

УДК 519.715  
ББК 35.41

## ФОРМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СХЕМЫ ШОРТЛИФФА

Моросанова Н. А.<sup>1</sup>, Соловьев С. Ю.<sup>2</sup>

(факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

*Рассматриваются изоморфные отображения схемы Шортлиффа, способные существенно изменять составляющие эту схему функции вычисления коэффициентов уверенности. Исследуются вопросы конструирования изоморфизмов, порождающих схемы правдоподобных рассуждений с заданными свойствами.*

Ключевые слова: продукционная система, схема Шортлиффа, комбинирование коэффициентов уверенности.

### **Введение**

Когда-то инженерно-технические работники зачитывались книгой Д. Пойа [8] «Математика и правдоподобные рассуждения». Книга буквально подталкивала к конструированию формальных структур неформальных рассуждений, коих и было придумано весьма немало. Те времена миновали и оставили нам в пользование несколько вполне утвердившихся методов.

В наступившую эпоху инноваций длинная история применений стала едва ли не главным аргументом при выборе схем рассуждений и иных правдоподобных моделей и методов. Именно поэтому любая эвристическая модель, задействованная в десятках проектов, достойна стать предметом отдельного исследования.

В работе рассматривается весьма известная схема правдоподобных рассуждений Э. Шортлиффа<sup>3</sup>, именуемая также мо-

---

<sup>1</sup> Наталья Александровна Моросанова, аспирант (nmosanova@gmail.com).

<sup>2</sup> Сергей Юрьевич Соловьев, доктор физико-математических наук, профессор (soloviev@glossary.ru).

<sup>3</sup> См. разделы 1 и 2.

делью Шортлиффа–Бучанана и стэндфордской теорией фактора уверенности [7]. В качестве инструмента исследования выбраны изоморфные отображения<sup>4</sup>, позволяющие строить аналоги схемы Шортлиффа.

С функциональной точки зрения аналоги способны полноценно заменить в экспертной системе оригинал. С точки зрения инженерии знаний внутреннее устройство аналогов<sup>5</sup> и сам факт их существования открывают новые возможности и порождают новые задачи. В части возможностей вскрывается, например, наличие «родственных связей» с другими областями информатики<sup>6</sup>, позволяющие привлечь для целей извлечения знаний наработанные там методы. Кроме того, располагая рядом аналогов, инженер по знаниям может буквально «по-гоголевски» реализовать уникальную схему правдоподобных рассуждений: ... губы аналога-1 да приставить к носу аналога-2 ... и т.д. А главной из вновь приобретенных задач является задача порождения аналога с заданными характеристиками<sup>7</sup>. Комплекс задач формального исследования схем правдоподобного вывода, изоморфных схеме Шортлиффа, и составляют основное содержание последующего изложения.

## 1. Схема Шортлиффа

Разработанный под руководством Шортлиффа обратный вывод экспертной системы *MYSIN* [17]

- вычисляет, используя продукционные правила, суждения о гипотезах на основании суждений о фактах;
- поддерживает «интеллектуальный» диалог экспертной системы с пользователем с целью получения оценочных суждений о фактах;
- существенно использует модель вычисления так называемых коэффициентов уверенности.

---

<sup>4</sup> См. разделы 3 и 4.

<sup>5</sup> См. разделы 5, 6, 10, 11 и 12.

<sup>6</sup> См. комментарий к свойству 1 из раздела 6.

<sup>7</sup> См. разделы 7, 8 и 9.

Коэффициенты уверенности – *certainty factors (CF)* – в русскоязычной литературе называются также коэффициентами доверия [12], коэффициентами определенности [9] и факторами уверенности [7]. Различают

- коэффициенты уверенности правил<sup>8</sup> – числа из  $(0, +1]$  и
- коэффициенты уверенности фактов и гипотез – числа из  $[-1, +1]$ .

Не отвлекаясь на несущественные для настоящего изложения детали, будем полагать, что продукционное правило  $R$  имеет вид:

*if* Антецедент *then* Гипотеза *with CF*, где:

- ▷ *if, then, with* – ключевые слова-разделители;
- ▷ Антецедент( $R$ ) – формула, построенная из фактов или гипотез с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания;
- ▷ конструкция «Гипотеза *with CF*» – консеквент правила  $R$ , и Гипотеза( $R$ ) – одна из гипотез продукционной системы, а  $CF(R)$  – коэффициент уверенности правила.

Коэффициенты уверенности приписаны всем фактам и гипотезам, которыми оперирует экспертная система в ходе логического вывода. На множестве  $[-1, +1]$  выделяют пять особых значений (пять особых точек):

- нейтральное значение 0, не позволяющее сформулировать заключение о достоверности гипотезы;
- значения  $-0,2$  и  $+0,2$ , которые используются как пороги принятия решений об активизации продукционных правил;
- значения достоверного знания  $-1$  и  $+1$ , соответствующие абсолютно опровергнутым и абсолютно установленным гипотезам/фактам.

При инициализации логического вывода все коэффициенты уверенности устанавливаются нулевыми. В процессе вывода коэффициенты уверенности

- влияют на выбор применяемых продукционных правил и
- могут изменяться
- либо пользователем,

---

<sup>8</sup> Коэффициенты уверенности продукционных правил иногда именуется коэффициентами ослабления (*attenuation factors*) [12].

– либо в результате применения продукционных правил.

Схема Шортлиффа, как компонент обратного вывода на продукциях, представляет собой набор функций и отношений над числами из  $[-1, +1]$ . В ходе логического вывода из этих функций и отношений по определенным правилам конструируется многоуровневая сеть, вычисляющая коэффициенты уверенности гипотез на основании полученных от пользователя коэффициентов уверенности фактов.

В схеме Шортлиффа набор операций и отношений над коэффициентами уверенности – обозначим их  $a$  и  $b$  – фиксирован:

$$(1) \quad \min(a, b), \quad \max(a, b);$$

$$(2) \quad \text{not}(a) \stackrel{\text{def}}{=} -a;$$

$$(3) \quad \text{rge}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (+0,2 \leq a);$$

$$\text{rle}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (a < -0,2);$$

$$(4) \quad \text{tms}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot b;$$

$$(5) \quad \text{cmb}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a + b - a \cdot b & \text{для } 0 \leq a, 0 \leq b, \\ \frac{a + b}{1 - \min(|a|, |b|)} & \text{для } a \cdot b < 0, \\ a + b + a \cdot b & \text{для } a < 0, b < 0. \end{cases}$$

Формулы (1) и (2) обобщают операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания на отрезок  $[-1, +1]$ . Отношения (3) используются для управления вычислительным процессом.

Функция ослабления (4) корректирует переход от коэффициента уверенности антецедента к коэффициенту уверенности гипотезы. Вообще говоря, в схеме Шортлиффа второй аргумент  $b$  функции ослабления есть положительное число – коэффициент уверенности некоторого продукционного правила. Однако здесь рассматривается общий случай умножения:  $-1 \leq a, b \leq +1$ .

Функция комбинирования (5) вычисляет сводный коэффициент уверенности гипотезы, оцененной двумя разными способами.

Пример 1. Пусть

- ▷ гипотеза  $H$  и факты  $E_1$  и  $E_2$  имеют коэффициенты уверенности 0,7, 0,3 и 0,5 соответственно;
- ▷ машина вывода MYCIN-подобной системы рассматривает правило *if  $E_1$  and  $E_2$  then  $H$  with 0,4.*

Схема исполнения этого правила представлена на рис. 1. •

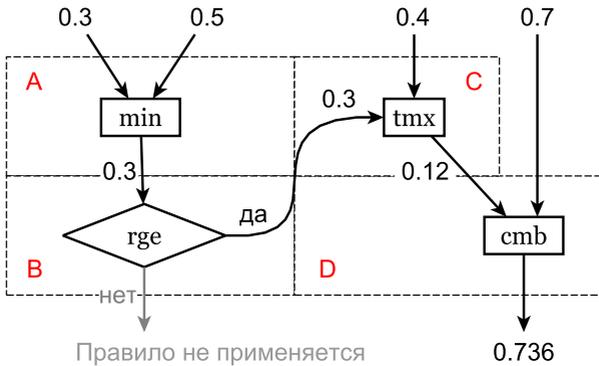


Рис. 1. Обработка правила *if  $E_1$  and  $E_2$  then  $H$  with 0,4*

По смыслу вычислений в схеме выделяются четыре зоны.

В зоне *A* вычисляется достоверность антецедента правила.

В зоне *B* принимается решение об активизации правила.

В зоне *C* обрабатывается консеквент правила.

В зоне *D* вычисляется комбинированная оценка гипотезы  $H$  на основании вновь полученной и имевшейся ранее оценок.

Отметим три обстоятельства.

Во-первых, в конкретных условиях примера 1 продукционное правило породило вычислительную сеть, построенную из операций *min*, *rge*, *tms* и *cmb*.

Во-вторых, в результате срабатывания этой сети коэффициент уверенности гипотезы  $H$  получает новое значение (0,736).

В-третьих, вычислительная сеть для отдельного продукционного правила является фрагментом общей вычислительной сети, конструируемой в ходе логического вывода.

При разработке экспертной системы, решившись на применение схемы правдоподобных рассуждений, инженер по знаниям должен зареэ подготовить для эксперта объяснение формул (1)–(5). Очевидно, что эксперту-нематематику некоторые формулы будут понятны, а другие вызовут непонимание, грозящее утратой интереса к разработке и последующим крахом всей разработки.

## 2. Функция комбинирования Шортлиффа

Договоримся в дальнейшем изложении использовать следующие специальные обозначения:

▷  $\hat{x} \stackrel{def}{=} (1/x);$

▷  $[a, b]^{(2)} \stackrel{def}{=} [a, b]^2 \setminus \{(a, b), (b, a)\};$

▷ метка  $\boxed{FP}$  эквивалентна фразе «нетрудно доказать» (фр. *facile à prouver*).

Кроме того, договоримся называть функции двух переменных

- ▷ моновариантными, если они задаются одной формулой;
- ▷ многовариантными, если они задаются разными формулами на разных участках области определения.

Функция  $cmb(a, b)$  комбинирования коэффициентов уверенности одной и той же гипотезы

- играет в схеме Шортлиффа главную роль,
- является многовариантной,
- определена на множестве  $[-1, +1]^{(2)}$ .

Точки  $(-1, +1)$  и  $(+1, -1)$  не принадлежат области определения функции  $cmb$ . С практической точки зрения это означает, что создатель экспертной системы должен самостоятельно решить вопрос о ее поведении в случае полного подтверждения и полного опровержения некоторой гипотезы. Заметим, что попытки «насильно» доопределить  $cmb$  в точках  $(-1, +1)$  и  $(+1, -1)$  выводят ее из класса непрерывных и ассоциативных [4] функций.

На рис. 2 предлагается иная запись функции комбинирования. За счет отказа от модулей функция  $cmb$  по разному задается

в шести разных секторах области определения. На границах секторов гарантирована непрерывность.

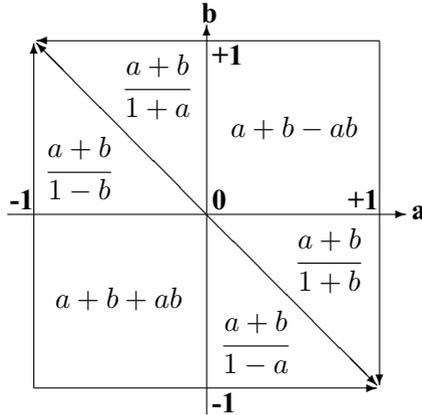


Рис. 2. Альтернативное представление функции  $smb(a, b)$

Рассматривая  $smb(a, b)$  как представителя класса подобных функций, перечислим ее основные свойства. Для  $\varphi(a, b) = smb(a, b)$  имеет место:

- (6) область определения:  $[-1, +1]^{(2)}$ ;
- (7) коммутативность:  $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$ ;
- (8) ассоциативность:  $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$ ;
- (9) асимметричность:  $\varphi(a, b) = -\varphi(-a, -b)$ ;
- (10) непрерывность;
- (11) монотонность:  $\forall l \varphi(a, l) \leq \varphi(b, l)$ , если  $a \leq b$ ;
- (12) ограниченность:  $-1 \leq \varphi(a, b) \leq +1$ ;
- (13) граничные условия:  $\varphi(a, -a) = 0$ , если  $a \neq \pm 1$ ;
- (14) граничные условия:  $\varphi(a, 0) = a$ ,  $\varphi(0, a) = a$ ;
- (15) граничные условия:  $\varphi(1, 1) = 1$ ,  $\varphi(-1, -1) = -1$ .

Очевидно, что список свойств функции комбинирования может быть продолжен. Известны работы [13], в которых на основании постулированных свойств выводится явный вид функ-

ции комбинирования. Здесь мы придерживаемся более «вольного» оценочного подхода, суть которого состоит в том, что

- любая функция комбинирования удовлетворяет обязательным свойствам (6), (12)–(15);
- очень хорошая функция комбинирования удовлетворяет свойствам (6)–(15);
- отчасти хорошая функция комбинирования может не удовлетворять некоторым необязательным свойствам.

### 3. Трансформации схемы Шортлиффа

Идея трансформации схемы Шортлиффа состоит в переходе от  $[-1, +1]$  к некоторому другому множеству  $\mathfrak{R}$ . Если зафиксированный переход является взаимно однозначным, то алгоритм логического вывода без малейшего ущерба может оперировать не оригинальными значениями из  $[-1, +1]$ , а их образами в  $\mathfrak{R}$ .

Пусть  $h$  – взаимно однозначная монотонно возрастающая функция, отображающая отрезок  $[-1, +1]$  на некоторое множество  $\mathfrak{R}$ :  $h: [-1, +1] \rightarrow \mathfrak{R}$ .

Будем полагать, что  $h$  можно использовать как имя функции. Тогда задействованные в схеме Шортлиффа функции  $min$ ,  $max$ ,  $not$ ,  $rge$ ,  $rle$ ,  $tms$  и  $cmb$  однозначно порождают функции с именами  $h|min$ ,  $h|max$ ,  $h|not$ ,  $h|rge$ ,  $h|rle$ ,  $h|tms$  и  $h|cmb$ .

По определению для любых  $A, B$  из  $\mathfrak{R}$  имеет место:

$$h|max(A, B) = h(max(h^{-1}(A), h^{-1}(B)));$$

$$h|min(A, B) = h(min(h^{-1}(A), h^{-1}(B)));$$

$$h|not(A) = h(not(h^{-1}(A)));$$

$$h|rge(A) = 0,2 \leq h^{-1}(A);$$

$$h|rle(A) = h^{-1}(A) < -0,2;$$

$$h|tms(A, B) = h(tms(h^{-1}(A), h^{-1}(B)));$$

$$h|cmb(A, B) = h(cmb(h^{-1}(A), h^{-1}(B))).$$

Все перечисленные  $h|$ функции устроены аналогичным образом, понятным из рис. 3.

Трансформация схемы Шортлиффа есть взаимно однозначное отображение  $h: [-1, +1] \rightarrow \mathfrak{R}$  и порожденный им набор

функций  $h|min$ ,  $h|max$ ,  $h|not$ ,  $h|rge$ ,  $h|rle$ ,  $h|tms$  и  $h|cmb$ .

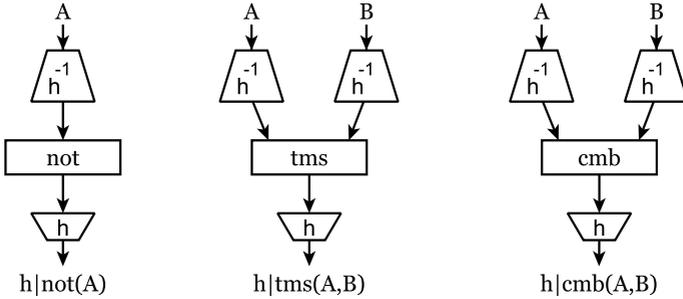


Рис. 3. Схемы вычислений  $h|not(A)$ ,  $h|tms(A, B)$  и  $h|cmb(A, B)$

С алгебраической точки зрения [6, с. 19] результат трансформации есть схема, изоморфная схеме Шортлиффа. С практической точки зрения наличие разнообразных, но изоморфных представлений одной и той же схемы открывает новые возможности во всех аспектах ее применения. При изоморфном отображении свойства функции комбинирования (6)–(15) также подлежат изоморфному отображению.

**Замечание 1.** Из требования строгой монотонности функции  $h$  следует:

$$\begin{aligned}
 h|max(A, B) &\equiv max(A, B); \\
 h|min(A, B) &\equiv max(A, B); \\
 h|rge(A) &\equiv h(+0,2) \leq A; \\
 h|rle(A) &\equiv A < h(-0,2); \\
 h(-1) &= min \mathfrak{R}; \\
 h(+1) &= max \mathfrak{R}.
 \end{aligned}$$

То есть в любой трансформации схемы Шортлиффа, полученной посредством монотонно возрастающей функции  $h$ , интерес представляют

- значения  $h(x)$  в особых точках  $-0,2$ ,  $0$ , и  $0,2$ ; а также
- формулы для вычисления  $h|not(A)$ ,  $h|tms(A, B)$  и  $h|cmb(A, B)$ .

**Замечание 2.** Для нечетных функций  $h$  в трансформации схемы Шортлиффа дополнительно выполняются тождества

$$\begin{aligned} h|not(A) &\equiv -A, \\ h(-0,2) &\equiv -h(0,2), \\ h(0) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Поэтому для нечетных монотонно возрастающих функций  $h$  в трансформации схемы Шортлиффа интерес представляют

- значение  $h(x)$  в точке  $0,2$ ; а также
- формулы для вычисления  $h|tms(A, B)$  и  $h|cmb(A, B)$ .

**Замечание 3.** Помимо особых точек  $-0,2$  и  $+0,2$  в системе *Mycin* используются еще несколько пороговых значений  $a_i$  для коэффициентов уверенности [17, с. 114]. Эти пороги применяются интерфейсными блоками, отвечающими

- за перевод ответов пользователя в коэффициенты уверенности фактов; и
- за словесную интерпретацию коэффициентов уверенности гипотез в заключениях системы.

При использовании трансформированной схемы Шортлиффа пороги  $a_i$  заменяются на их образы  $h(a_i)$ .

Пример 2. Рассмотрим отображение  $h_u: [-1, +1] \rightarrow [0, +1]$ .

$$h_u(x) = (x + 1)/2, \quad h_u^{-1}(x) = 2x - 1.$$

Линейная функция  $h_u$  не является нечетной. В соответствии с замечанием 1 трансформация схемы Шортлиффа описывается

- значениями в особых точках:

$$h_u(-0,2) = 0,4, \quad h_u(0) = 0,5, \quad h_u(+0,2) = 0,6; \text{ и}$$

- функциями:

$$\begin{aligned} h_u|not(A) &= 1 - A, \\ h_u|tms(A, B) &= AB + (1 - A)(1 - B), \\ h_u|cmb(A, B) &\text{ – функция представлена на рис. 4. } \bullet \end{aligned}$$

Относительно простое отображение  $h_u$  из примера 2 порождает многовариантную функцию комбинирования. В разделе 12 рассматривается нелинейное отображение  $[-1, +1]$  в  $[0, +1]$ , порождающее моновариантную функцию комбинирования.

Задача настоящей статьи состоит в исследовании изоморфных отображений схемы Шортлиффа с целью выявления

- ▷ отдельных классов отображений, удобных/интересных с той или иной точки зрения;
- ▷ общих подходов к построению трансформаций схемы Шортлиффа.

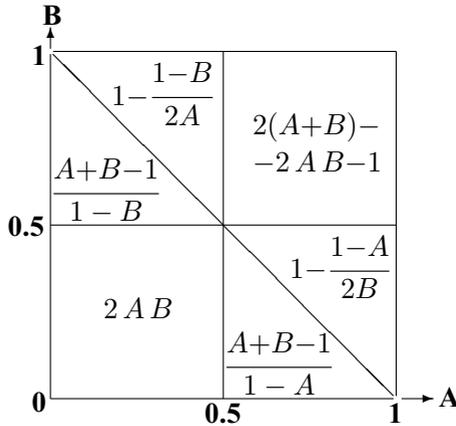


Рис. 4. Функция комбинирования  $h_u|ctb(A, B)$

#### 4. Расширенная числовая прямая

В настоящей работе используются подмножества расширенной числовой прямой  $[-\infty, +\infty]$ . Следуя [3, с. 237] и [5, с. 33], договоримся называть расширенной числовой прямой обычную числовую прямую  $(-\infty, +\infty)$  с добавлением двух новых элементов  $-\infty$  и  $+\infty$ , для которых определены следующие операции:

- $a + (+\infty) = (+\infty)$ ,  $(+\infty) - a = (+\infty)$ ,  
 $a + (-\infty) = (-\infty)$ ,  $(-\infty) - a = (-\infty)$  для конечного  $a$ ;
- $a \cdot (+\infty) = (+\infty)$ ,  $a \cdot (-\infty) = (-\infty)$  при  $a > 0$ ,  
 $d \cdot (+\infty) = (-\infty)$ ,  $d \cdot (-\infty) = (+\infty)$  при  $d < 0$ ;
- $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$ ,  $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$ ,  
 $(+\infty) - (-\infty) = (+\infty)$ ,  $(-\infty) - (+\infty) = (-\infty)$ ,  
 $(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$ ,  $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty)$ ,  
 $(-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty)$ ;

- $\frac{\pm \infty}{a} = (\pm \infty) \cdot \frac{1}{a}$  при  $a \neq 0$ ;
- $\frac{a}{\pm \infty} = 0$  и  $-\infty < a < +\infty$  при любом конечном  $a$ .

Общее свойство перечисленных операций состоит в том, что значения  $-\infty$  и  $+\infty$  невозможно получить из конечных чисел с использованием четырех арифметических операций. Отсюда следует, что функция, принимающая значение  $-\infty$  и  $+\infty$  для некоторого конечного аргумента либо является многовариантной, либо (в конечном итоге) определяется через другую многовариантную функцию.

### 5. Семейство трансформаций # 1

- Определим семейство функций  $G_1(\alpha)$ , превращающих
- комбинирование в умножение;
  - умножение в его изоморфный образ «as is».

Пусть  $\alpha$  – положительное вещественное число. Каждое фиксированное значение параметра  $\alpha$  порождает элемент класса  $G_1(\alpha)$  – суть монотонно возрастающую функцию  $g_1: [-1, +1] \rightarrow [0, +\infty]$  следующего вида:

$$g_1(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (1+x)^{+\alpha} & \text{для } -1 \leq x < 0; \\ (1-x)^{-\alpha} & \text{для } 0 \leq x < 1; \\ +\infty & \text{для } x = 1. \end{cases}$$

FP Обратная функция  $g_1^{-1}: [0, +\infty] \rightarrow [-1, +1]$  выглядит так:

$$g_1^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[\alpha]{x} - 1 & \text{для } 0 \leq x < 1; \\ 1 - \widehat{\sqrt[\alpha]{x}} & \text{для } 1 \leq x < +\infty; \\ 1 & \text{для } x = +\infty. \end{cases}$$

Графики функций  $g_1$  и  $g_1^{-1}$  представлены на рис. 5.

FP В соответствии с замечанием 1 трансформация схемы Шортлиффа посредством функции  $g_1$  описывается

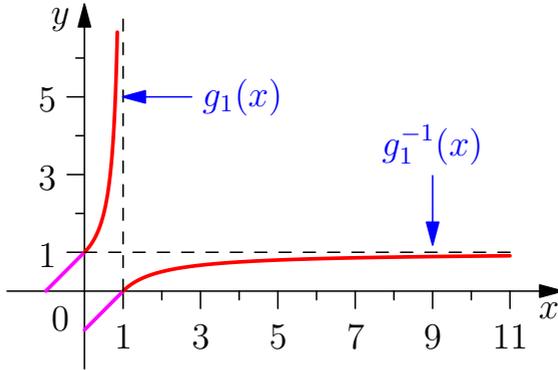


Рис. 5. Графики функций  $g_1$  и  $g_1^{-1}$  при  $\alpha = 1$

– значениями в особых точках  $-0,2$ ,  $0$  и  $+0,2$ , приведенными в таблице 1;

– функциями:

$$g_1|not(A) = \begin{cases} +\infty & \text{для } A = 0; \\ \hat{A} & \text{для } 0 < A \leq +\infty; \end{cases}$$

$g_1|tms(A, B)$  – функция приводится на рис. 6;

$$g_1|cmb(A, B) = A \cdot B.$$

Областью определения функции  $g_1|cmb(A, B)$  является множество  $[0, +\infty)^{(2)}$ .

Таблица 1. Значения  $g_1$  в особых точках.

особые точки	значения $g_1$			
	$\alpha$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$-0,2$	$0,8^{+\alpha}$	0,946	0,8	0,410
0	1	1	1	1
$+0,2$	$0,8^{-\alpha}$	1,057	1,250	2,441

Свойство 1. Отображения из семейства  $G_1(\alpha)$  трансформируют многовариантную функцию комбинирования в произведение двух неотрицательных чисел.

Свойство 2. Отображения из семейства  $G_1(\alpha)$  трансформируют моновариантную функцию ослабления в многовариантную функцию.

Фактически трансформация на основе функции из  $G_1(\alpha)$  привела к «разменному» результату: комбинирование свелось к банальному умножению, но ослабление усложнилось.

	$B$	0	$(0, 1]$	$(1, +\infty)$	$+\infty$
$A$	$+\infty$	0	$B$		$+\infty$
$(1, +\infty)$	$\hat{A}$	$(\sqrt[\alpha]{\widehat{A}} + \sqrt[\alpha]{\widehat{B}} - \sqrt[\alpha]{\widehat{A}} \sqrt[\alpha]{\widehat{B}})^{\alpha}$		$(\sqrt[\alpha]{\widehat{A}} + \sqrt[\alpha]{\widehat{B}} - \sqrt[\alpha]{\widehat{A}} \sqrt[\alpha]{\widehat{B}})^{-\alpha}$	
$(0, 1]$		$(\sqrt[\alpha]{\widehat{A}} + \sqrt[\alpha]{\widehat{B}} - \sqrt[\alpha]{\widehat{A}} \sqrt[\alpha]{\widehat{B}})^{-\alpha}$		$(\sqrt[\alpha]{\widehat{A}} + \sqrt[\alpha]{\widehat{B}} - \sqrt[\alpha]{\widehat{A}} \sqrt[\alpha]{\widehat{B}})^{\alpha}$	
$0$	$+\infty$	$\hat{B}$			$0$

Рис. 6. Функция  $g_1 | tms(A, B)$

Свойство 3. Всем коэффициентам уверенности соответствуют конечные вещественные числа. Единственное исключение – коэффициент  $+1$ , которому соответствует специальное значение  $+\infty$ . Другими словами, получение абсолютно достоверных знаний выделяется в особый случай.

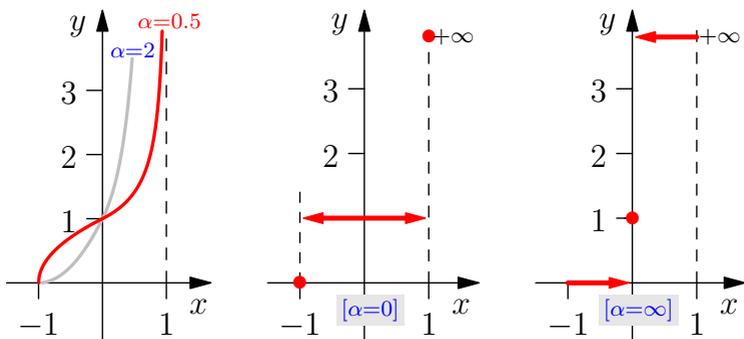


Рис. 7. Графики функций  $g_1$  при разных  $\alpha$

Свойство 4. Изменяя параметр  $\alpha$ , можно построить отображение схемы Шортлиффа с заранее заданным порогом принятия решений. При этом второй порог изменяется согласованно.

Свойство 5. При  $\alpha = 0$  и  $\alpha = +\infty$  формально построенные функции  $g_1(x)$  – см. рис. 7 – перестают быть взаимно однозначными, но интересны тем, что реализуют разные способы определения трехзначной шкалы значений «опровергнуто–не определено–установлено».

## 6. Семейство трансформаций # 2

Логарифмы превращают произведения в суммы, а суммирование как функция комбинирования выглядит предпочтительнее умножения.

Определим семейство функций  $H_1(\beta)$ , где параметр  $\beta > 1$ . Каждое фиксированное значение параметра  $\beta$  порождает элемент класса  $H_1(\beta)$  – монотонно возрастающую нечетную функцию

$$h_1: [-1, +1] \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

следующего вида:

$$h_1(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} -\infty & \text{для } x = -1; \\ +\log_{\beta}(1+x) & \text{для } -1 < x < 0; \\ -\log_{\beta}(1-x) & \text{для } 0 \leq x < 1; \\ +\infty & \text{для } x = 1. \end{cases}$$

FP Обратная функция  $h_1^{-1}: [-\infty, +\infty] \rightarrow [-1, +1]$  выглядит так:

$$h_1^{-1}(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x = -\infty; \\ \beta^{+x} - 1 & \text{для } -\infty < x < 0; \\ 1 - \beta^{-x} & \text{для } 0 \leq x < +\infty; \\ +1 & \text{для } x = +\infty. \end{cases}$$

Графики функций  $h_1$  и  $h_1^{-1}$  представлены на рис. 8.

FP В соответствии с замечанием 2 трансформация схемы Шортлиффа посредством функции  $h_1$  описывается

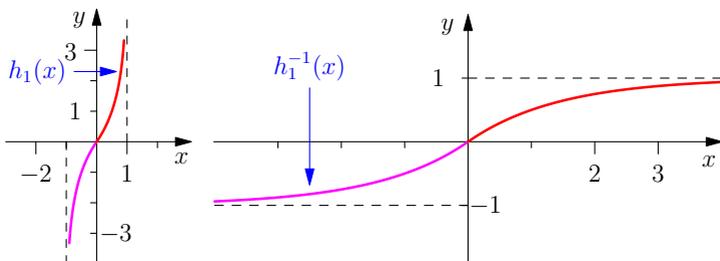


Рис. 8. Графики функций  $h_1$  и  $h_1^{-1}$  при  $\beta = 2$

- значением  $h_1$  в особой точке  $0,2$ ,  $h_1(0,2) = \log_\beta(0,8)$ ,  
 например:  $h_1(0,2) = 2$  для  $\beta = 1,118$ ,  
 $h_1(0,2) = 1$  для  $\beta = 1,25$ ,  
 $h_1(0,2) = 0,322$  для  $\beta = 2$ ;

– функциями:

$h_1|tms(A, B)$  – функция приводится на рис. 9,

$h_1|cmb(A, B) = A + B$

Областью определения функции  $h_1|cmb(A, B)$  является множество  $[-\infty, +\infty]^{(2)}$ .

Приведем свойства семейства  $H_1(\beta)$ .

Свойство 1. Отображения из семейства  $H_1(\alpha)$  трансформирует многовариантную функцию комбинирования в суммирование вещественных чисел.

Суммирование [баллов] – это характерный прием комбинирования свидетельств в скоринговых системах принятия решений [10]. Если образы коэффициентов уверенности переименовать в балльные оценки, то можно так подобрать отображения из  $H_1(\beta)$ , что схема Шортлиффа трансформируется в некоторый вариант метода скоринговых карт.

Свойство 2. Отображения из семейства  $H_1(\alpha)$  трансформируют моновариантную функцию ослабления в многовариантную функцию.

Свойство 3. Коэффициентам уверенности  $-1$  и  $+1$  соответствуют специальные значения  $-\infty$  и  $+\infty$ . Всем остальным коэф-

фициентам соответствуют конечные вещественные числа. Фактически это означает, что точные логические выводы выделяются в особый случай.

	$B$	$-\infty$	$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$+\infty$
$A$	$-\infty$	$+B$			$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+B$			$+\infty$
$(0, +\infty)$	$-\infty$	$\log_{\beta}(\widehat{\beta}^A + \beta^B - \widehat{\beta}^A \beta^B)$	$-\log_{\beta}(\widehat{\beta}^A + \widehat{\beta}^B - \widehat{\beta}^A \widehat{\beta}^B)$	$+\infty$	$+\infty$
$(-\infty, 0]$	$-A$	$-\log_{\beta}(\beta^A + \beta^B - \beta^A \beta^B)$	$\log_{\beta}(\beta^A + \widehat{\beta}^B - \beta^A \widehat{\beta}^B)$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-B$			$-\infty$

Рис. 9. Функция  $h_1|tms(A, B)$

Свойство 4. Изменяя параметр  $\beta$ , можно построить отображение схемы Шортлиффа с заранее заданным порогом принятия решений. Так, при  $\beta = 3,05$  пороги  $h_1(-0,2)$  и  $h_1(+0,2)$  принимают значения  $-0,2$  и  $+0,2$  соответственно. Другими словами, при  $\beta = 3,05$  получается псевдосхема Шортлиффа, отличающаяся от оригинала по трем пунктам:

- вместо* коэффициентов уверенности из  $[-1, +1]$   
*используются* псевдокоэффициенты из  $[-\infty, +\infty]$ ;
- вместо* функции ослабления  $tms$   
*используется* более сложная функция  $h_1|tms$ ;
- вместо* функции комбинирования  $stm$   
*используется* сложение псевдокоэффициентов.

Свойство 5. При  $\beta = 1$  и  $\beta = +\infty$  формально построенные функции  $h_1(x)$  – см. рис. 10 – утрачивают свойство взаимной однозначности, но, так же как и для класса  $G_1(\alpha)$ , вырождаются в трехзначные шкалы.

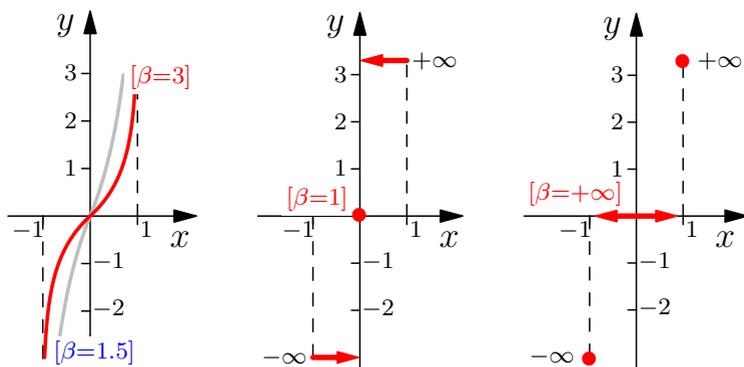


Рис. 10. Графики функций  $h_1$  при разных  $\beta$

## 7. Задачи выявления и доопределения

До настоящего момента изложение носило феноменологический характер: исследовались свойства аксиоматически заданных семейств отображений. В связи с многочисленными попытками усовершенствовать схему Шортлиффа возникает вопрос о способах выявления отображений<sup>9</sup>. Кроме того, в исследованиях [15] часто возникает близкая задача доопределения частично заданной функции комбинирования. Прежде чем приступить к анализу перечисленных задач, зафиксируем два обстоятельства.

*Первое.* Будем рассматривать

- кусочно-заданные отображения  $h$  и  $h^{-1}$ ;
- многовариантные функции комбинирования  $\varphi(a, b)$ , заданные разными формулами  $\varphi_i(a, b)$  на разных участках  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  области определения.

*Второе.* При вычислении значений многовариантных и кусочно-заданных функций выбор конкретного варианта и вычисленное значение определяются аргументом. Другими словами, аналитические выражения для  $h(x)$  на  $\delta_i$  и  $h(x)$  на  $\delta_j$ , по внешнему виду могут сильно отличаться.

<sup>9</sup> Речь идет о неформальных технологиях, направляющих «ход мыслей».

Выявление и доопределение так или иначе сводятся к решению подзадач, именуемых

- задачей обнаружения отображений,
- задачей подтверждения формул и
- задачей конструирования формул.

Сформулируем эти подзадачи.

**Задача 1.** *Задача обнаружения отображений.*

По известной функции  $\varphi(a, b) = \varphi_1(a, b)$ , заданной на множестве  $\delta_1$ , построить взаимно однозначное отображение  $h: [-1, +1] \rightarrow \mathfrak{R}$  такое, что  $h|\varphi = h|\varphi_1$  – функция заданного вида.

Приемы обнаружения отображений рассматриваются в следующем разделе, а пока отметим, что при решении задачи обнаружения удастся найти только часть функции  $h$  – функцию  $h'$ , заданную на собственном подмножестве<sup>10</sup> отрезка  $[-1, +1]$ . Исследователь должен ее доопределить на весь отрезок  $[-1, +1]$ , используя, скажем, соображения четности/нечетности.

**Задача 2.** *Задача подтверждения формул.*

По известным функциям  $h$  и  $h|\varphi$ , а также по функции  $\varphi_i(a, b)$ , заданной на  $\delta_i$ , доказать:

$$\forall (a, b) \in \delta_i \quad h(\varphi_i(h^{-1}(a), h^{-1}(b))) = h|\varphi(a, b).$$

**Задача 3.** *Задача конструирования формул.*

По известным  $h(x)$  и  $h|\varphi(A, B)$  и области определения  $\delta_i$  построить функцию  $\varphi_i(a, b)$  такую, что

$$\forall (a, b) \in \delta_i \quad h|\varphi_i(A, B) = h|\varphi(A, B), \quad \text{где } A = h(a), B = h(b).$$

В отличие от задачи обнаружения задачи подтверждения и конструирования имеют точные математические формулировки.

Полагая известными методы решения задач обнаружения, подтверждения и конструирования, можно предложить подходы к решению целевых задач выявления и доопределения.

**Задача 4.** *Задача выявления отображений.*

По заданной функции  $\varphi(a, b)$  найти взаимно однозначное отображение  $h: [-1, +1] \rightarrow \mathfrak{R}$  такое, что  $h|\varphi$  – сложение, умножение

<sup>10</sup> Чаще всего  $h'$  определена на  $[0, +1]$ .

или иная заданная функция.

Общий подход к решению задачи 4 представлен на рис. 11. Сначала предлагается сфокусировать внимание на одном из вариантов функции  $\varphi$  – функции  $\varphi_1$ , заданной на  $\delta_1$ , и обнаружить функции-кандидаты  $h$  и  $h|\varphi$ . Затем найденное решение следует подтвердить на остальных вариантах  $\varphi_2(\cdot)$ ,  $\varphi_3(\cdot)$ , ... .

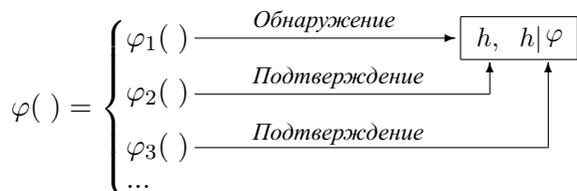


Рис. 11. Выявление отображений

В связи с конструированием схем рассуждений, подобных схеме Шортлиффа, возникает задача доопределения так или иначе обнаруженной функции  $\varphi_1$ , заданной на  $[0, +1]^2$ , на всю область определения  $[-1, +1]^{(2)}$ .

**Задача 5.** *Задача доопределения функции комбинирования.*

По функции  $\varphi(a, b) = \varphi_1(a, b)$ , заданной на  $\delta_1$ , найти функции  $\varphi_i(a, b)$ , заданные на  $\delta_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

Один из подходов к решению этой задачи представлен на рис. 12. Постулируется<sup>11</sup>, что все неизвестные варианты функции  $\varphi$  должны посредством некоторого отображения  $h$  сводиться к единой функции  $h|\varphi$ . На первом этапе доопределения предлагается обнаружить пару функций  $h$  и  $h|\varphi$ . На втором этапе предлагается решить ряд конкретных задач конструирования функции  $\varphi$  в областях определения  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , ... .

<sup>11</sup> Основанием для выдвижения такого постулата служит свойство 1 классов отображений из разделов 5 и 6.

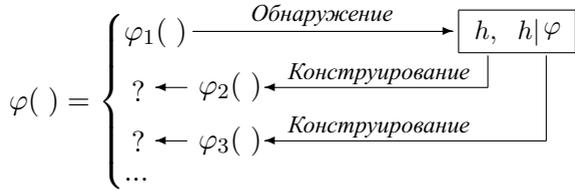


Рис. 12. Доопределение функции комбинирования

**FP** Решением задачи доопределения является функция

$$\varphi_i(a, b) = h^{-1}(h|\varphi(h(A), h(B))).$$

### 8. Задача обнаружения отображений

Подзадача обнаружения функций  $h$  и  $h|\varphi$  по известной функции  $\varphi(a, b)$ ,

$$(16) \quad \varphi(a, b) = \varphi_1(a, b),$$

скорее всего универсального решения не имеет, но можно указать два частных приема, рассчитанных на «творческое» применение.

*Первый прием* состоит в «улавливании сигналов», поступающих от равенства (16). Возможно, что при некоторых эквивалентных преобразованиях равенство (16) сводится к виду

$$h(\varphi(a, b)) = \Psi(h(a), h(b)),$$

где  $h$  и  $\Psi$  – некоторые формулы, и тогда:

*если*  $\Psi$  – сложение, то можно исследовать

случай  $h$  – логарифм, а  $\varphi(a, b)$  – произведение;

*если*  $\Psi$  – умножение, то можно исследовать

случай  $h$  – степенная функция, а  $\varphi(a, b)$  – суммирование;

*если*  $\Psi = (a + b)/(1 - ab)$ , то можно исследовать

случай  $h$  – тангенс, а  $\varphi(a, b)$  – сложение и т.д.

Пример 3. Исследование варианта

$$\varphi_1(a, b) = a + b - ab \cdot (a + b - ab).$$

Этот вариант функции комбинирования для  $(a, b) \in [0, 1]^2$  описан в работе [15], развивающей подход к конструированию функций комбинирования, предложенный в [13]. Отметим, что  $\varphi_1(a, b)$  не является ассоциативной функцией, что не позволяет распространить на нее свойства полугрупп [14].

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{FP}} \quad \varphi(a, b) = \varphi_1(a, b) \equiv 1 - (1 - a)(1 - b)(1 - ab). \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 \underbrace{1 - \varphi(a, b)} & = & \underbrace{(1 - a)} & \cdot & \underbrace{(1 - b)} & \cdot & \underbrace{(1 - ab)} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \underbrace{F(\varphi(a, b))} & = & \underbrace{F(a)} & \cdot & \underbrace{F(b)} & \cdot & \underbrace{F(ab)} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \beta^{h(\varphi(a, b))} & = & \beta^{h(a)} & \cdot & \beta^{h(b)} & \cdot & \beta^{h(ab)} = \beta^{h(a)+h(b)+h(ab)}
 \end{array}
 \end{array}$$

Из  $1 - a = F(a) = \beta^{h(a)}$  имеем:  $h(a) = \log_{\beta}(1 - a)$ .  
 Доопределяя функцию  $h$  на множество  $[-1, +1]$ , получаем:

$$h(x) = h_1(x) \in H_1(\beta).$$

Из (17) имеем:  $h(\varphi(a, b)) = h(a) + h(b) + h(ab)$ .

Окончательно:

$$\begin{array}{l}
 h|\varphi(A, B) = A + B + h(h^{-1}(A) \cdot h^{-1}(B)) \text{ или} \\
 (18) \quad h|\varphi(A, B) = A + B + h_1|tms(A, B).
 \end{array}$$

В формуле (18) используется функция  $h_1|tms$ , приведенная на рис. 9. Заметим, что доопределение (18) на область  $[-1, +1]^{(2)}$  порождает функцию комбинирования, которая не удовлетворяет свойствам (13) – (15) •

*Второй прием* состоит в обнаружении функции  $y(x) = h^{-1}(x)$  для случая  $h|\varphi(A, B) = A + B$ . Функцию  $y$  предлагается находить как решение функционального уравнения

$$(19) \quad y(x + d) = \varphi_1(y(x), y(d)) \quad \text{при} \quad y(0) = 0.$$

Заметим, что условия (19) есть необходимые условия гомоморфизма абелевых групп [11, с. 21]. Один из способов решения функционального уравнения состоит в двухэтапном переходе к дифференциальному уравнению.

*Этап 1.* Представить функциональное уравнение в виде

$$\frac{y(x + d) - y(x)}{d} = \frac{\varphi_1(y(x), y(d)) - y(x)}{d}$$

*Этап 2.* При  $d \rightarrow 0$  перейти к дифференциальному уравнению

$$y'(x) = \text{некоторая-правая-часть}$$

Иногда, но не всегда решение дифференциального уравнения является решением функционального уравнения (19) и тогда обнаружение  $h$  и  $h|\varphi$  становится «делом техники».

## 9. Функции комбинирования Хамахера

Технологию выявления и доопределения функций комбинирования продемонстрируем на примере функций из семейства триангуляционных конорм Хамахера [1, с. 61], имеющих следующий вид:

$$\varphi_1(a, b) = \frac{a + b + (r - 2)ab}{1 + (r - 1)ab}, \quad \text{где параметр } r > 0.$$

При фиксированном параметре  $r$  приведенная функция  $\varphi_1(a, b)$  удовлетворяет свойствам (7), (8), (10), (11), (14), (15) и вполне может использоваться в качестве одного из вариантов функции комбинирования  $\varphi(a, b)$ .

$$\varphi(a, b) = \begin{cases} \frac{a + b + (r - 2)ab}{1 + (r - 1)ab} & \text{для } (a, b) \in [0, +1]^2; \\ ? & \text{для } (a, b) \in [-1, 0] \times [0, +1]; \\ ? & \text{для } (a, b) \in [0, +1] \times [-1, 0]; \\ ? & \text{для } (a, b) \in [-1, 0]^2. \end{cases}$$

Для обнаружения  $h$  и  $h|\varphi$  применим прием решения функционального уравнения.

Пусть  $0 \leq x, 0 \leq d, 0 \leq y \leq 1, y(0) = 0,$

$$и \quad y(x+d) = \frac{y(x) + y(d) + (r-2)y(x)y(d)}{1 + (r-1)y(x)y(d)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad \frac{y(x+d) - y(x)}{d} &= \\ &= \frac{y(d)}{d} \cdot (1 + (r-2)y(x) - (r-1)y(x+d)y(x)). \end{aligned}$$

При  $d \rightarrow 0 \quad y' = y'(0)(1 + (r-2)y - (r-1)y^2).$

$$\text{Откуда} \quad y(x) = \frac{\beta^x - 1}{\beta^x + r - 1}, \quad \text{где } \beta = e^{ry'(0)}.$$

Доопределяя функцию  $y$  в точке  $+1$  и отражая ее нечетным образом на  $[-\infty, 0)$ , а также учитывая, что  $y(x)$  есть  $h_r^{-1}$ , получаем взаимно однозначное монотонное отображение

$$h_r(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} -\infty & \text{для } x = -1. \\ -\log_{\beta}\left(\frac{r}{1+x} + 1-r\right) & \text{для } -1 < x < 0; \\ +\log_{\beta}\left(\frac{r}{1-x} + 1-r\right) & \text{для } 0 \leq x < 1; \\ +\infty & \text{для } x = 1. \end{cases}$$

При каждом фиксированном  $r$  функции  $h_r(x)$  зависят от параметра  $\beta$  и образуют семейство функций  $H_r(\beta)$ . При  $r = 1$  семейство  $H_r$  превращается в семейство  $H_1$ , описанное в разделе 6.

Обратное отображение выглядит так

$$h_r^{-1}(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x = -\infty; \\ -\frac{1 - \beta^x}{1 + (r-1)\beta^x} & \text{для } -\infty < x < 0; \\ +\frac{\beta^x - 1}{\beta^x + r - 1} & \text{для } 0 \leq x < +\infty; \\ +1 & \text{для } x = +\infty. \end{cases}$$

$\boxed{\text{FP}}$   $h_r|cmb_r(A, B) = A + B$  для  $(A, B) \in [0, 1]^2$ .

Задача доопределения функции  $cmb_r$  на множество  $[-1, +1]^{(2)}$  состоит в решении пяти однотипных задач конструирования:

Выразить  $cmb_r = h_r^{-1}(h_r(a) + h_r(b))$

- 1) для случая  $a < 0 \leq b$  и  $|a| \leq |b|$ ;
- 2) для случая  $a < 0 \leq b$  и  $|a| > |b|$ ;
- 3) для случая  $b < 0 \leq a$  и  $|a| \leq |b|$ ;
- 4) для случая  $b < 0 \leq a$  и  $|a| > |b|$ ;
- 5) для случая  $a < 0$  и  $b < 0$ .

Рассмотрим, скажем, случай 1).

$a < 0$ , следовательно  $h_r(a) = -\log_\beta\left(\frac{r}{1+a} + 1 - r\right)$ .

$0 \leq b$ , следовательно  $h_r(b) = +\log_\beta\left(\frac{r}{1-b} + 1 - r\right)$ .

$$h_r(a) + h_r(b) = +\log_\beta \frac{(1-b+br)(1+a)}{(1+a-ar)(1-b)}.$$

$|a| \leq |b|$ , следовательно  $h_r^{-1}(h_r(a) + h_r(b)) =$

$$= \frac{\beta^{h_r(a)+h_r(b)} - 1}{\beta^{h_r(a)+h_r(b)} + r - 1} = \frac{a + b}{1 + (r-1)ab - (r-2)a} =$$

$$= \frac{a + b}{\theta - (r-2)a}, \quad \text{где } \theta = 1 + (r-1)ab.$$

Окончательный вид функции комбинирования  $ctb_r(a, b)$  представлен на рис. 13.

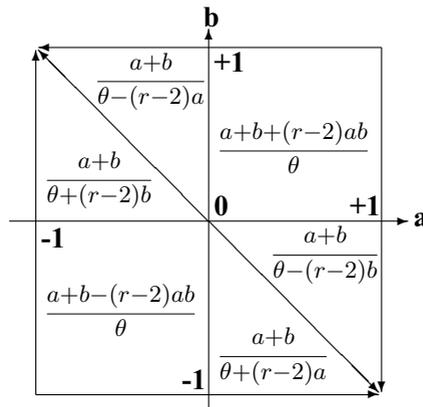


Рис. 13. Функция комбинирования Хамахера  $ctb_r(a, b)$

Определенная таким образом функция  $ctb_r(a, b)$  удовлетворяет обязательным свойствам для функций комбинирования. Остановимся на прочих свойствах функций  $ctb_r$ .

Во-первых, при  $r = 1$  функция комбинирования Хамахера совпадает с функцией комбинирования Шортлиффа:

$$ctb_1(a, b) = ctb(a, b).$$

Во-вторых, только при  $r = 2$  функция комбинирования Хамахера становится моновариантной:

$$\forall (a, b) \in [-1, +1]^{(2)} \quad ctb_2 = \frac{a + b}{1 + ab}.$$

## 10. Схемы Шортлиффа–Хамахера

В предыдущем разделе на основе семейства конорм Хамахера построено семейство функций комбинирования Хамахера  $ctb_r$ . Возникает естественный вопрос о соответствующих функциях  $tms_r$  и значениях в особых точках. Для ответа на этот вопрос сконструируем изоморфное отображение функции комбинирования Шортлиффа  $ctb = ctb_1$  в  $ctb_r$ . Такое отображение и позволит построить искомые функции и значения в особых точках.

Отображение  $h_{1r}$ , трансформирующее функцию  $cmb_1$  в  $cmb_r$ , строится как композиция отображений  $h_r^{-1} \circ h_1$ , где  $h_1 \in H_1$  для некоторого  $\beta = \beta_1$ ,  $h_r \in H_r$  для некоторого  $\beta = \beta_2$ .

$$h_{1r}(x) = h_r^{-1}(h_1(x)).$$

Прежде всего введем удобные обозначения:

$$\Delta(z) = \frac{1-z}{1+(r-1)z}, \quad \Gamma(z) = \Delta(z^\gamma) \quad \text{и} \quad \delta(z) = \Delta^{1/\gamma}(|z|).$$

[FP] Допустимые композиции  $h_{1r}$  образуют семейство, зависящее от параметра  $\gamma = \log_{\beta_1} \beta_2 > 0$ .

$$h_{1r}(x) = \text{sign}(x) \cdot \Gamma(1 - |x|)$$

и  $h_{1r}^{-1}(x) = \text{sign}(x) \cdot (1 - \delta(x)).$

В общем виде функциям комбинирования Хамахера  $cmb_r$  соответствуют:

- значение нечетной функции  $h_{1r}(x)$  в точке 0,2 и
- функция  $tms_r(A, B) = h_{1r}|tms(A, B) = h_{1r}(h_{1r}^{-1}(A) \cdot h_{1r}^{-1}(B)).$

С использованием конкретного вида  $h_{1r}$  и в соответствии с замечанием 2 искомая схема Шортлиффа–Хамахера – суть трансформация схемы Шортлиффа с функцией комбинирования  $cmb_r$  – описывается:

- значением в особой точке  $h_{1r}(0,2) = \Gamma(0,8)$ ; и
- функциями:

$$(20) \quad tms_r(A, B) = \text{sign}(AB) \cdot \Gamma(\delta(A) + \delta(B) - \delta(A) \cdot \delta(B));$$

$$(21) \quad cmb_r(A, B) \text{ – функция приведена на рис. 13.}$$

Подчеркнем, что именно факт существования функций  $h_{1r}(x)$ , позволяет утверждать, что любая схема из семейства Шортлиффа–Хамахера является трансформацией схемы Шортлиффа.

При построении схем Шортлиффа–Хамахера использовались отображения из  $H_r$ , позволяющие также обобщить результаты раздела 6. Покажем это. Выберем функцию  $\tilde{h}_1$  из семейства  $H_1(\beta)$  и функцию  $\tilde{h}_r$  из семейства  $H_r(\beta)$ . Функция  $\tilde{h}_{1r}$  при этом определяется однозначно,  $\tilde{h}_{1r} = \tilde{h}_r^{-1} \circ \tilde{h}_1$ . Построенная с помощью  $\tilde{h}_{1r}$

схема Шортлиффа–Хамахера определена на  $[-1, +1]$  и ее трансформация на  $[-\infty, +\infty]$  посредством  $\tilde{h}_r$  имеет вид:

- в особой точке  $\tilde{h}_r(\tilde{h}_{1r}(0,2)) = \tilde{h}_1(0,2)$ ;
- $\tilde{h}_r|cmb_r(A, B) = \tilde{h}_1|cmb(A, B) = A + B$ ;
- $\tilde{h}_r|tms_r(A, B) = \tilde{h}_1|tms(A, B)$  (см. рис. 9).

## 11. Подвиды схемы Шортлиффа–Хамахера

Описанный в разделе 10 класс схем Шортлиффа–Хамахера является параметрическим. Каждая пара чисел  $r$  и  $\gamma$  порождает экземпляр схемы, из которых определенный интерес представляют схемы

- для  $r = 1$  и  $\gamma = 1$ ;
- для  $r = 1$  и  $\gamma = 2$ ;
- для  $r = 1$  и  $\gamma = 31$ ;
- для  $r = 2$  и  $\gamma = 1,82$ ;
- для  $r = 2$  и  $\gamma = 1,485$ ;
- для  $r = 2$  и  $\gamma = 1$ .

При  $r = 1$ , как отмечалось в разделе 9, функция комбинирования Хамахера  $cmb_r = cmb_1$  не зависит от параметра  $\gamma$  и совпадает с функцией комбинирования Шортлиффа.

В случае  $r = 1$  и  $\gamma = 1$  имеем:  $h_{11}(x) = x$ , и схема Шортлиффа–Хамахера совпадает с «классической» схемой Шортлиффа:

$$h_{11}(0,2) = 0,2, \quad cmb_r = cmb \text{ и } tms_r = tms.$$

В случае  $r = 1$  и  $\gamma = 2$  имеем:  $h_{11}(x) = 2x - sign(x)x^2$ , и схема Шортлиффа–Хамахера отличается от схемы Шортлиффа по двум позициям:

$$h_{11}(0,2) = 0,36, \text{ и } tms_r(A, B) = A \cdot B - 2 \cdot (A - h_{11}^{-1}(A)) \cdot (B - h_{11}^{-1}(B)).$$

В случае  $r = 1$  и  $\gamma = 31$  схема Шортлиффа–Хамахера также отличается от «классической» схемы Шортлиффа только по двум позициям:

$$h_{11}(0,2) = 0,999, \text{ а } tms_r(A, B) \text{ вычисляется по формуле (20).}$$

При  $r = 2$  в схеме Шортлиффа-Хамахера функции  $h_{1r}$ ,  $tms_r$  и  $cmb_r$  превращаются соответственно в  $h_{12}$ ,  $tms_2$  и  $cmb_2$ , где

$$cmb_2(A, B) = \frac{A + B}{1 + A \cdot B}.$$

Функция  $cmb_2$  определена на множестве  $[-1, +1]^{(2)}$  и не зависит от вида  $h_{12}$ . В свою очередь функция  $tms_2$  определена на множестве  $[-1, +1]$  и зависит от  $h_{12}$ , т.е. зависит от значения параметра  $\gamma$ . На рис. 14 приводятся графики функций  $h_{12}$  для разных значений  $\gamma$ .

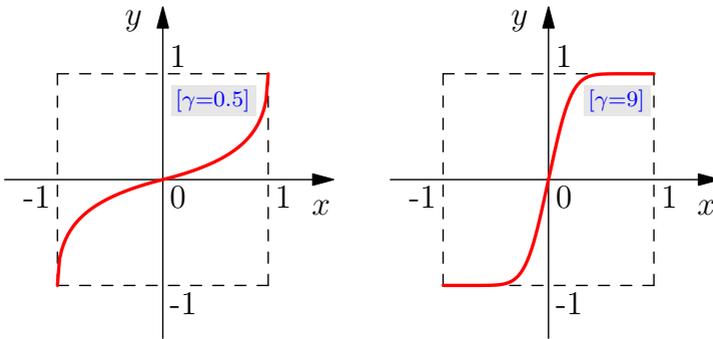


Рис. 14. Графики функций  $h_{12}$

С вычислительной точки зрения интерес представляют функции  $h_{12}$  для  $\gamma = 1,820$  и  $\gamma = 1,495$  – см. рис. 15.

В случае  $r = 2$  и  $\gamma = 1,820$  образ порога 0,2 есть то же самое число<sup>12</sup> 0,2:  $h_{12}(0,2) = 0,200$ . При этом функция  $h_{12}(x)$  не сильно отличается от тождественной трансформации:

$$|h_{12}(x) - x| < 0,102 \text{ и, соответственно,}$$

$$|tms_2(A, B) - A \cdot B| < 0,093.$$

В случае  $r = 2$  и  $\gamma = 1,495$  достигается наилучшее приближение:

$$|h_{12}(x) - x| < 0,040 \text{ и}$$

<sup>12</sup> Аналогичное соотношение верно также для псевдосхемы Шортлиффа из раздела б.

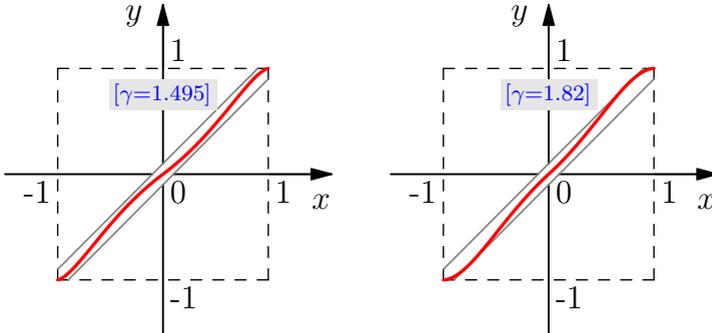


Рис. 15. Графики функций  $h_{12}$  для  $\gamma = 1,495$  и  $\gamma = 1,82$

$$|tms_2(A, B) - A \cdot B| < 0,054,$$

хотя в особой точке  $h_{12}(0,2) = 0,165$

В случае  $r = 2$  и  $\gamma = 1$  функция  $h_{12}$  – рис. 16 – принимает наиболее простой вид.

$$h_{12}(x) = \frac{x}{2 - |x|} \quad h_{12}^{-1}(x) = \frac{2x}{1 + |x|}$$

В соответствующей схеме Шортлиффа–Хамахера:

$$h_{12}(0,2) = 1/9 \text{ (значение в особой точке);}$$

$$tms_2(A, B) = \frac{2AB}{1 + |A| + |B| - |AB|};$$

$$cmb_2(A, B) = \frac{A + B}{1 + A \cdot B}$$

Трансформация, определяемая параметрами  $r = 2$  и  $\gamma = 1$ , удобна для построения прочих изоморфных отображений на конечные отрезки действительной прямой.

## 12. Схема Шортлиффа на $[0,1]$

Известно большое количество работ [1, 3, 14], в которых предлагаются и исследуются функции комбинирования для коэффициентов уверенности из отрезка  $[0, 1]$ . Простейший перенос схемы Шортлиффа на отрезок  $[0, 1]$  описан в примере 2. Рас-

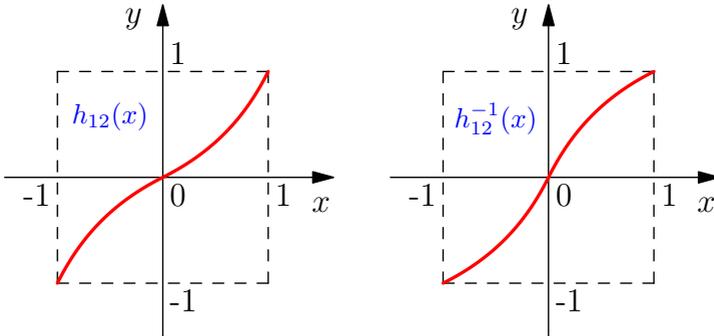


Рис. 16. Графики функций  $h_{12}$  и  $h_{12}^{-1}$  для  $\gamma = 1$

смотрим изоморфный образ схемы Шортлиффа, определяемый композицией отображений  $h_c = h_u \circ h_{12}$ , где  $h_u$  – отображение из примера 2,  $h_{12}$  – преобразование из раздела 11.

$$h_c(x) = \begin{cases} 1 - 1/(2 + x) & \text{для } -1 \leq x < 0; \\ 1/(2 - x) & \text{для } 0 \leq x \leq +1, \end{cases}$$

$$h_c^{-1}(x) = \begin{cases} 2(x - 1)/(1 - x) & \text{для } 0 \leq x < 0,5; \\ 2(x - 1)/x & \text{для } 0,5 \leq x \leq +1. \end{cases}$$

При этом:

– в особых точках:

$$h_c(-0,2) = 4/9, \quad h_c(0) = 0,5, \quad h_c(0,2) = 5/9;$$

– функции:  $h_c|not(A) = 1 - A \stackrel{def}{=} \bar{A}$ ,

$h_c|tms(A, B)$  – функция приводится на рис. 17,

$$h_c|cmb(A, B) = \frac{AB}{AB + \overline{AB}} \quad \text{для } (A, B) \in [0, 1]^{(2)}.$$

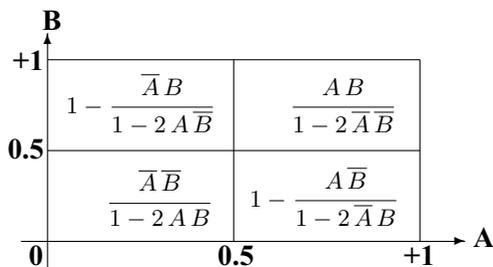


Рис. 17. Функция  $h_c|tms(A, B)$

Построенную с помощью отображения  $h_c$  трансформацию можно считать «полномочным представителем» схемы Шортлиффа на отрезке  $[0, 1]$ . На этом же отрезке существуют и другие изоморфные образы схемы Шортлиффа. Они получаются из приведенной трансформации взаимно однозначными преобразованиями  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Все полученные при этом трансформации автоморфны между собой, хотя и имеют различные значения в контрольных точках, а также разные по виду образы функций отрицания, ослабления и комбинирования<sup>13</sup>.

### 13. Выводы и перспективы

Итак, схема Шортлиффа (и другие аналогичные системы функций) посредством изоморфных преобразований может изменять свое «обличие» весьма радикально. Однако при этом приходится считаться с тем, что трансформации функции комбинирования могут породить достаточно сложные трансформации функции ослабления. В развитие темы имеет смысл исследовать задачи поиска приемлемой пары трансформаций и/или выбора их допустимых приближений.

### Литература

1. БАТЫРШИН И.З. *Основные операции нечеткой логики и их обобщения*. – Казань: Отечество, 2001. – 100 с.

<sup>13</sup> В современной размытой логике установлено, что функция комбинирования Шортлиффа изоморфна так называемым униформам [16].

2. ДЮБУА Д., ПРАД А. *Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике.* – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
3. ИЛЬИН В.А., ПОЗНЯК Э.Г. *Основы математического анализа: учеб. для вузов, часть II.* – 3-е изд. – М.: Наука, Физматлит, 1998. – 448 с.
4. КОНОНОВА И.Н., ЛЫЧАК О.А., ФАЙНШТЕЙН С.И. *О некоммутативности совместного использования коэффициентов определенности в схеме приближенных рассуждений системы МУСIN* // Материалы XI Всероссийского семинара «Нейроинформатика и ее приложения». – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003. – С. 88–89.
5. КУДРЯВЦЕВ Л.Д. *Курс математического анализа: том 1.* – М.: Высшая школа, 1981. – 687 с.
6. КУРОШ А.Г. *Теория групп.* – М.: Наука, 1967. – 648 с.
7. ЛЮГЕР ДЖ.Ф. *Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем.* – М.: И.Д. Вильямс, 2003. – 864 с.
8. ПОЙА П. *Математика и правдоподобные рассуждения.* – М.: Наука, 1975. – 462 с.
9. ПОПОВ Э.В. *Экспертные системы: Решение неформальных задач в диалоге с ЭВМ.* – М.: Наука, 1987. – 288 с.
10. *Руководство по кредитному скорингу* / Под ред. Э. Мэйз. – Минск: Гревцов Паблишер, 2008. – 464 с.
11. ТРОНИН С.Н. *Введение в теорию групп. Задачи и теоремы: часть 1.* – Казань: Казанский государственный университет, 2006. – 100 с.
12. *Экспертные системы: принципы разработки и программирование* / Ред. Дж. Джаррантано, Г. Райли. – М.: И.Д. Вильямс, 2007. – 1152 с.
13. СТЕФАНЮК В.Л. *Некоторые аспекты теории экспертных систем* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987. – №2. – С. 85–91.
14. CHENG Y., KASHYAP R.L. *An Axiomatic Approach for Combining Evidence from a Variety of Sources* // Journal of

- Intelligent and Robotic Systems. – 1988. – №1. – P. 17–33.
15. JOHNSON N., KOTZ S. *Axiomatic Approach to Formulas for Combining Likelihoods or Evidence* // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 1989. – №31. – P. 49–54.
  16. METCALFE G., OLIVETTI N., GABBAY D. *Proof Theory for Fuzzy Logics*. – Berlin: Springer, 2009. – 276 p.
  17. *Rule-Based Expert Systems: The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project* /Edited by B.G. Buchanan, E.H. Shortliffe. – MA: Addison-Wesley, 1984. – 748 p.

## FORMAL PROPERTIES OF THE SHORTLIFFE SCHEME

**Natalia Morosanova**, Moscow State University, Moscow, post-graduate (nmorosanova@gmail.com).

**Sergey Soloviev**, Moscow State University, Moscow, Doctor of Science, professor (soloviev@glossary.ru).

*Abstract: We consider an isomorphic mapping of the Shortliffe scheme, which can significantly modify the functions of the scheme for calculating the certainty factors. We also investigate questions of construction of the isomorphisms generating schemes of plausible reasoning with desired properties.*

**Keywords:** production systems, the Shortliffe scheme, combination of confidence factors .

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. С. Манделем*