

УДК 519.6+004.4

ББК 22.19

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ<sup>1</sup>**

**Лемперт А. А.<sup>2</sup>, Казаков А. Л.<sup>3</sup>, Бухаров Д. С.<sup>4</sup>**

*(ФГБУН Институт динамики систем  
и теории управления СО РАН, Иркутск)*

*В работе исследуется задача о размещении логистических объектов с сегментацией логистических зон в случае, когда объекты могут располагаться в любой точке рассматриваемой области (непрерывная постановка). Для данной задачи строится математическая модель в виде задачи вариационного исчисления, предложен численный метод построения решения на основе оптико-геометрического подхода, решены задачи оптимизации городской инфраструктуры.*

Ключевые слова: вариационное исчисление, региональная логистика, оптимизация, численные методы.

### **1. Введение**

К наиболее известным оптимизационным задачам логистики, сохраняющим актуальность до настоящего времени, относятся задачи об оптимальном маршруте, об оптимальном раз-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты № 12-07-13116\_офи\_м\_РЖД, №12-07-33045\_мол\_а\_вед, №11-07-00245, №12-07-31080\_мол\_а.

<sup>2</sup> Анна Ананьевна Лемперт, кандидат физико-математических наук, (lempert@icc.ru, тел. (3952) 45-30-30).

<sup>3</sup> Александр Леонидович Казаков, доктор физико-математических наук, доцент (kazakov@icc.ru).

<sup>4</sup> Дмитрий Сергеевич Бухаров, программист (bukharovds@gmail.com).

мещении объектов инфраструктуры, об идентификации и сегментации логистических зон, об организации средств коммуникаций и ряд других [8, 10]. При решении задачи размещения логистических объектов возникает проблема разбиения множества логистических центров на подмножества, обеспечивающие наибольшую близость выделенных объектов друг другу, причем для каждого подмножества требуется определить оптимальное расположение обслуживающего центра. Как правило, задачи данного класса решаются поэтапно, либо размещение производится на множестве фиксированных допустимых мест расположения, что сказывается на точности получаемого решения. В результате возникает необходимость совмещения аппарата сегментации с методами размещения.

Особо можно выделить задачу оценки эффективности расположения различного рода логистических объектов. Потребность в такой оценке возникает, например, для активно развивающегося населенного пункта или некоторого района, инфраструктура которого, обеспечивавшая несколько лет назад нормальное функционирование, становится малоэффективной, что приводит к необходимости оценки текущего состояния объекта и выработки рекомендаций по его модернизации.

В настоящей работе исследуется задача о размещении логистических объектов с одновременной сегментацией логистических зон в случае, когда логистические объекты могут располагаться в любой точке рассматриваемой области (непрерывная постановка). При этом предполагается, что в точках расположения потребителей число последних, вообще говоря, различно.

## 2. Модель

Пусть в некоторой ограниченной области  $D \subseteq R^2$  с кусочно-гладкой границей заданы точки  $B_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в каждой из которых, в отличие от [5], располагается не один, а  $N_i$  потребителей. Пусть также определена кусочно-непрерывная функция  $v(M) > 0$ , характеризующая в точке  $M(x, y)$  мгновенную скорость движения потребителя, которая зависит от рельефа местности,

качества дорожного покрытия, сезонности и т.п. Кроме того, имеются  $1 < m < n$  логистических центров (торговых точек, складов), расположение которых заранее неизвестно  $A_k(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Тогда для любой точки  $M(x, y) \in D$  минимальное время движения из  $M$  в  $B_i$  вычисляется по формуле

$$(1) \quad T_i(M) = \min_{\Gamma_i(M)} \int_{\Gamma_i(M)} \frac{d\Gamma_i}{v(x, y)},$$

где  $\Gamma_i(M) \in G$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $G$  – множество всевозможных маршрутов, соединяющих заданные точки.

Требуется найти оптимальные расположения логистических центров  $(x_k^*, y_k^*)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , и разбиение множества потребителей на  $m$  подмножеств, определив номера  $I_k = \{i_{k1}, \dots, i_{ks}\}$  потребителей, обслуживаемых логистическим центром  $A_k(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , таким образом, чтобы суммарное время его достижения всеми потребителями было минимально возможным, т.е.

$$(2) \quad \sum_{k=1}^m \sum_{i \in I_k} N_i T_i(x_k, y_k) \rightarrow \min.$$

Параметрами минимизации являются координаты логистических центров  $x_k, y_k$  и состав подмножеств потребителей  $I_k$ . Поставленная логистическая задача является задачей отыскания глобального минимума для непрерывной функции многих переменных (2), вид которой, в свою очередь, определяется при решении серий задач минимизации интегрального функционала (1).

### 3. О методе исследования

Для исследования модели применяется подход, основанный на аналогии между геометрической оптикой и отысканием глобального экстремума интегрального функционала. Оптико-геометрическая составляющая похода восходит к И. Бернулли и базируется на фундаментальных вариационных принципах механики [1, 2]: Ферма (движение луча света по маршруту, доставляющему минимум по времени) и Гюйгенса (порождение

вторичных источников света и построение волновых фронтов) [5]. В работах [6, 7, 9] подобный подход применялся при решении задач управления подвижными объектами в условиях фазовых ограничений на конечном промежутке времени, а также исследовались различные особенности построения волновых фронтов.

В качестве источника светового возбуждения примем некоторую точку на заданной области. Оптическая среда характеризуется множеством точек, в которых определено значение коэффициента проницаемости среды  $c(x, y)$ , изменяющее скорость прохождения светового луча  $v(x, y) = 1/c(x, y)$ . Из источника по всем направлениям оптической среды распространяется свет, через малый интервал времени  $\varepsilon$  строится «элементарный» сферический фронт света. Множество точек, достигнутое светом, образует многообразие вторичных источников. Процесс распространения света из каждой точки полученного многообразия повторяется, и на каждом шаге  $\Delta t = \varepsilon$  строится огибающая всех источников линия. Таким образом формируются фронты световой волны.

Так как световой луч, движущийся в оптической среде, описывает некоторый маршрут, то его можно построить геометрически. Нетрудно показать, что определяемый таким образом маршрут дает минимум по времени.

На основе изложенного подхода авторами ранее разработаны методы размещения логистических объектов с одновременной сегментацией логистических зон в предположении, что в каждой точке расположено равное число потребителей [3, 4] и предложены методы последовательного улучшения с мультистартом (МПУМ) и последовательного улучшения с выделением активной зоны (МПУАЗ), предназначенные для решения указанной выше задачи при небольшом и значительном числе размещаемых логистических центров соответственно.

В данном исследовании предполагается, что в местах расположения потребителей (жилые объекты) количество жителей, вообще говоря, различно. Эту задачу можно назвать «задачей о

размещении логистических объектов в непрерывной постановке с весами».

Такая постановка приводит к модификации методов МПУМ и МПУАЗ, в которых волна из каждого источника, соответствующего  $i$ -му месту расположения потребителей, распространяется с различной скоростью  $v_i(x, y) = v(x, y)/N_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $N_i$  – численность населения в  $i$ -м жилом объекте.

#### **4. Оценка эффективности расположения аптечных пунктов и отделений Сбербанка в городе Саянск**

Проведем исследование на примере города Саянск (Россия, Иркутская область). На рис. 1 представлена схема города, белые области характеризуют собой непроходимые барьеры (здания, заборы, заболоченности, автостоянки, овраги) для населения. Задача исследуется в непрерывной постановке, так как в данном городе практически отсутствуют ограничения на маршруты передвижения населения. Поскольку перепад высот в городе незначителен и не оказывает влияния на выбор маршрута движения, не теряя общности рассмотрения можно принять  $v(x, y) = 1$ .



*Рис. 1. Схема города Саянск*

В качестве исходных данных используются 126 неравномерно заселенных жилых зданий. Значительная часть из них имеет много подъездов и не является точечным объектом, поэтому некоторые здания разделены на отдельные части. В результате разделения получено 165 жилых объектов, которые и будут являться первичными источниками возбуждения.

При определении оптимального месторасположения логистических центров (аптечных пунктов, отделений банка) предполагается, что они могут быть размещены как в существующих зданиях, так и в специально построенных павильонах.

Ниже представлена оценка эффективности размещения аптечных пунктов города и отделений Сбербанка. Для этого была произведена сегментация территории города на «зоны обслуживания» каждым исследуемым объектом. Каждый сегмент является территорией «наибольшего тяготения» к соответствующему логистическому объекту. Коэффициенты неравномерности нагрузки по населению в каждой зоне вычисляются по формуле

$$k_j = \frac{Q_j}{\min\{Q_1, \dots, Q_m\}},$$

где  $Q_j$  – численность населения в «зоне обслуживания»  $j$ -ого объекта,  $j = 1, \dots, m$ ;  $m$  – количество исследуемых объектов.

#### *4.1. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ОТДЕЛЕНИЙ СБЕРБАНКА*

На рис. 2 представлен спутниковый снимок города Саянск. На рисунке отмечено настоящее расположение отделений Сбербанка.

На рис. 3 представлены результаты сегментации логистических зон при настоящем расположении отделений Сбербанка, звездочками отмечено их расположение, цифрами зашифрованы следующие физические адреса: «1» – микрорайон Октябрьский, д. 1; «2» – микрорайон Центральный, д. 5; «3» – микрорайон Центральный, д. 2а; «4» – микрорайон Олимпийский, д. 7; «5» – микрорайон Ленинградский, д. 12.



*Рис. 2. Настоящее расположение отделений Сбербанка*

На рис. 4 представлена сегментация города при оптимальном расположении отделений Сбербанка (отмечено звездочками), цифры – условные номера отделений. Оптимальное расположение отделений найдено методом последовательного улучшения с использованием мультистарта (МПУМ), который позволяет построить соответствующее решение за 300 000 итераций, выявив 135 возможных решений и затратив на вычисление  $\approx 2$  часа. Использование метода МПУМ определяется небольшим числом размещаемых объектов.

В таблице 1 представлена общая численность населения, находящегося в наибольшей близости к соответствующему отделению Сбербанка. Номера отделений в таблице соответствуют номерам, представленным на рис. 5.8, 5.10 (результаты сегментации).

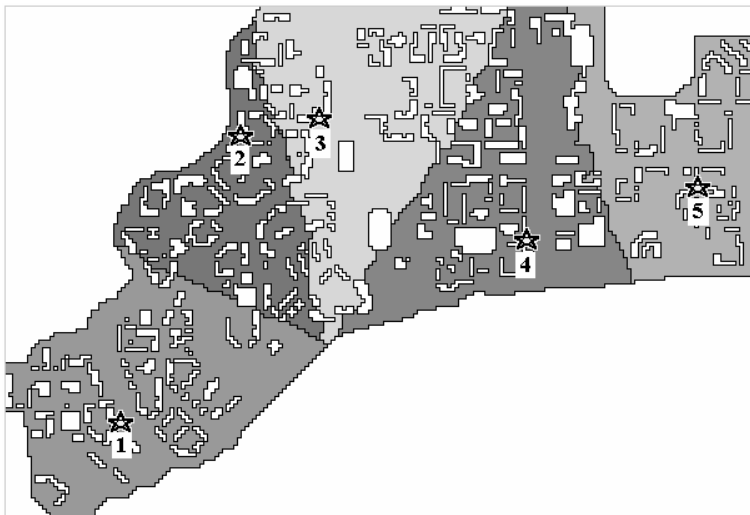


Рис. 3. Области наибольшей близости к отделению банка при настоящем расположении

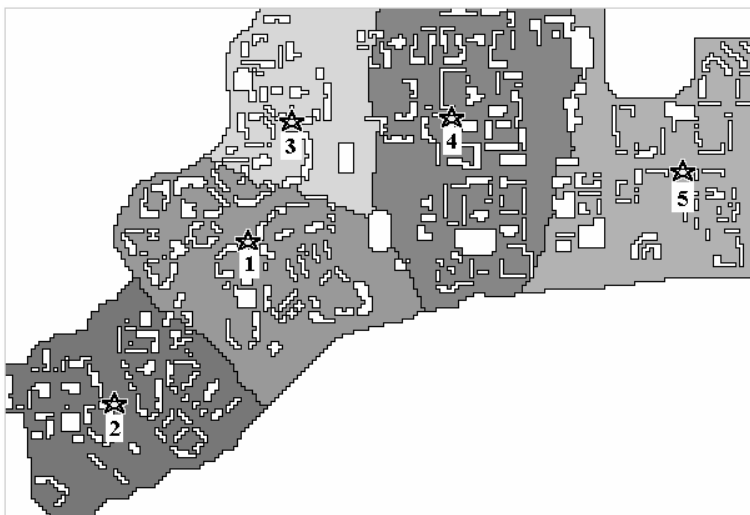


Рис. 4. Области наибольшей близости к отделению банка при оптимальном расположении



Таблица 1. Распределение населения по выделенным областям (банк)

№ отделения	Население настоящее (человек)	$k_j$	Население оптимальное (человек)	$k_j$
1	9553	1,47	8123	1,46
2	6600	1,01	8387	1,51
3	10655	1,64	5560	1,00
4	6514	1,00	10742	1,93
5	6848	1,05	7358	1,32

Как видно из таблицы 1, при настоящем расположении отделений банка обеспечивается достаточно высокая равномерность по количеству обслуживаемого населения. При этом суммарное минимальное время, затрачиваемое на преодоление расстояния между жилым зданием и соответствующим близлежащим отделением, составляет  $\approx 8895,2$  условных единиц времени. При оптимальном расположении данное значение  $\approx 7355,8$ , улучшение составляет  $\approx 17,31\%$ . Результаты расчетов позволяют высказать предположение, что при открытии отделений Сбербанка проводилось планирование, в результате чего настоящее расположение близко к найденному оптимальному размещению.

#### 4.2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ АПТЕЧНЫХ ПУНКТОВ

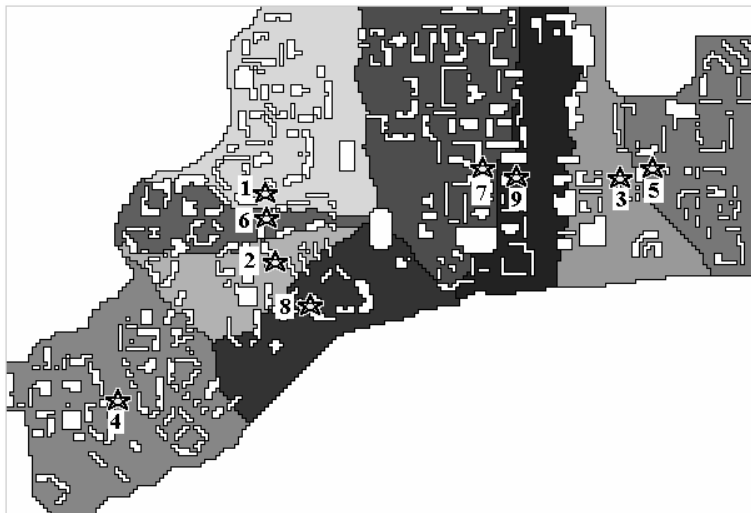
На рис. 5 представлено настоящее расположение аптечных пунктов. Как видно из рисунка, аптеки расположены неравномерно, так как места их расположения зависят, во-первых, от индивидуальных предпочтений владельцев (восемь из девяти аптек являются частными организациями), во-вторых, большая часть аптек располагается на центральной улице города, т.е. в месте наибольшего сосредоточения населения.

Данное расположение аптек создает основную трудность для жителей – необходимость преодоления значительного расстояния от места проживания до аптеки в период заболевания.



Рис. 5. Настоящее расположение аптек

На рис. 6 представлены результаты сегментации логистических зон при настоящем расположении аптек, звездочками отмечено их расположение, цифрами зашифрованы следующие физические адреса: «1» – «ВИТА», микрорайон Центральный, д. 2; «2» – «Эко-хим», микрорайон Юбилейный, д. 25; «3» – «Эко-хим», микрорайон Ленинградский, д. 1; «4» – «Эко-хим», микрорайон Октябрьский, д. 1; «5» – «Селеста», микрорайон Ленинградский, д. 2; «6» – «Селеста», микрорайон Юбилейный, д. 27; «7» – Центральная городская аптека №243, микрорайон Строителей, д. 15; «8» – «36 и 6», микрорайон Юбилейный, д. 38; «9» – «Эскулап», микрорайон Олимпийский, д. 10.



*Рис. 6. Области наибольшей близости к аптеке при настоящем расположении*

На рис. 7 представлена сегментация города при оптимальном расположении аптек (отмечено звездочками), цифры – условные номера аптек. Оптимальное расположение аптек найдено методом МПУМ. При выполнении расчетов произведено 300 000 итераций вычисления и выявлено 862 возможных решения, наилучшее из которых представлено на рис. 7.

В таблице 2 представлена общая численность населения, находящегося в наибольшей близости к соответствующему аптечному пункту. Номера аптек в таблице соответствуют номерам, представленным на рис. 6 и 7 (результаты сегментации). Полученные результаты вычислений соотносятся с реальными данными.

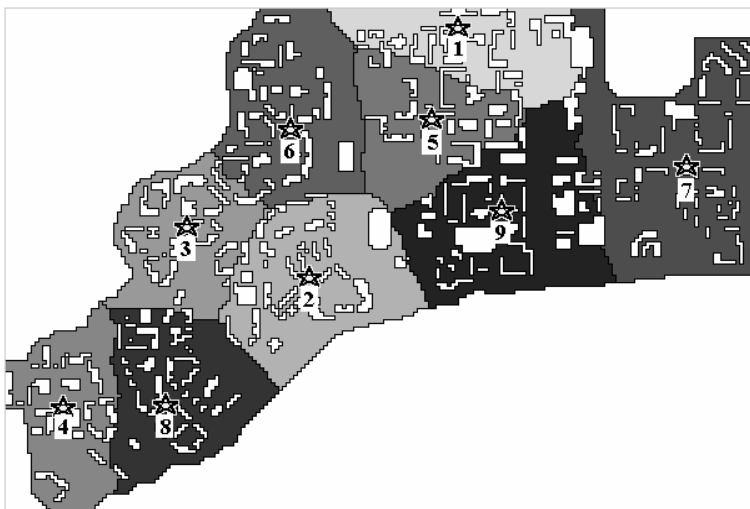


Рис. 7. Области наибольшей близости к аптеке при оптимальном расположении

Таблица 2. Распределение населения по выделенным областям (аптеки)

№ аптеки	Население настоящее (человек)	$k_j$	Население оптимальное (человек)	$k_j$
1	6172	3,73	3939	1,20
2	2656	1,60	4012	1,22
3	1655	1,00	3818	1,16
4	8316	5,02	3282	1,00
5	5703	3,45	3742	1,14
6	2862	1,73	5524	1,68
7	9171	5,54	7008	2,13
8	1664	1,01	5034	1,53
9	1971	1,19	3811	1,16

Как видно из таблицы 2, при настоящем расположении аптечных пунктов на пункты «4» и «7» приходится наибольшая нагрузка (в 5 раз больше, чем у пунктов «3», «8»). Суммарное минимальное время, затрачиваемое на преодоление расстояния между жилым зданием и соответствующей аптекой, составляет  $\approx 7662,8$  условных единиц времени. При оптимальном расположении данное значение равно  $\approx 5311,4$ , улучшение составляет  $\approx 30,68\%$ .

## **5. Заключение**

В статье предложен и успешно реализован подход к решению задачи о размещении объектов логистической инфраструктуры с одновременной сегментацией логистических зон в случае, когда логистические объекты могут располагаться в любой точке рассматриваемой области и в предположении о том, что в точках расположения потребителей число последних, вообще говоря, различно.

Применение подобного подхода также может быть полезно при решении следующих задач: размещение почтовых отделений; размещение магазинов, реализующих товары первой необходимости; планирование мест разметки пешеходных переходов; планирование мест размещения пунктов утилизации бытовых отходов и т.п. Однако для решения данных задач требуется проведение дополнительных исследований и сбора необходимой информации. Комплексный анализ всей городской инфраструктуры позволит выявить «тонкие места» в функционировании различных организаций, устранение которых приведет к повышению качества жизни населения.

## **Литература**

1. АРНОЛЬД В.И. *Математические методы классической механики*. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 408 с.
2. АРНОЛЬД В.И. *Особенности каустик и волновых фронтов*. – М.: ФАЗИС, 1996. – 334 с.

3. БУХАРОВ Д.С., КАЗАКОВ А.Л. *Применение оптико-геометрического подхода для решения прикладных задач вариационного исчисления* // Проблемы информатики. – 2012. – №3. – С. 22–32.
4. БУХАРОВ Д.С., КАЗАКОВ А.Л. *Программная система «ВИГОЛТ» для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике* // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Раздел 2. – С. 65–74. – URL: <http://num-meth.srcc.msu.ru/>.
5. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А. *Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №7. – С. 50–57.
6. ЛЕБЕДЕВ П.Д., УСПЕНСКИЙ А.А. *Геометрия и асимптотика волновых фронтов* // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2008. – №3. – С. 27–37.
7. ЛЕБЕДЕВ П.Д., УСПЕНСКИЙ А.А., УШАКОВ В.Н. *Построение минимаксного решения уравнения типа эйконал* // Труды института математики и механики. – 2008. – №2. – С. 182–191.
8. ЛУКИНСКИЙ В.С. *Модели и методы теории логистики*. – СПб.: Питер, 2008. – 448 с.
9. МАТВИЙЧУК А.Р., УШАКОВ В.Н. *О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – №1. – С. 5–20.
10. МИРОТИН Л.Б., БУЛЬБА А.В., ДЕМИН В.А. *Логистика, технология, проектирование складов, транспортных узлов и терминалов*. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. – 408 с.

## MATHEMATICAL MODEL AND PROGRAM SYSTEM FOR SOLVING A PROBLEM OF LOGISTIC OBJECTS PLACEMENT

**Anna Lempert**, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Cand.Sc. (lempert@icc.ru).

**Alexander Kazakov**, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, assistant professor (kazakov@icc.ru).

**Dmitry Bukharov**, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, programmer (Lermontov st., 134, Irkutsk, Russia, (3952) 45-30-30, bukharovds@gmail.com)

*Abstract: We consider a placement problem for logistic objects with logistic zones segmentation in the continuous setting (when an object can be placed at any point in a considered area). We reduce this framework to a calculus of variations problem and suggest an algorithm of solution based on the optical-geometrical approach. Then we use this algorithm to solve the problems of municipal infrastructure optimization.*

Keywords: calculus of variations, area logistics, optimization, numerical methods.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Е. Н. Хоботовым*