсусе*), устанавливающая, что для любой неотрицательной матрицы A и любой траектории $x(t)$ модели (1)–(2) имеет место

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{J}x(0),$$

где \tilde{J} – собственный проектор матрицы L , совпадающий с матрицей максимальных исходящих лесов \bar{J} орграфа коммуникаций, соответствующего A .

Аналогичный результат, где, однако, обычный предел заменен пределом по Чезаро, имеет место для дискретного аналога модели (1)–(2), совпадающего с известной моделью Де Гроота.

Теорема о лесах и консенсусе обобщает известное выражение [20, теорема 3.12]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (v_l^T x(0)) \mathbf{1},$$

выполняющееся при $\text{rank } L = n - 1$ или, эквивалентно, когда орграф коммуникаций имеет остовное исходящее дерево. В этом выражении v_l – единственный левый собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению L и такой, что $v_l^T \mathbf{1} = 1$.

План статьи. Введя необходимые понятия и обсудив предварительные результаты, в разделе 3 мы доказываем теорему о лесах и консенсусе. Раздел 4 посвящен свойствам предельного состояния модели. В разделе 5 полученные результаты проиллюстрированы на примере; в разделе 6 из теоремы о лесах и консенсусе выведен классический «критерий наличия исходящего дерева». Наконец, в разделе 7 представлена теорема о лесах и консенсусе для дискретного аналога модели (1)–(2), совпадающего с моделью Де Гроота.

2. Основные понятия и предварительные результаты

2.1. СОБСТВЕННЫЕ ПРОЕКТОРЫ И ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – любая квадратная матрица, $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ – соответственно образ (линейная оболочка множества столбцов) и ядро (подпространство в \mathbb{C}^n , отображаемое в нуль) матрицы A . Пусть $\nu = \text{ind } A$ – индекс A , т.е. наименьшее $k \in \{0, 1, \dots\}$, при котором $\text{rank } A^{k+1} = \text{rank } A^k$. Индекс матрицы есть индекс ее собственного значения 0, то есть кратность нуля как корня

ее минимального многочлена (см. [7, § 5 главы 4]), или размер наибольшей жордановой клетки с нулевой диагональю в ее жордановой форме. Невырожденность A равносильна $\nu = 0$, т.к. в определении индекса матрица A^0 отождествляется с единичной матрицей I даже если все элементы A – нулевые. Если $\nu = 1$, то алгебраическая и геометрическая кратности 0 равны (в этом случае собственное значение 0 называют *полупростым*).

Собственным проектором [24] матрицы A , соответствующим собственному значению 0, называют⁴ такой проектор Z (т.е. идемпотентную матрицу: $Z^2 = Z$), что $\mathcal{R}(Z) = \mathcal{N}(A^\nu)$ и $\mathcal{N}(Z) = \mathcal{R}(A^\nu)$. Иными словами, Z есть проектор на $\mathcal{N}(A^\nu)$ вдоль $\mathcal{R}(A^\nu)$, откуда $A^\nu Z = ZA^\nu = 0$. В случае вырожденной матрицы A , следуя [25], будем называть Z *собственным проектором матрицы A* (без упоминания собственного значения 0). Собственный проектор единствен, поскольку идемпотентная матрица однозначно определяется своим образом и ядром (см., например, [11, разделы 2.4 и 2.6]).

Пример 1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{жорданова форма имеет вид}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{поэтому } \nu = \text{ind } A = 3. \quad \text{Для нахождения}$$

собственного проектора Z матрицы A воспользуемся характери-

⁴Такой собственный проектор называют также главным идемпотентом [15].

зацией (к) в [3]: при любом целом $u \geq \nu$

$$(5) \quad Z = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} (I + \alpha A^u)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $Z^2 = Z$; $ZA^3 = A^3Z = 0$. В [3] представлены и другие методы нахождения собственного проектора.

•

Собственные проекторы используются для разложения матрицы на *компоненты*, что позволяет определять $f(A)$ для дифференцируемых функций $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (см. например, [7, глава 5], [11, раздел 2.5], [16, 17]), в теории обобщенно-обратных матриц, а также во многих приложениях матричного анализа.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – все *различные* собственные значения A , а ν_k – индекс λ_k , определяемый как индекс матрицы $A - \lambda_k I$. Согласно теории компонент матрицы [7, глава 5] для любой функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, имеющей конечные производные $f^{(j)}(\lambda_k)$ порядков $j = 0, \dots, \nu_k - 1$ в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, $f(A)$ определяется следующим образом:

$$(6) \quad f(A) := \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{\nu_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj},$$

где под производной порядка 0 понимают значение функции, а Z_{kj} – *компоненты* A , определяемые выражением

$$(7) \quad Z_{kj} = (j!)^{-1} (A - \lambda_k I)^j Z_{k0}.$$

Здесь компонента Z_{k0} есть собственный проектор матрицы $A - \lambda_k I$ ($k = 1, \dots, s$); его называют также *собственным проектором A , соответствующим собственному значению λ_k* .

Из (6) и (7) следует

$$(8) \quad f(A) = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=0}^{\nu_k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_k)}{j!} (A - \lambda_k I)^j \right) Z_{k0}.$$

Пример 2. С помощью теории компонент матрицы найдем $f(A) = e^A$ для матрицы A из примера 1. Имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Индексы собственных значений: $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 1$. Согласно (6)–(7) (9) $e^A = Z_{10} + Z_{11} + Z_{12} + e \cdot Z_{20} = (I + A + \frac{1}{2}A^2)Z + e \cdot Z_{20}$. Аналогично (5) вычисляем

$$(10) \quad Z_{20} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (I + \alpha(A - I))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подстановка A , (5) и (10) в (9) приводит к результату:

$$(11) \quad e^A = \begin{pmatrix} 1,5 & e & 0,5 - e & 0,5 - e \\ -2,5 & 2 - 2e & -3,5 + 2e & 0,5 + 2e \\ -1,5 & 1 - 2e & -1,5 + 2e & -0,5 + 2e \\ -1 & 1 - e & -2 + e & 1 + e \end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить, представив матричную экспоненту рядом Тейлора: $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. •

Ряд свойств собственных проекторов рассмотрен в [3, 5].

2.2. МАТРИЦА МАКСИМАЛЬНЫХ ИСХОДЯЩИХ ЛЕСОВ

Матрица $A = (a_{ij})$ модели (1)–(2) задает взвешенный орграф коммуникаций Γ с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$: Γ содержит дугу (j, i) с весом $w_{ji} = a_{ij}$, когда $a_{ij} > 0$ (т.е. когда агент j влияет на агента i). Таким образом, в Γ дуги проводятся в направлении влияния; вес дуги характеризует степень влияния.

Исходящее дерево – такой слабо связный (что означает связность индуцированного ненаправленного графа) орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет полустепень захода 0, а полустепени захода других вершин равны 1. *Исходящий лес* – это орграф, у которого все слабые компоненты (т.е., максимальные слабо связные подграфы) – исходящие деревья. Корни этих деревьев формируют множество *корней* исходящего леса.

Остовный подграф орграфа Γ – это ориентированный подграф Γ , содержащий все вершины Γ . *Остовный исходящий лес* F орграфа Γ называют *максимальным исходящим лесом* Γ , если Γ не имеет исходящих лесов с бóльшим числом дуг, чем в F . *Размерность Γ по исходящим лесам* (далее, кратко, *лесная размерность* Γ) – это число компонент в любом максимальном исходящем лесу Γ . *Вес* взвешенного орграфа есть произведение весов его дуг. *Матрица $\bar{J} = (\bar{J}_{ij})$ максимальных исходящих лесов* взвешенного орграфа Γ определяется формулой

$$(12) \quad \bar{J}_{ij} = \frac{f_{ij}}{f}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где f – суммарный вес всех максимальных исходящих лесов Γ , f_{ij} – суммарный вес тех максимальных исходящих лесов, в которых i принадлежит дереву, исходящему из j .

При выводе основных результатов статьи существенную роль играет соотношение свойств матриц L и \bar{J} . Прежде чем сформулировать эти свойства, рассмотрим простой пример.

Пример 3. Для орграфа коммуникаций Γ (рис. 1) максимальные исходящие леса показаны на рис. 2. Каждый из них состоит из двух деревьев; их корни – вершины 1 и 2; в трех лесах одно из деревьев не имеет дуг; лесная размерность Γ равна 2.

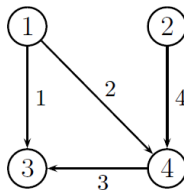
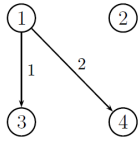
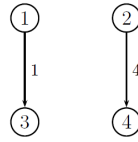


Рис. 1. Взвешенный оргграф коммуникаций Γ в примере 3.

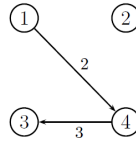
В Γ суммарный вес максимальных исходящих лесов $f = 24$.



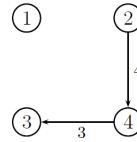
Лес 1; вес = 2.



Лес 2; вес = 4.



Лес 3; вес = 6.



Лес 4; вес = 12.

Рис. 2. Максимальные исходящие леса орграфа Γ .

Выпишем матрицы (f_{ij}) и \bar{J} :

$$(13) \quad (f_{ij}) = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 0 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так, $f_{31} = 12$, поскольку суммарный вес максимальных исходящих лесов, в которых вершина 3 принадлежит дереву, исходящему из 1 (это леса 1, 2 и 3), равен $2 + 4 + 6 = 12$.

Отметим, что лапласовская матрица (4) модели (1)–(2), соответствующей Γ , равна

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (I + \alpha L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $\text{ind } L = 1$, таким образом (см. (5)), собственный проектор L совпадает с \bar{J} . Из приводимого ниже предложения 1 следует, что это справедливо и в общем случае. •

В следующем предложении перечислим основные свойства L и \bar{J} [5, 8, 12], используемые при анализе моделей децентрализованного управления.

Предложение 1. Пусть L – лапласовская матрица модели (1)–(2), \bar{J} – матрица максимальных исходящих лесов соответствующего орграфа Γ , имеющего лесную размерность d . Тогда:

- 1) L – вырожденная (поскольку $L\mathbf{1} = 0$);
- 2) Если $\lambda \neq 0$ – собственное значение L , то $\text{Re}(\lambda) > 0$ [2, предложение 9];
- 3) $\text{ind } L = 1$ [13, предложение 12];
- 4) $\text{rank } L = n - d$; $\text{rank } \bar{J} = \text{tr } \bar{J} = d$ [1, предложение 11];
- 5) \bar{J} – стохастическая матрица, поскольку $\sum_{j=1}^n f_{ij} = f$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$;
- 6) \bar{J} – собственный проектор для L [13, предложение 12], откуда $\bar{J}^2 = \bar{J}$;
- 7) $L\bar{J} = \bar{J}L = 0$ [1, теорема 5]; $\mathcal{N}(\bar{J}) = \mathcal{R}(L)$, $\mathcal{R}(\bar{J}) = \mathcal{N}(L)$ (в силу пунктов 3 и 6);
- 8) $\bar{J} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (I + \alpha L)^{-1}$ [1, теорема 6];
- 9) $\bar{J} = C(0)/h(0)$, где⁵ $C(\lambda)$ – результат деления матричного многочлена $\lambda h(\lambda)I$ на бином $\lambda I - L$, $\lambda h(\lambda)$ – минимальный многочлен для L (следует из [7, (23) в главе 5]);
- 10) $\bar{J} = \bar{J}_{n-d}$, где \bar{J}_{n-d} определяется рекурсивно: $\bar{J}_k = I - k \frac{L \bar{J}_{k-1}}{\text{tr}(L \bar{J}_{k-1})}$, $k = 1, \dots, n - d$, $\bar{J}_0 = I$ и $L \bar{J}_{n-d} = 0$ ([2, раздел 4] или [13, раздел 5]).

Поэлементная характеристика \bar{J} дана в [1, теорема 2']; спектр L изучался в [4].

Пример 4. Получение матрицы $\tilde{J} = \bar{J}$ предельным переходом (п. 8 предложения 1) не всегда удобно. Для системы из примера 3 вычислим \bar{J} с помощью п. 10 предложения 1. Находим:

$$\bar{J}_1 = I - \frac{L}{\text{tr } L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & 0,4 \end{pmatrix},$$

⁵ В некоторых случаях более удобно для вычислений выражение, полученное в [3, теорема 1].

$$\bar{J}_2 = I - 2 \frac{L \bar{J}_1}{\text{tr}(L \bar{J}_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и поскольку $L \bar{J}_2 = 0$, имеем $\bar{J} = \bar{J}_2$ и $d = 2$. •

3. Теорема о лесах и консенсусе

В этом разделе докажем основной результат статьи.

Теорема 1. Пусть $x(t)$ – решение системы (3). Тогда

$$(14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{J} x(0),$$

где \tilde{J} – собственный проектор матрицы L , совпадающий с матрицей максимальных исходящих лесов \bar{J} орграфа коммуникаций.

Доказательство. Все решения (3) удовлетворяют тождеству [7, формула (43) главы 5]

$$(15) \quad x(t) = e^{-Lt} x(0).$$

Пусть $f(A) = e^{-At}$. В силу (6)

$$(16) \quad e^{-Lt} = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{\nu_k-1} (-t)^j e^{-\lambda_k t} Z_{kj},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – все различные собственные значения L , а Z_{kj} – компоненты L . Поскольку L – вырожденная, полагаем $\lambda_1 = 0$. Тогда Z_{1j} – компоненты L , отвечающие нулевому собственному значению.

Пользуясь тем, что компоненты Z_{kj} не зависят от t , и тем, что в силу п. 2 предложения 1 $\text{Re}(\lambda_k) > 0$ при $k \geq 2$, имеем

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^s \sum_{j=0}^{\nu_k-1} (-t)^j e^{-\lambda_k t} Z_{kj} = 0.$$

Согласно п. 3 предложения 1 $\nu_1 = \text{ind } L = 1$, и в силу п. 6 того же предложения Z_{10} (собственный проектор L , обозначаемый

через \tilde{J}) совпадает с матрицей максимальных исходящих лесов \bar{J} взвешенного орграфа коммуникаций Γ . Поэтому

$$(18) \quad \sum_{j=0}^{\nu_1-1} (-t)^j e^{-\lambda_1 t} Z_{1j} = (-t)^0 e^0 Z_{10} = \tilde{J} = \bar{J}.$$

Подставив (16)–(18) в (15), получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Lt} x(0) = \tilde{J} x(0) = \bar{J} x(0). \quad \square$$

Пример 5. Применив теорему 1 к системе, рассмотренной в примере 3, находим асимптотическое состояние $x(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$:

$$x(\infty) = \bar{J} x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \frac{1}{2}x_1(0) + \frac{1}{2}x_2(0) \\ \frac{1}{3}x_1(0) + \frac{2}{3}x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Это асимптотическое состояние является консенсусом тогда и только тогда, когда $x_1(0) = x_2(0)$. Более содержательный пример будет рассмотрен в разделе 5. •

4. Свойства предельного состояния системы

Напомним, что базовой бикомпонентой орграфа Γ называют такой максимальный (по включению) сильно связный подграф Γ , в который не входят дуги извне. Согласно [1, предложение 6] число базовых бикомпонент в Γ равно d , т.е. лесной размерности орграфа Γ .

Пусть $x(\infty)$ – предельный вектор состояния модели (1)–(2): $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

Следствие 1 из теоремы 1. Пусть K – базовая бикомпонента Γ , i – вершина Γ , j – вершина K . Имеет место:

- 1) Если i – вершина K или i достижима (по направленному пути) из K и недостижима из других базовых бикомпонент Γ , то $x_i(\infty) = x_j(\infty)$ и $x_i(\infty)$ равно значению консенсуса для системы с орграфом коммуникаций K ;
- 2) Если i достижима из нескольких базовых бикомпонент Γ , то $x_i(\infty)$ лежит между минимальным и максимальным элементами $x(\infty)$, соответствующими этим базовым бикомпонентам (и лежит строго между ними, если эти максимум и минимум отличаются);
- 3) Если i не принадлежит никакой базовой бикомпоненте Γ , то $x(\infty)$ не зависит от $x_i(0)$.

Следствие 1 легко доказывается с использованием строчной стохастичности матрицы \bar{J} и двух простых утверждений, вытекающих из теоремы 2' в [1]: (а) $\bar{J}_{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда j принадлежит базовой бикомпоненте Γ и i достижима из j ; (б) если i и j лежат в одной и той же базовой бикомпоненте Γ , то i -я и j -я строки \bar{J} совпадают, а i -й и j -й столбцы пропорциональны.

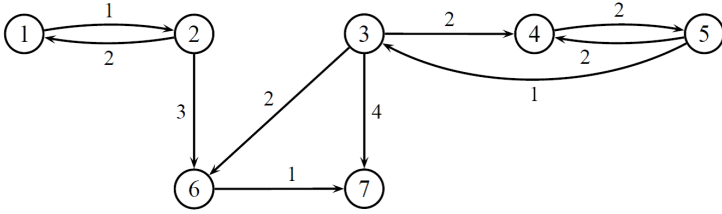
Применив сдвиг по времени и используя п. 7 предложения 1, получаем⁶

Следствие 2 из теоремы 1. Пусть $x(t)$ – решение (3). Тогда $\forall t \in \mathbb{R} \bar{J}x(t) = x(\infty)$ и $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \bar{J} \cdot (x(t_1) - x(t_2)) = 0$, т.е. $(x(t_1) - x(t_2)) \in \mathcal{N}(\bar{J}) = \mathcal{R}(L)$.

5. Пример

Рассмотрим взвешенный орграф коммуникаций Γ , показанный на рис. 3. Он имеет две базовые бикомпоненты с множествами вершин $\{1, 2\}$ и $\{3, 4, 5\}$.

⁶ Здесь используется тот же подход, что при выводе уравнения, расположенного между (16) и (17) в [10].

Рис. 3. Взвешенный орграф коммуникаций Γ .

Запишем лапласовскую матрицу (4) модели (1)–(2), соответствующей⁷ орграфу Γ :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Спектр L – чисто действительный: $(0, 0, 2, 3, 5, 5, 5)$, что не всегда так для лапласовской матрицы взвешенного орграфа. Заметим, что L не диагонализуема, т.к. геометрическая кратность собственного значения 5 равна 1. Минимальный многочлен L :

$$\lambda h(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 5)^3.$$

Для нахождения $\tilde{J} = \bar{J} = Z_{10}$ воспользуемся на сей раз пунктом 9 предложения 1:

$$(19) \quad Z_{10} = \frac{C(0)}{h(0)},$$

⁷См. раздел 2.2.

где $h(0) = (-2)(-3)(-5)^3 = -750$, а $C(0)$ находится с помощью формул (55), (56) в [7, глава 4]: $\Psi(0, \mu) = (\mu - 2)(\mu - 3)(\mu - 5)^3$ и

$$(20) \quad C(0) = \Psi(0 \cdot I, L) = (L - 2I)(L - 3I)(L - 5I)^3.$$

Подставив $C(0)$ и $h(0)$ в (19), получаем

$$(21) \quad \tilde{J} = \frac{1}{750} \begin{pmatrix} 250 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 250 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 150 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 150 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 150 & 300 & 0 & 0 \\ 150 & 300 & 120 & 60 & 120 & 0 & 0 \\ 30 & 60 & 264 & 132 & 264 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица \bar{J} может быть найдена и с использованием п. 10 предложения 1. Как и в случае вычислений с помощью (20), это требует четырех операций умножения матриц (плюс одна контрольная), однако не требует знания ненулевых собственных значений L или ее минимального многочлена. Прямое перечисление максимальных исходящих лесов не является эффективным способом нахождения \bar{J} . Отметим, что для данного примера множество максимальных исходящих лесов состоит из 32 элементов, суммарный вес которых равен $f = 750$. Согласно определению (12) это число есть общий знаменатель элементов матрицы $\bar{J} = (\bar{J}_{ij})$. Числитель элемента \bar{J}_{ij} равен суммарному весу f_{ij} максимальных исходящих лесов, в которых вершина i принадлежит дереву, исходящему из j . Например, для \bar{J}_{65} имеется восемь таких лесов; веса их равны 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32 и 32. Таким образом $f_{65} = 120$ и $\bar{J}_{65} = \frac{120}{750}$ – в согласии с (21).

С помощью предложения 9 из [1] множество всех максимальных исходящих лесов орграфа Γ может быть перечислено следующим образом: 1) в каждой базовой бикомпоненте Γ выбираем произвольное остовное исходящее дерево; 2) выбираем

произвольный максимальный исходящий лес в орграфе, полученном из Γ удалением всех дуг, принадлежащих базовым бикомпонентам; 3) объединяя выбранные деревья и лес, получаем максимальный исходящий лес орграфа Γ ; каждый максимальный исходящий лес в Γ может быть получен таким способом. Более подробный алгоритм построения максимальных исходящих лесов представлен в [1, раздел 5].

Пусть $x(0) = (1 \ 10 \ 5 \ 7 \ 9 \ * \ *)^T$. Здесь последние компоненты, соответствующие «небазовым» вершинам, оставлены «свободными»: согласно следствию 1 они не влияют на предельное состояние. Используя теорему 1 и выражение (21), получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{J}x(0) = (7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7)^T,$$

т.е. достигается асимптотический консенсус. При другом векторе начального состояния, $x(0) = (0 \ 6 \ 3 \ 9 \ 10 \ * \ *)^T$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{J}x(0) = (4 \ 4 \ 7 \ 7 \ 7 \ 5,2 \ 6,64)^T,$$

и асимптотический консенсус достигается только внутри базовых бикомпонент с множествами вершин $\{1, 2\}$ и $\{3, 4, 5\}$, но не для всего множества агентов.

Итак, любая многоагентная система, удовлетворяющая (1)–(2), имеет свою *область сходимости к консенсусу*, т.е. множество таких начальных состояний $x(0)$, что произведение $\tilde{J}x(0)$ дает вектор с равными компонентами. Характеризация этой области (очевидно, она является подпространством) дана в [5], где также показано, что если $x(0)$ не принадлежит данной области, то, тем не менее, существует некий осмысленный «квази-консенсус». Он получается проектированием $x(0)$ на область сходимости системы и последующим применением протокола (1)–(2). Для вектора начального состояния $x(0) = (0 \ 6 \ 3 \ 9 \ 10 \ * \ *)^T$, рассмотренного выше, значение такого «квази-консенсуса» равно 5,82.

6. Об орграфах лесной размерности 1

Предположим, что орграф коммуникаций Γ имеет остовное исходящее дерево, т.е. лесная размерность Γ равна 1. В этом (и только в этом) случае согласно пункту 4 предложения 1 имеет место $\text{rank } \bar{J} = 1$, и в силу п. 5 предложения 1

$$(22) \quad \bar{J} = \mathbf{1}v_l^T,$$

где v_l^T – любая строка \bar{J} и $v_l^T \mathbf{1} = 1$. Согласно пунктам 7 и 4 предложения 1 $\text{span}(v_l)$ и $\text{span}(\mathbf{1})$ совпадают соответственно с левым и правым нуль-пространствами L . Таким образом, частным случаем теоремы 1 является следующее известное необходимое и достаточное условие достижения консенсуса.

Следствие 3 из теоремы 1. *Если орграф Γ модели (1)–(2) имеет остовное исходящее дерево, то для любого вектора начального состояния $x(0)$ состояние $x(t)$ сходится к консенсусу*

$$(23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (v_l^T x(0)) \mathbf{1},$$

где v_l – единственный элемент левого нуль-пространства L такой, что $v_l^T \mathbf{1} = 1$. Обратно, если для любого вектора начального состояния $x(0)$ состояние $x(t)$ сходится к консенсусу, то Γ имеет остовное исходящее дерево.

Для более частного случая, когда орграф Γ сильно связан, представление, подобное (23), было получено в [22, теорема 3]: $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Lt} = v_r v_l^T$, где v_l и v_r – соответственно левый и правый собственные векторы L , соответствующие собственному значению 0 и удовлетворяющие условию $v_l^T v_r = 1$. Перед теоремой 1 авторы [22] отмечают, что v_r можно заменить на $\mathbf{1}$.

Следствие 3 совпадает с [20, теорема 3.12] (см. также [20, предложение 3.11] и [23, лемма 1.3]). Случай орграфа коммуникаций Γ , содержащего остовное исходящее дерево, был недавно рассмотрен в [10], где лемма 3 представляет собой аналог (23).

Однако множитель $1/\sqrt{n}$ в [10, формула (18)], появляющийся из-за неточности в доказательстве, ошибочен.

Наконец, заметим, что теорема III.8 в [26] также может быть выведена из теоремы 1.

7. Теорема о лесах и консенсусе для модели Де Гроота

Рассмотрим дискретизацию модели (3):

$$(24) \quad \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} = -Lx(t),$$

где $\tau \in \mathbb{R}$ – достаточно малый параметр. Пусть $y(k) = x(k\tau)$, $k = 0, 1, \dots$ – вектор состояния системы с дискретной динамикой, задаваемой уравнением (24). Тогда

$$(25) \quad y(k) = (I - \tau L)y(k - 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Положив

$$(26) \quad P := I - \tau L$$

и заметив, что при

$$(27) \quad 0 < \tau \leq \left(\max_i \sum_{j \neq i} a_{ij} \right)^{-1}$$

матрица P – стохастическая [1, раздел 8], получаем итерационную модель Де Гроота [14]:

$$(28) \quad y(k) = P y(k - 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Матрицу (26) иногда называют *матрицей Перрона с параметром τ* взвешенного орграфа Γ . Нетрудно заметить, что P – линейная часть степенного разложения функции $e^{-\tau L}$.

Сравним асимптотические свойства модели (3) и ее дискретного аналога (28). Согласно (28)

$$(29) \quad y(k) = P^k y(0), \quad k = 0, 1, \dots$$

Необходимое и достаточное условие сходимости $\{P^k\}$ при выполнении (27) – аперiodичность матрицы P . С другой стороны,

предел по Чезаро

$$(30) \quad P^\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P^i$$

существует для любой стохастической матрицы P и совпадает с $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$, если последний предел существует. В противном случае, если P периодична с периодом s , то $P^\infty = s^{-1}(P^{(1)} + \dots + P^{(s)})$, где $P^{(1)}, \dots, P^{(s)}$ – пределы сходящихся подпоследовательностей $\{P^k\}$: $P^{(i)} = \lim_{j \rightarrow \infty} P^{js+i}$, $i = 1, \dots, s$.

Аналог теоремы 1 для модели Де Гроота (28) легко выводится из известных результатов о цепях Маркова. Для удобства сравнения с теоремой 1 представим его в следующем виде.

Теорема 2. Пусть последовательность $y(k)$ задается (28), где P удовлетворяет (26)–(27). Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y(i) = \tilde{J} y(0),$$

где \tilde{J} – собственный проектор L , совпадающий с матрицей \bar{J} максимальных исходящих лесов орграфа коммуникаций Γ , соответствующего L . Далее, если (27) выполнено строго, то

$$(31) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \tilde{J} y(0).$$

Доказательство. Майер [21] и Ротблум [24] показали, что P^∞ – собственный проектор матрицы $I - P$. Следовательно, в силу (26) и определения собственного проектора, $P^\infty = \tilde{J}$. Применяя предел по Чезаро к (29) и используя (30) и п. 6 предложения 1, получаем первое утверждение теоремы 2.

Иное его доказательство использует тождество $P^\infty = \bar{J}$, совпадающее с так называемой *матричной теоремой о деревьях для цепей Маркова*, впервые полученной в [6] и переоткрытой в [19, 18]. Из этого тождества первое утверждение теоремы 2 выводится уже указанным способом.

Наконец, если (27) выполняется строго, то P имеет строго положительную диагональ. В этом случае, согласно теореме Гершгорина, P не имеет собственных значений, по модулю равных единице, кроме 1. Следовательно, P не периодическая и $\{P^k\}$ сходится, что влечет (31). \square

Очевидно, единственное существенное отличие теоремы 2 от теоремы 1 – использование предела по Чезаро в случае периодической стохастической матрицы P . Точно так же, с помощью предела по Чезаро, легко может быть сформулирован дискретный аналог следствия 3 из раздела 6.

Для вычисления матрицы $\tilde{J} = \bar{J}$ можно использовать пункты 8–10 предложения 1, конструктивные характеристики (h), (j) или (l) в [3, раздел 2] или же предложение 2 в [9]. Некоторые из этих методов применялись в приведенных выше примерах.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 15–43.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Остовные леса орграфа и их применение* // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 3. – С. 108–133.
3. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *О нахождении собственного проектора и компонент матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 10. – С. 3–12.
4. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Лапласовские спектры орграфов и их приложения* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 47–62.
5. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней сто-*

- частической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – С. 38–59.
6. ВЕНТЦЕЛЬ А.Д., ФРЕЙДЛИН М.И. *О малых случайных возмущениях динамических систем* // Успехи математических наук. – 1970. – Т. 25. – С. 3–55.
 7. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц* (5-е изд.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 559 с.
 8. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., АГАЕВ Р.П. *Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 3. – С. 136–151.
 9. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., АГАЕВ Р.П. *Уточнение к статье «О нахождении собственного проектора и компонент матрицы»* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 3. – С. 173.
 10. AMELIN K., AMELINA N., GRANICHIN O., GRANICHINA O. *Multi-agent stochastic systems with switched topology and noise* // 13th ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking and Parallel/Distributed Computing (SNPD). Kyoto, Japan: IEEE. – 2012. – P. 438–443.
 11. BEN-ISRAEL A., GREVILLE T.N.E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. – 2nd ed. New York: Springer, 2003.
 12. CHEBOTAREV P. *Comments on «Consensus and cooperation in networked multi-agent systems»* // Proceedings of the IEEE. – 2010. – Vol. 98, № 7. – P. 1353–1354.
 13. CHEBOTAREV P., AGAEV R. *Forest matrices around the Laplacian matrix* // Linear Algebra and its Applications. – 2002. – Vol. 356. – P. 253–274.
 14. DeGROOT M.H. *Reaching a consensus* // Journal of the

- American Statistical Association. – 1974. – Vol. 69, № 345. – P. 118–121.
15. HARTWIG R.E. *More on the Souriau-Frame algorithm and the Drazin inverse* // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1976. – Vol. 31. – P. 42–46.
 16. HIGHAM N.J. *Functions of Matrices: Theory and Computation*, 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2008. – 425 p.
 17. LANCASTER P., TISMENETSKY M. *The Theory of Matrices*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1985. – 1984 p.
 18. LEIGHTON T., RIVEST R.L. *Estimating a probability using finite memory* // Foundations of Computation Theory. Berlin-Heidelberg: Springer. – 1983. – Vol. 158/1983. – P. 255–269.
 19. LEIGHTON T., RIVEST R.L. *The Markov chain tree theorem* // Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass., Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249. 1983.
 20. MESHBAHI M., EGERSTEDT M. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2010. – 424 p.
 21. MEYER C.D., Jr., *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains* // SIAM Review. – 1975. – Vol. 17, № 3. – P. 443–464.
 22. OLFATI-SABER R., MURRAY R.M. *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2004. – Vol. 49, № 9. – P. 1520–1533.
 23. REN W., CAO Y., *Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues*. London: Springer, 2011. – 307 p.
 24. ROTHBLUM U.G. *Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius* // Stochastic

- Systems: Modeling, Identification and Optimization II, ser. Mathematical Programming Study, R.J.-B. Wets, ed. Amsterdam: North-Holland. – 1976. – Vol. 6. – P. 188–201.
25. ROTHBLUM U.G. *A representation of the Drazin inverse and characterizations of the index* // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1976. – Vol. 31, № 4. – P. 646–648.
26. TAYLOR C.N., BEARD R.W., HUMPHERYS J. *Dynamic input consensus using integrators* // Proceedings of the 2011 American Control Conference (ACC 2011), San Francisco, CA. 2011. – P. 3357–3362.

ON THE ASYMPTOTICS OF CONSENSUS PROTOCOLS

Pavel Chebotarev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, leading researcher (pavel4e@gmail.com, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, (495)334-88-69).

Rafiq Agaev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, senior researcher (agaraf@rambler.ru, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, (495)334-88-69).

Abstract: It is shown that the limiting state vector of the differential consensus seeking model with an arbitrary communication digraph is obtained by multiplying the eigenprojection of the Laplacian matrix of the model by the vector of the initial state. Furthermore, the eigenprojection coincides with the matrix of maximum out-forests of the weighted communication digraph. These statements make the forest consensus theorem. A similar result for DeGroot's iterative pooling model involves the Cesàro limit in the general case. The forest consensus theorem is useful for the analysis of distributed control models.

Keywords: Consensus, eigenprojection, spanning rooted forest, forest consensus theorem, DeGroot's iterative pooling.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили
Поступила в редакцию 08.02.2013.
Опубликована 31.05.2013.*