

УДК 62-50:681.3
ББК 22.18 65.23 65.29

ИМИТАЦИОННЫЕ И ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ИХ СТРУКТУРЫ

Угольницкий Г. А.¹

(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

Имитационное моделирование вещественно-энергетических процессов в сложных системах удобно проводить с помощью динамических ориентированных графов (орграфов), отражающих структуру системы. Для описания структуры иерархических систем естественно использовать бесконтурные орграфы. В статье рассматриваются задачи линейного программирования и оптимального управления с иерархической структурой на основе матриц смежности таких орграфов, приводятся примеры их приложений.

Ключевые слова: динамические ориентированные графы, иерархическая структура, линейное программирование и оптимальное управление.

1. Введение

Модели управления сложными системами включают два основных аспекта: дескриптивный и нормативный. В связи с трудностями аналитического исследования сложных систем дескриптивный аспект удобно реализовать с помощью имитационных моделей, описывающих динамику сложных систем при различных вариантах управляющих воздействий. Нормативный аспект реализуют оптимизационные и теоретико-

¹ Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).

игровые модели, позволяющие указать наилучшую в определенном смысле стратегию управления.

Естественным математическим аппаратом описания структуры сложных систем являются ориентированные графы (орграфы). Вершины орграфа соответствуют элементам системы, дуги – связям и отношениям между ними. Для количественной характеристики элементов и связей можно использовать значения (веса) вершин и дуг. В работе рассматриваются динамические орграфы как инструмент моделирования вещественно-энергетических процессов в сложных системах с учетом их структуры.

Если моделируемая система имеет иерархическую структуру, то описывающий ее орграф является бесконтурным. Матрица смежности такого орграфа имеет треугольный вид. Используя матрицы смежности бесконтурных орграфов можно сформулировать задачи линейного программирования и оптимального управления с иерархической структурой. В работе исследуются некоторые свойства таких моделей и приводятся примеры их приложения к моделированию и управлению экологическими системами [10].

2. Динамические орграфы и их использование в имитационном моделировании

Описание состояния сложной системы в момент t с учетом ее структуры включает следующие элементы.

1. Множество вершин $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, где $n(t)$ – количество вершин в момент t . Разобьем множество $Y(t)$ на два непересекающихся подмножества: $\forall t Y(t) = Y_1(t) \cup Y_2(t)$, $Y_1(t) \cap Y_2(t) = \emptyset$ (в частности, возможно $Y_2(t) = \emptyset$). Будем называть вершины из $Y_1(t)$ *компартаментами* и обозначать квадратами, а вершины из $Y_2(t)$ – *преобразователями* и обозначать кругами.

2. Множество дуг $Z(t) = \{z_{ij}^k(t)\}$, $1 \leq i, j \leq n(t)$, $1 \leq k \leq N$, где $z_{ij}^k(t)$ – дуга из вершины y_i в вершину y_j (в частности, петля при $i = j$),

по которой может перемещаться ресурс k в момент t ; N – общее число ресурсов в системе.

3. Множество переменных состояния компарментов

$X(t) = \{x_i^k(t)\}$, $1 \leq i \leq n(t)$, $1 \leq k \leq N$, где $x_i^k(t)$ – количество ресурса k в компарменте $y_i \in Y_1$ в момент t . Тогда $x_i(t)$ – вектор состояния компартамента y_i в момент t (набор всех его ресурсов).

4. Множество переменных состояния дуг

$F(t) = \{f_{ij}^k(t)\}$, $1 \leq i, j \leq n(t)$, $1 \leq k \leq N$, где $f_{ij}^k(t)$ – вес дуги $z_{ij}^k(t)$, т. е. либо количество ресурса k , переносимое за время $[t, t + 1]$ из вершины y_i в вершину y_j , $i \neq j$, либо величина прироста (убыли) ресурса k в компарменте y_i за то же время, $i = j$ (шаг по времени равен единице). В каждой рассматриваемой ситуации (задаче) множество $F(t)$ можно разбить на два непересекающихся подмножества: $\forall t F(t) = F_1(t) \cup F_2(t)$, $F_1(t) \cap F_2(t) = \emptyset$ (в частности, возможно $F_2(t) = \emptyset$). Переменные из множества $F_1(t)$ будем называть *регулируемыми* (они изменяются в силу заданных соотношений), а переменные из $F_2(t)$ – *регулирующими* или просто *регуляторами* (они могут изменяться произвольно на допустимом множестве).

5. Множество ограничений на емкость компарментов

$\underline{X} = \{\underline{x}_i^k\}$, $1 \leq i \leq n(t)$, $1 \leq k \leq N$, где \underline{x}_i^k – максимальное количество ресурса k , которое может содержаться в компарменте y_i .

6. Множество ограничений на пропускную способность дуг

$\underline{F} = \{\underline{f}_{ij}^k\}$, $1 \leq i, j \leq n(t)$, $1 \leq k \leq N$, где \underline{f}_{ij}^k – максимальное количество ресурса k , которое может быть перемещено из вершины y_i в вершину y_j , $i \neq j$, или произведено (уничтожено) в компарменте y_i , $i = j$, за единицу времени. Таким образом, обобщенное состояние сложной системы есть множество

$$S(t) = \langle Y(t), Z(t), X(t), F(t), \underline{X}, \underline{F} \rangle.$$

Чтобы избежать рассмотрения орграфов с кратными дугами, будем сопоставлять каждой вершине $y_i \in Y$ единственный вес $x_i(t)$, а каждой дуге $z_{ij} \in Z$ – единственный вес $a_{ij}(t)$. Тогда динамическая структура системы состоит из отдельных «скалярных» структур, каждая из которых отображает определен-

ный аспект вещественно-энергетических взаимодействий в системе.

Разбиение множества вершин динамического орграфа на две части позволяет описать основные вещественно-энергетические процессы в реальных системах [6]: 1) перемещение (перенос, обмен) ресурсов между компартментами; 2) синтез/элиминация ресурсов; 3) превращение (преобразование) ресурсов. Отобразим эти процессы с помощью динамических орграфов.

1. Перемещение ресурса k между двумя компартментами y_i и y_j в момент t может происходить при наличии дуги $z_{ij}^k(t)$ (рис. 1).

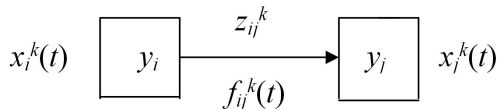


Рис. 1. Перемещение ресурса k между компартментами y_i и y_j

Пусть в момент t запасы ресурса k в компартментах y_i и y_j равны $x_i^k(t)$ и $x_j^k(t)$ соответственно, а переменная состояния дуги $z_{ij}^k(t)$ есть $f_{ij}^k(t)$. Тогда

$$(1) \quad x_i^k(t+1) = x_i^k(t) - f_{ij}^k(t), x_j^k(t+1) = x_j^k(t) + f_{ij}^k(t).$$

2. Синтез/элиминация ресурса k в компартменте y_i в момент t возможны при наличии петли $z_{ii}^k(t)$ (рис. 2).

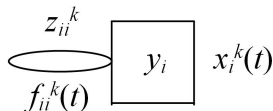


Рис. 2. Синтез/элиминация ресурса k в компартменте y_i

Случай $f_{ii}^k(t) > 0$ соответствует синтезу, а $f_{ii}^k(t) < 0$ – элиминации ресурса k . В результате получаем

$$(2) \quad x_i^k(t+1) = x_i^k(t) + f_{ii}^k(t).$$

3. Превращение одних ресурсов в другие возможно при наличии вершины-преобразователя из множества Y_2 . Это наиболее сложный класс процессов, содержащий разнообразные подклассы, которые можно группировать различным образом, например:

- а) простое превращение (ресурса k в ресурс 1);
- б) сложное превращение (одного ресурса в несколько, нескольких в один или нескольких в несколько); или
 - А) единичное превращение (внутри одного компартмента);
 - Б) бинарное превращение (между двумя компартментами);
 - В) множественное превращение (между несколькими компартментами).

Рассмотрим в качестве примера случай бБ. Пусть начальные запасы ресурсов $x_i^k(t)$, $x_i^l(t)$, $x_j^l(t)$. Превращение удовлетворяет соотношению

$$(3) \quad \begin{aligned} x_i^k(t+1) &= x_i^k(t) - f_{ip}^k(t), \\ x_i^l(t+1) &= x_i^l(t) - f_{ip}^l(t), x_j^l(t+1) = x_j^l(t) + f_{pj}^l(t), \end{aligned}$$

где y_i , y_j – компартменты, y_p – преобразователь. Рассмотрим в качестве примера хорошо известную модель «хищник-жертва»

$$(4) \quad \frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\varepsilon_2 x_2 + \gamma_2 x_1 x_2,$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – биомассы популяций жертвы и хищника соответственно в момент t ; ε_1 , ε_2 – коэффициенты естественного прироста популяций; γ_1 , γ_2 – коэффициенты взаимодействия жертвы и хищника. Представление модели (4) с помощью динамического орграфа показано на рис. 3.

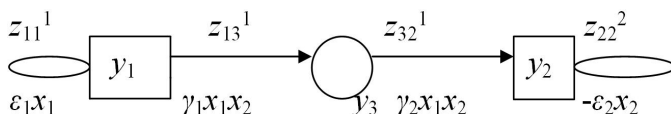


Рис. 3. Представление модели «хищник-жертва» с помощью динамического иерархического орграфа

Здесь петли z_{11}^1 и z_{22}^2 описывают прирост (синтез) биомассы жертв (ресурса 1) и убыль (элиминацию) биомассы хищников (ресурса 2) в компартментах y_1 и y_2 соответственно, а преобразование y_3 – простое бинарное превращение биомассы жертв в биомассу хищников. В общем случае естественная динамика

ресурсов системы отображается балансовым уравнением для каждого компартмента и каждого ресурса:

$$(5) \quad x_j^k(t+1) = x_j^k(t) + \sum_{y_j \in S_j^+(t)} f_{ij}^k(t) - \sum_{y_l \in S_j^-(t)} f_{jl}^k(t),$$

$$1 \leq i, j, l \leq n(t), 1 \leq k \leq N,$$

Соотношение (5), дополненное начальными данными, представляет собой имитационную модель, описывающую динамику системы с учетом ее структуры. Уравнение (5) учитывает как пассивную регуляцию системы (за счет изменения f_{jl}^k , $f_{mj}^k \in F_1$ в силу заданных соотношений), так и активную (за счет выбора $f_{jp}^k, f_{qj}^k \in F_2$). Активная регуляция может дополнительно изменять множества Y и Z . Изменения множеств X и F естественно назвать ресурсными, а изменения множеств Y и Z – структурными. Совокупность ресурсных и структурных изменений определяет динамику системы S .

Обобщенное состояние системы $S(t)$ изменяется также при внешних воздействиях. Внешнюю среду системы можно представить вершиной y_0 с вектором состояния $x_0(t) = (x_0^1(t), \dots, x_0^N(t))$. Соответственно множество дуг $Z(t)$ дополняется элементами вида $z_{0i}^k(t), z_{i0}^k(t)$, а множество переменных состояния дуг $F(t)$ – элементами $f_{0i}^k(t), f_{i0}^k(t)$, $1 \leq i \leq n(t)$, $1 \leq k \leq N$. Влияние внешней среды на систему учитывается в (5) без потери общности при условии, что y_0 может входить в множества S_j^+, S_j^- . Кроме того, внешнее воздействие может изменять множества $Y(t), Z(t)$. При наличии нескольких источников воздействия приходится вводить несколько внешних вершин y_{01}, \dots, y_{0m} , соответствующих дуг и переменных состояния.

Рассмотрим в качестве примера модель «хищник-жертва» с учетом антропогенного воздействия (эксплуатации)

$$(6) \quad \frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 x_2 - \alpha \lambda x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\varepsilon_2 x_2 + \gamma_2 x_1 x_2 - \beta \lambda x_2,$$

где по сравнению с моделью (4) добавлены характеристики антропогенной эксплуатации сообщества: интенсивность λ и способы α, β . Представление модели (6) с помощью динамиче-

ского иерархического орграфа дано на рис. 4. По сравнению с рис. 3 здесь к компартментам y_1 («жертвы») и y_2 («хищники») добавлен компартмент y_0 , отображающий внешнюю среду сообщества (источник эксплуатации), и дуги z_{10}^1, z_{20}^2 с переменными состояниями $\alpha\lambda x_1, \beta\lambda x_2$.

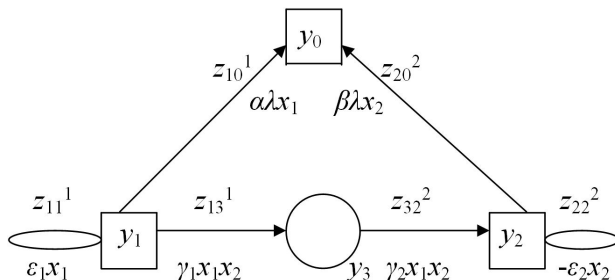


Рис. 4. Моделирование эксплуатации в системе «хищник-жертва» с помощью динамического орграфа

Кроме соотношения (5), возможны и другие правила изменения значений вершин [8].

3. Теоретико-графовое моделирование иерархических систем

Будем описывать структуру иерархической системы конечным связным ориентированным графом $D = (Y, Z)$, где $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ – множество вершин, обозначающих элементы системы; $Z = \{(y_i, y_j)\}$ – множество дуг, обозначающих связи между элементами.

Будем говорить, что вершины $y_i \in Y, y_j \in Y$ связаны отношением иерархии ($y_i \leq y_j$), если существует путь от y_i к y_j ; в частности, допускается путь нулевой длины. Будем называть связные орграфы без контуров иерархическими (H -орграфами).

Будем говорить, что вершины $y_i \in Y, y_j \in Y$ связаны отношением строгой иерархии ($y_i < y_j$), если существует путь нену-

левой длины от u_i к u_j . Будем называть связные оргграфы без контуров и петель строго иерархическими (*SH*-оргграфами).

Если $u_i < u_j$, то вершина u_i называется предком u_j , а вершина u_j – потомком u_i . Всегда существует разбиение множества вершин строго иерархического графа строго иерархического оргграфа на непересекающиеся подмножества (слои) такое, что: все элементы данного слоя не имеют предков в следующем слое; элементы первого слоя не имеют предков, а последнего – потомков (и только они); вершины одного и того же слоя не соединяются дугами.

Аналогичное утверждение верно и для иерархического оргграфа, если не учитывать петли (т. е. считать, что вершина не может быть предком или потомком самой себе). Все вершины без входных дуг образуют первый слой L_1 .

Расстояние $d(u, v)$ от вершины u до вершины v в оргграфе D равно длине кратчайшего пути из u в v . Назовем расстоянием $d(M, v)$ от множества вершин $M \subset Y(D)$ до вершины v наименьшее из всех расстояний $d(u, v)$, $u \in M$. В случае, когда вершину можно поместить в несколько слоев, будем выбирать тот, который ближе к первому слою. Слои, равноотстоящие от первого слоя, объединяются в один слой.

Указанные условия однозначно определяют разбиение множества вершин строго иерархического оргграфа на слои

$$Y(SH) = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m, L_p \cap L_q = \emptyset, p, q = 1, \dots, m,$$

где m – число слоев в оргграфе. Каждый слой содержит n_i вершин, так что $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$, где n – число вершин оргграфа.

Введем следующие определения [10].

Иерархический (строго иерархический) оргграф называется:

- левым однополюсным, если $n_1 = 1$;
- правым однополюсным, если $n_m = 1$;
- двухполюсным, если $n_1 = n_m = 1$.

Левый (правый) однополюсный оргграф называется:

а) древовидным, если

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m \quad (n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \text{ соответственно});$$

б) строго древовидным, если знаки неравенств строгие.

Иерархический (строго иерархический) оргграф называется последовательным, если дуги проводятся только между смежными слоями. Иерархический (строго иерархический) оргграф называется левым (правым) однозначным, если каждая вершина имеет не более одной входной (выходной) дуги.

Будем называть матрицу смежности иерархического (строго иерархического) оргграфа иерархической (строго иерархической) соответственно. Такие матрицы имеют блочную структуру, блоки которой соответствуют слоям.

4. Иерархические задачи линейного программирования

Ориентированный граф D или, что то же самое, его матрица смежности A естественным образом определяют пару задач линейного программирования (ЗЛП): прямую

$$(7) \quad (c, x) \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор значений вершин;

$c = (c_1, \dots, c_n)$ – вектор коэффициентов целевой функции;

$b = (b_1, \dots, b_n)$ – вектор правых частей ограничений;

(c, x) – скалярное произведение векторов, и двойственную

$$(8) \quad (b, p) \rightarrow \min, A'p \geq c, p \geq 0,$$

где $p = (p_1, \dots, p_n)$ – вектор двойственных переменных.

Заметим, что транспонирование сохраняет свойство иерархичности (строгой иерархичности) матрицы смежности с точностью до перестановки составляющих ее блоков. Заметим также, что в любом строго иерархическом оргграфе существует $n_1 \geq 1$ вершин без входных дуг и $n_m \geq 1$ вершин без выходных дуг. Вершинам без входных дуг соответствуют нулевые столбцы в матрице A , а вершинам без выходных дуг – нулевые столбцы в A' . Переменные ЗЛП, соответствующие нулевым столбцам, входят в левые части ограничений с нулевыми коэффициентами и могут принимать любые неотрицательные значения.

Поэтому во избежание неразрешимости ЗЛП переменные, соответствующие нулевым столбцам, следует исключать из

целевой функции. Чтобы сохранить общий вид ЗЛП (7) и (8), положим эти переменные равными нулю.

Пусть $SH = (Y, Z)$ – строго иерархический оргграф с n вершинами, квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ порядка n – его матрица смежности, a_{ij} – вес дуги $(y_i, y_j) \in Z$, x_i – значение вершины $y_i \in Y$. Строго иерархической ЗЛП, порождаемой оргграфом SH , назовем ЗЛП вида (7), где $x = (0, \dots, 0, x_{n_1+1}, \dots, x_n)$, $c = (0, \dots, 0, c_{n_1+1}, \dots, c_n)$, $b = (b_1, \dots, b_{n-n_m}, 0, \dots, 0)$, n_1, n_m – число вершин в первом и последнем слоях SH соответственно. Аналогично, для двойственной ЗЛП (8) полагаем $p = (p_1, \dots, p_{n-n_m}, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим левые и правые древовидные ЗЛП с двумя слоями вершин (двумя уровнями иерархии). В матрице смежности левой древовидной ЗЛП ненулевыми являются только элементы первой строки (кроме первого), а правой – только последнего столбца (кроме последнего элемента). Отсюда сразу следует очевидная

Теорема 1. Оптимальное решение правой древовидной ЗЛП с двумя слоями вершин $x_n \rightarrow \max$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$ определяется по формуле $x_n^* = \min\{b_1/a_{1n}, \dots, b_{n-1}/a_{n-1,n}\}$.

Левая древовидная ЗЛП с двумя слоями вершин имеет вид

$$(9) \quad \sum_{j=2}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$(10) \quad \sum_{j=2}^n a_{ij} x_j \leq b_i,$$

$$(11) \quad x_j \geq 0, j = 2, \dots, n.$$

Соотношение (10) определяет гиперплоскость в пространстве векторов x_2, \dots, x_n . Область допустимых значений ЗЛП (9)-(11) образуется пересечением этой гиперплоскости с координатными плоскостями, а все крайние точки суть точки пересечения гиперплоскости (10) с осями координат. Приведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 2. Оптимальное решение левой древовидной ЗЛП с двумя слоями вершин имеет вид $(0, \dots, 0, x_i^*, 0, \dots, 0)$, где точка x_i^* определяется условием $c_i x_i^* = \max_{2 \leq j \leq n} c_j x_j$.

Заметим, что теорема 1 справедлива также для левой двойственной ЗЛП с матрицей $A'_{i'}$, а теорема 2 – для двойственной ЗЛП с матрицей A' . В общем случае для последовательных ЗЛП справедлива следующая

Теорема 3 [10]. Пусть ЗЛП имеет вид

$$(12) \quad \sum_{j=n_1+1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$a_{1,n_1+1} x_{n_1+1} + \dots + a_{1,n_1-n_2} x_{n_1-n_2} \leq b_1,$$

(13) ...

$$a_{n_1,n_1+1} x_{n_1+1} + \dots + a_{n_1,n_1-n_2} x_{n_1-n_2} \leq b_{n_1},$$

$$a_{n_1+1,n_1+n_2+1} x_{n_1+n_2+1} + \dots + a_{n_1+1,n_1+n_2+n_3} x_{n_1+n_2+n_3} \leq b_{n_1+1},$$

(14) ...

$$a_{n-n_m-n_{m-1},n-n_m} x_{n-n_m} + \dots + a_{n-n_{m-1},n} x_n \leq b_{n-n_m-n_{m-1}},$$

...

$$(15) \quad a_{n-n_{m-1},n-n_m} x_{n-n_m} + a_{n-n_{m-1},n} x_n \leq b_{n-n_{m-1}},$$

$$(16) \quad x_j \geq 0, j = n_1 + 1, \dots, n.$$

Тогда вектор $(x_{n_1+1}^*, \dots, x_n^*)$ является оптимальным планом ЗЛП (12)-(16) тогда и только тогда, когда:

подвектор $(x_{n_1+1}^*, \dots, x_n^*)$ является оптимальным планом ЗЛП

$$(17) \quad \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях (13) и

$$(18) \quad x_j \geq 0, j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2;$$

подвектор $(x_{n_1+n_2+1}^*, \dots, x_{n_1+n_2+n_3}^*)$ является оптимальным планом ЗЛП

$$(19) \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях (14) и

$$(20) x_j \geq 0, j = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3;$$

...

подвектор (x_{n-n_m}, x_n^*) является оптимальным планом ЗЛП

$$(21) \sum_{j=n-n_m}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях (15) и

$$(22) x_j \geq 0, j = n - n_m, \dots, n.$$

Теоремы 1-3 могут быть использованы, например, при решении задач оптимальной эксплуатации биологических ресурсов. Это использование базируется на иерархической природе трофических связей в биологических сообществах. При этом левые орграфы описывают ситуации использования одного ресурса несколькими видами хищников, а правые – обратные ситуации наличия нескольких источников питания для одного вида-хищника. Связь между этими ситуациями отражается использованием двойственности в теоремах 1-2. Свойство последовательности означает, что виды каждого трофического уровня питаются только видами предыдущего уровня и сами служат пищей только для последующего, что допускает описанную в теореме 3 декомпозицию.

Рассмотрим в качестве примера биологическую систему, состоящую из видов $i = 1, \dots, n$, в которой особи одного вида могут питаться особями другого вида. Построим ориентированный граф $SH = (Y, Z)$, в котором вершины $y_1, \dots, y_n \in Y$ обозначают виды, а дуга $(y_i, y_j) \in Z$ проводится в том и только том случае, если j -й вид питается i -м (от жертвы к хищнику). Естественно считать, что если i -й вид питается j -м, то j -й вид не может питаться i -м; каннибализм также исключается. Тогда орграф SH не содержит контуров и петель, т. е. является строго иерархическим.

Дальнейшая конкретизация вида строго иерархического орграфа зависит от рассматриваемой биосистемы. Прежде всего, предположим, что единственная вершина u_n , не имеющая выходных дуг (т. е. видов-хищников), обозначает популяцию человека. Во многих реальных биосистемах трофическая сеть представляет собой «пирамиду», т. е. на каждом следующем уровне трофической иерархии (слое вершин орграфа) видов-хищников меньше, чем их жертв на предыдущем уровне. Однако это не обязательно: например, возможна ситуация, когда несколько видов второго уровня питаются единственным видом корма первого уровня, и т. п.

Сопоставим каждой вершине u_i значение p_i , равное биомассе вида i в начале некоторого периода, а каждой дуге (v_i, v_j) – вес a_{ij} , равный доле биомассы особи вида i , переходящей в биомассу особи вида j при выедании в течение периода. Обозначим также:

b_i – затраты на содержание одной особи вида i (предполагается, что биосистема создается человеком для своих нужд);

c_j – минимально необходимая для жизнеобеспечения j -го вида биомасса, подлежащая усвоению j -м видом при питании остальными видами в течение периода.

Тогда можно сформулировать строго иерархическую ЗЛП

$$(23) \quad \sum_{i=1}^{n-1} b_i p_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i \in S_j^+} a_{ij} p_i \geq c_j, j = n_1 + 1, \dots, n, p_i \geq 0, i = 1, \dots, n-1,$$

где S_j^+ – множество видов, служащих пищей для j -го вида; n_1 – число видов, не питающихся другими видами данной биосистемы. Эта ЗЛП является двойственной для правого однополюсного орграфа, поэтому в случае двух видов для ее решения можно использовать теорему 1, а в общем случае – теорему 3.

5. Иерархические задачи оптимального управления

Пусть $SH = (Y, Z)$ – строго иерархический оргграф с n вершинами. Строго иерархической задачей оптимального управления (ЗОУ), порождаемой SH , называется задача

$$(24) (c^{T+1}, x^{T+1}) + \sum_{t=1}^T (c^t, x^t) + \sum_{t=0}^t (b^t, u^t) \rightarrow \max$$

$$(25) x^{t+1} = A_t' x^t + B_t' u^t;$$

$$(26) D_t' u^t \leq d^t, t = 0, 1, \dots, T;$$

$$(27) x^0 = x_0,$$

где $x^t, u^t, b^t, c^t, d^t, x_0$ – векторы из R^n ; набор $(x_i^t, u_i^t, b_i^t, d_i^t, x_{0i})$ является значением вершины y_i ; для вершин первого слоя $y_i \in L_1$

$$(28) d_i^t = 0;$$

для вершин последнего слоя $y_i \in L_m$

$$(29) u_i^t = 0;$$

A_t, B_t, D_t – строго иерархические матрицы весов дуг (каждой дуге из Z приписываются три значения $a_{ij}^t, b_{ij}^t, d_{ij}^t$).

Требуется найти последовательность управлений u_{opt}^t , $t = 0, \dots, T$, удовлетворяющих (26), которая вместе с соответствующей последовательностью x_{opt}^t , определяемой формулой (25) при начальном значении (27), максимизирует целевую функцию (24). Как известно [2], для линейных дискретных ЗОУ справедлива

Теорема 4 (принцип максимума). Для того чтобы в задаче (24)-(27) управление u_{opt}^t было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(30) H_i(u_{opt}^t, p^t) = \max_{u \in U_i} H_i(u, p^t),$$

где U_i – множество векторов u^t , описываемое множеством (26); p^t – соответствующие условию (25) двойственные переменные, определяемые формулой

$$(31) p^{t-1} = c^t + A_t p^t, t = T, T-1, \dots, 1; p^T = 0;$$

функция Гамильтона имеет вид

$$(32) H_t(u, p^t) = (b^t, u^t) + (p^t, B_t' u^t).$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (31), легко получить формулу для вычисления p^t :

$$(33) p^t = c^{t+1} + A_t c^{t+2} + A_t^2 c^{t+3} + \dots + A_t^{T-t+1} c^T, t = 0, \dots, T-1.$$

Таким образом, функция Гамильтона (32) является линейной функцией переменных u^t : $H(u^t) = (C_t, u^t)$, где не содержащая u^t векторная величина C_t зависит от параметров A_t, B_t, b^t, c^t .

Добавим к ЗОУ (24)-(27) естественно возникающие в приложениях условия неотрицательности

$$(34) u^t \geq 0.$$

Тогда для нахождения максимума функции Гамильтона (32) при ограничении (26) нужно решить ЗЛП

$$(35) (C_t, u^t) \rightarrow \max, D_t' u^t \leq d^t, u^t \geq 0, t = 0, 1, \dots, T.$$

Эта ЗЛП является строго иерархической того же типа, что и исходная строго иерархическая ЗОУ (24)-(27); в частности, для решения последовательных ЗЛП применима теорема 3.

Рассмотрим динамическое обобщение предыдущего примера из раздела 4. Пусть x_i^t – биомасса вида i в момент t (скажем, в начале года t); u_i^t – «сбор урожая» (изъятие) биомассы вида i в момент t ; b_i^t – цена единицы биомассы вида i в момент t ; c_i^t – биологическая ценность единицы биомассы вида i в момент t ;

a_{ij} – доля биомассы особи вида i , переходящей в биомассу особи вида j при выедании в течение периода; ε_j – коэффициент естественного прироста для i -го вида. Динамику биомассы j -го вида опишем уравнением

$$(36) x_j^{t+1} = x_j^t + \varepsilon_j x_j^t + \sum_{i \in S_j^+} a_{ij} x_i^t - \sum_{k \in S_j^-} a_{kj} x_k^t - u_j^t,$$

где S_j^+ , S_j^- – множества видов, служащих «жертвами» и «хищниками» для j -го вида соответственно, $j = 1, \dots, n$. Тогда можно поставить следующую ЗОУ:

$$(37) J = (c^{T+1}, x^{T+1}) + \sum_{t=1}^T (b^t, u^t) \rightarrow \max$$

$$(38) x^{t+1} = (E + \varepsilon + A' - S)x^t - u^t;$$

$$(39) 0 \leq u^t \leq x^t, t = 0, \dots, T;$$

$$(40) x^0 = x_0.$$

Принципиальное отличие ЗОУ (37)-(40) от ЗОУ (24)-(27) заключается в том, что ограничение на управления (26) заменено на (39), т. е. область допустимых управлений зависит от фазовых переменных. Поэтому функция Гамильтона здесь имеет вид

$$(41) H(x^t, u^t) = (b^t, u^t) + (p^t, Mx^t - u^t) + (\lambda^t, u^t - x^t),$$

где $M = (E + \varepsilon + A' - S)$, λ^t – множитель Лагранжа (вектор из R^n).

Матрица M является иерархической, а не строго иерархической, как в ЗОУ (24)-(27). Необходимые и достаточные условия максимума функционала (37) можно записать в форме [2]:

$$(42) \text{grad}_u H(x, u) = b^t - p^t + \lambda^t = 0;$$

$$(43) \lambda^t \geq 0, (\lambda^t, u^t - x^t) = 0.$$

Из (43) получаем условия

$$(44) \lambda_i^t > 0, u_i^t = x_i^t \text{ или } u_i^t \neq x_i^t, \lambda_i^t = 0, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T.$$

Но из (42) $\lambda^t = p^t - b^t = c^{t+1} + Ac^{t+2} + \dots + A^{T-t-1}c^T - b^t$. Правая часть этого соотношения может обратиться в ноль только при специально подобранных значениях параметров A, b, c , что для реальной биосистемы маловероятно. Поэтому почти всегда можно считать, что λ_i^t не обращаются в ноль. Тогда из (44) остается единственная возможность

$$(45) u_i^t = x_i^t, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T.$$

Таким образом, максимизировать функционал (37) при ограничениях (38)-(40) можно, на каждом шаге собирая всю накопленную биомассу. Следовательно, (38) принимает вид

$$(46) x^{t+1} = (M - E)x^t,$$

откуда с учетом (40) получаем

$$(47) \begin{aligned} x_{opt}^t &= (M - E)^t x_0 = (\varepsilon + A' - S)^t x_0, t = 0, 1, \dots, T + 1; \\ J_{opt} &= (c^{T+1}, (\varepsilon + A' - S)^{T+1} x_0) + \sum_{t=1}^T (b^t, (\varepsilon + A' - S)^t x_0). \end{aligned}$$

Здесь также для сообщества из двух видов применима теорема 1, для сообщества из многих видов – теорема 3.

Аналогично можно определить линейные многошаговые игры двух лиц с иерархическими матрицами [10].

6. Заключение

Динамические оргграфы представляются удобным инструментом компьютерной имитации, позволяющим отобразить структуру моделируемой системы. Например, в терминах динамических оргграфов можно описать три механизма реакции системы на внешнее воздействие [9]: 1) поисковый – поиск структурного элемента, способного разрешить возникшую в результате воздействия проблемную ситуацию без изменения состояния системы S ; 2) ресурсный – изменение вещественно-энергетических потоков в системе (множества F_2); 3) структурный – изменение структуры системы (множества Y и Z).

Задачи линейного программирования и оптимального управления с иерархической структурой представляют собой специфические модели управления, для которых легко получить частные случаи известных результатов. Этот класс моделей находит естественные приложения в задачах управления иерархическими системами (прежде всего организационными и эколого-экономическими, см. например [4]).

Литература

1. БЕРЖ К. *Теория графов и ее приложения*. – М.: ИЛ, 1962. – 320 с.
2. БОЛТЯНСКИЙ В.Г. *Оптимальное управление дискретными системами*. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
3. ГАВРИЛОВ В.М. *Оптимальные процессы в конфликтных ситуациях*. – М.: Сов.радио, 1969. – 160 с.
4. ГОРСТКО А.Б., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Оптимизация структуры ориентированного графа как метод моделирования в*

- экологии // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. – 2000. – Т.17. – С. 68-81.*
5. КОФМАН А., ДЕБАЗЕЙ Г. *Сетевые методы планирования.* – М.: Прогресс, 1968. – 184 с.
 6. НОВОСЕЛЬЦЕВ В.Н. *Теория управления и биосистемы.* – М.: Наука, 1978. – 320 с.
 7. ПОНТРЯГИН Л.С. и др. *Математическая теория оптимальных процессов /* Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
 8. РОБЕРТС Ф. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* – М.: Мир, 1986. – 486 с.
 9. СЫРОЕЖИН И.М. *Методы структурной настройки систем управления производством /* Сыроежин И.М., Забежинская Е.Б., Захарченко Н.Н. и др. – М.: Статистика, 1976. – 184 с.
 10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Линейная теория иерархических систем.* Препринт. – М.: ИСА РАН, 1996. – 55 с.

SIMULATION AND OPTIMIZATION MODELS OF COMPLEX SYSTEMS WITH RESPECT TO THEIR STRUCTURE

Guennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Science, Professor (ougoln@mail.ru).

Abstract: It is convenient to simulate matter-energetic processes in complex systems with dynamic directed graphs (digraphs) reflecting the structure of a system. Acyclic digraphs naturally describe the structure of a hierarchical system. Linear programming and optimal control problems based on matrices of these digraphs are considered, examples of their applications are given.

Keywords: dynamic directed graphs, hierarchical structure, linear programming and optimal control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым