

УДК 681.5.013; 681.514; 681.511.22; 681.516.42; 681.516.74
ББК 32.965.4.32.965.6

СИНТЕЗ АНИЗОТРОПИЙНЫХ СУБОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ЗАДАННОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И АЛГОРИТМА ПОИСКА ВЗАИМНООБРАТНЫХ МАТРИЦ¹

Чайковский М.М.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача подавления внешних возмущений для линейной дискретной стационарной системы под воздействием случайных возмущений с неточно известными распределениями. Синтезируемый анизотропийный субоптимальный регулятор представляет собой динамический компенсатор заданного порядка, стабилизирующий замкнутую систему и сохраняющий ее анизотропийную норму ниже заданного порогового значения. Предлагаемый подход к синтезу анизотропийных регуляторов является новым.

Ключевые слова: дискретные линейные стационарные системы, случайные возмущения, статистическая неопределенность, норма, анизотропия, полуопределенное программирование, линейные матричные неравенства, взаимнообратные матрицы.

Введение

Статистическая неопределенность случайных возмущений, рассматриваемая как различие между неточно известным распределением реального шума измерений и его номинальной модели,

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-08-00714-а) и Программы №14 ОЭММПУ РАН.

² Чайковский Михаил Михайлович, кандидат физико-математических наук (mmtchaikovsky@hotmail.com).

может значительно ухудшить качество работы системы управления, если применяемая процедура синтеза регулятора основана на определенном законе распределения возмущения и предположении, что этот закон известен точно. Подобные ситуации могут также возникать из природного непостоянства условий рабочей среды системы управления. Так, \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторы являются полностью эффективными лишь при достаточно точном выполнении базовых гипотез о природе внешних возмущений. Известно, что \mathcal{H}_2 - (или линейно-квадратичный гауссовский) регулятор может оказаться недостаточно эффективным в случае, если внешнее возмущение представляет собой сильно коррелированный шум [23], в то время как \mathcal{H}_∞ -регулятор, проектируемый для наихудшего случая детерминированного возмущения [24], проявляет излишний консерватизм и требует избыточных энергетических затрат на управление, если внешнее возмущение представляет собой белый или слабо коррелированный случайный сигнал.

Одна из первых идей, направленных на преодоление указанного недостатка линейно-квадратичного гауссовского регулятора в случае, когда внешнее возмущение не является гауссовским белым шумом, была представлена в работе [39], посвященной некоторой модификации критерия качества. Эта идея привела к развитию целого класса задач в теории управления — управление системами, чувствительными к рискам [68, 69].

Идеи построения регуляторов, которые сочтали бы положительные качества линейно-квадратичных гауссовских (\mathcal{H}_2 -) и \mathcal{H}_∞ -регуляторов (т.е. минимизировали линейно-квадратичный критерий качества и были бы достаточно робастны) возникли в начале 1990-х годов. В частности, можно выделить подход, связанный с минимизацией \mathcal{H}_2 -нормы замкнутой системы при ограничениях на ее \mathcal{H}_∞ -норму [17], и подход, связанный с минимизацией функционала \mathcal{H}_∞ -энтропии при ограничениях на \mathcal{H}_∞ -норму замкнутой системы [49].

Как показано в [29], задача синтеза регулятора, минимизирующего функционал \mathcal{H}_∞ -энтропии, до известной степени эк-

вивалентна задаче синтеза оптимального регулятора, чувствительного к риску. Множество работ посвящено задачам, связанным с минимизацией функционала \mathcal{H}_∞ -энтропии, см. например [26, 34, 36, 50, 70].

Идеи смешанного $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ управления, впервые представленные в [17], были расширены в [57, 71] на основе разделения внешних возмущений на сигналы с ограниченным спектром и ограниченной мощностью и применения смешанного $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ критерия качества. Решение задачи стохастического смешанного $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ управления для дискретных систем получено в [48].

Во всех перечисленных выше работах применяются методики, основанные на решении уравнений Риккати определенного вида, иногда перекрестно связанных. В [40] смешанная $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ задача была рассмотрена в терминах неравенств (а не уравнений) Риккати и решена с помощью выпуклой оптимизации. С тех пор как были разработаны эффективные алгоритмы внутренней точки для решения задач выпуклой оптимизации [18, 51, 52], выпуклая оптимизация стала стандартной стратегией анализа и синтеза систем управления. Методы линейных матричных неравенств (ЛМН) зарекомендовали себя, как мощная и гибкая методика формулирования проектных требований к разрабатываемой системе и синтеза регуляторов, применимая к широкому спектру линейных задач теории управления [19]. После того как решение задачи синтеза \mathcal{H}_∞ -регулятора с помощью ЛМН было получено в [27, 35], полуопределенное программирование успешно применяется для получения эффективных решений многокритериальных $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ задач управления [13, 15, 20, 33, 46, 54, 58, 60, 62].

Подход к подавлению неопределенных случайных возмущений на основе минимаксного управления был предложен в середине 1990-х годов С.В. Гусевым в [30]–[32] и впоследствии распространен на случай многомерных систем и синтез регуляторов с заданной структурой методами ЛМН в [59]. Вместо точного знания коэффициентов ковариации возмущения, при применении данного подхода требуется лишь, чтобы коэффициенты ковариации принадлежали известному множеству. Синтезируемый ре-

гулятор минимизирует наихудшую возможную асимптотическую дисперсию выхода для всех таких возмущений. Рассматриваемая задача является промежуточной между экстремальными \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -сценариями синтеза и сводится к задаче робастного управления с неопределенностью в сигнале внешнего возмущения [59].

В то же время, другой многообещающий подход на основе стохастического минимакса возник из идей И.Г. Владимиров, разработавшего анизотропийную теорию стохастического робастного управления, представленную в ряде работ [5, 6, 61, 66]. В свете этого подхода, робастность в стохастическом управлении достигается с помощью явного включения различных сценариев распределения шума в единый показатель качества, подлежащий оптимизации; статистическая неопределенность измеряется в терминах энтропии, и показатель робастного качества можно выбрать так, чтобы количественно охарактеризовать возможности системы по подавлению наихудшего внешнего возмущения. Главными понятиями анизотропийной теории стохастического робастного управления являются анизотропия случайного вектора и анизотропийная норма системы.

Функционал анизотропии, введенный И.Г. Владимировым, является энтропийной мерой отклонения вероятностного распределения в евклидовом пространстве от гауссовских распределений с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами. Средняя анизотропия стационарной случайной последовательности определяется как интенсивность анизотропии на единицу времени для достаточно длинных сегментов последовательности. Применительно к случайным возмущениям, действующим на систему, средняя анизотропия характеризует величину статистической неопределенности, понимаемой как несоответствие между неточно известным фактическим распределением шума и семейством номинальных моделей возмущения в виде стационарного дискретного гауссовского белого шума со скалярной ковариационной матрицей [22, 66].

Вторым базовым понятием теории И.Г. Владимирова является a -анизотропийная норма дискретной линейной стационар-

ной системы (ДЛСС), количественно определяющая возможности системы по подавлению возмущений наибольшим отношением мощностной нормы выхода системы к мощностной норме ее входа при условии, что средняя анизотропия входного сигнала не превышает заданного неотрицательного уровня a [22, 66]. Обобщение анизотропийного анализа робастного качества на конечный интервал времени было сделано в [4].

В контексте стохастического робастного управления, направленного на подавление потенциально неблагоприятного воздействия статистической неопределенности, анизотропийный подход предлагает важную альтернативу методам синтеза управления, основанным на точном знании закона распределения случайного внешнего возмущения. Минимизация анизотропийной нормы замкнутой системы в критерии качества приводит к стабилизирующему регулятору по выходу, который проявляет меньший консерватизм по сравнению с \mathcal{H}_∞ -регулятором и является более эффективным при подавлении коррелированных возмущений, чем \mathcal{H}_2 -регулятор [22]. Решение задачи синтеза анизотропийного оптимального регулятора в пространстве состояний, полученное И.Г. Владимировым в [67], основано на решении трех перекрестно связанных алгебраических уравнений Риккати, алгебраического уравнения Ляпунова и уравнения относительно логарифма детерминанта положительно определенной матрицы. Получаемый в результате решения задачи синтеза оценивающий регулятор полного порядка (центральный регулятор) является единственным. Расширение этих результатов на класс объектов с параметрической неопределенностью было получено в [7, 42]. Но решение сложных систем перекрестно связанных уравнений требует разработки и применения специальных вычислительных алгоритмов на основе метода гомотопий [21]. Вместе с тем, применяемая процедура синтеза на основе решения уравнений не направлена на синтез анизотропийных регуляторов пониженного или заданного порядка (а также децентрализованных и многокритериальных регуляторов, регуляторов с заданной структурой), задачи синтеза которых до недавнего времени были

открыты.

Синтез анизотропийных субоптимальных регуляторов является естественным продолжением подхода, предложенного И.Г. Владимировым в [67]. Вместо минимизации анизотропийной нормы системы субоптимальный регулятор стабилизирует замкнутую систему и обеспечивает ограниченность ее анизотропийной нормы заданным значением, т.е. гарантирует подавление случайных внешних возмущений, средняя анизотропия которых не превосходит известного уровня, с качеством не хуже заданного. В отличие от синтеза оптимального анизотропийного регулятора, решение субоптимальных задач синтеза приводит к некоторому семейству регуляторов, таким образом предоставляя дополнительные степени свободы для определения некоторых дополнительных требований к замкнутой системе с целью достижения желаемого качества управления, например, требования заданного расположения полюсов замкнутой системы для достижения желаемого качества переходных процессов. Для решения задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора требуется критерий проверки ограниченности анизотропийной нормы системы заданным значением. Частотная теорема для анизотропийной нормы, представленная в [43], является стохастическим аналогом известной частотной теоремы для \mathcal{H}_∞ -нормы ДЛСС под воздействием статистически неопределенных стационарных гауссовских возмущений с ограниченной средней анизотропией. Полученный критерий сформулирован в виде неравенства относительно логарифма детерминанта матрицы, выраженной из решения алгебраического уравнения Риккати, зависящего от скалярного параметра. Аналогичный критерий для дискретных линейных нестационарных систем (ДЛНС), сформулированный в виде неравенства, зависящего от дискретного времени, и разностного уравнения Риккати, получен в [47]. Достаточная версия частотной теоремы для анизотропийной нормы была сформулирована в [11, 64, 65] как задача выпуклой оптимизации при ограничениях в виде строгого неравенства относительно детерминанта положительно определенной матрицы и ЛМН. Бы-

ло показано, что ограничение на детерминант линейно зависит от квадрата порогового значения анизотропийной нормы, минимизация которого на выпуклом множестве позволяет вычислять α -анизотропийную норму ДЛСС из решения задачи выпуклой оптимизации [11, 65]. Разработанная процедура анализа является привлекательной с вычислительной точки зрения и легко реализуется средствами некоммерческого программного обеспечения со свободным доступом для выпуклой оптимизации [45, 63]. Предлагаемая вниманию читателя работа направлена на применение современной методологии выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования к синтезу анизотропийных субоптимальных регуляторов заданного порядка. Анизотропийные регуляторы являются привлекательной и перспективной альтернативой \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторам в задачах подавления случайных внешних возмущений с неточно известными распределениями. В сравнении с решением задачи синтеза анизотропийного оптимального регулятора в пространстве состояний, полученным ранее в [67], новый подход на основе численной оптимизации является не требует разработки и применения специальных вычислительных алгоритмов на основе метода гомотопий [21].

Структура работы следующая. В разделе 1 изложена постановка общей задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора заданного порядка. В разделе 2 представлено общее решение задачи синтеза. В разделе 3 рассматривается ряд вычислительных примеров. Заключительные замечания и выводы даны в разделе 4.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Множество вещественных чисел обозначается \mathbb{R} , множество $(n \times m)$ -матриц — $\mathbb{R}^{n \times m}$. Для комплексной матрицы $M = [m_{ij}]$, M^* обозначает эрмитово сопряжение этой матрицы $M^* := [m_{ji}^*]$. Для вещественной матрицы $M = [m_{ij}]$, M^T обозначает транспонирование: $M^T := [m_{ji}]$. Для вещественных симметричных матриц $M \succ N$ означает, что матрица $M - N$ положительно определена. В блочно-симметричных матрицах символ $*$ заменяет блоки, вид которых определяется симметрией. Спектраль-

ный радиус матрицы M обозначается $\rho(M) := \max_k |\lambda_k(M)|$, где $\lambda_k(M)$ — k -е собственное значение матрицы M . Максимальное сингулярное значение комплексной матрицы M обозначается $\bar{\sigma}(M) := \sqrt{\lambda_{\max}(M^*M)}$. I_n обозначает единичную матрицу размерности $(n \times n)$, $0_{n \times m}$ — нулевую $(n \times m)$ -матрицу. Размерности нулевых матриц в случаях, когда их нетрудно понять из контекста, указываться не будут.

Угловое граничное значение матричной передаточной функции $F(z)$, аналитической в единичном диске комплексной плоскости $|z| < 1$, обозначается $\widehat{F}(\omega) := F(e^{i\omega})$.

$\mathcal{H}_2^{p \times m}$ и $\mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ обозначают пространства Харди $(p \times m)$ -матричных передаточных функций $F(z)$ комплексной переменной z , аналитических в единичном диске $|z| < 1$, с ограниченной \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -нормой соответственно:

$$\|F\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(\widehat{F}(\omega)\widehat{F}^*(\omega))d\omega \right)^{1/2} < +\infty,$$

$$\|F\|_\infty := \sup_{|z| \leq 1} \bar{\sigma}(F(z)) = \text{ess sup}_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \bar{\sigma}(\widehat{F}(\omega)) < +\infty.$$

1. Постановка задачи синтеза

Объект управления представлен дискретной линейной стационарной моделью $P(z)$ с n_x -мерным состоянием X , m_w -мерным входом возмущения W , m_u -мерным входом управления U , p_z -мерным управляемым выходом Z и p_y -мерным измеряемым выходом Y . Предполагается, что все сигналы представляют собой двусторонние бесконечные векторные дискретные последовательности, связанные уравнениями

$$(1) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы, $p_z \leq m_w$, пара матриц (A, B_u) является стабилизируемой, а пара (A, C_y) — детектируемой.

Предполагается, что внешнее возмущение $W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty}$ является стационарной последовательностью случайных векторов w_k с нулевым средним $\mathbf{E}w_k = 0$, неизвестной ковариационной матрицей $\mathbf{E}w_k w_k^T = \Sigma_W \succ 0$ и гауссовской плотностью распределения вероятности

$$p(w_k) := (2\pi)^{-m_1/2} (\det \Sigma_W)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \|w_k\|_{\Sigma_W^{-1}}^2\right),$$

где $\|w_k\|_{\Sigma_W^{-1}} = \sqrt{w_k^T \Sigma_W^{-1} w_k}$ и \mathbf{E} обозначает математическое ожидание. Обозначим пространство стационарных в узком смысле последовательностей интегрируемых с квадратом случайных векторов [7] через

$$\ell_{\mathcal{P}}^m = \{W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty} : w_k \in \mathbb{L}_2^m \wedge \|W\|_{\mathcal{P}} < +\infty\},$$

где мощностная норма последовательности случайных векторов $W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty}$ определяется как [7, 71]

$$\|W\|_{\mathcal{P}} := \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \mathbf{E}|w_k|^2 \right)^{1/2}$$

и может быть вычислена через спектральную плотность $S(\omega)$ этой последовательности:

$$\|W\|_{\mathcal{P}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} S(\omega) d\omega \right)^{1/2}.$$

Обозначим множество входных сигналов с ограниченной средней анизотропией через

$$\mathcal{W}_a := \{W \in \ell_{\mathcal{P}}^m : \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a\},$$

где

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left(\frac{m_{\omega} S(\omega)}{\|W\|_{\mathcal{P}}^2} \right) d\omega$$

— функционал средней анизотропии [22, 66].

Задача синтеза — найти регулятор заданного порядка по измеряемому выходу в форме динамического компенсатора

$$(2) \quad K(z) : \begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

с n_ξ -мерным состоянием $\Xi = (\xi_k)_{-\infty < k < +\infty}$, стабилизирующий замкнутую систему (рис. 1) и гарантирующий некоторый желаемый уровень робастного качества подавления внешних возмущений.

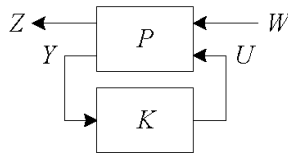


Рис. 1. Замкнутая система

Известно (см. например [35]), что задачу синтеза динамического регулятора заданного порядка можно представить в виде задачи синтеза статического регулятора по выходу, дополнив вектор состояния объекта управления состояниями регулятора:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & 0 & B_w & 0 & B_u \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_\xi} & 0 \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} & 0 & D_{zu} \\ 0 & I_{n_\xi} & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_y & 0 & D_{yw} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Реализация замкнутой системы с расширенным объектом управления (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_w \\ C_z & D_{zw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ D_{zu} \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{zw} \\ C_z + D_{zw} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где матрица K включает матрицы параметров регулятора:

$$(4) \quad K := \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}.$$

Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что модель объекта управления (1) представляет собой расширенную реализацию (3) с n -мерным вектором состояния, и искать анизотропийный субоптимальный регулятор в виде статической обратной связи по выходу (4).

Предполагается, что для расширенного объекта управления (3) и регулятора (4) выполняется условие Кимуры [41] нулевого порядка

$$n - m_u - p_y < 0,$$

где в общем случае $n = n_x + n_\xi$. Выполнение этого условия гарантирует существование стабилизирующего статического регулятора по выходу для расширенной реализации (3).

Пусть $T_{zw}(z)$ — матричная передаточная функция замкнутой системы от возмущения W к управляемому выходу Z , заданная нижним дробно-линейным преобразованием пары (P, K) :

$$(5) \quad T_{zw}(z) = \mathcal{F}_l(P, K) = P_{zw} + P_{zu}K(I_{p_y} - P_{yu}K)^{-1}P_{yw},$$

где

$$(6) \quad P_{zw}(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array} \right], \quad P_{zu}(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_z & D_{zu} \end{array} \right],$$

$$P_{yw}(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_y & D_{yw} \end{array} \right], \quad P_{yu}(z) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_y & 0 \end{array} \right].$$

Напомним, что a -анизотропийная норма передаточной функции $T_{zw}(z) \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$ количественно характеризует возможности замкнутой системы по подавлению внешних возмущений наибольшим отношением мощностной нормы выхода этой системы к мощностной норме входа при условии, что средняя анизотропия возмущения не превосходит уровня a [7, 22, 66]:

$$(7) \quad \|T_{zw}\|_a := \sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

Из [22, 66] известно, что a -анизотропийная норма заданной системы $F \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$ является неубывающей функцией уровня средней анизотропии a , удовлетворяющей неравенству

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{m_w}} \|T_{zw}\|_2 = \|T_{zw}\|_0 \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|T_{zw}\|_a = \|T_{zw}\|_\infty.$$

Эти выражения показывают, что \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -нормы являются предельными случаями a -анизотропийной нормы при $a \rightarrow 0, +\infty$, соответственно.

Общая постановка задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора заданного порядка следующая.

Задача синтеза. Для заданных объекта управления P с моделью в пространстве состояний (1), уровня средней анизотропии $a \geq 0$ входного возмущения W и некоторого желаемого порогового значения $\gamma > 0$ найти регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу

$$(9) \quad u_k = Ky_k,$$

стабилизирующий замкнутую систему и гарантирующий, что ее a -анизотропийная норма не превосходит порогового значения γ :

$$(10) \quad \|T_{zw}\|_a < \gamma.$$

2. Решение задачи синтеза

В этом разделе приводится решение общей задачи синтеза регулятора заданного порядка. Для решения задачи синтеза применяется критерий проверки условия ограниченности анизотропийной нормы системы заданным пороговым значением для модели в пространстве состояний. Этот критерий, называемый частотной теоремой для анизотропийной нормы, был недавно представлен в [11, 64]. Чтобы применить данный критерий к задаче синтеза, его требуется переформулировать.

2.1. ЧАСТОТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА

Для объекта управления P и регулятора K , определенных выше, реализация замкнутой системы имеет вид

$$(11) \quad T_{zw}(z) : \begin{bmatrix} \chi_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_k \\ w_k \end{bmatrix},$$

где $\chi_k \in \mathbb{R}^n$, $n = n_x + n_\xi$,

$$(12) \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{array} \right].$$

В [64, 65] показано, что для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$ неравенство (10) выполняется, если существует $\eta > \gamma^2$, такое что неравенство

$$(13) \quad \eta - (e^{-2a} \det(\eta I_{m_w} - \mathcal{B}^T \Phi \mathcal{B} - \mathcal{D}^T \mathcal{D}))^{1/m_w} < \gamma^2$$

выполняется для некоторой вещественной $(n \times n)$ -матрицы $\Phi = \Phi^T \succ 0$, удовлетворяющей ЛМН

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T \Phi \mathcal{A} - \Phi + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{A}^T \Phi \mathcal{B} + \mathcal{C}^T \mathcal{D} \\ \mathcal{B}^T \Phi \mathcal{A} + \mathcal{D}^T \mathcal{C} & \mathcal{B}^T \Phi \mathcal{B} + \mathcal{D}^T \mathcal{D} - \eta I_{m_w} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Условия (13), (14) частотной теоремы для анизотропийной нормы [64, 65] невозможно непосредственно применить для решения поставленной задачи синтеза из-за перекрестных произведений неизвестной матрицы Ляпунова Φ и матриц реализации замкнутой системы $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, аффинно зависящих от K , которые также возникают в (13).

Преодолеть указанную трудность позволяет введение вспомогательной переменной, вещественной $(m_w \times m_w)$ -матрицы $\Psi = \Psi^T \succ 0$, удовлетворяющей неравенствам

$$(15) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2, \quad \Psi \prec \eta I_{m_w} - \mathcal{B}^T \Phi \mathcal{B} - \mathcal{D}^T \mathcal{D},$$

что эквивалентно (13). Чтобы избавиться от произведений матриц Φ , \mathcal{B} и \mathcal{D} , перепишем последнее неравенство в (15) в виде

$$\Psi - \eta I_{m_w} - \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi^{-1} & 0 \\ 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} \prec 0,$$

где $\begin{bmatrix} -\Phi^{-1} & 0 \\ 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0$, что эквивалентно

$$(16) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0$$

в силу леммы Шура (см. например [19]).

Чтобы избавиться от перекрестных произведений матриц Φ , \mathcal{A} , and \mathcal{B} в (14), представим это неравенство в виде

$$\begin{bmatrix} -\Phi + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{C}^T \mathcal{D} \\ \mathcal{D}^T \mathcal{C} & \eta I_{m_w} + \mathcal{D}^T \mathcal{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T \\ \mathcal{B}^T \end{bmatrix} (-\Phi^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} \prec 0,$$

где $-\Phi^{-1} \prec 0$. В силу леммы Шура, предыдущее неравенство эквивалентно

$$(17) \quad \begin{bmatrix} -\Phi + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{C}^T \mathcal{D} & \mathcal{A}^T \\ \mathcal{D}^T \mathcal{C} & \mathcal{D}^T \mathcal{D} - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Чтобы избавиться от перекрестных произведений матриц \mathcal{C} и \mathcal{D} , представим неравенство (17) в виде

$$\begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{D}^T \\ 0 \end{bmatrix} (-I_{p_z})^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 \end{bmatrix} \prec 0$$

где $-I_{p_z} \prec 0$. Повторное применение леммы Шура к предыдущему неравенству и обозначение $\Pi := \Phi^{-1}$ приводят к следующей формулировке частотной теоремы для анизотропийной нормы в терминах взаимнообратных матриц.

Лемма 1. Пусть $T_{zw} \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$ — матричная передаточная функция системы с реализацией (11), где $\rho(\mathcal{A}) < 1$. Анизотропийная норма (7) системы T_{zw} строго ограничена заданным пороговым значением $\gamma > 0$, т.е. $\|T_{zw}\|_a < \gamma$, если система неравенств

$$(18) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(19) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Pi & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(20) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Pi & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(21) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \Phi \succ 0, \quad \Pi \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ и двух взаимнообратных $(n \times n)$ -матриц Φ , Π , удовлетворяющих условию

$$(22) \quad \Phi \Pi = I_n.$$

Замечание 1. Неравенство (18) представляет собой выпуклое ограничение относительно вспомогательной переменной Ψ . Известно, что

1. Функция $(\det \Psi)^p$ ($m \times m$)-матрицы $\Psi = \Psi^T \succcurlyeq 0$ является вогнутой по своему аргументу для любого $0 \leq p \leq \frac{1}{m}$ [16].

2. Функция $(\det \Psi)^{1/m}$ ($m \times m$)-матрицы $\Psi = \Psi^T \succcurlyeq 0$ есть не что иное как среднее геометрическое собственных значений этой матрицы $\sqrt[m]{\lambda_1(\Psi) \dots \lambda_m(\Psi)}$.

3. В [16, с. 105] было показано, что подграфик геометрического среднего двух неотрицательных величин, множество

$$\left\{ (\lambda_1, \lambda_2, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \geq 0, t \leq \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \right\}$$

представимо в виде конуса второго порядка

$$\left\{ (\lambda_1, \lambda_2, t) \mid \exists \tau : t \leq \tau; \tau \geq 0, \left\| \begin{bmatrix} \tau \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right\},$$

а подграфик геометрического среднего 2^l неотрицательных величин, множество

$$\left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{2^l}, t) \in \mathbb{R}^{2^l+1} \mid \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, 2^l, t \leq (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2^l})^{1/2^l} \right\}$$

также представимо в виде пересечения конечного числа конусов второго порядка.

4. В [16, с. 147] было показано, что если p — рациональное число, $0 \leq p \leq \frac{1}{m}$, то выпуклая функция $-(\det \Psi)^p$ ($m \times m$)-матрицы $\Psi = \Psi^T \succcurlyeq 0$ представима в виде ЛМН. А именно, множество

$$\{(\Psi, t) \mid \Psi = \Psi^T \succcurlyeq 0, t \leq (\det \Psi)^p\}$$

представимо в виде

$$\left\{ (\Psi, t) \mid \Psi = \Psi^T \succcurlyeq 0, \begin{bmatrix} \Psi & \Delta \\ \Delta^T & \text{diag } \Delta \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, t \leq (\delta_1 \dots \delta_m)^p \right\},$$

где Δ — нижняя треугольная $(m \times m)$ -матрица, составленная из вспомогательных переменных с диагональными элементами δ_i . Подграфик вогнутого одночлена $t \leq (\delta_1 \dots \delta_m)^p$ представим в виде конуса второго порядка [16, с. 108] и, следовательно, в виде ЛМН.

Замечание 2. Систему неравенств (18)–(21) леммы 1 можно решить с помощью доступных свободно распространяемых программных пакетов для решения задач выпуклой оптимизации, позволяющих использовать выпуклую функцию $-(\det(\Psi))^{1/m}$ $(m \times m)$ -матрицы $\Psi \succcurlyeq 0$ не только в качестве целевой функции, но и в качестве ограничения. Такими программными средствами являются, например, интерфейс YALMIP [45] в сочетании с программой-решателем SeDuMi [63] для систем Matlab и Scilab. В интерфейсе YALMIP функции $-(\det(\Psi))^{1/m}$ соответствует команда `geomean`, возвращающая среднее геометрическое собственных чисел положительно-определенной матрицы [45].

Замечание 3. Проверка выполнения условия $\|T_{zw}\|_a < \gamma$ сводится к поиску положительной скалярной величины η и двух взаимнообратных матриц $\Phi \succ 0$, $\Pi \succ 0$, $\Phi\Pi = I_n$, удовлетворяющих ЛМН (19), (20) и выпуклому ограничению (18). Для численного решения такой задачи могут применяться известные алгоритмы, разработанные в [1, 12, 14, 25, 28, 38, 53, 55, 56] для поиска взаимнообратных матриц, удовлетворяющих выпуклым ограничениям.

2.2. АЛГОРИТМ ПОИСКА ВЗАИМНООБРАТНЫХ МАТРИЦ НА ОСНОВЕ МЕТОДА УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА

Взаимнообратные матрицы $\Phi = \Phi^T \succ 0$, $\Pi = \Pi^T \succ 0$, $\Phi\Pi = I$, удовлетворяющие ЛМН (19), (20) и выпуклому ограничению (18), можно найти с помощью алгоритма на основе метода условного градиента [8, 14, 55], согласно которому задача (18)–(22) рассматривается как задача минимизации вогнутой целевой

функции

$$(23) \quad \begin{aligned} & \operatorname{tr}(\Pi - \Phi^{-1}) \rightarrow \min \\ & \text{на множестве } \Psi, \Phi, \Pi, \eta, \\ & \text{удовлетворяющих ограничениям (18)–(21) и} \end{aligned}$$

$$(24) \quad \begin{bmatrix} \Pi & I \\ I & \Phi \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Целевая функция $f(\Pi, \Phi) = \operatorname{tr}(\Pi - \Phi^{-1})$ является вогнутой по Π и Φ , ее градиент определяется выражениями [55]

$$\nabla_{\Pi} f(\Pi, \Phi) = I, \quad \nabla_{\Phi} f(\Pi, \Phi) = \Phi^{-2}.$$

Алгоритм состоит из следующих шагов:

Алгоритм 1.

1) $k = 0$. Выбираются начальные условия $\Pi_0 > 0$, $\Phi_0 > 0$, удовлетворяющие неравенствам (18)–(21) для некоторых значений Ψ, η .

2) Решается локальная задача выпуклого программирования

$$(25) \quad \begin{aligned} & \operatorname{tr}(\Pi + \Phi_k^{-1} \Phi \Phi_k^{-1}) \rightarrow \min \\ & \text{на множествах } \Psi, \Phi, \Pi, \eta, \\ & \text{удовлетворяющих ограничениям (18)–(21) и} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Pi & I \\ I & \Phi \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

3) Если задача (25) разрешима и неизвестные переменные вычислены, проверяются условия остановки

$$(26) \quad |\operatorname{tr}(\Pi + \Phi_k^{-1} \Phi \Phi_k^{-1})| < \varepsilon, \quad k_N \leq k,$$

где ε – заданная точность, k_N – заданное максимальное число итераций. Если одно из условий (26) выполняется, алгоритм останавливается.

4) $k := k + 1$; $\Phi_k := \Phi$; осуществляется переход к шагу 2.

Известно [8, 14, 55], что целевая функция $f(\Pi, \Phi)$ в алгоритме 1 монотонно убывает и итерации сходятся к точке локального минимума (Π_*, Φ_*) , удовлетворяющей необходимому условию оптимальности [8]

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\Pi_*, \Phi_*), \text{blockdiag}(\Pi - \Pi_*, \Phi - \Phi_*) \rangle = \\ = \text{tr}(\nabla f(\Pi_*, \Phi_*) \text{blockdiag}(\Pi - \Pi_*, \Phi - \Phi_*)) = \\ = \text{tr}(\Pi - \Pi_* + \Phi_*^{-2}\Phi - \Phi_*^{-1}) \geq 0 \\ \forall \Pi, \Phi, \text{удовлетворяющих (18)–(21), (24)}. \end{aligned}$$

В [8] показано, что скорость сходимости метода условного градиента зависит от многих факторов, включая свойства целевой функции и множества решений (гладкость, выпуклость, сильная выпуклость и т.п.). Например, для задачи минимизации вогнутой целевой функции при наличии линейных ограничений вида неравенств метод условного градиента конечен [55].

2.3. СТАТИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО ВЫХОДУ

Прямое применение достаточных условий (18)–(20) леммы 1 к реализации замкнутой системы (12) приводит к следующему прямому решению задачи синтеза.

Следствие 1. Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$ статический регулятор по выходу (9), являющийся решением задачи синтеза, существует, если система неравенств

$$(27) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(28) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(29) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(30) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \Phi \succ 0, \quad \Pi \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $(m_u \times p_y)$ -матрицы K и двух взаимнообратных $(n \times n)$ -матриц Φ , Π , удовлетворяющих условию

$$(31) \quad \Phi\Pi = I_n.$$

Замечание 4. Матрица параметров регулятора K непосредственно входит в неравенства синтеза (28), (29), что позволяет накладывать на нее дополнительные структурные требования для синтеза, например, децентрализованного управления с блочно-диагональной матрицей K или регулятора заданной структуры из решения задачи (27)–(31).

Задача вычисления матрицы статической обратной связи по выходу K , являющейся решением задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора, сводится к задаче поиска взаимнообратных матриц, удовлетворяющих ограничениям (27)–(30), которая может быть решена с помощью алгоритма 1.

3. Вычислительный пример: управление самолетом при заходе на посадку

В качестве вычислительного примера рассмотрим решение задачи управления продольным движением самолета при заходе на посадку по глиссаде с заданным углом наклона в условиях сдвига ветра при наличии шума измерений. Эта задача решена в [44] с помощью анизотропийного оптимального регулятора полного порядка. Полученный регулятор стабилизирует линеаризованную модель объекта управления в отклонениях от желаемых значений переменных состояния при движении по глиссаде с заданным углом наклона в присутствии детерминированного (сдвиг ветра) и стохастических возмущений.

3.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Продольное движение самолета с учетом ветровых возмущений в скоростной системе координат (касательная и нормаль к

траектории полета) описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений [2, 3]

$$(32) \quad \begin{cases} m\dot{V} &= T \cos \alpha - D - mg \sin \theta - m(\dot{w}_x \cos \theta + \dot{w}_y \sin \theta), \\ mV\dot{\theta} &= T \sin \alpha + L - mg \cos \theta + m(\dot{w}_x \sin \theta - \dot{w}_y \cos \theta), \\ J_z \dot{\omega}_z &= M_z, \\ \dot{\vartheta} &= \omega_z, \end{cases}$$

где m — масса самолета; V — воздушная скорость; T — сила тяги; α — угол атаки; D — сила лобового сопротивления; g — ускорение свободного падения; θ — угол наклона траектории полета; \dot{w}_x и \dot{w}_y — полные градиенты горизонтальной и вертикальной составляющих скорости ветра в инерциальной системе отсчета соответственно; L — подъемная сила; J_z — момент инерции относительно поперечной оси z самолета; ω_z — угловая скорость относительно поперечной оси z самолета; M_z — момент тангажа и $\vartheta = \alpha + \theta$ — угол тангажа (см. рис. 2).

Эти уравнения справедливы в предположении, что самолет жесткий, направление силы тяги совпадает с осью самолета, масса самолета постоянна, Земля плоская, ветер стационарный [3]. Модель (32) также не содержит аналитических зависимостей для силы лобового сопротивления D , подъемной силы L , момента инерции самолета J_z и момента тангажа M_z . Предполагается, что значения этих переменных являются табличными значениями, полученными в результате экспериментов, и выбираются из соответствующих таблиц при линеаризации нелинейной модели (32) [9, 10].

Сила тяги T и угол атаки α являются переменными управления в уравнениях (32) и в свою очередь зависят от отклонения сектора газа δ_t и обобщенного руля высоты самолета δ_e соответственно. Таким образом, управление самолетом в продольной плоскости реализуется с помощью обобщенного руля высоты δ_e и сектора газа δ_t .

Дифференциальное уравнение для высоты центра масс самолета имеет вид

$$(33) \quad \dot{h} = V \sin \theta + w_y.$$

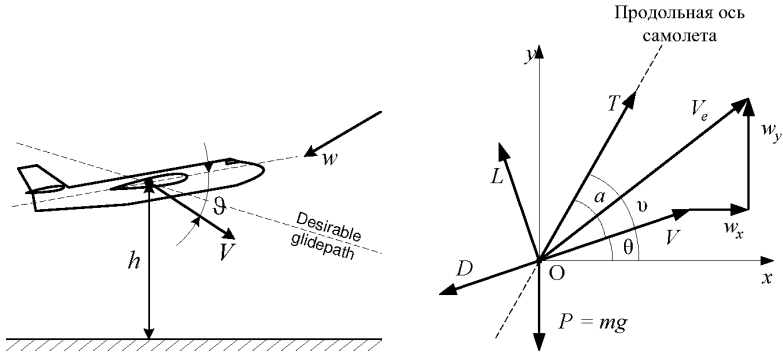


Рис. 2. К задаче управления продольным движением самолета.
Система координат и переменные

Динамика двигателя описывается следующим уравнением

$$(34) \quad \Delta \dot{T} = \frac{1}{T_e} (-\Delta T + K_e \Delta \delta_t),$$

где T_e — постоянная времени двигателя; K_e — некоторый заданный числовой коэффициент и $\Delta \delta_t$ — отклонение сектора газа от предписанного значения.

Отклонение обобщенного руля высоты $\Delta \delta_t$ с учетом контура короткопериодического движения формируется следующим образом

$$\Delta \delta_e = K_{\omega_z} \Delta \omega_z + K_{\vartheta} \Delta \vartheta + K_{c\vartheta} \Delta \vartheta_{c\vartheta},$$

где K_{ω_z} , K_{ϑ} , и $K_{c\vartheta}$ — некоторые заданные числовые коэффициенты; $\Delta \vartheta_{c\vartheta}$ — сигнал управления, формируемый регулятором.

Анизотропный, линейно-квадратичный гауссовский и \mathcal{H}_∞ -регуляторы синтезированы для модели самолета Ту-154 при заходе на посадку по глиссаде с углом наклона $\theta_0 = -2,7$ град. Нелинейные уравнения (32)–(34), описывающие продольное движение самолета, линеаризованы в точке траектории

$$V_0 = 71,375 \text{ м/сек}, \quad \theta_0 = -2,7 \text{ град}, \quad \omega_{z0} = 0 \text{ сек}^{-1} \\ \vartheta_0 = 0 \text{ град}, \quad h_0 = 600 \text{ м}, \quad T_0 = 52540 \text{ Н}.$$

Стандартная линеаризованная дискретная стационарная модель объекта управления (1) была получена для значения шага дис-

кретизации 0,01 с, имеет порядок $n_x = 6$. В окрестности заданной глissады продольное движение самолета аппроксимируется дискретной линеаризованной моделью в отклонениях (1), где

$$\begin{aligned} x_k &= [\Delta V_k \quad \Delta \theta_k \quad \Delta \omega_{z,k} \quad \Delta \vartheta_k \quad \Delta h_k \quad \Delta T_k]^T, \\ w_k &= [n_{u_1,k} \quad n_{u_2,k} \quad n_{y_1,k} \quad n_{y_2,k}]^T, \\ u_k &= [\Delta \theta_{cy,k} \quad \Delta \delta_{t,k}]^T, \\ z_k &= [\Delta V_k \quad \Delta h_k \quad \Delta \vartheta_{cy,k} \quad \Delta \delta_{t,k}]^T, \\ y_k &= [\Delta V_k + n_{y_1,k} \quad \Delta h_k + n_{y_2,k}]^T, \end{aligned}$$

где V_k — воздушная скорость самолета; θ_k — угол наклона траектории; $\omega_{z,k}$ — угловая скорость тангажа; ϑ_k — угол тангажа; h_k — высота центра масс; T_k — тяга двигателей; $\theta_{cy,k}$ — управление обобщенными рулями высоты; $\delta_{t,k}$ — управление сектором газа; $n_{u_1,k}$, $n_{u_2,k}$, $n_{y_1,k}$, $n_{y_2,k}$ — шумы приводов и измерений. Матрицы реализации модели в пространстве состояний имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0,9994 & -0,0008 & 0 & -0,0009 & 0 & 0,0009 \\ 0,0022 & 0,9938 & 0,0011 & 0,0072 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0,0052 & 0,9842 & -0,0154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0099 & 0,9999 & 0 & 0 \\ -0,0005 & 0,0124 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9960 \end{bmatrix}, \\ B_u &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,0012 & 0 \\ 0,0117 & 0 \\ 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,004 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_w &= \begin{bmatrix} 0 & -0,01 & 0,0005 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0004 & -0,008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D_{yw} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.2. СТАТИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО ВЫХОДУ

Для задачи управления посадкой самолета Ту-154 в условиях сдвига ветра был синтезирован анизотропийный субоптимальный регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу. Матрица коэффициента усиления регулятора вычислялась из решения системы неравенств (27)–(30) при ограничении (37) в соответствии с алгоритмом 1 для заданного уровня средней анизотропии внешнего возмущения $a = 0,1$ и фиксированного порогового значения анизотропийной нормы замкнутой системы $\gamma = 20$. При синтезе регулятора учитывалось дополнительное требование расположения полюсов замкнутой системы в выпуклой ЛМН-области комплексной плоскости — в диске с центром в начале координат $D_r = \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$ радиусом $r = 0,9997$. С этой целью неравенства синтеза (27)–(30) были дополнены неравенствами

$$(35) \quad \begin{bmatrix} -rQ & A + B_u K C_y \\ A^T + C_y^T K^T B_u^T & -rP \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(36) \quad P \succ 0, \quad Q \succ 0,$$

а невыпуклое ограничение (31) — ограничением

$$(37) \quad PQ = I_{n_x}.$$

Заданная точность для условий (26) остановки алгоритма принималась равной $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-7}$, максимальное число итераций $k_N = 1500$. Начальные условия $\Pi_0 \succ 0$, $\Phi_0 \succ 0$, $P_0 \succ 0$, $Q_0 \succ 0$ алгоритма 1 выбирались из решения системы неравенств (27)–(30), (35), (36) без учета невыпуклых ограничений (31), (37).

Матрица коэффициента усиления анизотропийного субоптимального статического регулятора по выходу K_a представлена ниже вместе с матрицами K_2 - и K_∞ -статических \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторов:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0,3394 & -0,1779 \\ -0,9803 & -0,1322 \end{bmatrix}, \quad K_\infty = \begin{bmatrix} -0,2051 & -0,1793 \\ -0,2716 & -0,01814 \end{bmatrix},$$

$$K_a = \begin{bmatrix} -0,3265 & -0,08319 \\ -1,075 & -0,09644 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования замкнутых систем с расположением полюсов в заданной ЛМН-области в условиях сдвига ветра и шумов измерений представлены вместе с результатами решения задачи в таблице 1 и проиллюстрированы на рис. 3–8. При моделировании применялся типичный профиль ветра, описываемый моделью в форме вихревого кольца [37].

Таблица 1. Посадка самолета Ту-154: статическая обратная связь по измеряемому выходу. Сравнение замкнутых систем

	Регулятор в цепи обратной связи		
	K_2	K_a	K_∞
Результаты решения:			
γ	20	20	20
$\ T_{zw}\ _2$	1,2241	1,3582	0,81519
$\ T_{zw}\ _{0,1}$	3,3179	5,7172	7,2877
$\ T_{zw}\ _\infty$	16,453	28,652	36,734
Число итераций:	654	782	639
Результаты моделирования:			
max $ \Delta V $, м/с	7,063	3,089	11,69
max $ \Delta h $, м	81,9	93,56	80,51
max $ \Delta \theta $, град	12,4	7,081	11,45
max $ \Delta \omega_z $, град/с	2,767	1,369	2,751
max $ \Delta \vartheta $, град	15,03	8,168	14,77
max $ \Delta T $, кН	11,91	9,267	3,226
max $ \Delta \vartheta_{cy} $, град	15,81	8,405	15,51
max $ \Delta \delta_t $, град	14,47	11,25	3,845

Из результатов решения задачи в таблице 1 и на рис. 8 можно заключить, что

- a -анизотропийная норма замкнутой системы с анизотропийным γ -оптимальным регулятором удовлетворяет условию $\|T_{zw}\|_{0,1} < \gamma$; регулятор является субоптимальным;
- \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -нормы замкнутых систем с \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторами удовлетворяют условиям $\|T_{zw}\|_2 < \gamma_2$, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_\infty$;
- для всех замкнутых систем выполняется требование размещения полюсов в диске \mathcal{D}_r заданного радиуса $r = 0,9997$.

Анализ результатов моделирования, представленных в таблице 1 и на рис. 3–6 показывает, что

- анизотропный субоптимальный регулятор приводит к наименьшей амплитуде отклонения воздушной скорости и наибольшей амплитуде отклонения высоты;
- время установления переходных процессов в системе с анизотропным регулятором меньше, чем в системах с \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторами;
- в замкнутой системе с анизотропным регулятором амплитуды отклонения угла наклона траектории, угловой скорости тангажа и угла тангажа значительно меньше, чем в замкнутых системах с \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -регуляторами;
- наименьшая дополнительная тяга двигателя наблюдается в системе с \mathcal{H}_∞ -регулятором;
- амплитуды сигналов управления анизотропного статического регулятора по выходу меньше, чем у \mathcal{H}_2 -регулятора и больше, чем у \mathcal{H}_∞ -регулятора.

3.3. РЕГУЛЯТОРЫ ЗАДАННОГО ПОРЯДКА

Для решения задачи управления самолетом в режиме посадки были также построены анизотропные субоптимальные регуляторы заданного порядка $n_\xi = 1, \dots, 6$, которые вычислялись из решения системы неравенств (27)–(30) при ограничении (31) в соответствии с алгоритмом 1 для расширенного объекта управления вида (3). Для нахождения взаимнообратных матриц $\Pi \succ 0$, $\Phi \succ 0$, $\Pi\Phi = I$, удовлетворяющих ЛМН (28), (29) и выпуклому ограничению (27) применялся алгоритм 1 на основе метода условного градиента.

Анизотропные субоптимальные регуляторы заданных порядков $n_\xi = 1, \dots, 6$, вычислялись для заданного уровня средней

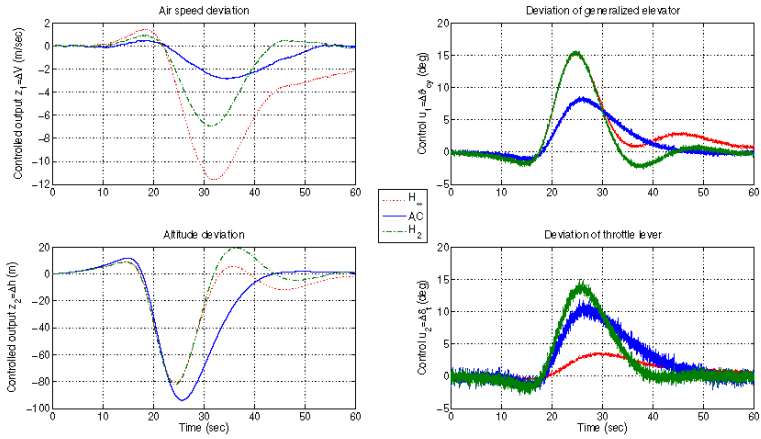


Рис. 3. Посадка самолета Ту-154: статический регулятор по выходу. Воздушная скорость ΔV , высота Δh (диаграммы слева) и сигналы управления $\Delta\vartheta_{cy}$, $\Delta\delta_t$ (диаграммы справа)

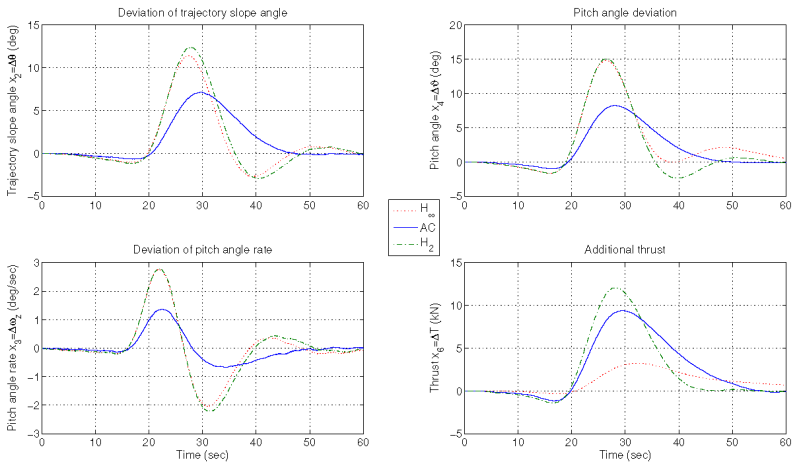


Рис. 4. Посадка самолета Ту-154: статический регулятор по выходу. Угол наклона траектории $\Delta\theta$, угловая скорость тангажа $\Delta\omega_z$ (диаграммы слева), угол тангажа $\Delta\vartheta$, тяга двигателя ΔT (диаграммы справа)

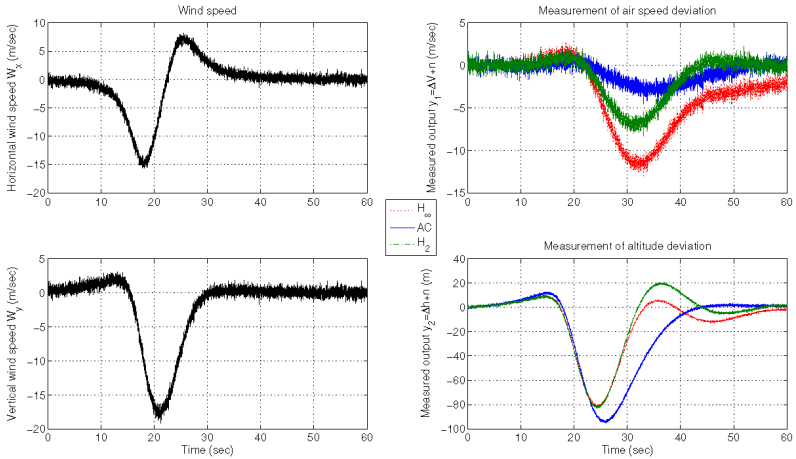


Рис. 5. Посадка самолета Ту-154: статический регулятор по выходу. Профиль ветра (диаграммы слева) и измерения с шумами (диаграммы справа)

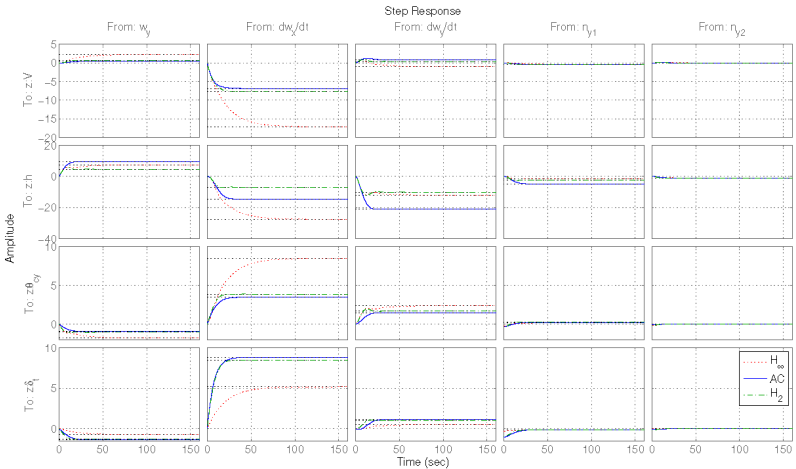


Рис. 6. Посадка самолета Ту-154: статический регулятор по выходу. Переходные характеристики

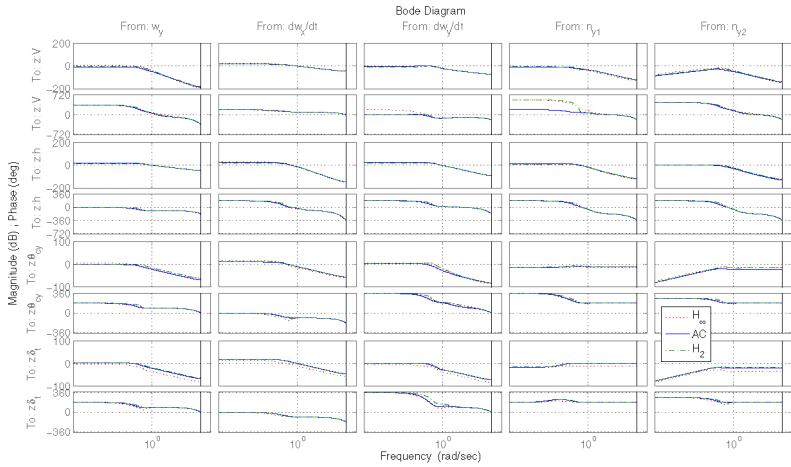


Рис. 7. Посадка самолета Ту-154: статический регулятор по выходу. Диаграмма Бode

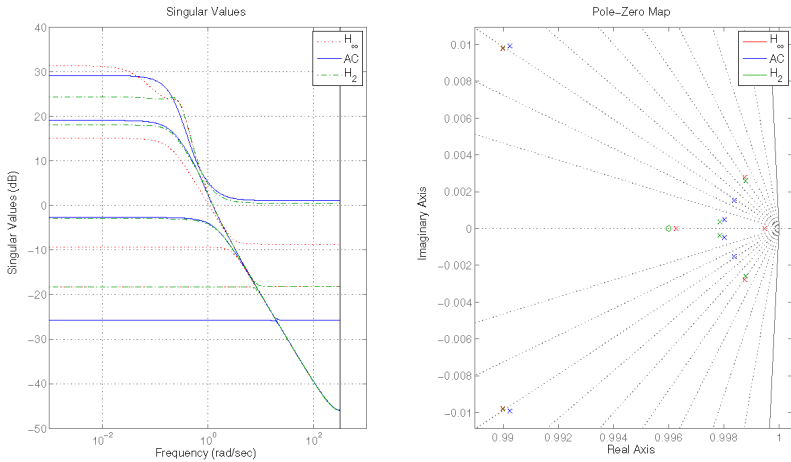


Рис. 8. Посадка самолета Ту-154: статический регулятор по выходу. Сингулярные значения (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

анизотропии внешнего возмущения $a = 0,7$ и фиксированного порогового значения анизотропийной нормы замкнутой системы $\gamma = 20$. При синтезе регуляторов учитывалось дополнительное требование расположения полюсов замкнутой системы в выпуклой ЛМН-области на комплексной плоскости — в диске с центром в начале координат $\mathcal{D}_r = \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$ радиусом $r = 0,9997$. С этой целью неравенства синтеза (27)–(30) были дополнены неравенствами (35), (36), а невыпуклое ограничение (31) — ограничением (37), и фактически осуществлялся поиск двух пар взаимнообратных матриц, удовлетворяющих условию

$$\begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = I_{2n},$$

$n = n_x + n_\xi$. Заданная точность для условий (26) остановки алгоритма принималась равной $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-7}$, максимальное число итераций $k_N = 1500$. Начальные условия $\Pi_0 \succ 0$, $\Phi_0 \succ 0$, $P_0 \succ 0$, $Q_0 \succ 0$ выбирались из решения системы неравенств (27)–(30), (35), (36) без учета невыпуклых ограничений (31), (37). Для регуляторов $K_a^{n_\xi}$ порядков $n_\xi = 5, 3$ заданная точность ε не была достигнута за k_N шагов. Реализации синтезированных регуляторов $K_a^{n_\xi}$ порядков $n_\xi = 6, 4, 2, 1$ приводятся ниже:

$$K_a^6 = \begin{bmatrix} A_c^6 & B_c^6 \\ C_c^6 & D_c^6 \end{bmatrix},$$

$$A_c^6 = \begin{bmatrix} 0,0024 & -0,0002 & -0,0015 & -0,0013 & -0,00084 & 0,00024 \\ -0,00014 & 0,0021 & -0,00029 & 0,0022 & -0,00052 & -0,00042 \\ -0,0014 & -0,0002 & 0,0011 & 0,00047 & 0,00069 & -5,96 \cdot 10^{-5} \\ -0,0015 & 0,0025 & 0,00057 & 0,0035 & -6,2 \cdot 10^{-5} & -0,00055 \\ -0,00083 & -0,00047 & 0,00072 & -8,27 \cdot 10^{-5} & 0,00054 & 3,77 \cdot 10^{-5} \\ 0,00028 & -0,00041 & -8,9 \cdot 10^{-5} & -0,00049 & 1,69 \cdot 10^{-5} & 0,00013 \end{bmatrix},$$

$$C_c^6 = \begin{bmatrix} 1,006 & 0,2312 & -0,7747 & -0,3115 & -0,5271 & 0,01095 \\ -0,8721 & -0,1261 & 0,2615 & 0,2941 & 0,1298 & -0,05475 \end{bmatrix},$$

$$B_c^6 = \begin{bmatrix} -0,002336 & 0,009808 \\ 0,001071 & -0,01202 \\ 0,002105 & -0,005306 \\ -0,003142 & -0,01961 \\ 0,0009146 & -0,00228 \\ -0,001945 & 0,002905 \end{bmatrix}, \quad D_c^6 = \begin{bmatrix} -0,2988 & -0,1826 \\ -0,2011 & -0,1891 \end{bmatrix},$$

$$K_a^4 = \begin{bmatrix} 0,001124 & 0,0001895 & -0,0009076 & -0,0003107 & 0,00445 & -0,001455 \\ 0,000213 & 0,001551 & 0,0008611 & -0,0003292 & 0,004879 & -0,008758 \\ -0,0009223 & 0,0008697 & 0,003372 & -0,0003911 & -0,002122 & -0,01597 \\ -0,000304 & -0,0003404 & -0,0004638 & 0,0002996 & -0,0001242 & 0,00594 \\ -1,009 & -0,1889 & 0,6695 & 0,3422 & -0,286 & -0,187 \\ -0,326 & 0,8818 & 0,1112 & 0,0734 & -0,1897 & -0,198 \end{bmatrix},$$

$$K_a^2 = \begin{bmatrix} 0,0004513 & -0,0003284 & 0,003121 & -0,001795 \\ -0,0003007 & 0,001849 & 0,001835 & -0,008197 \\ 0,536 & -0,4517 & -0,2988 & -0,1636 \\ -0,4541 & 1,084 & -0,02619 & -0,007835 \end{bmatrix},$$

$$K_a^1 = \begin{bmatrix} 0,3851 & 0,01642 & -0,0256 \\ -6,05 & -0,1921 & -0,4216 \\ 7,858 & -0,2948 & 0,1986 \end{bmatrix}.$$

Таблица 2. Посадка самолета Ту-154: регуляторы заданного порядка. Сравнение замкнутых систем

	Порядок анизотропийного субоптимального регулятора			
	$K_a^6, n_\xi = 6$	$K_a^4, n_\xi = 4$	$K_a^2, n_\xi = 2$	$K_a^1, n_\xi = 1$
Результаты решения:				
γ	20	20	20	20
$\ T_{zw}\ _2$	0,79969	0,77843	0,83191	0,93857
$\ T_{zw}\ _{0,7}$	12,458	12,144	19,224	14,885
$\ T_{zw}\ _\infty$	25,197	24,564	49,011	30,109
Число итераций:	1321	1173	1069	972
Результаты моделирования:				
$\max \Delta V $, м/с	4,861	6,349	12,13	8,27
$\max \Delta h $, м	82,89	79,63	82,78	82,15
$\max \Delta \theta $, град	11,93	13,18	10,8	11,88
$\max \Delta \omega_z $, град/с	2,561	2,946	2,565	2,672
$\max \Delta \vartheta $, град	13,73	15,45	14	14,39
$\max \Delta T $, кН	14,66	14,2	1,218	9,205
$\max \Delta \vartheta_{cy} $, град	14,13	16	14,59	15,15
$\max \Delta \delta_t $, град	17,27	16,96	1,423	11,25

Результаты моделирования замкнутых систем в условиях сдвига ветра и шумов измерений представлены вместе с результатами решения задачи в таблице 2 и показаны на диаграммах рис. 9–14. Из результатов решения задачи в таблице 2 и на рис. 14 можно заключить, что

- для всех замкнутых систем с анизотропийными регуляторами $K_a^{n_\xi}$ заданных порядков $n_\xi = 6, 4, 2, 1$, а анизотропийная норма удовлетворяет условию $\|T_{zw}\|_{0,7} < \gamma$; все регуляторы являются субоптимальными;
- для всех замкнутых систем выполняется требование размещения полюсов в диске \mathcal{D}_r заданного радиуса $r = 0,9997$.

Анализ результатов моделирования, представленных в таблице 2 и на рис. 9–14 показывает, что

- наименьшая амплитуда отклонения воздушной скорости наблюдается в замкнутой системе с регулятором 6-го порядка, наибольшая — в системе с регулятором 2-го порядка;
- наименьшая амплитуда отклонения высоты наблюдается в замкнутой системе с регулятором 4-го порядка, наибольшая — в системе с регулятором 6-го порядка;
- в замкнутой системе с регулятором 4-го порядка наблюдается наибольшее отклонение рулей высоты, наименьшее — в системе с регулятором 6-го порядка;
- в замкнутой системе с регулятором 6-го порядка наблюдается наибольшее отклонение сектора газа, наименьшее — в системе с регулятором 2-го порядка.

В сравнении с субоптимальными регуляторами заданного порядка (таблица 2), качество работы замкнутых систем со статическими анизотропийными регуляторами по выходу (таблица 1) хуже. В то же время статические регуляторы характеризуются меньшими амплитудами управляющих сигналов и амплитудами отклонений угла наклона траектории, угловой скорости тангажа, угла тангажа и тяги двигателя.

Алгоритм 1 на основе метода условного градиента в данной задаче показал низкую скорость сходимости (см. таблицы 1, 2,

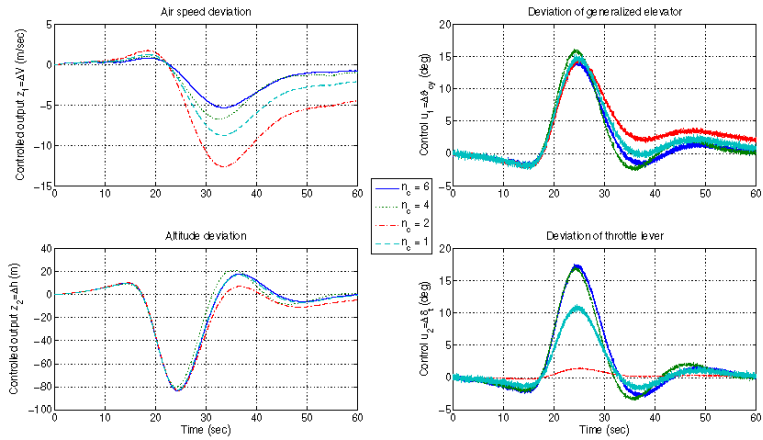


Рис. 9. Посадка самолета Ту-154: регуляторы заданного порядка. Воздушная скорость ΔV , высота Δh (диаграммы слева) и сигналы управления $\Delta \delta_{cy}$, $\Delta \delta_t$ (диаграммы справа)

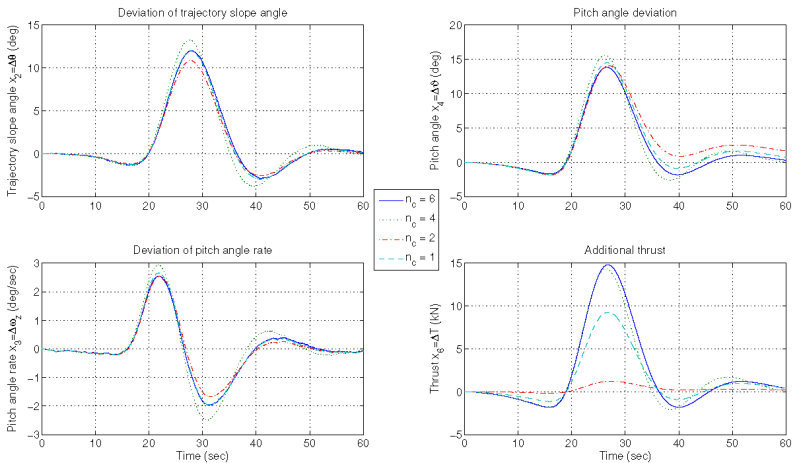


Рис. 10. Посадка самолета Ту-154: регуляторы заданного порядка. Угол наклона траектории $\Delta \theta$, угловая скорость тангажа $\Delta \omega_z$ (диаграммы слева), угол тангажа $\Delta \vartheta$, тяга двигателя ΔT (диаграммы справа)

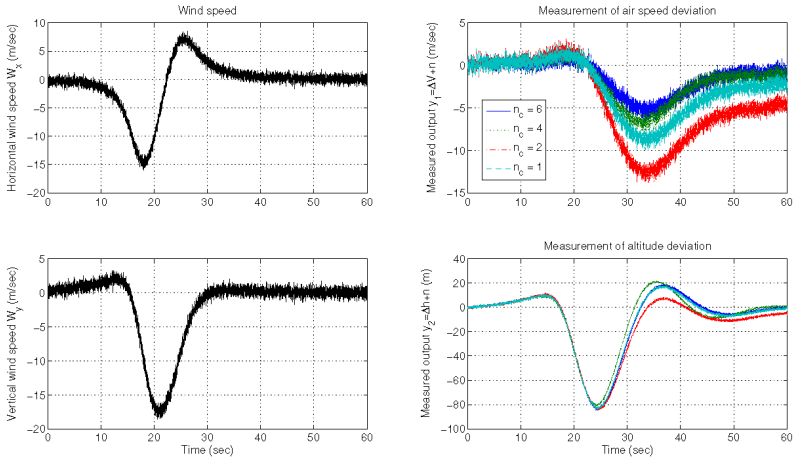


Рис. 11. Посадка самолета Ту-154: регуляторы заданного порядка. Профиль ветра (диаграммы слева) и измерения с шумами (диаграммы справа)

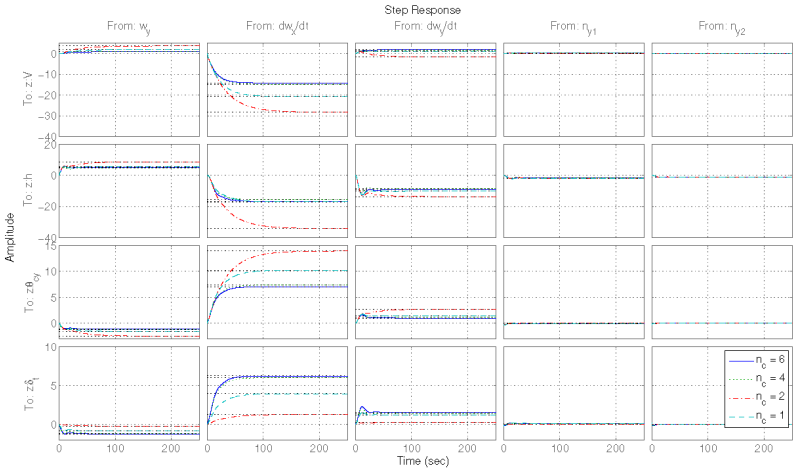


Рис. 12. Посадка самолета Ту-154: регуляторы заданного порядка. Переходные характеристики

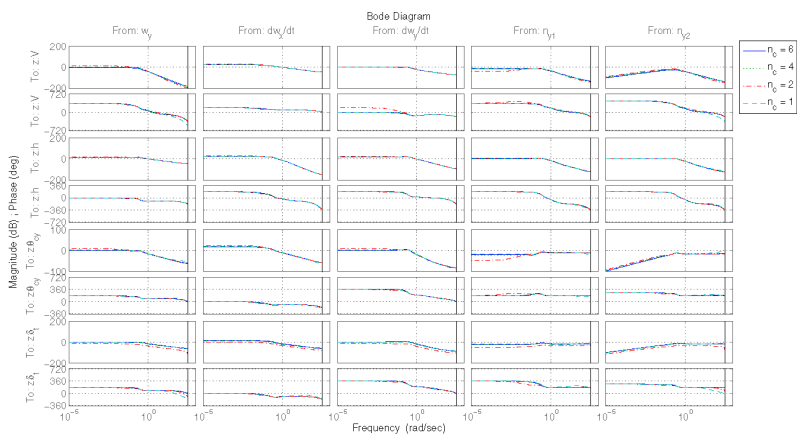


Рис. 13. Посадка самолета Ту-154: регуляторы заданного порядка. Диаграмма Бode

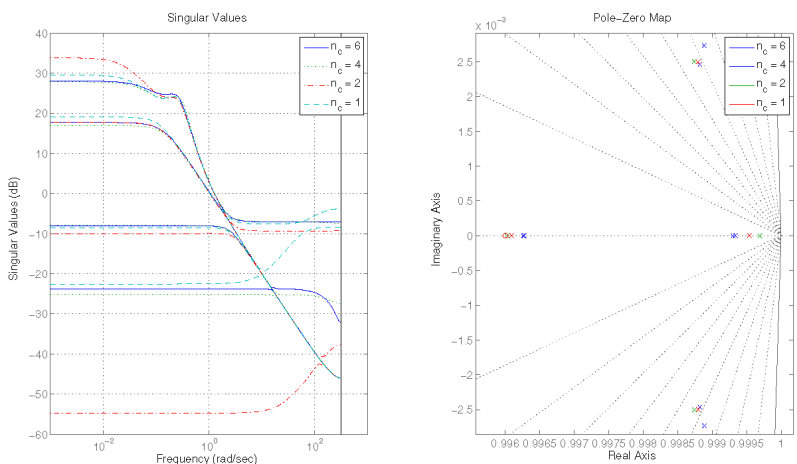


Рис. 14. Посадка самолета Ту-154: регуляторы заданного порядка. Сингулярные значения (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

число итераций). Для алгоритма поиска взаимнообратных матриц, разработанного в [1], не удалось подобрать начальных условий, которые приводили бы к его сходимости к глобальному минимуму и к нахождению решений. Для генерации точек начальных условий алгоритма 1, равномерно распределенных на множестве решений системы неравенств (27)–(30), (35), (36), можно применить алгоритм “Hit&Run” [55].

4. Заключение

В работе предлагается метод решения задач синтеза анизотропийных субоптимальных регуляторов, основанный на полуопределенном программировании и выпуклой оптимизации. Анизотропийный субоптимальный регулятор стабилизирует замкнутую систему и гарантирует, что ее анизотропийная норма не превосходит заданного порогового значения. Общая процедура синтеза регулятора заданного порядка сводится к решению неравенства относительно детерминанта положительно определенной матрицы и двух ЛМН относительно взаимнообратных матриц; задача оптимизации не является выпуклой. Для решения этой задачи применяется локально-оптимальный алгоритм поиска взаимнообратных матриц на основе метода условного градиента. В сравнении с решением задачи синтеза анизотропийного оптимального регулятора [67], предлагаемый подход на основе полуопределенного программирования является новым и позволяет учитывать при проектировании ряд дополнительных требований к замкнутой системе, например, заданную структуру регулятора.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц* // АиТ. – 2005, №1. – С. 82-99.
2. БОДНЕР В.А., КОЗЛОВ М.С. *Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты*. М: Оборонгиз, 1961.

3. БУКОВ В.Н. *Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом*. М.: Наука, 1987.
4. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД П., КЛОЕДЕН П. *Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале* // *АиТ*. – 2006, №8. – С. 92-111.
5. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // *ДАН*. – 1995. №3. – С. 583-585.
6. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Стохастическая проблема \mathcal{H}_∞ -оптимизации* // *ДАН*. – 1995. – Т. 343, №5. – С. 607-609.
7. КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А. *Решение задачи стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации для линейной системы с неопределенностью* // *АиТ*. – 2006, №8. – С. 112-142.
8. ПОЛЯК Б.Т. *Введение в оптимизацию*. М.: Наука, 1983.
9. *Разработка основ теории нетрадиционных подходов и исследование алгоритмов управления полетом в сложных условиях. Отчет о научно-исследовательской работе по теме №074-95/01*. М: Институт проблем управления РАН, 1995.
10. *Разработка принципов автоматизации полета и исследования новых алгоритмов управления на этапах захода на посадку и приземления. Отчет о научно-исследовательской работе по теме №053-93/01*. М: Институт проблем управления РАН, 1993.
11. ЧАЙКОВСКИЙ М.М., КУРДЮКОВ А.П. *Критерий строгой ограниченности анизотропийной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств* // *ДАН*. – 2011, Т.441, №3. – С. 318-321.
12. APKARIAN, P., NOLL, D., TUAN, H.D. *Fixed-order \mathcal{H}_∞ control design via a partially augmented Lagrangian method* // *Int. J. of Nonlinear and Robust Contr.* – 2003. – Vol. 13. – P. 1137-1148.
13. APKARIAN, P., PELLANDA, P.C., TUAN, H.D. *Mixed*

- $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ multi-channel linear parameter-varying control in discrete time // Syst. & Contr. Lett. – 2000. – Vol. 41. – P. 333-346.
14. APKARIAN, P., TUAN, H.D. *Concave programming in control theory* // J. of Glob. Opt. – 1999. – Vol. 15. – P. 343-370.
 15. ARZELIER, D., PEAUCELLE, D. *An iterative method for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ synthesis via static output feedback* // Proc. IEEE Conf. Dec. Contr. – 2002. – P. 3464-3469.
 16. BEN-TAL, A., NEMIROVSKII, A. *Lectures on Modern Convex Optimization*. Technion, Haifa, Israel, 2000.
 17. BERNSTEIN, D.S., HADDAD, W.M. *LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound: a Riccati equation approach* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 293-305.
 18. BOYD, S.P., GHAOUI, L.EL. *Method of centers for minimizing generalized eigenvalues* // Lin. Alg. Appl. – 1993. – Vol. 188. – P. 63-111.
 19. BOYD, S., GHAOUI, L.EL., FERON, E., BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control theory*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
 20. CHEN, X., WEN, J.T. *A linear matrix inequality approach to the general mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem* // Proc. American Control Conf. – 1995. – P. 1443-1447.
 21. DIAMOND, P., KURDJUKOV, A.P., SEMYONOV, A.V., VLADIMIROV, I.G. *Homotopy methods and anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ optimization of control systems* // Report 97-14 of The University of Queensland, Australia. – 1997. – P. 1-22.
 22. DIAMOND, P., VLADIMIROV, I.G., KURDYUKOV, A.P., SEMYONOV, A.V. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. of Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 28-42.
 23. DOYLE, J.C. *Guaranteed margins for LQG regulators* // IEEE Trans. AC. – 1978. – Vol. 23. – P. 756-757.
 24. DOYLE, J.C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P.P.,

- FRANCIS, B.A. *State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 831-848.
25. FARES, B., APKARIAN, P., NOLL, D. *An augmented Lagrangian method for a class of LMI-constrained problems in robust control theory* // Int. J. of Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 348-360.
26. FRIDMAN, E., SHAKED, U. *Robust \mathcal{H}_∞ minimum entropy static output-feedback control of singularly perturbed systems* // Automatica. – 2000. – Vol. 36. – P. 1181-1188.
27. GAHINET, P., APKARIAN, P. *A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control* // Int. J. of Robust and Nonlinear Contr. – 1994. – Vol. 4. – P. 421-448.
28. GHAOUI, L.EL., OUSTRY, F., RAMI, M.A. *A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems* // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – P. 1171-1176.
29. GLOVER, K., DOYLE, J.C. *State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an \mathcal{H}_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity* // Syst. & Contr. Lett. – 1988. – Vol. 11. – P. 167-172.
30. GUSEV, S.V. *Minimax control under a bound on the partial covariance sequence of the disturbance* // Automatica. – 1995. – Vol. 31. – P. 1287-1301.
31. GUSEV, S.V. *Minimax control under a restriction on the moments of disturbance* // Proc. 34th IEEE Conf. on Decision and Control, New Orleans, USA. – 1995. – P. 1195-1200.
32. GUSEV, S.V. *Method of moment restrictions in robust control and filtering* // Proc. 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA. – 1996. – P. 415-420.
33. HINDI, H.A., HASSIBI, B., BOYD, S.P. *Multiobjective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -optimal control via finite dimensional Q-parametrization and linear matrix inequalities* // Proc. American Control Conf. – 1998. – P. 3244-3248.
34. IGLESIAS, P.A., MUSTAFA, D. *State-space solution of*

- the discrete-time minimum entropy control problem via separation* // IEEE Trans. AC. – 1993. – Vol. 38. – P. 1525-1530.
35. IWASAKI, T., SKELTON, R.E. *All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas* // Automatica. – 1994. – Vol. 30. – P. 1307-1317.
36. IGLESIAS, P.A., MUSTAFA, D., GLOVER, K. *Discrete time \mathcal{H}_∞ controllers satisfying a minimum entropy criterion* // Syst. & Contr. Lett. – Vol. 14. – P. 275-286.
37. IVAN, M. *A ring vortex downburst model for flight simulation* // J. Aircraft. – 1996. – Vol. 23. – P. 232-236.
38. IWASAKI, T., SKELTON, R.E. *The XY-centering algorithm for the dual LMI Problem: A new approach to fixed order design* // Int. J. of Contr. – 1995. – Vol. 62. – P. 1257-1272.
39. JACOBSON, D.H. *Extensions of Linear-Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory*. Academic Press, NY, 1977.
40. KHARGONEKAR, P.P., ROTEA, M.A. *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach* // IEEE Trans. AC. – 1991. – Vol. 36. P. 824-837.
41. KIMURA, H. *Pole assignment by gain output feedback* // IEEE Trans. AC. – 1975. – Vol. AC-20. – P. 509-516.
42. KURDYUKOV, A.P., MAXIMOV, E.A. *State-space solution to stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem with uncertainty* // Proc. 16th IFAC World Congr., Prague, Czechia. – 2005.
43. KURDYUKOV, A.P., MAXIMOV, E.A., TCHAIKOVSKY, M.M. *Anisotropy-based bounded real lemma* // Proc. 19th Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapest, Hungary. – 2010. – P. 2391-2397.
44. KURDYUKOV, A.P., PAVLOV, B.V., TIMIN, V.N., VLADIMIROV, I.G. *Longitudinal anisotropy-based flight control in a wind shear* // Proc. 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia. – 2004.
45. L"OFBERG, J. *YALMIP: A toolbox for modeling*

- and optimization in MATLAB* // Proc. of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan. – 2004. Available from <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
46. MASUBUCHI, I., OHARA, A., SUDA, N. *LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution* // Int. J. of Robust and Nonlinear Contr. – 1998. – Vol. 8. – P. 669-686.
 47. MAXIMOV, E.A., KURDYUKOV, A.P., VLADIMIROV, I.G. *Anisotropic norm bounded real lemma for linear discrete time varying systems* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy. – 2011.
 48. MIRADORE, R., RICCI, G. *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: the discrete-time case* // Syst. & Contr. Lett. – 2005, – Vol. 54. – P. 1-13.
 49. MUSTAFA, D., GLOVER, K. *Minimum Entropy \mathcal{H}_∞ Control*. Springer-Verlag, NY, 1991.
 50. MUSTAFA, D., GLOVER, K., LIMEBEER, D. *Solutions to the \mathcal{H}_∞ general distance problem which minimize an entropy integral* // Automatica. – 1991. – Vol. 27. – P. 193-199.
 51. NEMIROVSKII, A., GAHINET, P. *The projective method for solving linear matrix inequalities* // Math. Programming Series B. – 1997. – Vol. 77. – P. 163-190.
 52. NESTEROV, YU., NEMIROVSKII, A. *Interior-point Polynomial Methods in Convex Programming*, volume 13 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
 53. NOLL, D., TORKI, M., APKARIAN, P. *Partially augmented Lagrangian method for matrix inequality constraints* // SIAM J. on Opt. – 2004. – Vol. 15. – P. 161-184.
 54. OLIVEIRA, M.C., GEROMEL, J.C., BERBNUSSOU, J. *An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems* // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. – 1999. – P. 27-38.
 55. POLYAK, B.T., GRYAZINA, E.N. *Hit-and-Run: Randomized technique for control problems recasted as concave*

- programming* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy. – 2011.
56. POLYAK, B.T., GRYAZINA, E.N. *Markov chain Monte Carlo method exploiting barrier functions with applications to control and optimization* // Proc. IEEE Multi-Conf. on Systems and Control. – 2010. – P. 1553-1557.
 57. ROTSTEIN, H., SZNAIER, M. *An exact solution to general four-block discrete-time mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ problems via convex optimization* // IEEE Trans. AC. – 1998. – Vol. 43. – P. 1475-1481.
 58. SCHERER, C.W. *Multiobjective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control* // IEEE Trans. AC. – 1995. – Vol. 40. – P. 1054-1062.
 59. SCHERER, C.W. *Robust controller design by output feedback against uncertain stochastic disturbances* // Proc. 3rd IFAC Symp. on Robust Control Design, Prague, Czechia. – 2000.
 60. SCHERER, C.W. *Multi-objective control without Youla parametrization* // In Perspectives in Robust Control. Lecture Notes on Control and Information Sciences. – 2001. – Vol. 268. – P. 311-325.
 61. SEMYONOV, A.V., VLADIMIROV, I.G., KURDJUKOV, A.P. *Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization* // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Florida, USA. – 1994. – P. 2249-2250.
 62. SCHERER, C.W., GAHINET, P., CHILALI, M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – P. 896-911.
 63. STURM, J.F. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones* // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11. – P. 625-653.
 64. TCHAIKOVSKY, M.M., KURDYUKOV, A.P., TIMIN, V.N. *Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy. – 2011. – P. 2332-2337.
 65. TCHAIKOVSKY, M.M., KURDYUKOV, A.P., TIMIN, V.N. *A convex formulation of strict anisotropic norm*

- bounded real lemma* // Preprint. Available from <http://arxiv.org/abs/1108.5140>. – 2011.
66. VLADIMIROV, I.G., KURDJUKOV, A.P., SEMYONOV, A.V. *On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems* // Proc. 13th IFAC World Congress, San-Francisco, USA. – 1996. – P. 179-184.
 67. VLADIMIROV, I.G., KURDJUKOV, A.P., SEMYONOV, A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem* // Proc. 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA. – 1996. – P. 427-432.
 68. WHITTLE, P. *Risk-sensitive linear/quadratic/Gaussian control* // Adv. Appl. Prob. – 1981. Vol. 13. – P. 764-777.
 69. WHITTLE, P. *Entropy-minimizing and risk-sensitive control rules* // Syst. & Contr. Lett. – 1989. – Vol. 13. – P. 1-7.
 70. YAESH, I., SHAKED, U. *Minimum entropy static output-feedback control with an \mathcal{H}_∞ -norm performance bound* // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – P. 853-858.
 71. ZHOU, K., GLOVER, K., BODENHEIMER, B.A., DOYLE, J.C. *Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance objectives I: Robust performance analysis, II: Optimal control* // IEEE Trans. AC. – 1994. – Vol. 39. – P. 1564-1574, 1575-1587.

**SYNTHESIS OF ANISOTROPIC SUBOPTIMAL
FIXED-ORDER CONTROLLERS VIA SEMIDEFINITE
PROGRAMMING AND ALGORITHM FOR
SEARCHING RECIPROCAL MATRICES**

Michael Tchaikovsky, Institute of Control Sciences of RAS,
Moscow, Candidate of Science (mmtchaikovsky@hotmail.com).

Abstract: A disturbance attenuation problem is considered for a linear discrete time invariant system under random disturbances with imprecisely known distributions. The designed anisotropic suboptimal controller is a dynamic fixed-order output-feedback compensator, which is required to stabilize the closed-loop system and to keep its anisotropic norm below a prescribed threshold value. The proposed optimization-based approach to synthesis of the anisotropic controllers is novel.

Keywords: discrete linear time invariant systems, random disturbances, statistical uncertainty, norm, anisotropy, semidefinite programming, linear matrix inequalities, reciprocal matrices.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым*