

УДК 681.5.015 + 519.246.25

ББК 22.17 + 22.18

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАДАННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Карташов В. Я.¹, Новосельцева М. А.²
(ГОУ ВПО «Кемеровский государственный
университет», Кемерово)

На основе непрерывных дробей разработан алгоритм моделирования стационарного случайного процесса, установлено соответствие между непрерывной и дискретной моделями случайного процесса, обоснован выбор шага дискретизации.

Ключевые слова: стационарный случайный процесс, корреляционная функция, непрерывная дробь, формирующий объект, белый шум, непрерывная передаточная функция, шаг дискретизации, дискретная передаточная функция, стохастическое разностное уравнение.

1. Введение

При исследовании и проектировании систем контроля, диагностики, управления и обучения сложных объектов возникает необходимость исследования их функционирования под влиянием различных факторов. Особую сложность данная задача

¹ Владимир Яковлевич Карташов, заведующий кафедрой автоматизации исследований и технической кибернетики ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», доктор технических наук, профессор (kartash@kemsu.ru).

² Марина Александровна Новосельцева, доцент кафедры автоматизации исследований и технической кибернетики ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», кандидат технических наук, доцент (aapov@rochina.ru).

приобретает при наличии воздействия на объект случайных факторов. При этом проведение экспериментальных и теоретических исследований объекта зачастую затруднительно ввиду их сложности и затратности. Поэтому особое значение и актуальность приобретают работы, связанные с построением, использованием и совершенствованием моделей. Моделирование, являясь одним из инструментов научного познания, нашло широкое распространение в различных сферах жизнедеятельности.

При решении задач имитационного моделирования часто возникает необходимость в формировании дискретных последовательностей стационарных случайных процессов с заданным видом корреляционной функции. Обычно в таких ситуациях закон распределения случайного процесса не принимается во внимание [3, 17, 20].

2. Постановка задачи

Задача цифрового моделирования стационарного случайного процесса $y(t)$ с непрерывной корреляционной функцией $R_{yy}(t)$ заключается в воспроизведении на ЭВМ дискретной последовательности стационарного случайного процесса $y(k\Delta t)$ с заданной корреляционной функцией, где $k = 0, \dots, N$; Δt – шаг дискретизации [3, 5, 17, 20]. Таким образом, при имитации стационарного случайного процесса осуществляется переход от его непрерывной модели в форме корреляционной функции к дискретной, позволяющей сформировать реализацию $y(k\Delta t)$.

Точностный анализ полученной модели случайного процесса осуществляется на основе критерия цифрового моделирования [20]. В качестве критерия в данной работе будет использоваться дисперсия расхождений между модельной корреляционной функцией $R_{yy}^m(k\Delta t)$, рассчитанной по полученной реализации $y(k\Delta t)$, и истинной корреляционной функцией $R_{yy}(t)$, взятой с шагом дискретизации Δt [20]:

$$(1) \quad D_e = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m (e(k) - M_e)^2,$$

где

$$e(k) = R_{yy}^m(k\Delta t) - R_{yy}(k\Delta t),$$

$$M_e = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m e(k),$$

m – число значений корреляционных функций. При этом шаг дискретизации выбирается из некоторого множества допустимых шагов дискретизации $\Delta t \in \Delta T$.

Данная задача цифрового моделирования обычно сводится к определению характеристик формирующего фильтра (линейного преобразователя) при задаваемых характеристиках входного и выходного сигналов (рис. 1) [3, 7, 17, 20, 28]. Если линейный динамический объект с передаточной функцией $G(s)$ находится под воздействием непрерывного стационарного случайного сигнала $x(t)$, имеющего корреляционную функцию $R_{xx}(t)$, то на выходе данного объекта в установившемся режиме формируется непрерывный стационарный случайный сигнал $y(t)$ с корреляционной функцией $R_{yy}(t)$ [17]. Связь между случайными процессами $x(t)$ и $y(t)$ выражается через передаточную функцию $G(s)$ формирующего фильтра [5, 17].

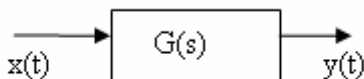


Рис. 1. Формирующий фильтр

Известно, что спектральная плотность выходного сигнала $S_{yy}(\omega)$ формирующего фильтра определяется в соответствии с выражением [1, 3, 17, 20, 28]

$$(2) \quad S_{yy}(\omega) = |G(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega),$$

где $S_{xx}(\omega)$ – спектральная плотность входного сигнала; $|G(j\omega)|^2$ – квадрат модуля амплитудно-фазовой частотной характеристики системы с непрерывной передаточной функцией (НПФ) $G(s)$.

В качестве входного сигнала обычно используют белый шум – стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $R_{xx}(t) = \delta(t)$. Если входное воздействие объекта – белый шум, то спектральная плотность реакции в установившемся режиме имеет вид [17, 21]

$$(3) \quad S_{yy}(\omega) = \frac{1}{\pi} |G(j\omega)|^2.$$

На основе (3) определяется НПФ $G(s)$ формирующего фильтра [5, 17]:

$$(4) \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A_m s^m + A_{m-1} s^{m-1} + \dots + A_0}{B_n s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_0},$$

где m, n – целые положительные числа ($m \leq n$); $A_m, \dots, A_0, B_n, \dots, B_0$ – постоянные коэффициенты; $X(s), Y(s)$ – преобразование Лапласа входного и выходного сигналов соответственно.

Основная задача цифрового моделирования реакции $y(t)$ формирующего фильтра заключается в переходе от НПФ $G(s)$ к дробно-рациональному выражению дискретной передаточной (ДПФ) $G(z, \Delta t)$:

$$(5) \quad G(z, \Delta t) = \frac{Y(z, \Delta t)}{X(z, \Delta t)} = \frac{a_m z^{-m} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0}{b_n z^{-n} + \dots + b_1 z^{-1} + 1} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}},$$

где $Y(z, \Delta t), X(z, \Delta t)$ – z -преобразования числовых последовательностей значений случайных входного и выходного процессов; $a_m, \dots, a_0, b_n, \dots, b_1$ – постоянные коэффициенты.

При переходе от $G(s)$ к $G(z, \Delta t)$ особо актуальной является проблема установления взаимно однозначного соответствия между непрерывной и дискретной моделями. Данная проблема в литературе остается малоисследованной, хотя именно взаимно однозначное соответствие позволяет получать достоверные результаты цифрового моделирования.

Как видно из (5), для получения $G(z, \Delta t)$ необходимо задать шаг дискретизации Δt . Теоретическое обоснование выбора шага дискретизации и исследование его влияния на взаимно одно-

значное соответствие между непрерывной и дискретной моделями являются важными вопросами цифрового моделирования.

Ниже будет приведен обзор существующих методов цифрового моделирования стационарных случайных процессов, т. е. алгоритмов перехода от непрерывной модели формирующего фильтра к его дискретному представлению.

3. Обзор методов цифрового моделирования стационарных случайных процессов с заданной корреляционной функцией

Для осуществления перехода от непрерывной модели корреляционной функции $R_{yy}(t)$ к дискретной реализации стационарного случайного процесса $y(k\Delta t)$ используется ряд алгоритмов. Численные методы дают методические ошибки при получении реализаций случайных процессов, величина которых определяется выбранным шагом интегрирования [28, 30], поэтому в данной работе они рассматриваться не будут.

Одним из способов моделирования является метод скользящего суммирования [3, 7, 20, 28], в котором представление оператора линейного преобразования формирующего фильтра осуществляется в виде скользящей суммы с весовыми коэффициентами a_k

$$(6) \quad y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k).$$

Существует ряд способов определения a_k на основе значений корреляционной функции выходного сигнала, например, с помощью решения нелинейной системы уравнений [3, 20], разложения в ряд Фурье [3], дискретизации интеграла свертки [28], метода факторизации [3] и т.д. Помимо трудностей, возникающих при нахождении коэффициентов a_k , данный метод имеет методическую погрешность ввиду ограниченности количества членов ряда N .

Более быстродействующим методом моделирования является рекуррентный алгоритм авторегрессии – скользящего среднего [7, 17, 20, 28]:

$$(7) \quad y(k) = \sum_{i=0}^m a_i x(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i y(k-i),$$

где a_i, b_i – коэффициенты модели авторегрессии со скользящим средним; m и n – целые положительные числа ($m \leq n$). Данный метод не имеет методической погрешности [3, 5], а параметры моделирующего алгоритма выражаются в явном виде через параметры корреляционной функции. Однако существующие методы дискретизации, факторизации и т.п., основанные на применении (7) [3, 5, 18], наиболее эффективны, когда корреляционная функция моделируемого процесса имеет невысокий порядок. В этих случаях алгоритмы просты и не имеют методической погрешности [3, 5], а их параметры a_i, b_i выражаются в явном виде через параметры корреляционной функции. Если вид корреляционной функции усложняется (например, у НПФ формирующего фильтра есть кратные полюса), то рекуррентные алгоритмы становятся приближенными [3, 5].

Методы моделирования с использованием канонических и неканонических представлений [28] основаны на представлении модели случайного процесса в виде детерминированной функции случайных величин. Канонические представления имеют вид:

$$(8) \quad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k(t),$$

где v_k – некоррелированные величины; φ_k – детерминированные функции, определяемые по корреляционной теории случайных процессов с помощью известных алгоритмов. Однако при моделировании данным методом в разложениях учитывается конечное число членов, поэтому метод имеет методическую ошибку, зависящую от этого числа.

В неканонических представлениях модель процесса задается в виде нелинейной функции от конечного числа случайных величин. Неканонические представления не обладают асимптотическим свойством, т. е. оценка корреляционной функции по N измерениям не стремится к истинной корреляционной функции с ростом N [28].

Другой подход к моделированию стационарных случайных процессов основан на том, что переменные преобразования Лапласа в НПФ $G(s)$ (4) и z -преобразования в ДПФ $G(z, \Delta t)$ (5) связаны соотношением $z = e^{s\Delta t}$ [3, 17, 24, 25]. Нелинейность этого преобразования обусловила многочисленные попытки его приближения при переходе от аналоговых представлений к дискретным. Для осуществления перехода от НПФ к ДПФ используются дробно-рациональные приближения, в частности, прямые и обратные разности Эйлера, билинейное преобразование и их многочисленные модификации [10, 21, 25]. Однако данные аппроксимации преобразования $z = e^{s\Delta t}$ не обладают свойствами первоначального преобразования, которые связаны с понятиями многозначности, периодичности, однолиственности и т. п. [10, 21, 30].

С другой стороны, преобразование $z = e^{s\Delta t}$ в полной мере отвечает требованиям взаимно однозначного соответствия при отображении непрерывного пространства в дискретное [21]:

1) для сохранения селективных свойств непрерывной системы необходимо, чтобы ось iy из s -плоскости отображалась в единичную окружность на z -плоскости;

2) для того чтобы устойчивая непрерывная система переходила в устойчивую дискретную систему, необходимо, чтобы точки из левой полуплоскости s -плоскости ($x < 0$) отображались вовнутрь единичной окружности в z -плоскости ($|z| < 1$).

Таким образом, использование непосредственно z -преобразования является более совершенным и рациональным подходом к построению цифровых моделей.

Например, в [5, 17] разработан достаточно эффективный метод моделирования случайных процессов на основе z -преобразования $z = e^{s\Delta t}$, который является точным при простом виде НПФ формирующего объекта (знаменатель НПФ – полином не выше 2-й степени). Если же выражение НПФ сложное, то авторы предлагают осуществить переход к дискретной модели при помощи билинейного преобразования

$$(9) \quad s = \frac{2(z-1)}{\Delta t(z+1)}.$$

Как уже было отмечено ранее, подстановочные методы не обладают необходимой точностью моделирования и не позволяют устанавливать взаимно однозначное соответствие между непрерывной и дискретной моделями. В [5] авторы приводят пример моделирования стационарного случайного процесса со спектральной плотностью

$$S_{yy}(\omega) = \frac{2}{\pi(4 + 5\omega^2 + \omega^4)}.$$

При использовании z -преобразования (шаг дискретизации равен 0,1) модель случайного процесса на выходе формирующего фильтра имеет вид:

$$y(k\Delta t) = 0,1218x(k-1) + 1,7235y(k-1) - 0,741y(k-2).$$

Билинейное преобразование искажает структуру модели, и конечно-разностное уравнение принимает другой вид:

$$y(k\Delta t) = 0,003x(k) + 0,006x(k-1) + 0,003x(k-2) + \\ + 1,7235y(k-1) - 0,741y(k-2).$$

Таким образом, существующие методы цифрового моделирования стационарных случайных процессов обладают рядом недостатков: отсутствие взаимно однозначного соответствия между непрерывной и получаемой дискретной моделями, наличие погрешности моделирования, ориентация на фиксированный шаг дискретизации, выбор которого теоретически не обоснован и не обеспечивает взаимно однозначного соответствия между непрерывной и дискретной моделями стационарного случайного процесса.

Задачей данной статьи является разработка и исследование способа взаимно однозначного перехода от непрерывной к *точной дискретной модели* в форме ДПФ, причем предлагаемый способ должен восстанавливать как порядок, так и значения параметров дробно-рационального выражения для дискретной модели формирующего объекта. Под отношением R «*быть точной цифровой моделью объекта*» понимается взаимно однозначное соответствие M_1RM_2 (M_1 – объект моделирования, M_2 – его цифровая модель), обладающее свойством эквивалентности и сохраняющее динамические свойства объекта [15].

4. Использование теории непрерывных дробей при цифровом моделировании стационарных случайных процессов

Любой непрерывный стационарный процесс с корреляционной функцией $R_{yy}(t)$ и спектральной плотностью

$$(10) S_{yy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

которая является дробно-рациональной функцией от круговой частоты ω , можно рассматривать как реакцию непрерывного стохастического линейного динамического объекта (далее по тексту – формирующего объекта) в установившемся режиме на входное воздействие $x(t)$ в форме белого шума [17]. Известно, что НПФ такого объекта будет иметь вид [12, 17]

$$(11) G(s) = \frac{R_{xy}(s)}{R_{xx}(s)} = \frac{A_m s^m + A_{m-1} s^{m-1} + \dots + A_0}{B_n s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_0},$$

где $R_{xx}(s)$, $R_{xy}(s)$ – преобразование Лапласа корреляционной функции входного сигнала и взаимной корреляционной функции входного и выходного сигналов соответственно.

Если $x(t)$ – белый шум с корреляционной функцией вида

$$(12) R_{xx}(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0; \end{cases}$$

то выражение (11) упрощается:

$$(13) G(s) = \frac{R_{xy}(s)}{L(\delta(t))} = \frac{R_{xy}(s)}{1} = R_{xy}(s).$$

Используя основное определение (11) и введя z -преобразование $z = e^{s\Delta t}$, можно оценить ДПФ формирующего объекта [11]:

$$(14) G(z, \Delta t) = \frac{R_{xy}(z, \Delta t)}{R_{xx}(z, \Delta t)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} R_{xy}(n\Delta t) z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty} R_{xx}(n\Delta t) z^{-n}} =$$

$$= \frac{R_{xy}(0) + R_{xy}(\Delta t)z^{-1} + \dots + R_{xy}(n\Delta t)z^{-n} + \dots}{R_{xx}(0) + R_{xx}(n\Delta t)z^{-1} + \dots + R_{xx}(n\Delta t)z^{-n} + \dots},$$

где $R_{xy}(z, \Delta t)$, $R_{xx}(z, \Delta t)$ – z -преобразования взаимной корреляционной функции вход-выходного сигналов и корреляционной функции входного сигнала соответственно.

Для определения z -преобразования δ -функции введена специальная функция, называемая функцией единичного отсчета, которая определяется следующим образом [24]:

$$(15) \delta[n] = \delta^*(n\Delta t) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, z -преобразование функции единичного отсчета равно 1. Тогда выражение (14) приобретает вид

$$(16) G(z, \Delta t) = \frac{R_{xy}(0) + R_{xy}(\Delta t)z^{-1} + \dots + R_{xy}(n\Delta t)z^{-n} + \dots}{1 + 0 \cdot z^{-1} + \dots + 0 \cdot z^{-n} + \dots}$$

Модель ДПФ формирующего объекта в форме дробно-рационального выражения имеет вид:

$$(17) G(z, \Delta t) = \frac{a_m z^{-m} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0}{b_n z^{-n} + \dots + b_1 z^{-1} + 1} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}} = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где $P_m(z)$, $Q_n(z)$ – полиномы от комплексной переменной z -преобразования; m , n – целые положительные числа – порядки этих полиномов.

Известно также другое определение ДПФ [6, 12] в виде

$$(18) G(z, \Delta t) = \frac{Y(z, \Delta t)}{X(z, \Delta t)} = \frac{\Delta t \sum_{n=0}^{\infty} y(n\Delta t)z^{-n}}{\Delta t \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t)z^{-n}} = \frac{y(0) + y(\Delta t)z^{-1} + \dots + y(n\Delta t)z^{-n} + \dots}{x(0) + x(n\Delta t)z^{-1} + \dots + x(n\Delta t)z^{-n} + \dots},$$

где $X(z, \Delta t)$, $Y(z, \Delta t)$ – z -преобразования числовых последовательностей значений случайного входного $\{x(n\Delta t)\}_{n=0}^{\infty}$ и случайного выходного $\{y(n\Delta t)\}_{n=0}^{\infty}$ сигналов.

Благодаря операторным свойствам z -преобразования дискретную модель формирующего объекта можно представить как в форме *стохастического разностного уравнения*

$$(19) \quad y(k\Delta t) = \sum_{i=0}^m a_i x((k-i)\Delta t) - \sum_{i=1}^n b_i y((k-i)\Delta t),$$

относящегося к классу процессов авторегрессии со скользящим средним, так и в форме *детерминированного разностного уравнения*

$$(20) \quad R_{xy}(k\Delta t) = \sum_{i=0}^m a_i R_{xx}((k-i)\Delta t) - \sum_{i=1}^n b_i R_{xy}((k-i)\Delta t).$$

Выражение (19), полученное на основе корреляционной функции $R_{yy}(t)$, позволяет осуществить цифровое моделирование случайного процесса $y(t)$, являющегося откликом формирующего объекта на воздействие $x(t)$ в виде белого шума с математическим ожиданием $M_x = 0$ и дисперсией $D_x = \sigma_x^2$. Таким образом, для получения конечно-разностного уравнения (19) необходимо найти ДПФ формирующего объекта $G(z, \Delta t)$. В качестве аппарата для нахождения $G(z, \Delta t)$, т. е. структурно-параметрической идентификации (*SP-идентификации*) формирующего объекта [11–13], будем использовать теорию непрерывных дробей [11].

Все имеющиеся способы разложения в непрерывную дробь основаны на представлении аналитической функции в виде степенного ряда либо отношения степенных рядов [11]. Поэтому определение (14) ДПФ как отношения двух степенных рядов от переменной z -преобразования, а также свойства непрерывных дробей приводят к возможности их применения для аппроксимации ДПФ линейного стохастического объекта.

На основе заданной корреляционной функции $R_{yy}(t)$ стационарного случайного процесса $y(t)$ осуществляется переход к НПФ формирующего объекта [5, 17]. Полученная таким обра-

зом НПФ будет полностью совпадать с $R_{xy}(s)$ – преобразованием Лапласа взаимной корреляционной функции вход-выходного сигналов формирующего объекта. Взяв обратное преобразование Лапласа от $G(s)$, получим весовую функцию $h(t)$ формирующего объекта.

Наиболее приемлемым и простым способом перехода к непрерывной дроби является модифицированный алгоритм В. Висковатова [10].

Зададим шаг дискретизации Δt . Будем считать, что $h(0) \neq 0$. На основании (16) определяется идентифицирующая матрица:

$$(21) \quad \begin{matrix} (-1)\text{-строка} \\ (0)\text{-строка} \\ 1\text{-строка} \\ \dots \\ m\text{-строка} \\ \dots \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ h(0) & h(\Delta t) & h(2\Delta t) & \dots & h(n\Delta t) & \dots \\ \alpha_1(0) & \alpha_1(\Delta t) & \alpha_1(2\Delta t) & \dots & \alpha_1(n\Delta t) & \dots \\ \alpha_2(0) & \alpha_2(\Delta t) & \alpha_2(2\Delta t) & \dots & \alpha_2(n\Delta t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m(0) & \alpha_m(\Delta t) & \alpha_m(2\Delta t) & \dots & \alpha_m(n\Delta t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

в которой (-1) -строка представляет собой импульсную функцию [24], (0) -строка содержит значения весовой функции $h(n\Delta t)$ формирующего объекта в моменты времени $\{n\Delta t\}_0^N$. (-1) - и (0) -строки являются начальными условиями при построении матрицы, а элементы $\alpha_m(n\Delta t)$ последовательно определяются с помощью соотношения [13]:

$$(22) \quad \alpha_m(n\Delta t) = \frac{\alpha_{m-2}((n+1)\Delta t)}{\alpha_{m-2}(0)} - \frac{\alpha_{m-1}((n+1)\Delta t)}{\alpha_{m-1}(0)},$$

где $\alpha_{-1}(n\Delta t) = \delta(n\Delta t)$; $\alpha_0(n\Delta t) = h(n\Delta t)$; $m = 1, 2, 3, \dots$, а $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда элементы первого столбца матрицы (21) порождают частные числители правильной C -дроби [9, 11], что и позволяет получить ДПФ формирующего объекта:

$$(23) \quad G(z, \Delta t) = \left[\frac{h(0)}{1}; \frac{\alpha_1(0)z^{-1}}{1} \right]_1^\infty = \frac{h(0)}{1 + \frac{\alpha_1(0)z^{-1}}{1 + \frac{\alpha_2(0)z^{-1}}{1 + \dots}}}$$

При аппроксимации дробно-рациональных функций конечного порядка частные числители в (23) обладают тенденцией уменьшения их величины. В модифицированном алгоритме В. Висковатова при аппроксимации дробно-рациональной функции конечного порядка в матрице (21) наблюдается появление нулевой строки, номер которой позволяет идентифицировать порядок функции.

Если в некоторой i -й строке ($i = 0, 1, 2, \dots$) матрицы (21) конечное число k_i первых элементов равны 0, а последующие элементы отличны от нуля, то необходимо осуществить сдвиг влево на k_i элементов до появления в нулевом столбце ненулевого элемента и далее продолжить определение других элементов матрицы (21) по правилу (22). Для i -й строки при восстановлении правильной C -дроби (23) элемент $\alpha_i(0)$ умножается на z^{-k_i} . В этом случае от правильной C -дроби (23) переходим к обобщенной C -дроби [11] следующего вида:

$$(24) \quad G(z, \Delta t) = \left[\frac{h(0) z^{-k_0}}{1}; \frac{\alpha_i(0) z^{-k_i}}{1} \right]_1^{\infty}.$$

Свернув непрерывную дробь вида (23), получим ДПФ формирующего объекта и далее перейдем к дискретной модели случайного процесса вида (19).

Для того чтобы смоделировать случайный процесс на основе (19) с дисперсией, равной $D_y = R_{yy}(0)$, необходимо рассчитать дисперсию $D_x = \sigma_x^2$ белого шума $x(t)$. Поскольку $M_x = M_y = 0$, то для определения D_x можно воспользоваться равенством, полученным на основе (19):

$$(25) \quad M(y^2(k)) = M \left(\sum_{i=0}^m a_i x(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i y(k-i) \right)^2.$$

Проведя несложные преобразования в (25), возможно получить формулу связи D_y и D_x через коэффициенты полученной модели.

Важным вопросом при цифровом моделировании случайных процессов на основе (19) является определение такого значения $k_{уст}$, начиная с которого случайный процесс $y(k\Delta t)$ можно считать стационарным, а режим воспроизведения –

установившемся. Поэтому необходимо отбросить искаженный участок моделируемого процесса $y(k\Delta t)$ [3], где $k = 0, \dots, (k_{уст} - 1)$.

Если модель формирующего объекта устойчива, то весовая функция с ростом k стремится к нулю. Для определения времени переходного процесса в литературе используют различные методы, например, в [17] его определяют через корни характеристического уравнения цифровой модели и используя логарифмические частотные характеристики.

В данной работе временем переходного процесса $k_{уст}$ будем считать тот интервал, по истечении которого значения весовой функции не превысят заданное малое значение Δ [18, 26]

$$|h(k)| \leq \Delta.$$

Обычно выбирают $\Delta = 0,05$.

Пример 1. При исследовании различных технических систем (например, промышленных электроустановок и следящих систем [28]) возникают случайные процессы с корреляционной функцией вида

$$(26) R_{yy}(t) = e^{-|t|}.$$

Требуется осуществить цифровое моделирование случайного процесса $y(t)$ с корреляционной функцией (26).

На основе корреляционной функции (26) определяем спектральную плотность [17]. Далее согласно (3) находится выражение для квадрата амплитудно-фазовой частотной характеристики формирующего объекта

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{2}{\omega^2 + 1}.$$

По корням числителя и знаменателя, а также их коэффициентам [17] определяем НПФ формирующего объекта

$$(27) G(s) = \frac{\sqrt{2}}{s+1}.$$

Используя обратное преобразование Лапласа, находим весовую функцию формирующего объекта, равную

$$(28) h(t) = \sqrt{2} e^{-t}.$$

Возьмем $\Delta t = 1$, тогда идентифицирующая матрица в модифицированном алгоритме В. Висковатова примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,4142 & 0,5203 & 0,1914 & 0,0704 & 0,0259 & \dots \\ -0,3679 & -0,1353 & -0,0498 & -0,0183 & - & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Последняя строка матрицы содержит нулевые элементы, следовательно, производим останов вычислительной процедуры. Тогда ДПФ формирующего объекта аппроксимируется элементами первого столбца полученной матрицы, порождающими конечную правильную C -дробь:

$$(29) \quad G(z) = \frac{1,4142}{1 - 0,3679 z^{-1}}.$$

ДПФ приводит к дискретной математической модели случайного процесса вида (19):

$$(30) \quad y(k\Delta t) = 1,4142 x(k\Delta t) + 0,3679 y((k-1)\Delta t).$$

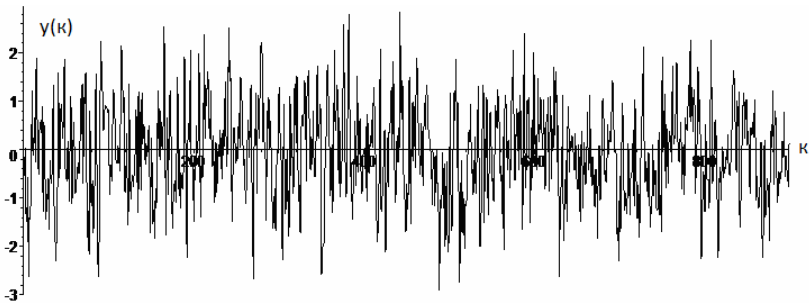


Рис. 2. График процесса $y(k\Delta t)$ (30)

Определим длительность переходного процесса. Значение весовой функции $h(4) = 0,0259$, следовательно, $k_{уст} = 4$.

Рассчитаем дисперсию, с которой необходимо моделировать белый шум $x(t)$ с учетом того, что дисперсия моделируемого процесса $D_y = R_{yy}(0) = 1$. Тогда

$$M(y^2(k)) = 1,4142^2 M(x^2(k)) + 0,3679^2 M(y^2(k-1)),$$

$$D_y = 1,4142^2 D_x + 0,3679^2 D_y,$$

откуда $D_x = 0,4323$. График процесса $y(k\Delta t)$ ($k = 0, \dots, 900 + k_{уст}$) приведен на рис. 2.

Отбросим переходный процесс и построим корреляционную функцию смоделированного процесса $y(k\Delta t)$ по формуле [1, 22]:

$$(31) R_{yy}^m(k\Delta t) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} y(i\Delta t)y((i+k)\Delta t),$$

где $N = 900$. Графики истинной корреляционной функции (26) и модельной $R_{yy}^m(k\Delta t)$ приведены на рис. 3. Дисперсия расхождений (1) $D_e = 0,0002$, т.е. сравнение истинных и модельных значений корреляционных функций позволяет сделать вывод о высокой точности цифрового моделирования.

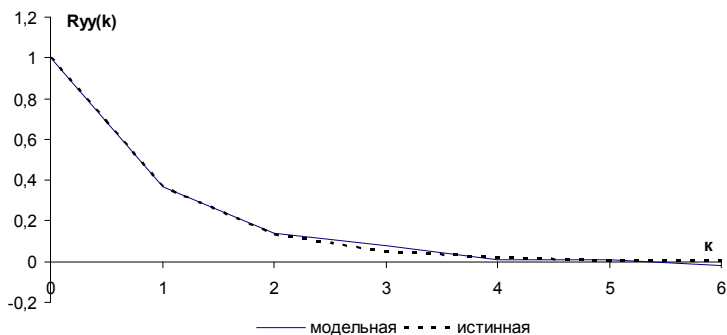


Рис. 3. Графики корреляционных функций к Примеру 1

5. Выбор шага дискретизации при цифровом моделировании стационарных случайных процессов

При разработке методов моделирования постоянно подчеркивается значимость величины шага дискретизации моделируемого случайного процесса, однако не приводятся конкретные правила по его выбору. Авторы обычно ограничиваются реко-

мендациями о его задании на основе сравнения с интервалом корреляции случайного процесса (шаг дискретизации должен быть значительно меньше интервала корреляции) [17]. В [20] авторы дополнительно устанавливают зависимость между погрешностью восстановления корреляционной функции и величиной Δt , объемом выборки и числом модельных экспериментов. Помимо этого для определения шага дискретизации предлагается анализировать составляющие корреляционной функции на предмет выявления ее характерных особенностей [17, 20] либо строго зафиксировать шаг дискретизации для каждого конкретного вида корреляционной функции случайного процесса [20]. Последнее предложение не всегда может удовлетворять условию практической задачи или совпадать с ней, что ограничивает область физической применимости данного метода. Кроме того, большинство методов дает хорошие результаты моделирования только лишь при малых шагах дискретизации ($\Delta t \rightarrow 0$).

Исследуем возможности выбора величины шага дискретизации при цифровом моделировании случайных процессов, а также определим, какое влияние он оказывает на восстановление ДПФ.

Рассмотрим с единых позиций влияние величины шага дискретизации Δt на взаимно однозначное соответствие между НПФ и ДПФ. Начало таких исследований заложено в трудах [10, 30]. Следует отметить, что при переходе от НПФ к ДПФ трудна формализация определения дополнительных нулей и полюсов, появляющихся в ДПФ объекта.

Как уже говорилось ранее, наиболее распространенным переходом от НПФ к ДПФ является преобразование $z = e^{s\Delta t}$ s -плоскости в z -плоскость. Оно отвечает требованиям взаимно однозначного соответствия при отображении непрерывного пространства в дискретное. Такое преобразование представляет собой периодическую функцию, которая отображает основную полосу $\left(-i\frac{\pi}{\Delta t}, i\frac{\pi}{\Delta t}\right)$ на всю z -плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси (рис. 4).

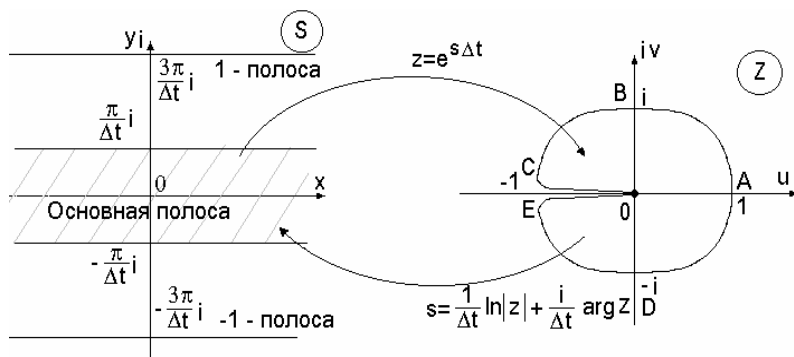


Рис. 4. Отображение s - и z -плоскостей

Все дополнительные полосы отображаются в аналогичную z -плоскость, и для взаимной однозначности необходимо в z -плоскости рассматривать многолистую (риманову) поверхность, для которой «склеивание» отдельных листов осуществляется вдоль линии разрезов. При отображении основной полосы s -плоскости в z -плоскость отметим следующее: интервал

$\left(-i \frac{\pi}{\Delta t}, i \frac{\pi}{\Delta t}\right)$ в s -плоскости отображается в единичную окружность EDABC;

прямые $y = \pm i \frac{\pi}{\Delta t}$ отображаются на разрез $(-\infty, 0]$ вещественной оси z -плоскости; точки s с положительной вещественной частью, принадлежащие основной полосе, – во внешность единичного круга z -плоскости, а точки s с отрицательной вещественной частью, принадлежащие основной полосе, – во внутренность единичного круга в z -плоскости (это обуславливает устойчивость линейных динамических объектов).

Наличие разреза нарушает взаимно однозначное соответствие полуполосы s -плоскости и круга единичного радиуса z -плоскости, так как при обратном к $z = e^{s\Delta t}$ логарифмическом отображении в s -плоскость [10]

$$(33) s = \frac{1}{\Delta t} \ln |z| + i \frac{1}{\Delta t} \arg z$$

одной точке на этом разрезе соответствуют две точки на границе указанной полосы, так как $\arg z = -\arg z$ [16].

Поскольку многие свойства преобразования $z = e^{s\Delta t}$ определяются шагом дискретизации и его изменениями, рассмотрим несколько случаев выбора шага Δt .

Случай 1.

Предположим, что Δt выбран таким образом, что нули и полюса объекта не попали в основную полосу

$$\left(-i \frac{\pi}{\Delta t} < y < i \frac{\pi}{\Delta t} \right).$$

В таком случае структура дискретной модели соответствует непрерывной, однако параметры модели, определяемые через нули и полюса формирующего объекта, будут соответствовать их проекциям в основную полосу [10]. Таким образом, происходит параметрическое искажение модели.

Для получения точной цифровой модели формирующего объекта необходимо уменьшить шаг дискретизации Δt до такого значения, при котором нули и полюса объекта попадут в основную полосу, причем дальнейшее уменьшение Δt не будет влиять на расположение нулей и полюсов, – они будут оставаться на своих местах.

Случай 2.

Шаг дискретизации Δt выбран так, что нули и полюса полученной ДПФ попали на границу основной полосы. При таком шаге дискретизации ни структура, ни параметры модели не будут определены верно [12]. Происходит структурно-параметрическая подмена модели (рис. 5).

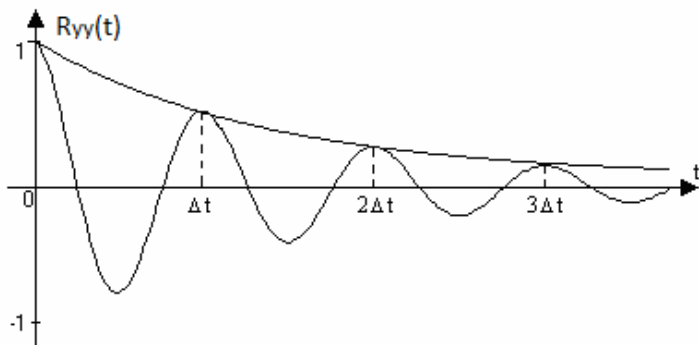


Рис. 5. Изменение структуры корреляционной функции при увеличении шага дискретизации

Согласно достаточному условию структурно-параметрической идентифицируемости [10], взаимно однозначное соответствие между непрерывной и дискретной моделями объекта возможно установить только при уменьшении шага Δt и только для тех Δt , при которых основная полоса в s -плоскости покрывает истинные нули и полюса объекта. Так, если кроме действительных нулей и полюсов существуют пары комплексно-сопряженных нулей и полюсов НПФ, то максимальный шаг дискретизации, при котором выполняется условие структурно-параметрической идентифицируемости, выбирается из следующего соотношения [30]:

$$(34) \Delta t \cdot \max_i \left| \operatorname{Im}(s_1^u, \dots, s_m^u, s_1^n, \dots, s_n^n) \right| < \pi.$$

Случай 3.

Выбор шага дискретизации Δt соответствует случаю попадания нулей и полюсов в основную полосу ($-i\pi / \Delta t < y < i\pi / \Delta t$). Структурно-параметрическое соответствие между ДПФ и НПФ установлено, и при дальнейшем уменьшении Δt ширина основной полосы увеличивается, однако нули и полюса в s -плоскости остаются на прежних местах [10]; при этом соответствующие образы нулей и полюсов в z -плоскости продолжают перемещаться внутри единичного круга, стремясь к точке $(1, 0)$ (рис. 6).

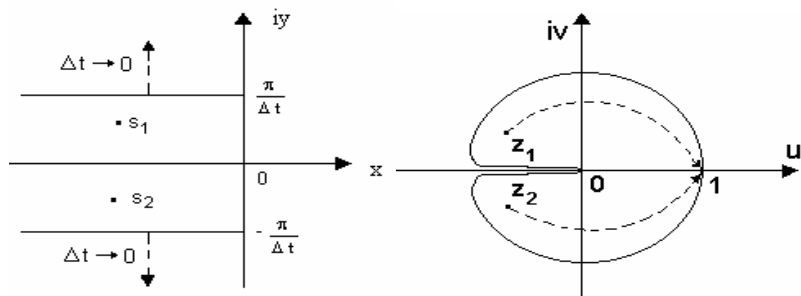


Рис. 6. Траектории движения нулей и полюсов в z -плоскости при уменьшении Δt

Случай 4.

Шаг дискретизации $\Delta t \rightarrow 0$. При этом отсчеты корреляционной функции отражают лишь ее начало, на котором ярко не выражены ее особенности. Как показано на рис. 6, все нули и полюса объекта в z -плоскости при $\Delta t \rightarrow 0$ стремятся к точке $(1, 0)$, т.е. попадают в ε -окрестность точки $(1, 0)$ и становятся неразличимы с некоторой заданной погрешностью ε (порог неразличимости).

Задав некоторую ε -окрестность точки $(1, 0)$, можно оценить шаг дискретизации $\Delta t_{кр}$, при котором все нули и полюса объекта в z -плоскости становятся неразличимы с заданной погрешностью ε :

$$(35) \quad \Delta t_{кр} < \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{|s_{max}|},$$

где через s_{max} обозначен нуль или полюс НПФ, который соответствует нулю или полюсу ДПФ, максимально удаленному от точки $(1, 0)$ z -плоскости.

При цифровом моделировании стационарных случайных процессов необходимо также учитывать условие

$$(36) \quad \Delta t_{кр} < \Delta t < \tau_{кор},$$

где $\tau_{кор}$ – интервал корреляции процесса. При невыполнении условия ($\Delta t > \tau_{кор}$) измерения процесса становятся некоррелированными и получить дискретную модель формирующего объекта невозможно. Согласно [4, 22], на практике интервал корреля-

ции определяют как такое значение аргумента нормированной корреляционной функции

$$r_{yy}(\tau) = R_{yy}(\tau) / R_{yy}(0),$$

начиная с которого выполняется соотношение

$$(37) \quad |r_{yy}(\tau)| \leq 0,05 \quad \text{для всех } \tau \geq \tau_{\text{кор}}.$$

Таким образом, на начальном этапе цифрового моделирования необходимо выбирать Δt следующим образом.

На основе НПФ определяются все нули и полюса формирующего объекта. Свойства z -преобразования позволяют сразу определить величину шага дискретизации, при котором дискретная модель будет соответствовать непрерывной. Если среди нулей и полюсов есть комплексно-сопряженные, то необходимо выбрать шаг дискретизации исходя из условия структурно-параметрической идентифицируемости.

Если у НПФ нет комплексно сопряженных полюсов и нулей, то шаг дискретизации можно варьировать до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность моделирования. С одной стороны, это означает, что прообразы дискретных полюсов (нулей) формирующего объекта совпадут с требуемой точностью с истинными значениями полюсов (нулей) НПФ. А с другой стороны, корреляционная функция смоделированного процесса должна совпадать с истинной корреляционной функцией с заданной погрешностью.

Если при выбранном Δt в ДПФ появляется полюса или нули, попадающие на разрез $(-\infty, 0)$ вещественной оси z -плоскости, то в НПФ соответствующие им конечные полюса (нули) отсутствуют [30].

Таким образом, метод цифрового моделирования должен при фиксированном шаге дискретизации Δt восстанавливать все нули и полюса дискретной модели, включая и возникающие на разрезе [30]. Этот эффект отсутствует при моделировании подстановочными методами – прямыми и обратными разностями Эйлера и с помощью билинейного преобразования. Причем для динамического объекта существует множество значений

$\Delta t \in \Delta T$, при которых осуществляется эквивалентность дискретных моделей, сохраняющая его динамические свойства.

Пример 2. В *Примере 1* был выбран шаг дискретизации $\Delta t = 1$. Оценим интервал корреляции случайного процесса. Поскольку нормированная корреляционная функция полностью совпадает с (26), $R_{yy}(3) \approx 0,05$, то $\tau_{\text{кор}} = 3$. Выбранный шаг удовлетворяет условию $\Delta t < \tau_{\text{кор}}$. Кроме того, $\Delta t = 1$ соответствует **Случаю 3** выбора шага дискретизации, следовательно, он может быть использован при цифровом моделировании.

Определим значение истинного полюса НПФ (27): $s^n = -1$. ДПФ (29) имеет полюс $z^n = 0,3679$, который, согласно (33), соответствует полюсу НПФ $s^n = -1$, совпадающему с полюсом истинной НПФ (27). Абсолютная ошибка восстановления непрерывного полюса равна нулю.

Проведем аналогичные расчеты цифрового моделирования случайного процесса $y(t)$ с корреляционной функцией (26) с другим шагом $\Delta t = 2$. Выбранный шаг удовлетворяет условию $\Delta t < \tau_{\text{кор}}$ и соответствует **Случаю 3**.

Идентифицирующая матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,4142 & 0,1913 & 0,0259 & 0,0035 & \dots \\ -0,1353 & -0,0183 & -0,0024 & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

ДПФ формирующего объекта аппроксимируется элементами первого столбца матрицы, порождающими конечную правильную C -дробь:

$$(38) \quad G(z, \Delta t) = \frac{1,4142}{1 - 0,1353 z^{-1}}.$$

ДПФ (38) имеет полюс $z^n = 0,1353$, который соответствует полюсу НПФ $s^n = -1$, полностью совпадающему с полюсом истинной НПФ (27).

Дискретная математическая модель случайного процесса имеет вид:

$$(39) \quad y(k\Delta t) = 1,4142 x(k\Delta t) + 0,1353 y((k-1)\Delta t).$$

Значение весовой функции $h(2) = 0,0259$, следовательно $k_{уст} = 2$ определяет время переходного процесса.

Аналогично *Примеру 1* рассчитаем дисперсию, с которой необходимо моделировать белый шум $x(t)$. Тогда

$$D_x = \frac{D_y(1 - 0,1353^2)}{1,4142^2} = 0,4908.$$

Смоделируем случайный процесс $y(k\Delta t)$, $k = 0, \dots, 900 + k_{уст}$, отбросим переходный процесс и построим корреляционную функцию смоделированного процесса $y(k\Delta t)$ по формуле (31). Графики истинной корреляционной функции (26) и модельной $R_{yy}^M(k\Delta t)$ приведены на рис. 7.

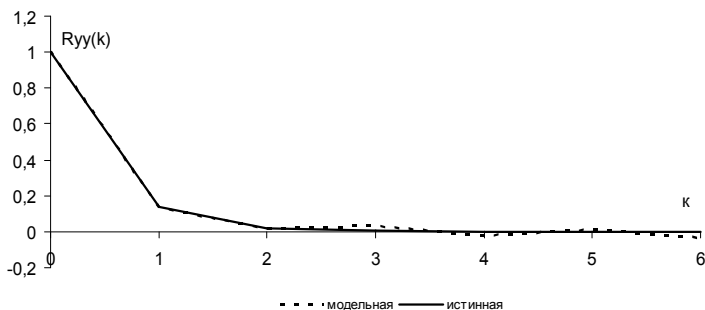


Рис. 7. Графики корреляционных функций к *Примеру 2* ($\Delta t = 2$)

Дисперсия расхождений (1) $D_e = 0,0002$, т.е. сравнение истинных и модельных значений корреляционных функций позволяет сделать вывод о высокой точности цифрового моделирования.

Необходимо отметить, что в [20] для цифрового моделирования случайного процесса с корреляционной функцией (26) шаг дискретизации однозначно зафиксирован и равен $\Delta t = 0,4$. Это ограничение связано с точностью моделирования. При цифровом моделировании на основе непрерывных дробей шаг дискретизации возможно варьировать в описанных ранее пределах.

Получим цифровую модель случайного процесса $y(t)$ с корреляционной функцией (26) и шагом $\Delta t = 0,4$. Выбранный шаг удовлетворяет условию $\Delta t < \tau_{кор}$ и соответствует **Случаю 3**.

Идентифицирующая матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,4142 & 0,9480 & 0,6354 & 0,4259 & \dots \\ -0,6703 & -0,4493 & -0,3012 & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

ДПФ формирующего объекта

$$(40) G(z, \Delta t) = \frac{1,4142}{1 - 0,6703 z^{-1}}.$$

Полос ДПФ $z^n = 0,6703$ соответствует полюсу НПФ $s^n = -1$, полностью совпадающему с полюсом истинной НПФ (27). Тогда дискретная математическая модель случайного процесса имеет вид:

$$(41) y(k\Delta t) = 1,4142 x(k\Delta t) + 0,6703 y((k-1)\Delta t).$$

Значение весовой функции $h(9) = 0,0386$. Можно принять $k_{уст} = 10$.

Дисперсия белого шума $x(t)$ на входе равна

$$D_x = \frac{D_y(1 - 0,6703^2)}{1,4142^2} = 0,2753.$$

После моделирования $y(k\Delta t)$ произведем сравнение истинной корреляционной функции (26) и модельной $R_{yy}^m(k\Delta t)$ (таблица 1).

Таблица 1. Значения истинной корреляционной функции (26) и модельной $R_{yy}^m(k\Delta t)$ к Примеру 2 ($\Delta t = 0,4$)

Моменты времени k	0	1	2	3	4	5
$R_{yy}(k\Delta t)$	1	0,6703	0,4493	0,3012	0,2019	0,1353
$R_{yy}^m(k\Delta t)$	1,0019	0,6756	0,4569	0,3225	0,2130	0,1517

Дисперсия расхождений (1) $D_e = 0,0002$. Сравнение истинных и модельных значений корреляционной функции позволяет сделать вывод о получении точной дискретной модели случайного процесса (с точностью до вычислительных погрешностей).

В [20] модель аналогичного случайного процесса с корреляционной функцией (26) была получена аппроксимацией на основе аналитического метода Ньютона с шагом дискретизации $\Delta t = 0,4$, при этом погрешность расхождения $D_e = 0,0009$, объем выборки который потребовался, равен 1000 значений $y(k\Delta t)$.

Таким образом, приведенные расчеты дискретной модели случайного процесса с корреляционной функцией (26) с различными шагами дискретизации подтверждают эффективность предлагаемого метода моделирования.

6. Исследование работоспособности алгоритма цифрового моделирования стационарных случайных процессов на основе непрерывных дробей

Проведенные выше исследования позволили сформулировать алгоритм цифрового моделирования стационарных случайных процессов с заданной корреляционной функцией. Приведем последовательность шагов алгоритма, которые необходимо сделать, чтобы получить точную цифровую модель случайного процесса.

1. Задание корреляционной функции $R_{yy}(t)$ моделируемого случайного процесса.

2. Определение НПФ формирующего стохастического объекта $G(s)$, ее нулей и полюсов.

3. Нахождение весовой функции $h(t)$ формирующего стохастического объекта как обратного преобразования Лапласа от $G(s)$.

4. Оценка интервала корреляции согласно (37).

5. Задание шага дискретизации Δt , удовлетворяющего условию SP -идентифицируемости (34) и неравенству (36).

6. Построение идентифицирующей матрицы В. Висковатова (21), получение ДПФ формирующего объекта $G(z, \Delta t)$.

7. Нахождение нулей и полюсов $G(z, \Delta t)$, а также определение соответствующих им нулей и полюсов в s -плоскости. Сравнение полученных результатов с истинными нулями и полюсами НПФ формирующего стохастического объекта $G(s)$, полученными в п. 1 (1-й критерий определения точности моделирования).

8. Расчет дисперсии D_x входного белого шума с использованием (25).

9. Моделирование стационарного случайного процесса на основе полученного конечно-разностного уравнения вида (19).

10. Отсечение переходного процесса на основе определения времени переходного процесса $k_{уст}$.

11. Расчет модельной корреляционной функции согласно (31).

12. Определение точности моделирования на основе дисперсии расхождений (1). (2-й критерий определения точности моделирования).

Далее будут проведены исследования данного алгоритма моделирования на стационарных случайных процессах с различными корреляционными функциями, часто встречающимися в практических приложениях.

Пример 3. Требуется осуществить цифровое моделирование случайного процесса с корреляционной функцией вида [3, 20]

$$(42) R_{yy}(t) = e^{-|t|}(1 + |t|),$$

имеющего спектральную плотность

$$(43) S_{yy}(\omega) = \frac{4}{\pi(\omega^2 + 1)^2}.$$

Найдем НПФ формирующего объекта

$$(44) G(s) = \frac{2}{(s + 1)^2},$$

определив предварительно квадрат амплитудно-фазовой частотной характеристики. Тогда весовая функция формирующего объекта равна (рис. 8)

$$(45) \quad h(t) = 2t e^{-t}.$$

Далее необходимо задать шаг дискретизации. Оценим интервал корреляции случайного процесса. Нормированная корреляционная функция совпадает с (42), $R_{yy}(4,8) \approx 0,048$. Тогда $\tau_{\text{кор}} = 4,8$. У НПФ нет комплексно сопряженных полюсов и нулей, поэтому согласно *Случаю 3* выбора шага дискретизации зададим $\Delta t = 0,9$.

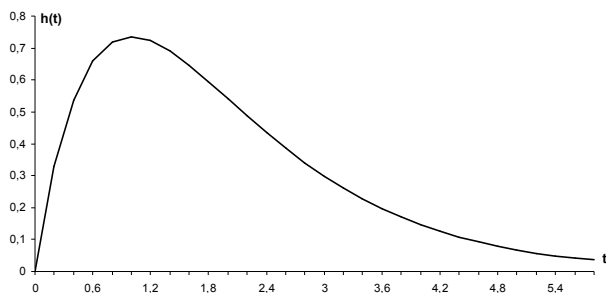


Рис. 8. Весовая функция (45)

Идентифицирующая матрица В. Висковатова примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0,7318 & 0,5951 & 0,3629 & 0,1967 & 0,1000 & 0,0488 & \dots \\ -0,8131 & -0,4959 & -0,2688 & -0,1366 & -0,0666 & - & \dots \\ 0,2033 & 0,1653 & 0,1008 & 0,0546 & - & - & \dots \\ -0,2033 & -0,1653 & -0,1008 & - & - & - & \dots \\ 0 & 0 & - & - & - & - & \dots \end{pmatrix}.$$

4-я строка матрицы содержит нулевые элементы. Элементы первого столбца матрицы определяют конечную правильную *C*-дробь

$$G(z, \Delta t) = \frac{0,7318}{1 + \frac{-0,8131z^{-1}}{1 + \frac{0,2033z^{-1}}{1 - 0,2033z^{-1}}}}$$

Определим ДПФ формирующего объекта

$$(46) \quad G(z, \Delta t) = \frac{0,7318z^{-1}}{1 - 0,8131z^{-1} + 0,1653z^{-2}}$$

ДПФ (46) имеет полюса $z_{1,2}^n = 0,4066$, которые согласно (33), соответствует полюсам НПФ $s_{1,2}^n = -1$, совпадающим с полюсами истинной НПФ (44).

ДПФ (46) приводит к дискретной математической модели случайного процесса вида (19):

$$(47) \quad y(k) = 0,7318 x(k-1) + 0,8131y(k-1) - 0,1653y(k-2)$$

Значение весовой функции $h(6) = 0,0488$, поэтому можно принять длительность переходного процесса $k_{уст} = 10$.

Рассчитаем дисперсию белого шума $x(t)$ на входе

$$M(y^2(k)) = M(0,7318 x(k-1) + 0,8131y(k-1) - 0,1653y(k-2))^2$$

Откуда

$$D_x = \frac{D_y(1 - 0,8131^2 - (-0,1653)^2) - 2 * 0,8131 * (-0,1653)}{0,7318^2} = 0,9693$$

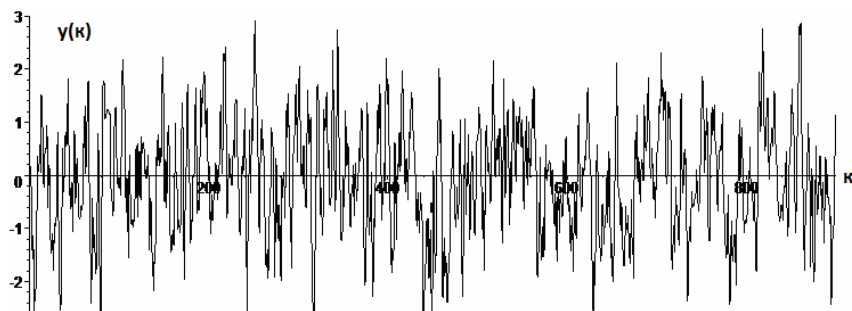


Рис. 9. График процесса (47)

На основе (47) смоделируем процесс $y(k\Delta t)$, график которого приведен на рис. 9 ($k = 0, \dots, 1000 + k_{уст}$).

Отбросим переходный процесс и построим корреляционную функцию процесса $y(k\Delta t)$ согласно (31). Графики истинной корреляционной функции (42) и модельной $R_{yy}^M(k\Delta t)$ приведены на рис. 10.

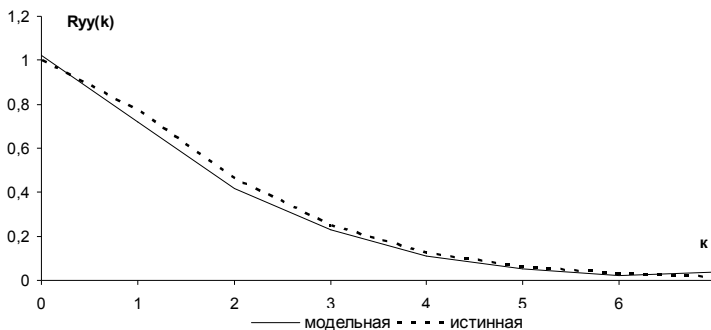


Рис. 10. Графики истинной корреляционной функции (42) и модельной $R_{yy}^M(k\Delta t)$ к Примеру 3

Дисперсия расхождений (1) $D_e = 0,0005$, т.е. сравнение истинных и модельных значений корреляционных функций позволяет сделать вывод о высокой точности цифрового моделирования. В [20] при моделировании случайного процесса с корреляционной функцией (42) погрешность расхождения составила $D_e = 0,0079$.

Пример 4. Случайный процесс имеет корреляционную функцию вида [3, 20, 28]

$$(48) R_{yy}(t) = 0,5 e^{-|t|} \cos 2t.$$

Например, подобный вид имеют корреляционные функции, описывающие случайные процессы типа турбулентности атмосферы.

Найдем НПФ формирующего объекта

$$(49) G(s) = \frac{s + \sqrt{5}}{s^2 + 2s + 5}.$$

НПФ имеет нуль $s^h = -2,2361$ и два полюса $s_{1,2}^n = -1 \pm 2i$.

Весовая функция формирующего объекта имеет вид

$$(50) h(t) = e^{-t} \cos 2t + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) e^{-t} \sin 2t.$$

Интервал корреляции случайного процесса равен $\tau_{\text{кор}} = 2$. Зададим шаг дискретизации, удовлетворяющий условию SP-идентифицируемости, которое для данного примера примет вид:

$$\Delta t \cdot |\text{Im } s_{1,2}^n| < \pi.$$

Так как $\text{Im } s_{1,2}^n = 2$, то граница основной полуполосы отстоит от оси ординат s -плоскости на величину

$$\frac{\pi}{|\text{Im } s_{1,2}^n|} = \frac{\pi}{2} \approx 1,5708.$$

При этом шаг дискретизации должен удовлетворять неравенству $\Delta t < 1,5708$.

Зададим $\Delta t = 0,05$. Идентифицирующая матрица В. Висковатова примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,0052 & 0,9979 & 0,9795 & 0,9511 & 0,9142 & \dots \\ -1,0052 & -0,9979 & -0,9795 & -0,9511 & -0,9142 & - & \dots \\ 0,0124 & 0,0235 & 0,0332 & 0,0416 & - & - & \dots \\ -0,9002 & -1,7040 & -2,4111 & - & - & - & \dots \\ 0 & 0 & - & - & - & - & \dots \end{pmatrix}.$$

Получаем конечную правильную C -дробь:

$$G(z, \Delta t) = \frac{1}{1 + \frac{-1,0052z^{-1}}{1 + \frac{0,0124z^{-1}}{1 - 0,9002z^{-1}}}}.$$

После сворачивания дроби получим ДПФ формирующего объекта:

$$(51) G(z, \Delta t) = \frac{1 - 0,8879z^{-1}}{1 - 1,8929z^{-1} + 0,9048z^{-2}}.$$

ДПФ (51) имеет полюса $z_{1,2}^n = 0,9465 \pm i0,0950$, которые, согласно (33), соответствуют полюсам НПФ $s_{1,2}^n = -1 \pm 2i$, совпадающие с полюсами истинной НПФ (49). Кроме того, ДПФ (51) имеет нуль $z^n = 0,8879$, которому в s -плоскости соответствует значение $s^n = -2,3805$. Абсолютная погрешность в определении нуля составляет 0,1444. Численные эксперименты, проведенные на тестовых объектах [9, 28], показали, что погрешность в восстановлении нуля гораздо меньше влияет на результаты дискретного моделирования, чем наличие погрешности восстановления полюсов. Покажем это, построив стохастическое конечно-разностное уравнение случайного процесса:

$$(52) y(k) = x(k) - 0,8879x(k-1) + 1,8929y(k-1) - 0,9048y(k-2).$$

Рассчитаем дисперсию белого шума $x(t)$ на входе формирующего объекта. Запишем модель (52) в общем виде:

$$(53) y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + b_1y(k-1) + b_2y(k-2).$$

Возьмем квадрат математического ожидания от обеих частей равенства (53):

$$M(y^2(k)) = M(a_0x(k) + a_1x(k-1) + b_1y(k-1) + b_2y(k-2))^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_y &= M(a_0^2x^2(k) + a_1^2x^2(k-1) + 2a_0a_1x(k)x(k-1)) + \\ &+ 2M(a_0b_1x(k)y(k-1) + a_0b_2x(k)y(k-2) + \\ &+ a_1b_1x(k-1)y(k-1) + a_1b_2x(k-1)y(k-2)) + \\ &+ M(b_1^2y^2(k-1) + b_2^2y^2(k-2) + 2b_1b_2y(k-1)y(k-2)) = \\ &= a_0^2D_x + a_1^2D_x + 2a_1b_1M(x(k-1)y(k-1)) + \\ &+ b_1^2D_y + b_2^2D_y + 2b_1b_2R_{yy}(1). \end{aligned}$$

Найдем математическое ожидание произведения $M(x(k-1)y(k-1))$:

$$M(x(k-1)y(k-1)) =$$

$$= M(a_0x^2(k-1) + a_1x(k-1)x(k-2) + b_1x(k-1)y(k-2) + b_2x(k-1)y(k-3)) = a_0D_x.$$

Подставив полученное математическое ожидание, будем иметь

$$D_y = a_0^2D_x + a_1^2D_x + 2a_1b_1a_0D_x + b_1^2D_y + b_2^2D_y + 2b_1b_2R_{yy}(1),$$

откуда

$$(54) D_x = \frac{D_y(1 - b_1^2 - b_2^2) - 2b_1b_2R_{yy}(1)}{a_0^2 + a_1^2 + 2a_1b_1a_0}.$$

На основе (54) получаем, что дисперсия входного процесса $D_x = 0,0508$.

Время переходного процесса $k_{\text{уст}} = 50$. На рис. 11 представлен график процесса $y(k\Delta t)$, полученного на основе дискретной модели (52) (объем реализации равен 1500 значений). Графики истинной корреляционной функции (48) и модельной $R_{yy}^M(k\Delta t)$ приведены на рис. 12. Дисперсия расхождений (1) равна $D_e = 0,00006$.

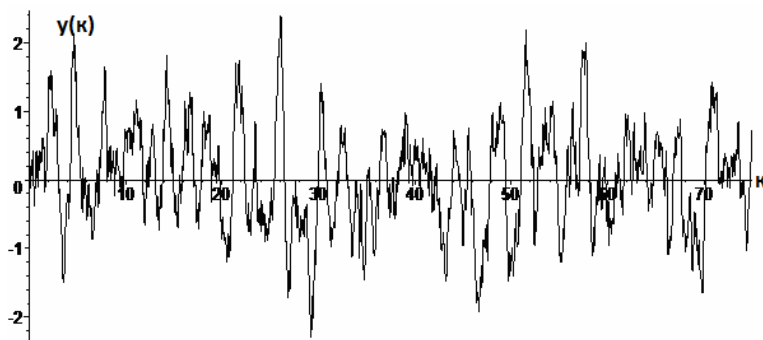


Рис. 11. График процесса (52)

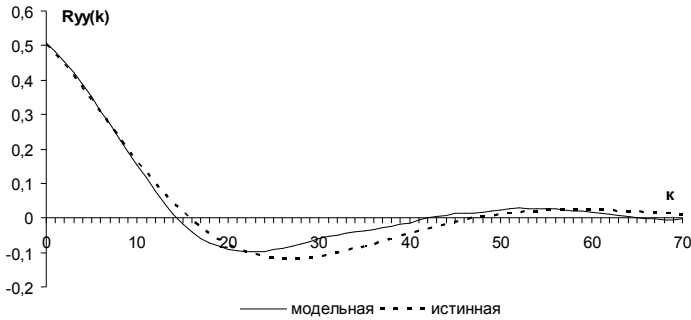


Рис. 12. Графики истинной корреляционной функции и модельной $R_{yy}^M(k\Delta t)$ к Примеру 4 (шаг дискретизации $\Delta t = 0,05$)

Посмотрим, что произойдет с моделью формирующего объекта (49) при шаге дискретизации $\Delta t = \pi/2$. Его задание соответствует **Случаю 2** выбора шага дискретизации. Построим идентифицирующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -0,2079 & 0,0432 & -0,0090 & \dots \\ 0,2079 & -0,0432 & 0,0090 & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Тогда ДПФ объекта аппроксимируется элементами первого столбца полученной матрицы, порождающими конечную правильную C -дробь:

$$(55) G(z, \Delta t) = \frac{1}{1 + 0,2079z^{-1}}.$$

ДПФ (55) имеет полюс $z^n = -0,2079$, который соответствует полюсу НПФ $s^n = -1$. Произошла структурно-параметрическая подмена модели.

Проследим изменения дискретной модели, взяв шаг дискретизации, не удовлетворяющий условию SP -идентифицируемости. Пусть $\Delta t = 2$ соответствует **Случаю 1** выбора шага дискретизации. Идентифицирующая матрица В. Висковатова примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -0,1518 & 0,0085 & 0,0013 & -0,0004 & 0,0000 & \dots \\ 0,1518 & -0,0085 & -0,0013 & 0,0004 & -0,0000 & - & \\ -0,0955 & 0,0169 & -0,0012 & -0,0001 & - & & \\ 0,1207 & -0,0213 & 0,0016 & - & & & \\ 0 & 0 & - & & & & \end{pmatrix}.$$

После сворачивания дроби получим ДПФ формирующего объекта:

$$(56) \quad G(z, \Delta t) = \frac{1 + 0,0252z^{-1}}{1 + 0,1769z^{-1} + 0,0183z^{-2}}.$$

ДПФ (56) имеет полюса $z_{1,2}^n = -0,0885 \pm i0,1024$, которые соответствуют полюсам НПФ $s_{1,2}^n = -1 \pm 1,1416i$. Значения полюсов не совпадают с полюсами истинной НПФ (49), а соответствуют их проекциям в основную полосу. Кроме того, ДПФ (56) имеет нуль $z^n = -0,0252$, который в s -плоскости отсутствует. Таким образом, происходит параметрическое искажение модели.

Приведенные расчеты дискретных моделей формирующего объекта (49) и выходного случайного процесса с корреляционной функцией (48) на основе различных шагов дискретизации подтверждают ранее сделанный вывод о том, что при наличии в НПФ объекта комплексно сопряженных нулей или полюсов шаг дискретизации нужно выбирать из условия SP -идентифицируемости.

Пример 5. Корреляционная функция случайного процесса имеет вид [17]:

$$(57) \quad R_{yy}(t) = 0,4 e^{-0,9|t|} + 0,6 e^{-0,8|t|} \cos(1,25|t|).$$

Тогда НПФ формирующего объекта

$$(58) \quad G(s) = \frac{12,96(s^2 + 2,11s + 1,76)}{(s^2 + 1,6s + 2,2)(10s + 9)}$$

имеет два нуля $s_{1,2}^H = -1,0550 \pm 0,8043i$ и три полюса $s_{1,2}^H = -0,8000 \pm 1,2490i$, $s_3^H = -0,9$.

Весовая функция формирующего объекта имеет вид

$$(59) \quad h(t) = 0,5539e^{-0,9t} + 0,7421e^{-0,8t} \cos(1,2490t) + 0,4698e^{-0,8t} \sin(1,2490t)$$

Интервал корреляции случайного процесса равен $\tau_{\text{кор}} \approx 2,4$. Зададим шаг дискретизации, удовлетворяющий условию SP -идентифицируемости:

$$(60) \quad \Delta t \cdot \max | \text{Im}(s_{1,2}^H, s_{1,2}^H) | < \pi.$$

Таким образом, шаг дискретизации должен удовлетворять неравенству $\Delta t < \frac{\pi}{1,2490} \approx 1,5153$.

Зададим $\Delta t = 0,1$. Идентифицирующая матрица В. Висковатова примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,2960 & 1,2300 & 1,1744 & 1,1013 & 1,0229 & 0,9408 & 0,8570 & \dots \\ -0,9568 & -0,9061 & -0,8498 & -0,7893 & -0,7260 & 0,6612 & & \\ 0,0097 & 0,0179 & 0,0249 & 0,0305 & 0,0348 & & & \\ -0,9110 & -1,6873 & -2,3316 & -2,8487 & & & & \\ 0,0058 & 0,0160 & 0,0293 & & & & & \\ -0,8936 & -2,4554 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Свернув конечную правильную C -дробь, получим ДПФ формирующего объекта:

$$(61) \quad G(z, \Delta t) = \frac{1,296 - 2,3186z^{-1} + 1,0439z^{-2}}{1 - 2,7458z^{-1} + 2,5264z^{-2} - 0,7788z^{-3}}.$$

ДПФ (61) имеет полюса

$$z_{1,2}^H = 0,9159 \pm i 0,01150 \text{ и } z_3^H = 0,9140,$$

которые соответствует полюсам НПФ

$$s_{1,2}^H = -0,7999 \pm 1,2490i \text{ и } s_3^H = -0,8997,$$

совпадающие с полюсами истинной НПФ (58) с точностью до погрешностей вычислений.

ДПФ (61) также имеет нули:

$$z_{1,2}^H = 0,8945 \pm 0,0726i, z_3^H = 0.$$

В s -плоскости $z_3^H = 0$, попадающий на разрез, отсутствует. Значениям комплексно-сопряженных полюсов в s -плоскости соответствуют:

$$s_{1,2}^H = -1,0816 \pm 0,8103i.$$

Примем за абсолютную ошибку определения нулей величину [30]

$$(62) \quad \varepsilon = |s_1^H - s_1^M| + |s_2^H - s_2^M|,$$

где s_1^H, s_2^H – нули (58); s_1^M, s_2^M – нули, полученные по модели (61). Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2|-1,055 + 0,8043i + 1,0816 - 0,8103i| = \\ &= 2|0,0266 - 0,006i| = 2 \cdot 0,0007 = 0,0014. \end{aligned}$$

Таким образом, ошибка в определении нулей составила 0,14%.

Стохастическое конечно-разностное уравнение случайного процесса на основе (61) будет иметь вид:

$$(63) \quad \begin{aligned} y(k) &= 1,2960x(k) - 2,3186x(k-1) + 1,0439x(k-2) + \\ &+ 2,7458y(k-1) - 2,5264y(k-2) + 0,7788y(k-3). \end{aligned}$$

Рассчитаем дисперсию белого шума $x(t)$ на входе формирующего объекта. Модель (63) в общем виде:

$$(64) \quad \begin{aligned} y(k) &= a_0x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) + \\ &+ b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + b_3y(k-3). \end{aligned}$$

Возьмем квадрат математического ожидания от обеих частей равенства (64):

$$\begin{aligned} M(y^2(k)) &= M(a_0x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) + \\ &+ b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + b_3y(k-3))^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 D_y &= M(a_0^2 x^2(k) + a_1^2 x^2(k-1) + a_2^2 x^2(k-2) + \\
 &\quad + 2a_0 a_1 x(k)x(k-1) + 2a_0 a_2 x(k)x(k-2) + \\
 &\quad + 2a_2 a_1 x(k-2)x(k-1)) + \\
 &\quad + 2M(a_0 b_1 x(k)y(k-1) + a_0 b_2 x(k)y(k-2) + \\
 &\quad + a_0 b_3 x(k)y(k-3) + a_1 b_1 x(k-1)y(k-1) + \\
 &\quad + a_1 b_2 x(k-1)y(k-2) + a_1 b_3 x(k-1)y(k-3) + \\
 &\quad + a_2 b_1 x(k-2)y(k-1) + a_2 b_2 x(k-2)y(k-2) + \\
 &\quad + a_2 b_3 x(k-2)y(k-3)) + \\
 &\quad + M(b_1^2 y^2(k-1) + b_2^2 y^2(k-2) + b_3^2 y^2(k-3) + \\
 &\quad + 2b_1 b_2 y(k-1)y(k-2) + 2b_1 b_3 y(k-1)y(k-3) + \\
 &\quad + 2b_2 b_3 y(k-2)y(k-3)) = \\
 &= a_0^2 D_x + a_1^2 D_x + a_2^2 D_x + b_1^2 D_y + b_2^2 D_y + b_3^2 D_y + \\
 &\quad + 2b_1 b_2 R_{yy}(1) + 2b_1 b_3 R_{yy}(2) + 2b_2 b_3 R_{yy}(1) + \\
 &\quad + 2a_1 b_1 M(x(k-1)y(k-1)) + 2a_2 b_1 M(x(k-2)y(k-1)) + \\
 &\quad + 2a_2 b_2 M(x(k-2)y(k-2)).
 \end{aligned}$$

Найдем математическое ожидание произведения $M(x(k-1)y(k-1))$:

$$\begin{aligned}
 M(x(k-1)y(k-1)) &= \\
 &= M(a_0 x^2(k-1) + a_1 x(k-1)x(k-2) + a_2 x(k-1)x(k-3) + \\
 &\quad + b_1 x(k-1)y(k-2) + b_2 x(k-1)y(k-3) + \\
 &\quad + b_3 x(k-1)y(k-4)) = a_0 D_x.
 \end{aligned}$$

Математическое ожидание произведения $M(x(k-2)y(k-1))$:

$$\begin{aligned}
 M(x(k-2)y(k-1)) &= \\
 &= M(a_1 x^2(k-2) + a_0 x(k-1)x(k-2) + a_3 x(k-2)x(k-3) + \\
 &\quad + b_2 x(k-2)y(k-3) + b_3 x(k-2)y(k-4) + b_1 x(k-2)y(k-2)) = \\
 &= a_1 D_x + b_1 M(x(k-2)y(k-2)).
 \end{aligned}$$

Математическое ожидание произведения $M(x(k-2)y(k-2))$:

$$M(x(k-2)y(k-2)) =$$

$$= M(a_0x^2(k-2) + a_1x(k-3)x(k-2) + a_2x(k-2)x(k-4) + b_2x(k-2)y(k-4) + b_3x(k-2)y(k-5) + b_1x(k-2)y(k-3)) = a_0D_x.$$

Подставив полученные математические ожидания, будем иметь

$$D_y = a_0^2D_x + a_1^2D_x + a_2^2D_x + b_1^2D_y + b_2^2D_y + b_3^2D_y + 2a_1b_1a_0D_x + 2b_1b_2R_{yy}(1) + 2b_1b_3R_{yy}(2) + 2b_3b_2R_{yy}(1) + 2a_2b_1^2a_0D_x + 2a_2b_1a_1D_x + 2a_2b_2a_0D_x.$$

Окончательно

$$(65) D_x = \frac{D_y(1 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) - (2b_1b_2 + b_3b_2)R_{yy}(1) - 2b_1b_3R_{yy}(2)}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1b_1a_0 + 2a_2b_1^2a_0 + 2a_2b_1a_1 + 2a_2b_2a_0}.$$

На основе (65) получаем, что дисперсия входного процесса $D_x = 0,0963$.

Время переходного процесса $k_{\text{уст}} = 30$. На рис. 13 представлен график процесса $y(k\Delta t)$, (объем реализации равен 1700 значений).

Графики истинной корреляционной функции (57) и модельной $R_{yy}^M(k\Delta t)$ приведены на рис. 14. Дисперсия расхождений (1) равна $D_e = 0,0007$.

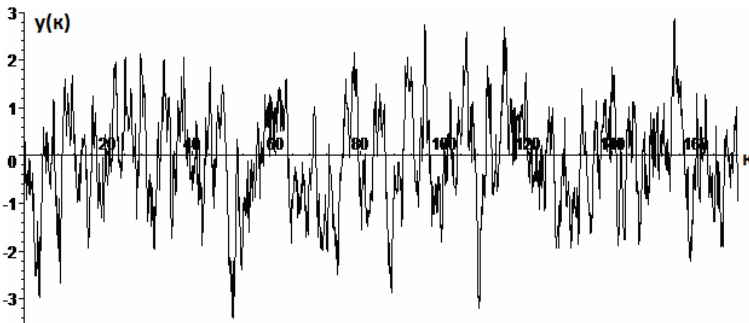


Рис. 13. График процесса (63)

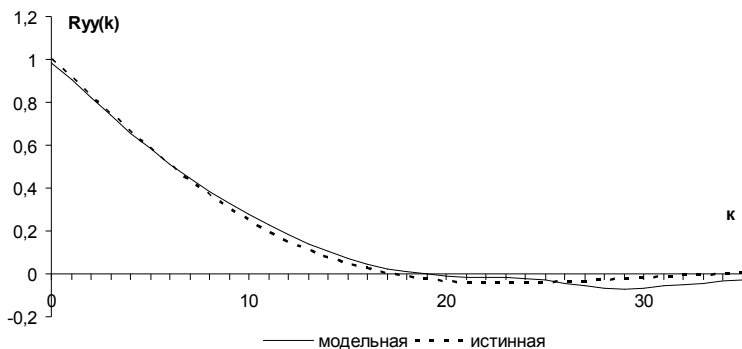


Рис. 14. Графики истинной корреляционной функции и модельной $R_{yy}^m(k\Delta t)$ к Примеру 5

7. Выводы

С использованием теории непрерывных дробей разработан алгоритм цифрового моделирования, позволяющий построить точную дискретную модель случайного процесса с заданной корреляционной функцией.

Приведенные теоретические и модельные исследования позволяют утверждать, что предложен достаточно эффективный и простой в реализации переход к дискретному представлению стационарного случайного процесса. В отличие от существующих методов цифрового моделирования данный метод не имеет погрешности моделирования, позволяет теоретически обосновать выбор шага дискретизации, устанавливать взаимно однозначное соответствие между заданной непрерывной и получаемой дискретной моделями случайного процесса, а также может использоваться для моделирования формирующих объектов с различными функциональными свойствами.

Литература

1. БЕНДАТ ДЖ., ПИРСОЛ А. *Прикладной анализ случайных процессов*. – М.: Мир, 1989. – 464 с.

2. БУСЛЕНКО Н.П. *Моделирование сложных систем.* – М.: Наука, 1968. – 356 с.
3. БЫКОВ В.В. *Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.* – М.: «Советские радио», 1971. – 328 с.
4. ВОЛГИН В.В., КАРИМОВ Р.Н. *Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления.* – М.: Энергия, 1979. – 80 с.
5. ГРИДИНА Е.Г., ЛЕБЕДЕВ А.Н., НЕДОСЕКИН Д.Д., ЧЕРНЯВСКИЙ Е.А. *Цифровое моделирование систем стационарных случайных процессов.* – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 144 с.
6. ДЕЙЧ А.М. *Методы идентификации динамических объектов.* – М.: Наука, 1985. – 240 с.
7. ЕМЕЛЬЯНОВ В.Ю. *Методы моделирования стохастических систем управления: учеб. пособие.* – СПб.: изд-во Балт. гос. техн. ун-та, 2004. – 168 с.
8. ЖОВИНСКИЙ А.Н., ЖОВИНСКИЙ В.Н. *Инженерный экспресс-анализ случайных процессов.* – М.: Энергия, 1979. – 112 с.
9. КАРТАШОВ В.Я. *Анализ и исследование аппроксимационных свойств непрерывных дробей при решении задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов // Препринт №22.* – Барнаул: Изд-во Алтайского государственного университета, 1996. – 40 с.
10. КАРТАШОВ В.Я., ИНДЕНКО О.Н., АЛЕКСАНДРОВ А.В. *Влияние периода дискретизации на структурно-параметрическое соответствие между непрерывной и дискретной по времени моделями линейного динамического объекта // Препринт №15.* – Барнаул: Изд-во Алтайского государственного университета, 1996. – 36 с.
11. КАРТАШОВ В.Я. *Непрерывные дроби (определения и свойства).* – Кемерово: Изд-во Кемеровского государственного университета, 1999. – 88 с.
12. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А. *Идентификация стохастических объектов: учебное пособие.* – Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета, 2008. – 104 с.

13. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А. *Способ идентификации линейного объекта* // Патент РФ №2146063. – 2000. – Бюл. №6.
14. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А. *Структурно-параметрическая идентификация стохастических объектов с использованием непрерывных дробей* // Управление большими системами. – 2008. – Вып. 21. – С. 27–48.
15. КАРТАШОВ В.Я. *Эквивалентность дискретных моделей – реальность?* // Промышленные контроллеры АСУ. – 2006. – №8. – С. 40–44.
16. КОРН Г., КОРН Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* – М.: Наука, 1974. – 832 с.
17. ЛЕБЕДЕВ А.Н., НЕДОСЕКИН Д.Д., СТЕКЛОВА Г.А., ЧЕРНЯВСКИЙ Е.А. *Методы цифрового моделирования и идентификации стационарных случайных процессов в информационно-измерительных системах.* – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1988. – 64 с.
18. МАКАРОВ И.М., МЕНСКИЙ Е.М. *Линейные автоматические системы.* – М.: Машиностроение, 1982. – 464 с.
19. МАКС Ж. *Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях.* Том 1. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
20. *Прикладной анализ случайных процессов* / Под ред. С.А. Прохорова. – СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
21. РАБИНЕР Л., ГОУЛД Б. *Теория и применение цифровой обработки сигналов.* – М.: Мир, 1978. – 848 с.
22. РОМАНЕНКО А.Ф. СЕРГЕЕВ Г.А. *Вопросы прикладного анализа случайных процессов.* – М.: Советское радио, 1968. – 247 с.
23. САМАРСКИЙ А.А., МИХАЙЛОВ А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
24. СИБЕРТ У.М. *Цепи, сигналы, системы.* Том 1.– М.: Мир, 1988. – 510 с.
25. СМИТ ДЖ. М. *Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей.* – М.: Машиностроение, 1980. – 271 с.
26. СОЛОДОВНИКОВ В.В., ПЛОТНИКОВ В.Н., ЯКОВЛЕВ

- А.В. *Основы теории и элементы систем автоматического регулирования*: учебное пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
27. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Том 2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
28. ШАЛЫГИН А.С., ПАЛАГИН Ю.И. *Прикладные модели статистического моделирования*. – Л.: Машиностроение, 1986. – 320 с.
29. ШЕННОН Р. *Имитационное моделирование систем – искусство и наука*. – М.: Мир, 1978. – 420 с.
30. ЩЕКОЧИХИНА С.Г. *Разработка метода дискретного моделирования в задачах диагностики сложных объектов горной техники*: дис. канд. тех. наук. – Кемерово, 1999. – 279 с.

DIGITAL DESIGN OF STATIONARY CASUAL PROCESSES WITH THE SET CROSS-CORRELATION FUNCTION ON BASIS OF THE CONTINUED FRACTIONS

Vladimir Kartashov, head of the Department of Automation of Researches and Technical Cybernetics of the Kemerovo State University, Doctor of engineering sciences, professor (kartash@kemsu.ru).

Marina Novoseltseva, associate professor of Department of Automation of Researches and Technical Cybernetics of the Kemerovo State University, Candidate of engineering sciences, (aanov@pochta.ru).

Abstract: On the basis of the continued fractions the algorithm of design of stationary casual process is worked out, accordance is set between continuous and discrete the models of casual process, the choice of quantization interval is reasonable.

Keywords: stationary casual process, cross-correlation function, continued fraction, forming object, white noise, continuous transmission function, quantization interval, discrete transmission function, stochastic difference equation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. А. Уткиным