

УДК 519.8

ББК 65

## ЭКСПЕРТНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВ В ЗАДАЧАХ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Абаев Л. Ч.<sup>1</sup>

(Российский институт стратегических исследований,  
Москва)

*В статье рассматривается задача экспертного упорядочения альтернатив, которые могут быть представлены элементами  $N$ -мерного пространства. Для решения таких задач предлагаются декомпозиционные методы, позволяющие экспертам надежно упорядочить существенно большее число альтернатив, нежели в обычных экспертных процедурах. Для устранения возможных экспертных противоречий предлагается генетический алгоритм решения задачи  $np$ -триангуляции матриц.*

Ключевые слова: экспертные методы, упорядочение альтернатив, декомпозиция, генетические алгоритмы

### 1. Введение

Одной из широко распространенных задач, решение которых часто оказывается невозможным без привлечения экспертов, является задача оценки альтернативных вариантов. Во многих случаях построение даже относительно «грубых» математических моделей, позволяющих «автоматически» вычислять оценки альтернатив, оказывается невозможным. Особенно часто это имеет место при исследовании слабоформализуемых проблем, например, военно-политического анализа, анализа международных отношений, макропрогнозирования социально-экономических процессов, проектирования больших техниче-

---

<sup>1</sup> Лев Черменович Абаев, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник ([abaev\\_lev@mail.ru](mailto:abaev_lev@mail.ru)).

ских систем и др. Соответственно, в данных задачах оценка альтернатив осуществляется экспертными методами.

Наиболее информативными оценками в этом случае оказываются количественные экспертные оценки, представляющие собой измерения в метрических шкалах (шкале разностей, отношений или абсолютной). Однако измерения в метрической шкале, как показывает практика, часто оказываются довольно сложной задачей для экспертов, что может приводить к значимым ошибкам в точности экспертных измерений. Кроме того, в задачах, для которых отсутствуют «естественные» измерительные шкалы, построение метрических шкал для экспертной оценки вариантов является достаточно эффективной лишь в случае относительно небольшого числа альтернатив. Действительно, для «четкого» сравнения  $n$  альтернатив необходимо зафиксировать  $n$  значений на интервальной шкале (и, соответственно, дать «лингвистическое», вербальное описание каждого значения). Уже для  $n = 20$  формирование шкалы с 20-ю значениями становится весьма затруднительным. В случае же меньшего числа градаций на шкале не менее двух альтернатив получают одинаковую оценку, хотя их сравнительная эффективность может быть существенно разной. Поэтому во многих случаях представляется более надежным прямое упорядочение альтернатив. Но и здесь возникает проблема экспертного анализа большого числа альтернативных вариантов. Исследования в области психологических аспектов принятия решений показали, что даже высококвалифицированный эксперт в состоянии корректно проранжировать не более 7–8, максимум 10 альтернатив [7]. В то же время при анализе реальных задач число вариантов, подлежащих оценке, может существенно превосходить это число. Методы парного экспертного сравнения, хотя и позволяют обеспечить надежность результатов, в ряде случаев оказываются неприменимыми вследствие исключительно высокой трудоемкости этой процедуры (для  $n$  анализируемых вариантов необходимо проведение порядка  $n^2$  парных сравнений).

Однако существует целый ряд задач, структура альтернативных вариантов которых позволяет предложить методы экс-

пертного упорядочения, позволяющие проранжировать достаточно большое число альтернатив (порядка 100 и более). Эти задачи характеризуются тем, что альтернативные варианты могут быть представлены в виде элементов  $N$ -мерного пространства. Приведем примеры ряда наиболее распространенных классов таких задач.

### 1.1. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим некооперативную игру  $N$  лиц с произвольной суммой. Пусть у  $i$ -го игрока есть  $L_i$  возможных стратегий поведения. Тогда множество возможных исходов представляется в виде  $N$ -мерного пространства размерности  $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_N$ , причем элемент  $S_{i_1 i_2 \dots i_N}$  характеризует ситуацию, «порождаемую» стратегиями  $i_1, i_2, \dots, i_N$  соответственно 1-го, 2-го, ...,  $N$ -го игроков. Анализ подобных игровых моделей становится возможным лишь при наличии оценок предпочтительности ситуаций  $S_{i_1 i_2 \dots i_N}$ . В случае, если эти оценки представляют собой упорядочение ситуаций по предпочтительности, приходим к задаче упорядочения альтернатив в  $N$ -мерном пространстве<sup>2</sup>.

### 1.2. МОРФОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Морфологический анализ является одним из достаточно распространенных методов, используемых в практике нормативного прогнозирования, проектирования (в широком смысле

---

<sup>2</sup> Заметим, кстати, что упорядочение ситуаций по предпочтительности в теоретико-игровых задачах позволяет получить весьма важную информацию, например, определить стратегии гарантированного результата, выделить ситуации равновесия в чистых стратегиях (если они существуют), провести «коалиционный» анализ и др. Таким образом, в ряде случаев возникает возможность существенно упростить работу экспертов, поскольку упорядочение ситуаций по предпочтительности представляет собой менее сложную процедуру, нежели определение количественных оценок. При этом информативность получаемых результатов останется на достаточно высоком уровне.

слова), системного анализа и т.д. Его суть заключается в том, что исследуемая проблема  $S$  представляется в виде ряда составляющих ее подпроблем  $S^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Для каждой подпроблемы  $S^i$  предлагается ряд альтернативных вариантов ее решения  $S^i_j$ ,  $j = 1, \dots, L_i$ . Решение проблемы  $S$  представляет собой совокупность различных вариантов решения подпроблем  $S^i$ . Таким образом, любое решение проблемы  $S$  может быть представлено как элемент  $N$ -мерного пространства размерности  $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_N$ , где элемент  $S_{i_1 i_2 \dots i_N}$  представляет собой решение проблемы  $S$  как совокупность  $i_1, i_2, \dots, i_N$  вариантов решения соответственно подпроблем  $S^1, S^2, \dots, S^N$ . В случае ранжирования этих вариантов по степени эффективности снова приходим к задаче упорядочения альтернатив в  $N$ -мерном пространстве.

### 1.3. МЕТОДЫ ПРОГНОЗНЫХ СЦЕНАРИЕВ

Рассмотрим задачу формирования прогнозного сценария развития некоторого процесса. В том случае, когда известны вариативные прогнозы развития  $N$  подпроцессов, прогнозные сценарий представляет собой наиболее вероятное сочетание прогнозных вариантов подпроцессов. Если затруднено количественное определение вероятностей реализации прогнозных вариантов, но возможно их упорядочение по критерию «вероятность реализации», то вновь получим задачу упорядочения альтернатив, являющихся элементами  $N$ -мерного пространства.

Предлагаемый в работе метод упорядочения альтернатив, являющихся элементами  $N$ -мерного пространства, основан на декомпозиции исходной задачи упорядочения на ряд взаимосвязанных подзадач существенно меньшей размерности с последующим синтезом полученных решений и окончательным упорядочением исходного множества альтернатив. «Базовой» процедурой метода является процедура упорядочения «двумерного» множества альтернатив, которая рассматривается ниже. Далее будет рассмотрен общий случай  $N$ -мерного пространства.

## 2. Упорядочение «двумерного» множества альтернатив

Рассмотрим матрицу  $\|s_{ij}\|$ ,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , где  $s_{ij}$  являются элементами двумерного пространства  $S^1 \times S^2$ . Например, для модели игры двух лиц  $S^1$  будет представлять собой множество стратегий 1-го игрока,  $S^2$  – множество стратегий игрока 2, а элементы  $s_{ij}$  – ситуации, «порождаемые»  $i$ -й стратегией игрока 1 и  $j$ -й стратегией игрока 2.

Требуется упорядочить элементы  $s_{ij}$  по тому или иному заранее определенному критерию (например, по предпочтительности с точки зрения того или иного игрока). Уже при  $N = M = 4$  число элементов, подлежащих экспертному упорядочению, становится равным 16, что не позволяет провести их корректное ранжирование «напрямую».

Рассмотрим декомпозиционную процедуру упорядочения, включающую следующие этапы.

1. Для каждого  $i = 1, \dots, N$  проведем экспертное упорядочение элементов  $s_{ij}, j = 1, \dots, M$ . В итоге получим  $N$  ранжировок по  $M$  элементов в каждой, которые можно формально представить в виде  $N$  невязаных ориентированных графов линейного порядка, состоящих из  $M$  вершин каждый (дуги графа характеризуют сравнительную предпочтительность элементов  $s_{ij}$ ).

2. Для каждого  $j = 1, \dots, M$  проведем экспертное упорядочение элементов  $s_{ij}, i = 1, \dots, N$ . В итоге получим  $M$  ранжировок по  $N$  элементов в каждой, которые аналогично представим в виде  $M$  невязаных ориентированных графов линейного порядка, состоящих из  $N$  вершин каждый.

3. Синтезируем из  $N + M$  графов граф  $G((s_{ij}), V)$ , где  $s_{ij}$  – вершины графа  $G$ , а дуги  $v_{ij} \in V$  характеризуют сравнительную предпочтительность элементов  $s_{ij}$ . Поскольку линейные графы, полученные на этапах 1 и 2, содержат общие вершины  $s_{ij}$ , граф  $G$  будет иметь структуру «сетчатого» типа (рис. 1).

4. В синтезированном графе  $G$  выделяются все контуры (циклы) графа (контур – замкнутый путь в графе вида  $s_{i_1 j_1} \rightarrow s_{i_2 j_2} \rightarrow \dots \rightarrow s_{i_n j_n} \rightarrow s_{i_1 j_1}$ , для примера на рис. 1 контур выде-

лен). Наличие контура в графе характеризует противоречивость эксперта, проводившего упорядочение. Естественно, что чем больше выделено контуров в графе  $G$ , тем более противоречивы оценки эксперта.

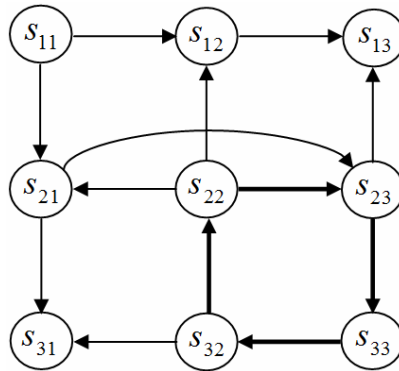


Рис. 1

5. Выделенные контуры графа представляются эксперту для корректировки своих ранговых оценок и, в конечном итоге, удаления контуров<sup>3</sup>.

6. Формируется новый граф  $G^*((s_{ij}), V^*)$ , представляющий собой отношение квазипорядка, причем полученный квазипорядок может лишь незначительно отличаться от отношения полного порядка.

7. Граф  $G^*$  представляется в виде слоистой структуры (верхний слой представляет собой множество вершин  $s_{ij}$ , не доминирующихся другими вершинами графа, во второй слой попадают вершины, не доминирующиеся оставшимися элементами множества  $S$  и т.д.). Подобное представление графа позволяет дос-

---

<sup>3</sup> Заметим, что если экспертная корректировка ранговых оценок не позволит удалить контуры в графе  $G$  (например, удаление одних контуров приведет к появлению других), то для решения данной задачи можно использовать рассматриваемую ниже процедуру аппроксимации графа  $G$  «ближайшим» к нему ациклическим графом.

таточно легко выделить те вершины (причем их число может оказаться относительно небольшим), попарное экспертное сравнение которых позволит провести линейное доупорядочение альтернатив.

8. Проводится дополнительный экспертный опрос (попарное сравнение) и формируется итоговое полное упорядочение (до классов эквивалентности) множества анализируемых вариантов.

Проиллюстрируем использование рассмотренного декомпозиционного метода упорядочения на примере биматричной игры. Пусть у каждой из сторон имеется по три допустимые стратегии поведения. Тогда возможны  $3 \times 3 = 9$  ситуаций (исходов игры), которые необходимо упорядочить по их предпочтительности, например, с точки зрения первого игрока. Предположим, что эксперт «зафиксировал» каждую из трех возможных стратегий игрока 1 и проранжировал ситуации по их предпочтительности, т.е. выполнил первый этап декомпозиционной процедуры (таблица 1).

Таблица 1.

	Стратегии игрока 2		
Стратегии игрока 1	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	2	1

Таким образом, результаты этого этапа могут быть представлены в виде трех невязаных орграфов линейного порядка по три вершины в каждом.

Аналогичным образом эксперт проранжировал ситуации по предпочтительности, «зафиксировав» каждую из трех возможных стратегий игрока 2, т.е. выполнил второй этап декомпозиционной процедуры (таблица 2).

Эти результаты также могут быть представлены в виде трех невязаных орграфов линейного порядка по три вершины в каждом.

Таблица 2.

Стратегии игрока 2	Стратегии игрока 1		
	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	3	2	1

Объединяя результаты первого и второго этапов декомпозиционной процедуры, получим следующий граф предпочтений на множестве игровых ситуаций (рис. 2).

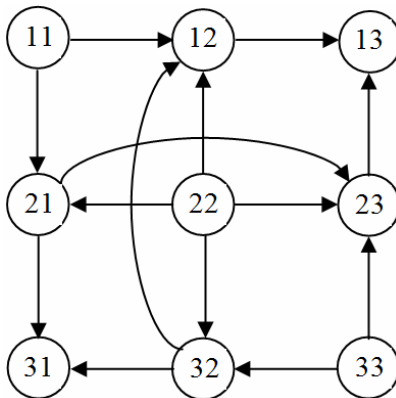


Рис. 2.

Поскольку синтезированный граф не содержит контуров (т.е. в экспертных ранжировках нет противоречий), то, удаляя «ненужные» дуги графа (в предположении, что выполняется условие транзитивности), получим граф частичного порядка (рис. 3). Из него видно, что декомпозиционная процедура экспертного анализа позволила почти полностью упорядочить по предпочтительности все множество ситуаций.



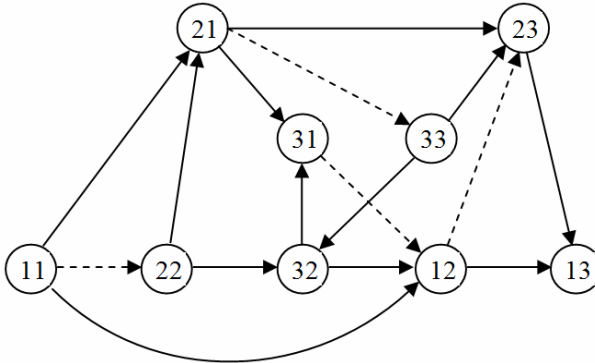


Рис. 3.

Для полного упорядочения оказалось достаточным проведение четырех парных сравнений ситуаций (результаты этих сравнений показаны на рис. 3 пунктирными стрелками). В результате был сформирован линейный порядок на множестве возможных исходов игры по их предпочтительности с точки зрения первого игрока (рис. 4).

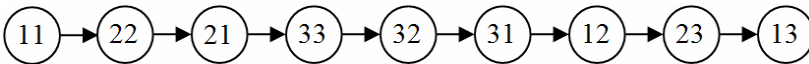


Рис. 4.

Рассмотренная процедура упорядочения, как было отмечено выше, основана на декомпозиции исходной задачи ранжирования  $N \times M$  элементов на совокупность задач упорядочения  $N$  и  $M$  элементов. А поскольку эксперт может достаточно надежно проранжировать до 10 элементов (т.е.  $N_{\max} = M_{\max} = 10$ ), то и оказывается возможным корректное упорядочение 100-элементного множества вариантов.

Кроме того, разработанная процедура существенно упрощает работу эксперта. Дело в том, что варианты, являющиеся элементами двумерного пространства, по существу, определяются номером строки  $i$  и столбца  $j$  матрицы  $S$ . А поскольку эксперт ранжирует альтернативы при фиксированных значениях  $i$  (этап 1) и  $j$  (этап 2), то во многих случаях упорядочение

альтернатив оказывается достаточно тривиальным. Например, в игровых моделях упорядочиваются стратегии одного из игроков при фиксированной стратегии другого. Если эти стратегии строятся по принципу возрастания степени «эскалационности», то решение задачи ранжирования существенно упрощается. Что касается этапа доупорядочения альтернатив (этап 8), то здесь проводится попарное сравнение вариантов (причем во многих случаях довольно небольшое их число), что также упрощает работу экспертов.

Рассмотрим теперь общий случай  $N$ -мерного пространства.

### **3. Упорядочение множества альтернатив в $N$ -мерном пространстве**

Рассмотрим множества  $S^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и их декартово произведение  $S^1 \times S^2 \times \dots \times S^N$ . Тогда объект  $s_{i_1 i_2 \dots i_N} \in S^1 \times S^2 \times \dots \times S^N$  будет представлять собой элемент  $N$ -мерного пространства. Например, в задаче морфологического анализа  $S^i$  будет представлять собой множество вариантов решения  $i$ -й подпроблемы, а  $s_{i_1 i_2 \dots i_N}$  – вариант решения проблемы  $S$  как совокупность  $i_1, i_2, \dots, i_N$  вариантов решения подпроблем  $S^1, S^2, \dots, S^N$ .

Требуется упорядочить элементы  $s_{i_1 i_2 \dots i_N}$  по определенному критерию.

Метод решения данной задачи основан на сведении ее к совокупности задач упорядочения альтернатив в двумерном пространстве. Действительно, зафиксируем два произвольных множества  $S^i$  и  $S^j$ , а для остальных множеств  $S^k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $k \neq i$ ,  $k \neq j$ , зафиксируем конкретные значения  $s^k_i$  (например, для задачи морфологического анализа фиксируются конкретные варианты решения  $(N - 2)$  подпроблем). Тогда задача сводится к упорядочению альтернатив в двумерном пространстве  $S^1 \times S^2$ . Решая совокупность таких задач (с использованием процедуры упорядочения «двумерного» множества альтернатив) для различных  $i, j$  и различных значений  $s^k_i$ , мы получим совокупность множеств упорядоченных альтернатив. Ввиду наличия в них

общих элементов, можно сформировать граф  $G$ , формализующий экспертные предпочтения элементов всего  $N$ -мерного множества  $S$ .

Предлагаемый метод имеет две важные особенности, существенно затрудняющие его применение на практике.

Первая состоит в очень высокой трудоемкости решения задачи упорядочения множества альтернатив в  $N$ -мерном пространстве с использованием рассмотренного метода.

Легко показать, что полное число  $N_\Sigma$  двумерных задач упорядочения, на которые «разбивается» исходная задача  $S$ , определяется по следующей формуле:

$$(1) \quad N_\Sigma = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ i \neq k}}^N L_i,$$

где  $N$  – размерность задачи  $S$  (например, число игроков в теоретико-игровых задачах или число подпроблем, составляющих проблему  $S$  в задаче морфологического анализа);  $L_i$  – число альтернативных вариантов решения  $i$ -й подзадачи (например, число стратегий  $i$ -го игрока в теоретико-игровых задачах или число альтернативных вариантов решения  $i$ -ой подпроблемы в задаче морфологического анализа).

Соответственно, общее число  $R_\Sigma$  экспертных ранжирований рассчитывается по формуле

$$(2) \quad R_\Sigma = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (L_j + L_k) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ i \neq k}}^N L_i.$$

Уже при  $N = 4$ ,  $L_i = 5$  (например, в случае наличия четырех подпроблем с пятью вариантами решения каждая в задаче морфологического анализа) число двумерных задач ранжирования будет 150, а число необходимых экспертных ранжировок – 1350 (следует отметить, что, с другой стороны, и число ранжируемых объектов здесь весьма велико – 625). При этом с увеличением  $N$   $N_\Sigma$  и  $R_\Sigma$  растут экспоненциально. Поэтому при практическом использовании представленной схемы необходимо существенно снизить ее трудоемкость.

Вторая особенность связана с возможностью появления в графе  $G$  контуров (т.е. противоречий в оценках эксперта), но в отличие от задачи упорядочения в двумерном пространстве, здесь эта проблема оказывается более сложной. Дело в том, что даже если эксперт корректно решит все двумерные задачи упорядочения, это не гарантирует отсутствие контуров (т.е. противоречий) в «итоговом» графе  $G$ . Другими словами, возможно появление контуров в графе  $G$  упорядочения элементов  $N$ -мерного пространства, несмотря на отсутствие контуров во всех «двумерных» подграфах  $G^{ij}$ .

При этом процедура экспертной корректировки оценок (т.е. удаления контуров) оказывается неэффективной, поскольку их изменение, хотя и приводит к устранению представленного эксперту контура, но может «породить» новый контур, причем эксперт окажется не в состоянии контролировать данный процесс ввиду очень большой размерности задачи. Поэтому необходимо использовать технологии, не требующие использования экспертов для решения возникающей задачи.

В предлагаемом методе используется следующий подход к решению задачи корректировки контуров.

Граф  $G$  представляется в виде матрицы смежности  $X = ||x_{ij}||$ , где строки и столбцы матрицы соответствуют вершинам графа (т.е. упорядочиваемым элементам), а  $x_{ij} = 1$ , если в графе  $G$  существует ориентированная дуга из  $i$ -й вершины в  $j$ -ю (т.е. если эксперт упорядочил элементы  $N$ -мерного множества таким образом, что  $i$ -й элемент оказался предпочтительнее  $j$ -го) и 0 в противном случае.

Матрица  $X$  имеет следующие свойства.

1. Если  $x_{ij} = 0$  для всех  $i > j$  (т.е. для всех элементов ниже главной диагонали), то отношение предпочтения на множестве элементов, описываемое данной матрицей, будет отношением квазипорядка (частичного порядка).

2. Перестановка  $i$ -й и  $j$ -й строк матрицы и  $i$ -го и  $j$ -го столбцов соответствует перенумерации  $i$ -го и  $j$ -го элементов графа  $G$ .

Указанные свойства позволяют представить задачу корректировки контуров в графе  $G$  как задачу поиска графа  $G^*$ , наиболее «близкого» к графу  $G$  и удовлетворяющего свойству 1.

Решение данной задачи представляет собой процедуру последовательной перестановки строк и столбцов матрицы  $X$  (т.е. перенумерации вершин графа  $G$ ), позволяющую получить матрицу  $X^*$  с минимальным числом ненулевых элементов ниже главной диагонали. Обнуляя эти элементы, мы и получим граф  $G^*$ , минимально отличающийся от графа  $G$  и не имеющий контуров. Содержательно данная процедура означает удаление минимального числа экспертных оценок, приводящее к отсутствию экспертных противоречий. Далее производится экспертное доупорядочение элементов графа  $G^*$  и получение итогового линейного упорядочения альтернативных вариантов.

Рассматриваемая задача известна как задача наилучшей приближенной триангуляции матрицы ( $nn$ -триангуляции). К ней сводится целый ряд задач обработки и анализа экспертной информации (ранжирования объектов, парных экспертных сравнений), структурного анализа сложных систем [1], моделей обработки межотраслевого баланса, сетевых моделей. Поэтому исследование задачи  $nn$ -триангуляции важно не только как элемент рассматриваемого метода экспертного упорядочения элементов  $N$ -мерного пространства, но имеет и самостоятельное значение.

Для получения точного решения задачи  $nn$ -триангуляции было предложено большое число алгоритмов, основанных на целочисленном линейном программировании [14], динамическом программировании [12, 22, 23], методе ветвей и границ [5, 9–11, 15, 17].

В [2, 3] был предложен один из наиболее быстрых алгоритмов методов ветвей и границ, использующий скоростной спуск по дереву вариантов. Однако, как было отмечено в данных работах, и этот алгоритм оказывается вполне эффективен (в смысле трудоемкости) лишь в том случае, когда число вершин в графе (т.е. число упорядочиваемых вариантов) не превышает 20–25. Это связано с тем, что рассматриваемая задача относится

к классу  $NP$ -сложных задач комбинаторной оптимизации, для которых в общем случае не существует алгоритмов гарантированного нахождения оптимальных решений, трудоемкость которых была бы существенно меньше трудоемкости алгоритмов полного перебора.

Поэтому в случае, когда число вершин в графе оказывается существенно большим, в [3] было рекомендовано не искать точное решение задачи  $np$ -триангуляции, а ограничиться нахождением локального оптимума.

Процедура поиска локального оптимума была предложена в [4] и представляла собой так называемое локально-сбалансированное упорядочение. Решение, основанное на локально-сбалансированном упорядочении объектов, обладает тем свойством, что оно не может быть улучшено за счет произвольного «перемещения» любого из объектов. Формально для локально-сбалансированного упорядочения  $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  должны выполняются следующие условия:

$$(3) \quad \begin{cases} x_{i_s} \rightarrow \{x_{i_j} \mid j = \overline{s+1, t}\} \\ x_{i_t} \leftarrow \{x_{i_j} \mid j = \overline{s, t-1}\} \end{cases} \quad \text{для } \forall s, t: 1 \leq s < t \leq n.$$

Отношение группового доминирования  $\rightarrow$  означает следующее [3, 4]:  $x_i \rightarrow Y \Leftrightarrow \sum_{x_j \in Y} (a_{ij} - a_{ji}) \geq 0$ ,

где  $Y$  – подмножество множества упорядочиваемых объектов;  $a_{ij}$  – элемент матрицы парных экспертных сравнений ранжируемых объектов.

Можно показать, что поиск локально-сбалансированных упорядочений объектов оказывается достаточно простым и эффективным в смысле трудоемкости.

Однако такой подход гарантирует лишь нахождение локального (а не глобального) оптимума, к тому же различные локально-сбалансированные упорядочения могут существенно различаться между собой, что также усложняет выбор решения.

В настоящей работе для решения задачи  $nn$ -триангуляции матриц предлагается использовать подход, основанный на генетических алгоритмах.

Генетические алгоритмы, впервые предложенные Дж. Холландом [20], представляют собой, по мнению автора, алгоритмы поиска, построенные на принципах, сходных с принципами естественного отбора и генетики. Обобщенно они объединяют в себе принцип выживания наиболее перспективных особей – вариантов решений и структурированный обмен информацией, в котором присутствует элемент случайности, который моделирует природные процессы наследования и мутации. Дополнительным свойством этих алгоритмов является невмешательство человека в процесс поиска, он может влиять на него лишь опосредованно, задавая определенные параметры.

В настоящее время генетические алгоритмы представляют собой достаточно динамично развивающееся направление исследований и находят применение при решении широкого круга задач, в том числе и в задачах комбинаторной оптимизации [6, 8, 17, 18].

Предлагаемый в настоящей работе генетический алгоритм решения задачи  $nn$ -триангуляции матриц состоит из следующих этапов.

Этап 1. Создание исходной популяции допустимых решений.

На этом этапе случайным образом формируется популяция (множество) допустимых решений задачи  $nn$ -триангуляции. Каждое решение (называемое в генетических алгоритмах хромосомой, особью или индивидуумом) представляет собой упорядочение  $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , где  $i_k \in \{1, \dots, n\}$ , и  $i_k \neq i_j, k, j = 1, \dots, n$ , т.е. представляет собой некоторую перестановку множества  $\{1, \dots, n\}$ . Легко понять, что любое упорядочение данного множества является допустимым решением задачи  $nn$ -триангуляции.

Размер популяции (т.е. число случайных перестановок)  $N$  является управляющим параметром генетического алгоритма и задается пользователем. При решении задачи  $nn$ -триангуляции

наилучшие результаты, как показало проведенное автором тестирование предлагаемого алгоритма, были получены, когда  $N$  варьировалась от 50 до 70.

Этап 2. Для каждой особи сформированной популяции (каждого допустимого варианта решения задачи из сформированного множества) оценивается мера ее «приспособленности» (т.е. определяется значение целевой функции каждого варианта решения задачи).

Для задачи  $nn$ -триангуляции целевая функция варианта  $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  определяется следующим образом:

$$(4) \quad F(I) = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=l+1}^n a_{kl}(I),$$

где  $a_{kl}(I)$  – элемент матрицы парных сравнений  $A(I)$ , соответствующей упорядочению объектов  $I$  (другими словами, матрица  $A(I)$  представляет собой матрицу смежности графа  $G(I)$ , в котором вершины  $\{1, \dots, n\}$  перенумерованы исходя из упорядочения  $I$ ).

Легко заметить, что чем меньше  $F(I)$ , тем в меньшей степени упорядочение объектов  $I$  может считаться решением задачи  $nn$ -триангуляции, поскольку тем больше будет ненулевых элементов ниже главной диагонали матрицы  $A(I)$ . Поэтому задача  $nn$ -триангуляции формально описывается следующим образом:  $F(I) \rightarrow \max_I$ , причем если возможно найти такое  $I^*$ , что  $F(I^*) = n(n-1)/2$ , то оно заведомо будет решением задачи, так как ниже главной диагонали матрицы  $A(I)$  ненулевых элементов не будет.

Этап 3. На данном этапе происходит отбор особей «родителей» с наилучшей мерой «приспособленности» для процесса «размножения», т.е. выбираются варианты решения задачи с наилучшими значениями целевой функции.

Важно отметить, что отбор особей носит не детерминированный, а вероятностный характер, аналогично законам генетики.

Существует целый ряд операторов отбора. Для задачи  $nn$ -триангуляции использовался оператор отбора, основанный



на методе «рулетки», для которого вероятность участия особи в процессе размножения вычисляется по формуле

$$(5) \quad P(I) = \frac{F_i}{\sum_{j=1}^N F_j}.$$

Очевидно, что при таком отборе варианты решения с большим значением целевой функции будут выбираться чаще, чем варианты с меньшим ее значением. Легко заметить также, что одна особь (один вариант решения задачи) может быть задана в нескольких родительских парах.

Этап 4. На этом этапе происходит «скрещивание» лучших особей, отобранных на этапе 3. Данная процедура призвана моделировать природный процесс наследования, т.е. обеспечить передачу свойств «родителей» «потомкам». Предполагается, что при скрещивании лучших «родителей» их «потомки» будут обладать еще более высокой степенью «приспособленности», т.е. будут получены варианты решения задачи с еще большими значениями целевой функции.

Процедура «скрещивания» также носит вероятностный характер. Две случайным образом выбранные особи (два варианта решения) могут быть подвергнуты скрещиванию или же могут без изменений «перейти» на следующий этап. Вероятность скрещивания задается пользователем. При решении рассматриваемой задачи оказалось, что наилучшие результаты могут быть получены в случае, когда вероятность скрещивания была равна 0,5–0,7 (это позволило избежать закливания алгоритма в точках локальных максимумов).

Для реализации «скрещивания» используется так называемый оператор кроссинговера. В настоящее время существует целый ряд таких операторов для задач комбинаторной оптимизации. Наиболее применяемыми из них являются оператор кроссинговера с частичными соответствиями, упорядоченный оператор кроссинговера, циклический оператор кроссинговера [8].

Например, для «родительских» особей  $I^1 = \{9 \ 8 \ 2 \ 1 \ 7 \ 4 \ 5$

6 3} и  $I^2 = \{1 3 4 5 8 7 9 6 2\}$  применение циклического оператора кроссинговера приведет к появлению следующих потомков  $\tilde{I}^1 = \{9 3 4 1 8 7 5 6 2\}$  и  $\tilde{I}^2 = \{1 8 2 5 7 4 9 6 3\}$ .

Можно заметить, что каждая из особей-«потомков» «наследует» свойства обеих особей-«родителей», что позволяет предположить, что степень «приспособленности» (целевая функция) «потомков» окажется лучше, нежели у «родителей».

Проведенные эксперименты показали, однако, что использование указанных операторов кроссинговера оказывается неэффективным для решения задачи *nn*-триангуляции матриц. Поэтому в настоящей работе предлагается использовать разработанный оператор «жадного» кроссинговера.

Суть процедуры «скрещивания» с использованием оператора «жадного» кроссинговера состоит в следующем.

Пусть имеются две особи-«родителя»  $I^1 = (i_1^1, i_2^1, \dots, i_n^1)$  и  $I^2 = (i_1^2, i_2^2, \dots, i_n^2)$ . Рассмотрим элементы  $i_1^1$  и  $i_1^2$  (гены, согласно терминологии генетических алгоритмов). Значения  $i_1^1$  и  $i_1^2$  представляют собой какие-то числа из множества  $\{1, \dots, n\}$  и определяют, какие из ранжируемых объектов являются лучшими (стоящими на первом месте) соответственно для ранжировок  $I^1$  и  $I^2$ .

Определим лучший объект для одной из особей-«потомков»  $\tilde{I}^1 = (\tilde{i}_1^1, \tilde{i}_2^1, \dots, \tilde{i}_n^1)$  следующим образом:

если в графе  $G$  парных сравнений ранжируемых вариантов объект  $i_1^1$  доминируется меньшим числом альтернатив, нежели объект  $i_1^2$  (т.е., если в графе  $G$  число дуг, входящих в вершину  $i_1^1$  меньше, чем число дуг, входящих в вершину  $i_1^2$ ), то первый ген  $\tilde{i}_1^1$  в особи-«потомке»  $\tilde{I}^1$  будет  $i_1^1$ , в противном случае –  $i_1^2$ .

Аналогично определяется и второй ген  $\tilde{i}_2^1$  особи-«потомка»  $\tilde{I}^1$  – сравниваются, соответственно, гены  $i_2^1$  и  $i_2^2$  особей-«родителей», но при этом не учитываются дуги, исходящие из вершины  $\tilde{i}_1^1$  графа  $G$  (действительно, поскольку объект  $\tilde{i}_1^1$  упорядочивается, как более предпочтительный, то его возможное доминирование над «нижестоящими» объектами является вполне допустимым).

Таким же образом определяется третий ген  $\tilde{i}_3^1$  (не учитываются, соответственно, дуги, исходящие из вершин  $\tilde{i}_1^1$  и  $\tilde{i}_2^1$ ) и т.д.

Если на каком-то шаге один из генов  $i_1^1$  или  $i_l^2$  оказывается «использованным» ранее, то «свободный» ген и определяет значение  $\tilde{i}_l^1$ . Если же «использованными» ранее оказываются оба гена  $i_l^1$  и  $i_l^2$ , то значение определяется случайным образом (естественно, из числа «неиспользованных»). Таким образом формируется одна из особей-«потомков»  $\tilde{I}^1$ .

Другая особь-«потомок»  $\tilde{I}^2$  «строится» по тому же принципу, но «с конца строки».

Например, последний ген  $\tilde{i}_n^2$  особи-«потомка»  $\tilde{I}^2$  определяется следующим образом: если в графе  $G$  парных сравнений ранжируемых вариантов объект  $i_n^1$  доминируется большим числом альтернатив, нежели объект  $i_n^2$  то  $\tilde{i}_n^2$  принимает значение  $i_n^1$ , в противном случае —  $i_n^2$ .

Содержательный смысл представленного оператора кроссинговера достаточно прозрачен: на каждом шаге процедуры «скрещивания» в качестве лучшего выбирается тот объект из двух сравниваемых, который доминируется меньшим числом других объектов (если процедура идет от лучшего к худшему), помимо уже упорядоченных, или же, наоборот, который доминируется большим числом объектов (если процедура идет от худшего к лучшему). Таким образом, оператор «жадного» кроссинговера на каждом шаге стремится выбрать локально оптимальный ген, предполагая, что таким образом сформированные особи-«потомки» будут и в целом иметь лучшую степень «приспособленности».

Этап 5. Сформированные на этапе 4 особи (варианты решений) с заданной пользователем вероятностью могут быть подвергнуты мутации. Оператор мутации предполагает замену какого-либо гена (элемента) особи  $\tilde{I}^l$  на ген другой особи  $\tilde{I}^k$ ; в случае особей, представляющих собой битовые строки, может применяться инверсия одного из битов и др.

Для рассматриваемого алгоритма *nn*-триангуляции использовался оператор мутации, предполагающий перестановку в строке  $\tilde{I}^l = (\tilde{i}_1^l, \tilde{i}_2^l, \dots, \tilde{i}_n^l)$  двух случайным образом выбранных элементов.

Оператор мутации вносит случайные изменения в особи, позволяя тем самым увеличить разнообразие популяции и, таким образом, позволяет расширить ограниченную популяцией область в пространстве поиск решений. Это дает возможность во многих случаях избежать заикливания алгоритма в точках локального оптимума и способствует поиску глобального оптимума целевой функции.

Хотя, как правило, вероятность мутации, в отличие от вероятности скрещивания, выбирается достаточно малой (порядка 0,1), в рассматриваемой задаче, как показало проведенное автором тестирование предлагаемого алгоритма, лучшие результаты в его работе были получены в случае, когда вероятность мутации варьировалась от 0,3 до 0,4.

**Этап 6.** В результате проведения этапов 2–5 формируется новая популяция, особи которой, исходя из «законов генетики», должны обладать более высокой степенью «приспособленности», нежели представители предыдущей популяции.

Эта новая популяция, в свою очередь, подвергается процедурам отбора, селекции и мутации. Этапы 2–6 повторяются до тех пор, пока не окажется выполненным критерий остановки работы алгоритма. Критерии остановки работы алгоритма также задаются пользователем и могут определяться временными ограничениями, ограничениями на число генерируемых популяций, достижением определенного значения целевой функции или же отсутствием улучшения ее значений в процессе работы алгоритма и др.

После завершения работы генетического алгоритма из конечной популяции выбирается та особь, которая имеет максимальную степень приспособленности (максимальное значение целевой функции). Этот вариант и считается результатом работы генетического алгоритма.

Суть генетического алгоритма решения задачи *np*-триангуляции состоит в том, что многократное применение операторов отбора, скрещивания и мутации направлены на улучшение каждой отдельной особи, что и обеспечивает постепенное улучшение популяции, т.е. множества решений по сравнению с исходным.

Представленный подход к решению задачи *np*-триангуляции является эвристическим. Он не гарантирует нахождение точного решения рассматриваемой задачи (напомним, что она относится к классу *NP*-полных). Поэтому возникла необходимость его сравнения с существующими алгоритмами. Что касается метода ветвей и границ [2, 3], то, как показал эксперимент, в отличие от него, генетический алгоритм позволял решать в реальном масштабе времени задачи *np*-триангуляции матриц, размерность которых существенно превышала ограничение в 20–25 объектов.

Для сравнения работы генетического алгоритма и метода, основанного на поиске локально-сбалансированного упорядочения, была разработана программа, которая генерировала матрицу случайных парных сравнений заданной размерности и для различных (также случайно задаваемых) начальных упорядочений объектов находила локально-сбалансированные упорядочения (экранная форма программы представлена на рис. 5). Далее, для сгенерированной матрицы решалась задача ее наилучшей приближенной триангуляции с использованием рассмотренного генетического алгоритма. Полученные решения сравнивались.

Тестирование показало (было решено порядка 100 задач, размерность матрицы варьировалась от 50 до 80), что во всех случаях упорядочение, полученное с использованием генетического алгоритма, оказалось не хуже локально-сбалансированного упорядочения, а примерно в 10% случаев превысило его (правда, увеличение значения целевой функции было небольшим).

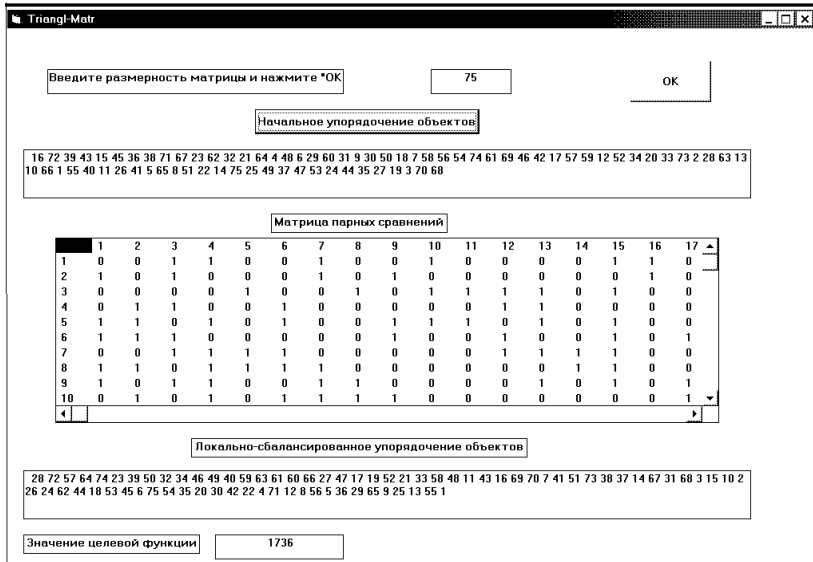


Рис. 5.

На наш взгляд, наиболее эффективным подходом к решению задачи *nn*-триангуляции представляется комплексирование метода поиска локально-сбалансированных упорядочений и генетических алгоритмов. При этом первый метод может быть использован для формирования множества локально-оптимальных решений, которое и будет составлять начальную популяцию для ее дальнейшей обработки с использованием генетического алгоритма.

В заключение отметим следующее:

- декомпозиционный метод экспертного упорядочения элементов *N*-мерного пространства позволяет надежно проранжировать достаточно большое число исследуемых вариантов;
- использование данного метода существенно упрощает работу экспертов, поскольку они имеют возможность проводить упорядочение «многомерных» альтернативных вариантов, учитывая лишь один из нескольких критериев их оценки;
- предложенный генетический алгоритм решения задачи *nn*-триангуляции матриц позволяет довольно эффективно ре-

шить проблему устранения противоречий в экспертных оценках, которые могут возникать при ранжировании вариантов;

– развитие предлагаемого подхода может идти в направлении снижения трудоемкости экспертных процедур по упорядочению исследуемых объектов путем поиска «наиболее вероятного» или «наиболее близкого» упорядочения. В этом направлении интерес представляют работы [13, 19, 21].

### **Литература.**

1. БЕЛКИН А.Р., ЛЕОНОВ В.Ю. *Об одном подходе к структурному преобразованию сложных систем* // Проблемы бионики. – 1987. – №39. – С. 70–75.
2. БЕЛКИН А.Р. *Приближенная триангуляция матриц в задачах ранжирования и обработки межотраслевого баланса* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1981. – №1. – С. 26–31.
3. БЕЛКИН А.Р., ЛЕВИН М.Ш. *Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 160 с.
4. БЕЛКИН А.Р., ШАХНОВ И.Ф. *Об одной модели группового упорядочения* // Интерактивные системы принятия решений в планировании и управлении большим городом: Тезисы докл. Всес. семинара – М.: НПО АСУ «Москва», 1981. – С. 190–193.
5. БУРКОВ В.Н., ГРОППЕН В.О. *Разрезы в сильно связанных графах и потенциалы перестановок* // Автоматика и телемеханика. – 1972. – №6. – С. 111–119.
6. ЕМЕЛЬЯНОВ В.В., КУРЕЙЧИК В.М. *Теория и практика эволюционного моделирования*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
7. КОЗЕЛЕЦКИЙ Ю. *Психологическая теория решений*. – М.: Прогресс, 1979. – 504 с.
8. КУРЕЙЧИК В.М. *Генетические алгоритмы. Обзор и состояние* // Новости искусственного интеллекта –1998. – №3. – С. 14–63.

9. ЛИТВАК Б.Г. *Об упорядочении объектов по предпочтениям* // Математические вопросы управления производством – 1973. – №5. – С. 47–56.
10. МИРКИН Б.Г. *Анализ качественных признаков и структур.* – М.: Статистика, 1980. – 320 с.
11. ПАВЛОВ Ю., ТОНЕВ М. *Комбинаторный алгоритм нахождения медианы Кемени на множестве частичных отношений* // Оптимизация, принятие решений, микропроцессорные системы. Труды 8-го Болгарско-польского симп. – София, 1985. – С. 138–147.
12. BHAT V.S., KINARIVALA B. *Optimal tearing in large scale-systems and minimum feedback cutsets of a digraph* // Journal of Franklin Inst. – 1979. – Vol. 307, №2. – P. 83–94.
13. CRITCHLOW D.E., FLIGNER M.A. *Paired comparison, triple comparison, and ranking experiments as generalized linear models, and their implementation in GLIM* // Psychometrika. – 1991. – №56. – P. 517–533.
14. DE CANI J.S. *Maximum-likelihood paired comparison ranking by linear programming* // Biometrika. – 1969. – Vol. 56, №3. – P. 537–545.
15. DE CANI J.S. *A branch and bound algorithm for maximum likelihood paired comparison ranking* // Biometrika. – 1972. – Vol. 59, №1. – P. 131–135.
16. FLUECK J.A., KORSH J.F. *A branch search algorithm for maximum likelihood paired comparison ranking* // Biometrika. – 1974. – Vol. 61, №3. – P. 621–626.
17. GOLDBERG D.E. *Genetic Algorithms in Search. Optimization and Machine Learning.* – New York: Addison–Wesley Publishing Company, Inc., 1989. – 372 p.
18. *Handbook of Genetic Algorithms* / Ed. by L. Davis. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1991. – 385 p.
19. HATZINGER R., DITTRICH R. *An R Package for Modeling Preferences Based on Paired Comparisons, Rankings, or Ratings* // J. of Statist. Soft. – 2012. – Vol. 48, №10. – P. 1–31.
20. HOLLAND J.H. *Adaptation in natural and artificial systems. An introductory analysis with application to biology, control,*



- and artificial intelligence.* – London: Bradford book edition, 1994 – 211 p.
21. PENDERGRASS R.N., BRADLEY R.A. *Ranking in triple comparisons* // In: I. Olkin and others (ED.), *Contributions to probability and statistics.* Stanford Univ. Press, 1960. – P. 331–351.
  22. REMAGE R., THOMPSON W.A. *Maximum-likelihood paired comparison rankings* // *Biometrika.* – 1966. – Vol. 53, № 1–2. – P. 143–149.
  23. SPIRCU T. *Sur le probleme de la triangulation* // *Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl.* – 1980. – Vol. XXV, №2. – P. 271–276.

## **EXPERT RANKING OF ALTERNATIVES IN HIGH-DIMENSIONAL PROBLEMS**

**Lev Abaev**, Russian Institute for Strategic Studies, Moscow, Doctor of Science, leading researcher (abaev\_lev@mail.ru).

*Abstract: The problem is considered of expert ranking of alternatives, which can be matched to elements of an N-dimensional space. To solve this problem we propose decomposition methods, which help to significantly increase the number of alternatives reliably ranked by experts as compared to traditional expert procedures. To eliminate possible expert contradictions we propose the genetic algorithm to solve the problem of matrix triangulation.*

**Keywords:** the expert methods, ranking of alternatives, decomposition, genetic algorithms.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Ю. В. Сидельниковым*