

УДК 681.5.013 + 621.18.5

ББК 32.965

## СИНТЕЗ РОБАСТНОГО $H_\infty$ -РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КОТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ <sup>1</sup>

Курдюков А. П. <sup>2</sup>, Тимин В. Н. <sup>3</sup>

*(Учреждение Российской академии наук Институт проблем  
управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

*В статье с использованием  $H_\infty$ -метода формирования контура с ограничением на размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной области с привлечением аппарата линейных матричных неравенств решается задача синтеза робастного регулятора для управления котельной установкой. Требования к замкнутой системе формулируются как в виде частотных ограничений на сингулярные числа передаточной функции разомкнутой системы, так и в форме ограничений на размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости. Проведена редукция  $H_\infty$ -регулятора полного порядка, полученного в результате синтеза.*

Ключевые слова: управление котельной установкой,  $H_\infty$ -теория управления, линейные матричные неравенства (ЛМН),  $H_\infty$ -метод формирования контура, расположение полюсов замкнутой системы в заданной области, редукция регулятора.

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Межсекционной программы ОЭМППУ РАН №2 "Проблемы управления и безопасности энергетики и технических систем".

<sup>2</sup> Александр Петрович Курдюков, доктор технических наук, профессор, (akurd@ipu.ru).

<sup>3</sup> Виктор Николаевич Тимин, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, (timin.victor@rambler.ru.) (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65).

## **Введение**

Энергетические системы включают в себя разнообразные источники производителей электрической энергии. Широкое распространение получили тепло-энергетические установки. Преобразование энергии топлива при горении в топке котла в электрическую энергию представляет собой сложный многоуровневый процесс. На тепловой электрической станции первичная внутренняя энергия топлива при сгорании его в топках котлов превращается в тепло продуктов сгорания. Это тепло нагревает воду и превращает ее в пар, который подается на турбину. В турбине тепловая энергия пара переходит в кинетическую энергию движущейся струи пара. Пар, проходя с большой скоростью между лопатками турбины, заставляет ротор турбины вращаться. Механическая энергия вала турбины передается электрогенератору, в котором она превращается в электрическую.

Котельная установка состоит из собственно котла, топочного устройства, пароперегревателя, водяного экономайзера, воздухоподогревателя, каркаса, обмуровки, арматуры, котельно-вспомогательного оборудования и трубопроводов. Котел барабанного типа состоит из системы труб поверхностей нагрева, объединенных между собой барабанами и камерами. Паровой котел предназначен для получения насыщенного пара. Топочные устройства предназначены для превращения внутренней энергии топлива в тепловую энергию продуктов сгорания. В пароперегревателе происходит перегрев насыщенного пара до заданной температуры за счет тепла продуктов сгорания. В водяном экономайзере питательная вода нагревается за счет дополнительного использования тепла дымовых газов и направляется в собственно котел с температурой, близкой к температуре насыщения. Воздухоподогреватель предназначен для интенсификации и повышения устойчивости процесса сгорания топлива, а также дальнейшего использования тепла продуктов сгорания. В паровых котлах тепло, выделяющееся

180

при сжигании топлива, передается от продуктов сгорания воде и пару. Передача тепла осуществляется через поверхности нагрева, которые у современных котлов представляют собой трубные пакеты (пучки), в которых дымовые газы проходят между расположенными в несколько рядов трубами. В паровых котлах барабанного типа с естественной циркуляцией вода из барабана отпускаяется по необогреваемым (опускным) трубам в нижние сборные коллекторы и затем вместе с образующимся паром поднимается самотеком по обогреваемым (подъемным) трубам опять в барабан. В барабане вода отделяется от пара и снова направляется в водоотпускные трубы. Основными поверхностями нагрева котлов с естественной циркуляцией являются: экономайзер, в котором питательная вода нагревается до поступления в барабан, испарительные трубы и пароперегреватель. Перегретый пар под давлением подается в коллектор.

Математическая модель физических процессов, происходящих в котельной установке, является сложной многосвязной нелинейной системой, поэтому задача ее автоматического управления до настоящего времени является актуальной. В данной работе используется динамическая модель котельной установки, идентифицированная на основе данных, полученных на тепловой электростанции компании Syncrude Canada, Ltd. (SCL) в номинальном режиме работы [29]. Котельная установка барабанного типа с естественной циркуляцией обеспечивает на выходе давление перегретого пара 6,306 МПа и температуру 500°C. Регулирование давления и температуры перегретого пара осуществляется изменением расходов воздуха и топлива в топке, питательной воды и пароохладителя.

К работе котельной установки в нормальном режиме работы предъявляются следующие требования: давление пара в паровом котле должно поддерживаться на постоянном уровне независимо от количества потребляемого пара; количество воды в котле должно поддерживаться на желаемом уровне для

исключения перегрева или затопления; температура пара должна поддерживаться на желаемом уровне, чтобы предотвратить перегрев паранагревателя и предотвратить попадание мокрого пара в турбину. Кроме того, в результате неточности описания математической модели в нормальных условиях работы появляются колебания регулируемых параметров, которые регулятору необходимо сглаживать.

Для решения задачи автоматического управления котельными установкам применялись различные методы синтеза регуляторов, а именно: управление с помощью гауссовского линейно-квадратичного (*linear quadratic Gaussian-LQG*) регулятора [11], управление с помощью модифицированного линейно-квадратичного гауссовского (*LQG/loop transfer recovery-LTR*) регулятора [17],  $H_\infty$ -управление по подходу смешанной чувствительности (*mixed-sensitivity approach*) [24], управление с учетом внутренней модели (*internal-model control-IMC*) [25], управление с помощью  $H_\infty$ -метода формирования контура (*loop-shaping  $H_\infty$  approach*) [29].

Синтез законов управления котельной установкой с целью улучшения робастной устойчивости и качества переходных процессов составляет достаточно сложную и актуальную задачу. С этой целью в данной работе исследуется возможность применения  $H_\infty$ -робастных регуляторов, полученных с помощью  $H_\infty$ -метода формирования контура при ограничении на размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной области.

С инженерной точки зрения под синтезом системы управления можно понимать построение системы управления, обеспечивающей выполнение всех предъявляемых к ней технических требований. Проектируемая система управления должна обеспечивать приемлемое качество переходных процессов, необходимую точность и грубость (робастность) к неопределенности в модели объекта управления.

Требования к проектируемой системе могут формулироваться как во временной, так и в частотной

областях [2]. Расположение и вид корней характеристического полинома (полюсов передаточной функции замкнутой системы) определяют характер переходного процесса. Поэтому требования к запасу устойчивости и быстродействию, не рассматривая кривые переходного процесса, можно сформулировать, накладывая ограничения на корни характеристического полинома. Таким образом, задавая ограничения на расположение и вид корней характеристического полинома, мы задаем ограничения во временной области на вид переходного процесса и, очевидно, на максимальные значения регулируемой величины, значения перегулирования, времени переходного процесса и др.

Требования к расположению полюсов передаточной функции замкнутой системы в некоторой заданной области на комплексной плоскости позволяет задавать ограничения на:

- быстродействие, которое может быть оценено по степени устойчивости (абсолютной величине действительной части ближайшего к мнимой оси корня);
- запас устойчивости, который может быть оценен по колебательности (максимальному отношению мнимой части корня к его действительной части) или параметру затухания (коэффициенту демпфирования);
- максимальную угловую частоту собственных колебаний системы (максимальную абсолютную величину мнимой части корня).

Размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы в области, изображенной на рис. 1, гарантирует:

- затухание колебаний переходных процессов не менее  $\eta$  ;
- коэффициент демпфирования (параметр затухания) не менее  $\zeta = \cos\varphi$  (или колебательность не более  $\mu = \operatorname{tg}\varphi$ ) ;

- максимальную угловую частоту собственных колебаний системы не более  $\omega_0 = \alpha \operatorname{tg} \varphi$ .

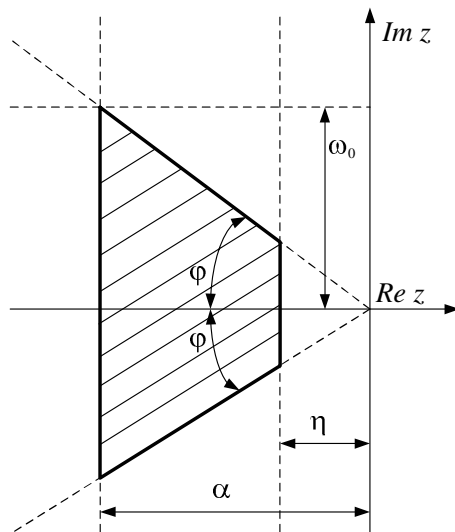


Рис. 1. Заданная ЛМН-область

В настоящее время в теории управления широко используется аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) [1, 8, 9, 10, 15, 16, 27]. Он хорошо подходит для синтеза регулятора в обратной связи, когда различные требования к замкнутой системе можно задавать в виде ЛМН. Концепция расположения полюсов в выпуклой области, которая может быть описана ЛМН, предложена в [9]. Класс областей, описываемый ЛМН, представляет достаточно широкое множество областей для размещения полюсов, включая полуплоскости, круги, секторы, вертикальные и горизонтальные полосы, а также любые пересечения перечисленных областей.

В концепции из работы [9] процедура синтеза регулятора сводится к минимизации какого-либо критерия оптимальности на заданной ЛМН-области. Так в работах [9, 10] рассматривается задача синтеза  $H_\infty$ -оптимального регулятора с расположением

полосов замкнутой системы в ограниченной выпуклой области на комплексной плоскости, которая сводится к решению ЛМН. В русскоязычной литературе данный метод более подробно описан в [4]. Вопросы чувствительности к возмущениям и шумам, а также точностные характеристики при таком подходе считаются менее сложными и не рассматриваются, однако они требуют дополнительного решения.

Альтернативным подходом является синтез системы управления в частотной области. Одним из широко распространенных современных методов синтеза в частотной области для многомерных систем является  $H_\infty$ -метод формирования контура, предложенный в работе [19]. Он основан на  $H_\infty$ -теории управления, в рамках которой проводится синтез робастных алгоритмов управления, учитывающих неопределенность в описании модели объекта управления и действующих внешних возмущений.

Под формированием контура при синтезе системы управления понимают метод, при котором непосредственно определяют форму амплитудной частотной характеристики передаточной функции разомкнутой или замкнутой системы. В работе [32] при анализе и синтезе многомерных систем управления было предложено применять сингулярные числа. Сингулярные числа комплекснозначной матрицы  $A$  определяются как квадратные корни из собственных чисел произведения матриц  $A^*A$ , где  $A^*$  – эрмитово сопряженная матрица. Зависимость сингулярных чисел передаточной функции от частоты в многомерных системах является обобщением амплитудной частотной характеристики в одномерных системах. В системах с одним входом и одним выходом эти понятия эквивалентны. Сингулярные числа характеризуют по соответствующему выходу многомерной системы коэффициент усиления на заданной частоте. Для заданной частоты минимальный (максимальный) коэффициент усиления многомерной системы характеризуется минимальным (максимальным) сингулярным числом. В многомерных системах требования к форме

амплитудных частотных характеристик передаточных функций замкнутой системы можно сформулировать в терминах ограничений типа неравенств на сингулярные числа многомерных передаточных функций замкнутой [14, 32] или разомкнутой [13, 19] систем.

Основная идея  $H_\infty$ -метода формирования контура в многомерных системах состоит в том, что максимальные сингулярные числа матричных передаточных функций замкнутой системы могут быть непосредственно аппроксимированы в соответствующих частотных диапазонах максимальными или минимальными сингулярными числами матричной передаточной функцией разомкнутой системы [13, 19].

Следовательно, требования к замкнутой системе в  $H_\infty$ -методе формирования контура могут быть заданы в частотной области в соответствующих частотных диапазонах в виде требований к максимальным и минимальным сингулярным числам многомерной передаточной функции разомкнутой системы [13, 19]. Основные требования к разомкнутой системе состоят в следующем :

- высокий коэффициент усиления (ограничение снизу на минимальные сингулярные числа) на низких частотах, который позволяет уменьшить ошибку слежения и влияние возмущений на входе и выходе объекта управления;
- малый коэффициент усиления (ограничение сверху на максимальные сингулярные числа) на высоких частотах для подавления шума и повышение робастности к неопределенности в модели объекта управления;
- плавный переход в области частот среза контура с наклоном, близким к  $-20$  дБ на декаду. В районе частоты среза коэффициент усиления контура не должен убывать быстрее чем  $-20$  дБ на декаду для того, чтобы была желаемая робастная устойчивость, запасы по амплитуде и фазе, перерегулированию и затуханию [23, 28].



В работе [19] предложен оригинальный метод формирования контура для многомерных систем. В нем впервые выдвинута идея использования нормализованной левой взаимно простой факторизации [31] модели объекта управления для обеспечения робастной устойчивости на основе решения задачи  $H_\infty$ -оптимизации [12]. Центральным элементом в методе формирования контура, предложенным в данной работе, является задача робастной стабилизации [18]. В русскоязычной литературе более подробное описание  $H_\infty$ -метода формирования контура приведено, например, в [3, 4].

Задача робастной стабилизации состоит в нахождении максимальной величины неопределенности (величины робастного запаса устойчивости), при которой один регулятор обеспечит устойчивость замкнутой системы для всего семейства возмущенных объектов с ограниченными по  $H_\infty$ -норме возмущениями. В  $H_\infty$ -методе формирования контура задача робастной стабилизации решается не для исходного, а для нового обобщенного объекта, образованного с помощью формирующих функций (префильтра и постфильтра). Обобщенный объект представляет собой последовательное соединение многомерных передаточных функций двух формирующих функций и исходного номинального объекта управления. Требуемые характеристики качества и робастности замкнутой системы обеспечиваются благодаря выбору соответствующих формирующих функций, а решение задачи робастной стабилизации гарантирует устойчивость замкнутой системы. Важно отметить, что в данном методе не требуется информации о фазовой характеристике номинального объекта. Кроме того, значение величины запаса робастной устойчивости является единственным индикатором, характеризующим степень достижения задаваемых требований к замкнутой системе.

Один из недостатков  $H_\infty$ -метода формирования контура состоит в том, что в явном виде не представляется возможным задавать требование к качеству переходных процессов в виде ограничения на коэффициент демпфирования (параметр

затухания). В частотной области аperiodичность переходного процесса определяется наклоном в  $-20$  дБ на декаду графиков сингулярных чисел (в логарифмическом масштабе) в области частот среза. Удовлетворение ограничения на коэффициент демпфирования (близость к наклону в  $-20$  дБ на декаду) в  $H_\infty$ -методе формирования контура [19] может быть обеспечен только с помощью формирующих функций, выбор которых представляет собой достаточно сложную задачу (особенно в классе формирующих функций низкого порядка).

Как уже отмечалось, задача  $H_\infty$ -оптимизации была сведена к решению системы ЛМН [15], выпуклая область на комплексной плоскости также описывается системой ЛМН [9]. Использование единого аппарата ЛМН позволило модифицировать  $H_\infty$ -метод формирования контура с учетом дополнительных ограничений на расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы. Так, в [22] для решения энергетической задачи используется  $H_\infty$ -метод формирования контура с ограничением на коэффициент демпфирования. В [4, 5] используются идеологии  $H_\infty$ -метода формирования контура и метода размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной ЛМН-области для решения задачи подавления внешних возмущений. С помощью аппарата ЛМН решена задача  $H_\infty$ -управления энергетической системой в аварийном режиме.

### **1. Краткий обзор задачи $H_\infty$ -оптимизации с ограничением на размещение полюсов**

Основная идея метода, изложенного в работе [9], состоит в минимизации функционала качества с ограничением на принадлежность некоторому множеству, т. е. в условной минимизации функционала. Функционалом качества служит  $H_\infty$ -норма передаточной функции замкнутой системы, а в качестве множества выступает выпуклая область на комплексной плоскости, задающая ограничение на размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы.

Применение аппарата ЛМН позволило свести задачу синтеза

$H_\infty$ -субоптимального регулятора с размещением полюсов передаточной функции замкнутой системы в ограниченной выпуклой области на комплексной плоскости к решению системы ЛМН (см. п. 1.2 настоящей статьи).

### 1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ $H_\infty$ -ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАЗМЕЩЕНИЕ ПОЛЮСОВ

Рассмотрим структурную схему замкнутой системы управления, изображенную на рис. 2. Внешними входами замкнутой системы являются сигналы  $d_1$  на выходе объекта управления  $G$  и  $d_2$  на его входе. Выходом  $z_1$  замкнутой системы является измеряемый выход объекта  $y$ , а выходом  $z_2$  – управление  $u$ , формируемое регулятором  $K_\infty$  в положительной обратной связи.  $G$  – передаточная функция объекта управления от сигнала управления  $u$  к выходу объекта  $y_0$ .

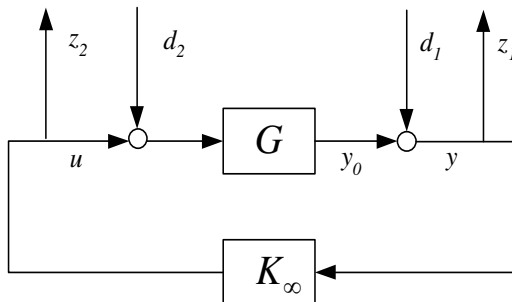


Рис. 2. Замкнутая система управления

В современной теории управления при постановке задачи синтеза регулятора используется понятие стандартного объекта

управления  $P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}$  (см., например, [12]).

Замкнутой системе управления (см. рис. 2) соответствует стандартный объект управления  $P(s)$  (см., например, [4, 5] вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{d_1} & G(s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(s) \\ d_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(s) \\ I_{d_2} \end{bmatrix} u(s), \\ y(s) &= [I_{d_1} \quad G(s)] \begin{bmatrix} d_1(s) \\ d_2(s) \end{bmatrix} + G(s)u(s), \end{aligned}$$

где  $I_{d_1}$  и  $I_{d_2}$  – единичные матрицы соответствующей размерности,  $s$  – переменная оператора Лапласа, а  $z(s)$ ,  $y(s)$ ,  $d(s)$  и  $u(s)$  – преобразования Лапласа сигналов соответственно  $z$ ,  $y$ ,  $d$  и  $u$ .

Соответствующие блоки матрицы передаточной функции стандартного объекта (1) имеют вид

$$P_{11}(s) = \begin{bmatrix} I_{d_1} & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{12}(s) = \begin{bmatrix} G \\ I_{d_2} \end{bmatrix},$$

$$P_{21}(s) = [I_{d_1} \quad G], \quad P_{22}(s) = G.$$

Передаточная функция замкнутой системы с объектом управления  $G$  и регулятором  $K_\infty$  в обратной связи от всех внешних входов  $w = [d_1^T, d_2^T]^T$  к выходам замкнутой системы  $z = [y^T, u^T]^T$  определяется формулой

$$(2) \quad T_{wz}(G, K_\infty) = \begin{bmatrix} (I - GK_\infty)^{-1} & (I - GK_\infty)^{-1}G \\ K_\infty(I - GK_\infty)^{-1} & K_\infty(I - GK_\infty)^{-1}G \end{bmatrix}.$$

В терминах стандартного объекта передаточная функция  $T_{wz}$  замкнутой системы определяется нижним дробно-линейным преобразованием (см., например, [33]) вида

$$T_{wz}(G, K_\infty) = T_{wz}(P, K_\infty) = P_{11} + P_{12}(I - P_{22}K_\infty)^{-1}P_{21}.$$

Описанию стандартного объекта в виде передаточных функций (1) в пространстве состояний (или  $(A, B, C, D)$ -представление) соответствует система уравнений вида

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u. \end{aligned}$$

Представление в пространстве состояний (3) стандартного объекта (1) определяется всевозможными связями в замкнутой системе и включает матрицы  $(A, B, C, D)$ -представления номинального объекта  $G(s)$ .

Связь между матричными передаточными функциями  $P_{ij}(s)$  стандартного объекта (1) и представлением в пространстве состояний (3) стандартного объекта определяется уравнениями вида

$$P_{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Опишем линейными матричными неравенствами ограниченную выпуклую область на комплексной плоскости, в которой необходимо разместить полюса передаточной функции замкнутой системы. Согласно [9], любая выпуклая область комплексной плоскости, симметричная относительно действительной оси, может быть аппроксимирована ЛМН-областью с любой заданной точностью. Выпуклую область  $\mathcal{D}$  (см., например, рис. 1) левой комплексной полуплоскости  $\mathbb{C}^-$ , можно определить следующим образом:

$$(4) \quad \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^- : L + zM + \bar{z}M^T\},$$

где  $L = L^T$  и  $M$  – действительные матрицы,  $z$  – комплексная переменная, а  $\bar{z}$  – комплексно сопряженная. Область  $\mathcal{D}$ , которая описывается линейным матричным неравенством, называется ЛМН-областью. Значения матриц  $L$  и  $M$  определяют конкретный вид выпуклой области на комплексной плоскости (см. [9] или, например, [4]).

Сформулируем задачу синтеза регулятора с расположением полюсов замкнутой системы в заданной области при минимально

возможном значении  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы.

Дан стандартный объект управления (1) в виде передаточных функций, которому в пространстве состояний соответствует система уравнений (3). Для заданной ЛМН-области, описываемой системой ЛМН вида (4), требуется найти динамический регулятор полного порядка в форме наблюдателя

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y, \\ u &= C_c x_c + D_c y, \end{aligned}$$

обеспечивающий

- минимально возможное значение  $\gamma$  для  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы (2)

$$(6) \quad \|T_{wz}(P, K_\infty)\|_\infty < \gamma;$$

- размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы  $T_{wz}$  в заданной выпуклой области  $\mathcal{D}$ .

## 1.2. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

Решение  $H_\infty$ -субоптимальной задачи (6) для заданной  $\gamma$  при ограничении на размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной ЛМН-области (4) (см., например, рис. 1) сводится к решению системы ЛМН (7-9) [9].

Система ЛМН имеет следующий вид

$$(7) \quad \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$(8) \quad \left[ L \otimes \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} + M \otimes \Phi + M^T \otimes \Phi^T \right] < 0,$$

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0,$$

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} AR + B_2C_c & A + B_2D_cC_2 \\ \hat{A}_c & SA + \hat{B}_cC_2 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} AR + RA^T + B_2\hat{C}_c + \hat{C}_c^T B_2^T & B_1 + B_2D_cD_{21} \\ (B_1 + B_2D_cD_{21})^T & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{21} = \begin{bmatrix} \hat{A}_c + (A + B_2D_cC_2)^T & SB_1 + \hat{B}_cD_{21} \\ C_1R + D_{12}\hat{C}_c & D_{11} + D_{12}D_cD_{21} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{22} = \begin{bmatrix} A^T S + SA + \hat{B}_cC_2 + C_2^T \hat{B}_c^T & (C_1 + D_{12} + D_cC_2)^T \\ C_1 + D_{12}D_cC_2 & \gamma I \end{bmatrix},$$

где  $I$  – единичная матрица соответствующей размерности. Матрицы  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  и  $D_{22}$  определяются из  $(A, B, C, D)$ -представления стандартного объекта (3).

Символ  $\otimes$  означает кронекерово произведение матриц. Для произвольных матриц  $A$  и  $B$  элементы матрицы  $C = A \otimes B$  имеют вид  $c_{ij} = a_{ij}B$ .

Регулятор вида (5) определяется минимальным значением  $\gamma = \gamma_{min}$ , при котором существуют две симметричных матрицы  $R, S$  и матрицы  $\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, D_c$ . Если ЛМН (7-9) разрешимы, то матрицы регулятора (5)  $A_c$ ,  $B_c$  и  $C_c$  определяются из решения системы линейных уравнений

$$(10) \quad \begin{aligned} \hat{C}_c &= C_c M^T + D_c C_2 R, \\ \hat{B}_c &= NB_c + SB_2 D_c, \\ \hat{A}_c &= NA_c M^T + NB_c C_2 R + \\ &+ SB_2 C_c M^T + S(A + B_2 D_c C_2)R, \end{aligned}$$

где  $M$  и  $N$  – любые квадратные матрицы такие, что  $MN^T = I - RS$ .

Минимизация по  $\gamma$  при ограничении в виде линейных матричных неравенств (7-9) проводится численно с помощью методов внутренней точки, описанных в работах [20, 21].

## 2. Динамическая модель котельной установки

Линейная динамическая модель энергетической котельной установки в отклонениях в окрестности номинального режима работы, полученная на основе процедуры идентификации, приведена в работе [29]. В ней показано, что в окрестности номинального режима работы котла линейная динамическая модель энергетической котельной установки достаточно хорошо аппроксимирует переходные процессы, происходящие в реальной системе. Матричную передаточную функцию между векторным входом  $u$  модели котельной установки и ее выходом  $y_0$  обозначим через  $G(s)$ , т. е.  $y_0(s) = G(s)u(s)$ . Координатами входного вектора  $u$  являются отклонения от номинального режима: расхода питательной воды (кг/с) – координата  $u_1$ ; расхода топлива (кг/с) – координата  $u_2$ , расхода впрыскиваемого пароохладителя (кг/с) – координата  $u_3$ . Координатами вектора выходных переменных  $y_0$  являются отклонения от номинального режима – уровня воды в барабане котла (м) –  $y_{01}$ , давления перегретого пара (МПа) –  $y_{02}$  и температуры перегретого пара –  $y_{03}$  (°C).

Передаточная функция  $G(s)$  имеет вид

$$(11) \quad G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) \end{bmatrix},$$

где

$$G_{11}(s) = \frac{(-0,16s^2 + 0,052s + 0,0014) \times 10^{-3}}{s^2 + 0,0168s},$$



$$G_{12}(s) = \frac{(3,1s - 0,032) \times 10^{-3}}{s^2 + 0,0215s}, \quad G_{13}(s) = 0,$$

$$G_{21}(s) = \frac{-0,0395 \times 10^{-3}}{s + 0,018}, \quad G_{22}(s) = \frac{2,51 \times 10^{-3}}{s + 0,0157},$$

$$G_{23}(s) = \frac{(0,588s^2 + 0,2015s + 0,0009) \times 10^{-3}}{s^2 + 0,0352s + 0,000142},$$

$$G_{31}(s) = \frac{(-1,18s + 0,139) \times 10^{-3}}{s^2 + 0,01852s + 0,000091},$$

$$G_{32}(s) = \frac{0,448s + 0,0011}{s^2 + 0,0127s + 0,000095},$$

$$G_{33}(s) = \frac{0,582s - 0,0243}{s^2 + 0,1076s + 0,00104}.$$

Линеаризация производилась при следующих значениях входных и выходных переменных:

$$u_0 = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,68 \\ 2,102 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_{00} = \begin{bmatrix} y_{010} \\ y_{020} \\ y_{030} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 6,45 \\ 466,7 \end{bmatrix}.$$

Линейную динамическую модель  $G(s)$  будем называть объектом управления. Объекту управления (11) соответствует (с точностью до преобразования подобия) в пространстве состояний система линейных дифференциальных уравнений вида

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{x}_g &= A_g x_g + B_g u \\ y_0 &= C_g x_g + D_g u, \end{aligned}$$

где  $x_g$  –  $n$ -мерное внутреннее состояние объекта. Матрицы объекта  $A_g, B_g, C_g, D_g$  имеют соответствующие размерности.

### **3. Задача синтеза регулятора для управления котельной установкой**

В этом разделе формулируются требования к замкнутой системе управления котельной установкой, ставится оптимизационная задача и приводится процедура синтеза робастного регулятора. Задача  $H_\infty$ -оптимизации формулируется в терминах передаточной функции замкнутой системы, выраженной через стандартный объект. В оптимизационной постановке задачи синтеза требования к замкнутой системе формализуются в виде формы ЛМН и формирующих функций.

#### **3.1. ТРЕБОВАНИЯ К ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ**

Сформулируем требования к проектируемой замкнутой системе. Для заданной модели объекта управления в виде многомерной передаточной функции  $G(s)$  замкнутая система с регулятором  $K(s)$  в виде динамической обратной связи (см. рис. 3) по измеряемому выходу  $y$  должна гарантировать устойчивость и для управляемого выхода  $y_0$  обеспечивать

- переходные процессы, близкие к апериодическим;
- время регулирования, не превышающее заданного значения;
- заданный уровень подавления шумов и возмущений;
- высокий запас устойчивости замкнутой системы;
- робастность к неопределенности в модели объекта управления.

#### **3.2. ПОСТРОЕНИЕ СТАНДАРТНОГО ОБЪЕКТА**

Рассмотрим структурную схему замкнутой системы с объектом управления  $G(s)$  и регулятором  $K_\infty(s)$  в обратной связи, представленную на рис. 3. На рисунке также изображены префильтр  $W_1(s)$  и постфильтр  $W_2(s)$ , участвующие при синтезе регулятора  $K(s)$ .

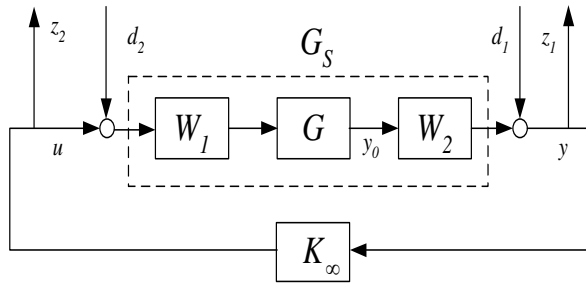


Рис. 3. Замкнутая система управления котельной установкой

Замкнутой системе управления соответствует стандартный объект управления  $P(s)$  вида

(13)

$$\begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y & W_2GW_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(s) \\ d_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_2GW_1 \\ I_u \end{bmatrix} u(s),$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} I_y & W_2GW_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(s) \\ d_2(s) \end{bmatrix} + W_2GW_1 u(s),$$

где  $I_y$  и  $I_u$  – единичные матрицы соответствующей размерности.

Соответствующие блоки матрицы передаточной функции стандартного объекта (13) имеют вид

$$P_{11}(s) = \begin{bmatrix} I_y & W_2GW_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{12}(s) = \begin{bmatrix} W_2GW_1 \\ I_u \end{bmatrix},$$

$$P_{21}(s) = \begin{bmatrix} I_y & W_2GW_1 \end{bmatrix}, \quad P_{22}(s) = W_2GW_1.$$

Передаточная функция замкнутой системы с объектом управления  $G$  и регулятором  $K$  в обратной связи от всех внешних

входов  $w = [d_1^T, d_2^T]^T$  к выходам замкнутой системы  $z = [y^T, u^T]^T$  определяется формулой

(14)

$$T_{wz}(G_s, K_\infty) = \begin{bmatrix} (I - G_s K_\infty)^{-1} & (I - G_s K_\infty)^{-1} G_s \\ K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} & K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} G_s, \end{bmatrix}$$

где  $G_s = W_2 G W_1$  – обобщенный объект.

Описанию стандартного объекта в виде передаточных функций (13) в пространстве состояний соответствует  $(A, B, C, D)$ -представление вида (3).

$(A, B, C, D)$ -представление стандартного объекта включает в себя матрицы не только  $(A, B, C, D)$ -представления номинального объекта  $G$  в виде (12), но и формирующих функций  $W_1$  и  $W_2$ . Вектор внутреннего состояния  $x$  стандартного объекта (3) включает в себя векторы состояния номинального объекта  $x_g$  (см. (12)) и формирующих функций  $W_1$  и  $W_2$ .

### 3.3. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ КОТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

Для обеспечения заданных требований, указанных в п. 3.1, сформулируем математическую постановку задачи синтеза регулятора  $K(s)$  как задачу  $H_\infty$ -оптимизации.

Дан стандартный объект управления (13) в виде передаточных функций, которому в пространстве состояний соответствует система уравнений вида (3).

Для заданных

- ЛМН-области  $\mathcal{D}$  (см. рис. 1), описываемой системой ЛМН (4)
- и формирующих функций  $W_1$  и  $W_2$

требуется синтезировать регулятор  $K(s)$  в виде динамической обратной связи по измеряемому выходу  $y$

$$u(s) = K(s)y(s),$$

обеспечивающий

- минимально возможное значение  $\gamma$  для  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы  $T_{wz}$  (14)  
(15) 
$$\|T_{wz}(G_s, K_\infty)\|_\infty = \gamma_{min};$$
- размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы  $T_{wz}$  в заданной ЛМН-области;
- частотные ограничения на максимальные  $\bar{\sigma}(GK)$  и минимальные  $\underline{\sigma}(GK)$  сингулярные числа разомкнутой системы.

Регулятор  $K(s)$  ищется в пространстве состояний в форме наблюдателя в виде (5).

### 3.4. ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА

Процедура синтеза регулятора состоит из следующих шагов:

**Шаг 1. Формирование заданных требований.** Задаются

- ЛМН-область, в которой требуется разместить полюса замкнутой системы,
- префильтр  $W_1(s)$  и постфильтр  $W_2(s)$  и формируется обобщенный объект  $G_s = W_2GW_1$ , который задает желаемые сингулярные значения разомкнутой системы.

**Шаг 2. Оценка совместимости требований.** Решается задача  $H_\infty$ -оптимизации (15) для обобщенного объекта  $G_s$  при ограничении на расположение полюсов замкнутой системы в заданной ЛМН-области на основе системы линейных матричных неравенств (7-9).

- Если решения симметричных матриц  $R, S$  и матриц  $\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, D_c$  системы ЛМН (7-9) не существуют, то возвращаемся к шагу 1.

- Если решения  $R, S, \hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, D_c$  существуют, то из системы линейных уравнений (10) вычисляются матрицы  $A_c, B_c, C_c$  регулятора  $K_\infty$  и определяется величина максимального запаса робастной устойчивости  $\varepsilon_{max} = \gamma_{min}^{-1}$  (см. [19] или, например, [4]).

Если величина максимального запаса робастной устойчивости  $0,25 < \varepsilon_{max} < 0,5$  (см., например, [30]), то переходим к шагу 3, иначе возвращаемся к шагу 1.

### Шаг 3. Синтез регулятора при заданных ограничениях.

Искомый регулятор определяется в виде  $K = W_1 K_\infty W_2$ .

Теоретическим базисом для  $H_\infty$ -формирования контура является то, что  $K_\infty$  не модифицирует желаемую форму контура существенным образом на низких и высоких частотах, если достигнутая  $\varepsilon_{max}$  является слишком маленькой [33].

Существенную роль в процедуре синтеза играет выбор формирующих передаточных функций (префильтр  $W_1$  и постфильтр  $W_2$ ). Выбор которых является достаточно сложной задачей, так как обобщенный ("формирующий") объект  $G_s$  задает желаемое поведение сингулярных чисел (требуемое разработчиком) разомкнутой системы во всем диапазоне частот. Величина  $H_\infty$ -нормы замкнутой системы равная  $\gamma_{min}$  характеризует меру близости (точность приближения) между сингулярными числами желаемой разомкнутой системы  $\sigma(W_2 G W_1)$  и полученной в результате синтеза  $K_\infty$  регулятора  $\sigma(G_s K_\infty)$  (см. [19]). В децибелах соотношение между ними имеет вид

$$\sigma(G_s K_\infty) = \sigma(W_2 G W_1) \pm \gamma_{opt} \text{ (db)}.$$

На графиках (в логарифмическом масштабе) соответствующие сингулярные числа синтезированной разомкнутой системы находятся в некоторой полосе с шириной  $20 \log \gamma_{min}$  относительно соответствующих сингулярных чисел обобщенного объекта.

Таким образом,  $H_\infty$ -метод формирования контура с ограничением на расположение полюсов замкнутой системы в заданной ЛМН-области позволяет синтезировать робастный регулятор с учетом требований к замкнутой системе во всем диапазоне частот. Плавный переход вокруг частоты среза контура (средние частоты) с наклоном, близким к  $-20$  дБ на декаду, задается видом ЛМН-область с малым значением колебательности. Это обеспечивает переходные процессы, близкие к аperiodическим в соответствии с заданной величиной колебательности, а время переходного процесса определяется заданной степенью устойчивости. Высокий коэффициент усиления на низких частотах и малый коэффициент усиления на высоких частотах определяются выбором соответствующих префильтра  $W_1$  и постфильтра  $W_2$ .

Необходимо отметить, что решения системы линейных матричных неравенств, а следовательно, и регулятор, будут существовать тогда и только тогда, когда при выбранных векторах управления и измерения расположение полюсов в заданной области возможно с удовлетворением всех предъявляемых требований к замкнутой системе. Таким образом, совместимость требований к замкнутой системе определяется существованием решений системы линейных матричных неравенств (7-9).

#### **4. Результаты синтеза**

В работе для данного объекта синтезируется два регулятора. Первый является регулятором полного порядка и получен на основе методики, описанной в п. 3.4. Второй получен в результате редукции синтезированного регулятора полного порядка  $K_\infty$  на основе метода сбалансированного отсечения [26]. В русскоязычной литературе данный метод описан в [3].

##### **4.1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАДАННЫХ ТРЕБОВАНИЙ К ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ**

Рассмотрим синтез регулятора полного порядка. В методике, изложенной в п. 3.4 у разработчика системы управления в

процессе итерационной процедуры синтеза имеется возможность варьировать форму ЛМН-области и формирующие функции: префильтр  $W_1(s)$  и постфильтр  $W_2(s)$ . Форма ЛМН-области задает требования к замкнутой системе, а с помощью формирующих функций задаются требования к разомкнутой системе в виде  $W_2(s)G(s)W_1(s)$ .

Обычно в качестве предварительного этапа перед процедурой синтеза регулятора производится масштабирование исходной (номинальной) модели объекта (см., например, [30]). Масштабирование производится для того, чтобы сделать влияние различных входных сигналов на выход величинами одного порядка. Коэффициенты первой строки и первого столбца модели котельной установки (11) имеют малые значения и почти не сравнимы с коэффициентами других строк и столбцов. В данной работе проводится процедура масштабирования, а именно: выходная переменная  $y_{01}$  увеличивается в 100 раз,  $y_{02}$  – в 1000 раз, а  $y_{03}$  остается без изменений. Входная переменная  $u_1$  увеличивается в 10 раз, а  $u_2$  и  $u_3$  остаются без изменений. Тогда масштабированные матрицы имеют вид

$$S_2 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что масштабированные матрицы в дальнейшем используются для построения исходного регулятора  $K = S_1 W_1 K_\infty W_2 S_2$ , так как выбор  $W_1$  и  $W_2$  производится для масштабированной модели  $G = S_2 G_{nom} S_1$ . Уточним, что передаточная функция  $G_{nom}(s)$  исходной номинальной модели котельной установки задается видом (11). Графики сингулярных чисел заданной номинальной  $G_{nom}$  и масштабированной моделей  $G = S_2 G_{nom} S_1$  приведены на рис. 4. Значения минимальных и максимальных сингулярных чисел на всех частотах для масштабированной модели отличаются примерно на 30 дБ, в то



время как для исходной номинальной модели разница достигает примерно 80 дБ.

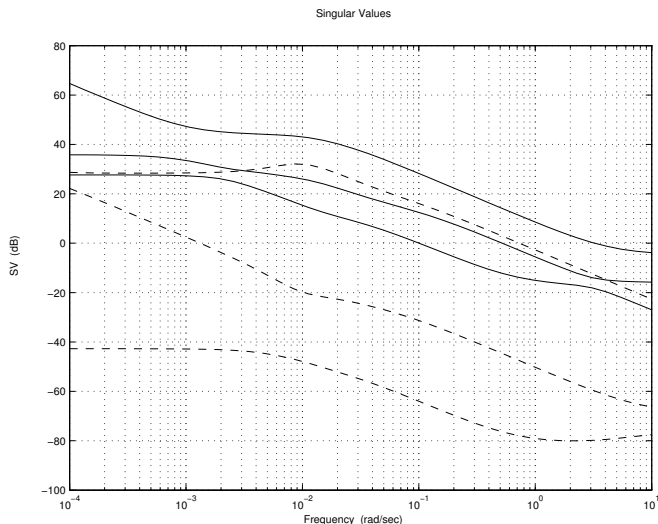


Рис. 4. Сингулярные значения номинальной (пунктирная) и масштабированной (сплошная) моделей котельной установки

Формирование обобщенного объекта  $G_s(s)$  производится с помощью префильтра  $W_1(s)$  и постфильтра  $W_2(s)$  для масштабированной модели. Так как размерность управления  $u$  и выхода объекта  $y_0$  равна 3, то размерность матричных передаточных функций префильтра  $W_1(s)$  и постфильтра  $W_2(s)$  также равна 3. Таким образом, каждая из формирующих функций представляется матричной передаточной функцией вида

$$W_i = \begin{bmatrix} W_{i11} & W_{i12} & W_{i13} \\ W_{i21} & W_{i22} & W_{i23} \\ W_{i31} & W_{i32} & W_{i33} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

В статье формирующие передаточные функции  $W_1$  и  $W_2$

выбирается диагонального вида

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,01}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,01}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0,01}{s} \end{bmatrix}, \quad W_2(s) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матричные передаточные функции префилтра и постфилтра имеют достаточно простой вид. Это существенно отличает  $H_\infty$ -метод формирования контура с ограничением расположение полюсов от классического  $H_\infty$ -метода формирования контура [19].

В качестве ЛМН-области для данного объекта управления была выбрана область, которая образована пересечением двух полуплоскостей и сектора на комплексной плоскости (см. рис. 1). Заданная степень устойчивости была выбрана равной  $\eta = 0,001$ . Ее определяет первая полуплоскость  $Re(\lambda) < -0,001$ . Вторая полуплоскость  $Re(\lambda) > -0,5$  ограничивает максимальную угловую частоту собственных колебаний  $\omega_0 = 0,5 * tg\varphi = 0,5$  замкнутой системы. Сектор с углом  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  ограничивает коэффициент демпфирования (параметр затухания) величиной не менее  $\zeta = \cos\varphi = 0,707$ .

Решение задачи минимизации  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы (14) производится численно в системе Matlab с использованием программы hinfmix из пакета решения линейных матричных неравенств LMI Control Toolbox [15].

#### 4.2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ СИНТЕЗА

Рассмотрим частотные свойства замкнутой системы с регуляторами полного порядка и редуцированным. В результате процедуры синтеза регулятора полного порядка величина  $\gamma_{min}$ , равная  $H_\infty$ -норме передаточной функции замкнутой системы, имеет значение 2,994. Следовательно, величина максимального запаса робастной устойчивости равна  $\varepsilon_{max} = \gamma_{min}^{-1} = 1/2,994 = 0,334 > 0,25$ . Приведенные значения характеризуют вполне

удовлетворительную оценку совместимости требований между качеством переходных процессов и робастной устойчивостью замкнутой системы, а также близость сингулярных чисел обобщенного объекта и разомкнутой системы с синтезированным регулятором полного порядка. Это подтверждается графиками сингулярных чисел обобщенного объекта и разомкнутой системы с регулятором полного порядка, приведенных на рис. 5.

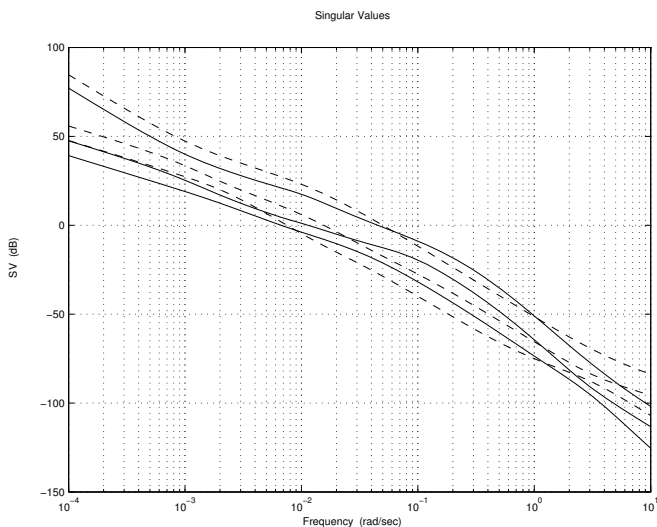


Рис. 5. Сингулярные значения обобщенного объекта (пунктирная) и разомкнутой системы с регулятором полного порядка (сплошная)

Регулятор полного порядка  $K_{\infty}$ , полученный в результате синтеза, имеет размерность (размерность матрицы состояния  $A_c$ ), равную 16. Он редуцируется с использованием метода сбалансированного отсечения до 6 порядка.

Сингулярные числа разомкнутой системы с редуцированным регулятором 6-го порядка и регулятором полного порядка приведены на рис. 6. Как видно из графиков, редукция регулятора полного порядка приводит к незначительному изменению свойств

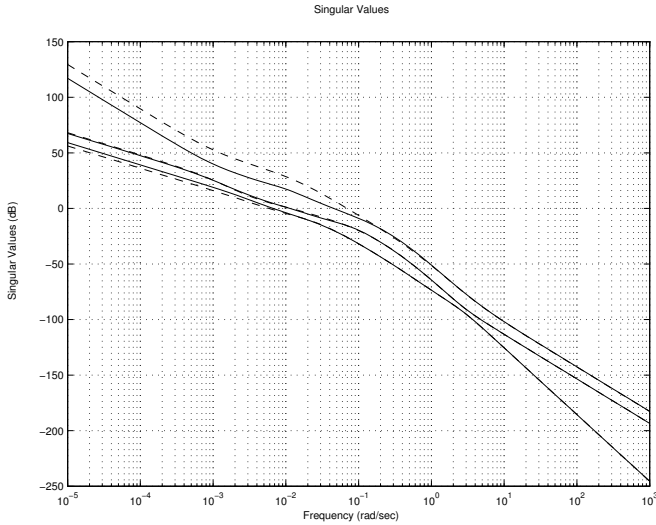


Рис. 6. Сингулярные числа разомкнутой системы с редуцированным регулятором (пунктирная) и регулятором полного порядка (сплошная).

разомкнутой системы, в основном в области низких частот. Максимальное отличие достигает примерно 10 дБ. В области высоких частот графики практически совпадают. Это говорит о том, что редукция  $K_\infty$  регулятора не влияет на подавление высокочастотных шумов и не ухудшает робастных свойств  $K_\infty$  регулятора.

Для обеспечения качества функционирования замкнутой системы (подавление возмущений, уменьшение ошибки слежения) необходимо обеспечивать малые значения максимальных сингулярных чисел функции чувствительности  $S = (I - GK)^{-1}$ , а для обеспечения робастности системы необходимо обеспечивать малые значения максимальных сингулярных чисел функции дополнительной чувствительности  $T = GK(I - GK)^{-1}$  (см., например, [14]). На рис. 7 для замкнутой системы с регулятором полного порядка сингулярные числа функции чувствительности  $\sigma(S(j\omega))$  показаны сплошной

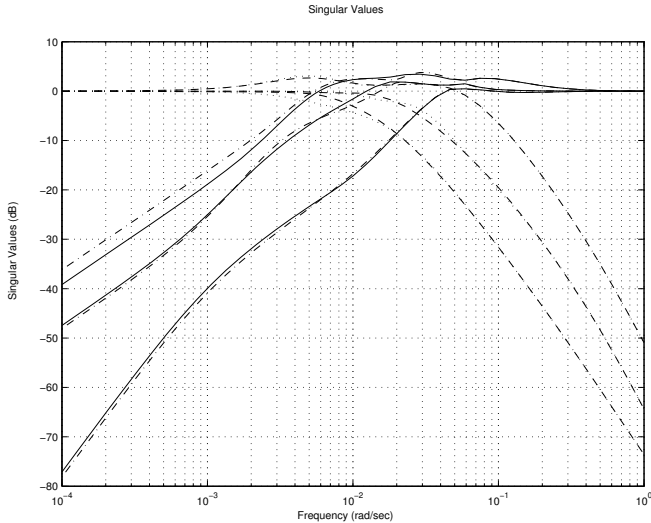


Рис. 7. Сингулярные значения функции чувствительности и дополнительной чувствительности с редуцированным регулятором и регулятором полного порядка

линией, а функции дополнительной чувствительности  $\sigma(T(j\omega))$  – штриховой линией. Для замкнутой системы с редуцированным регулятором сингулярные числа функции чувствительности  $S = (I - GK_{red})^{-1}$  показаны штрих-пунктирной линией, а сингулярные числа функции дополнительной чувствительности  $T = GK_{red}(I - GK_{red})^{-1}$  – пунктирной.

Согласно рис. 7 максимальные сингулярные числа функции чувствительности  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$  с редуцированным регулятором и регулятором полного порядка имеют наклон примерно 20 дБ/дек на низких частотах и остаются меньше 0 дБ для частот меньших, чем  $0,5 \times 10^{-2}$  рад/с приблизительно. Для редуцированного регулятора наблюдается незначительное ухудшение  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$  (ухудшение подавления возмущений) примерно на 3 дБ.

Максимум  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$  составляет приблизительно 4 дБ и достигается в районе  $0,3 \times 10^{-2}$  рад/с. Малая величина пика  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$  характеризует удовлетворительное подавление

возмущений на низких частотах и низкую колебательность или высокий параметр затухания замкнутой системы.

Анализ сингулярных значений функции дополнительной чувствительности  $\sigma(T(j\omega))$  показывает похожие результаты. Графики максимальных сингулярных чисел функции дополнительной чувствительности  $\bar{\sigma}(T(j\omega))$  с редуцированным и регулятором полного порядка практически совпадают. Величины максимальных сингулярных чисел  $\bar{\sigma}(T(j\omega))$  меньше 0 дБ на частотах, больших примерно  $0,5 \times 10^{-1}$  рад/с. Это означает, что для частот выше данной будет обеспечено подавление высокочастотных внешних возмущений, в частности, шумов измерения. Отметим, что максимум  $\bar{\sigma}(T(j\omega))$  также составляет примерно 4 дБ. Незначительная величина пика  $\bar{\sigma}(T(j\omega))$  характеризует высокое демпфирование замкнутой системы и робастность относительно мультипликативной неопределенности в модели объекта.

Рассмотрим запасы устойчивости по фазе и амплитуде замкнутой системы с синтезированным регулятором полного порядка и редуцированным регулятором. Для анализа многомерной системы использована программа LOOPMARGIN из пакета Robust Control Toolbox [6] системы Matlab. Программа LOOPMARGIN позволяет определять запасы устойчивости по амплитуде и фазе как для изолированных каналов, так и для всей многосвязной системы по алгоритму, представленному в [7]. В нашем случае многомерная передаточная функция разомкнутой системы имеет три входа и три выхода. Приведем результаты анализа для системы с регулятором полного порядка. Для изолированных каналов запасы устойчивости по амплитуде и фазе составляют по первому выходу 36 дБ по амплитуде и 53 град. по фазе, по второму выходу – 23 дБ по амплитуде и 56 град. по фазе, по третьему выходу – 12 дБ по амплитуде и 69 град. по фазе. Для многосвязной системы гарантированный запас устойчивости по амплитуде составляет 8,85 дБ, а по фазе – 50 градусов.

Для системы с редуцированным регулятором запасы по

первому выходу составляют 35 дБ по амплитуде и 52 град. по фазе, по второму выходу – 22 дБ по амплитуде и 57 град. по фазе, по третьему выходу – 11 дБ по амплитуде и 86 град. по фазе. Для многосвязной системы гарантированный запас устойчивости по амплитуде составляет 8,6 дБ, а по фазе – 49 градусов. Таким образом, редуцированный регулятор с точки зрения запасов по амплитуде и фазе практически не отличается от регулятора полного порядка.

Рассмотрим корневые свойства замкнутой системы с регулятором полного порядка, полученной в результате синтеза. Корни характеристического полинома или собственные значения матрицы состояния  $A$  ( $A, B, C, D$ )-представления передаточной функции замкнутой системы  $T_{wz}$  с данным регулятором имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -4,61 \times 10^{-3}, \\ \lambda_2 &= -4,64 \times 10^{-3}, \\ \lambda_{3,4} &= (-5,34 \pm 3,84i) \times 10^{-3}, \\ \lambda_{5,6} &= (-6,41 \pm 5,41i) \times 10^{-3}, \\ \lambda_{7,8} &= (-8,98 \pm 3,34i) \times 10^{-3}, \\ \lambda_9 &= -9,62 \times 10^{-3}, \\ \lambda_{10,11} &= (-7,99 \pm 6,41i) \times 10^{-3}, \\ \lambda_{12,13} &= (-10,04 \pm 2,62i) \times 10^{-3} \\ \lambda_{14} &= -1,17 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{15,16} &= (-13,60 \pm 9,34i) \times 10^{-3}, \\ \lambda_{17} &= -1,73 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{18} &= -1,74 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{19,20} &= (-19,10 \pm 3,99i) \times 10^{-3} \\ \lambda_{21} &= -2,56 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{22} &= -3,02 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{23} &= -3,27 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{24} &= -4,11 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{25,26} &= (-3,83 \pm 2,88i) \times 10^{-2}, \\ \lambda_{27} &= -7,79 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{28} &= -8,16 \times 10^{-2}, \\ \lambda_{29} &= -1,03 \times 10^{-1},\end{aligned}$$

$$\lambda_{30,31} = (-48,00 \pm 1,94i) \times 10^{-2}$$

$$\lambda_{32} = -4,83 \times 10^{-1}.$$

Как видно из величин собственных значений полученная степень устойчивости составляет  $\eta = 0,00461 > 0,001$ , минимальный параметр затухания равен  $\zeta = 0,764 > 0,707$  для  $\lambda_{5,6} = (-6,41 \pm 5,41i) \times 10^{-3}$ , а частоты собственных колебаний не превышают  $\omega_0 = 2,88 \times 10^{-2} < 0,5$  для  $\lambda_{25,26} = (-3,83 \pm 2,88i) \times 10^{-2}$ .

Таким образом, частотный и корневой анализы позволяют сделать вывод о том, что замкнутые системы с редуцированным регулятором и регулятором полного порядка обеспечивают: переходные процессы, близкие к апериодическим; заданное время переходного процесса; заданный уровень подавления шумов и внешних возмущений; высокий запас устойчивости замкнутой системы; робастность к неопределенности в модели объекта управления.

## 5. Выводы

В работе исследуется возможность применения  $H_\infty$ -метода формирования контура с ограничением на расположение полюсов замкнутой системы в заданной ЛМН-области на комплексной плоскости для управления котельной установкой. Требования к замкнутой системе задаются формой ЛМН-области и формирующими передаточными функциями, а именно: префильтром и постфильтром. Выбор матричных передаточных функций префильтра и постфильтра существенно упрощается по сравнению с классическим  $H_\infty$ -методом формирования контура. Решение задачи синтеза робастного регулятора производится с использованием аппарата линейных матричных неравенств. Синтезированы регулятор полного порядка и редуцированный регулятор. Оба регулятора для замкнутой системы гарантируют приемлемое качество переходных процессов и грубость к неопределенности в модели котельной установки.



## Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств.* – М.: Физматлит, 2007.
2. БЕСЕКЕРСКИЙ В.А., ПОПОВ Е.П. *Теория систем автоматического регулирования.* – М.: Наука, 1972.
3. БОЙЧЕНКО В.А., КУРДЮКОВ А.П., ТИМИН В.Н., ЧАЙКОВСКИЙ М.М. *Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры // Управление большими системами.* – 2007. – Выпуск 19. – С. 23-126.
4. КУРДЮКОВ А.П., ТИМИН В.Н.  *$H_\infty$  управление энергетической системой в аварийном режиме. Ч.1. Теоретические основы синтеза робастных  $H_\infty$ -регуляторов // Проблемы управления.* – 2009. – №1. – С. 8-17.
5. КУРДЮКОВ А.П., ТИМИН В.Н.  *$H_\infty$  управление энергетической системой в аварийном режиме. Ч.2. Синтез робастного регулятора для управления энергетической системой // Проблемы управления.* – 2009. – №2. – С. 14-23.
6. BALAS G., CHIANG R., PACKARD A., SAFONOV M. *Robust Control Toolbox.* Natick. – MA: The MathWorks, 2006.
7. BLIGHT J.D., DAILEY R.L., GANGSASS D. *Practical control law design for aircraft using multivariable techniques // International Journal of Control.* – 1994. – Vol. 59. – №1. – Pp. 93-137.
8. BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory.* Philadelphia: SIAM books, 1994.
9. CHILALI M., GAHINET P.  *$H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Trans. AC.* – 1996. – Vol. 41. – №3. – Pp. 358-367.
10. CHILALI M., GAHINET P., APKARIAN P. *Robust Pole*

- Placement in LMI Regions* // IEEE Trans. AC. – 1999. – Vol. 44. – №12. – Pp. 2257-2270.
11. CORI R., MAFFEZZONI C. *Practical optimal control of a drum boiler power plant* // Automatica. – 1984. – Vol. 20. – Pp. 163-173.
  12. DOYLE J.C., GLOVER K., KHARGONEKAR P.P., FRANCIS B.A. *State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1989. – Vol.34. – №8. – Pp. 831-847.
  13. DOYLE J.C., STEIN G. *Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis* // IEEE Trans. Auto. Control. – 1981. – Vol. AC-26. – №1. – Pp. 4-16.
  14. FRANCIS B.A. *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. – N.-Y.: Springer-Verlag, 1987.
  15. GAHINET P., APKARIAN P. *A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control* // Int. J. Robust Non. Contr. – 1994. – Vol. 4. – Pp. 421-448.
  16. KHARGONEKAR P.P., ROTEA M.A. *Mixed  $H_2/H_\infty$  Control: A Convex Optimization Approach* // IEEE Trans. Aut. Contr. – 1991. – Vol. 39. – Pp. 824-837.
  17. KWON W.H., KIM S.W., PARK P.G. *On the multivariable robust control of a boiler-turbine system* // in Proc. IFAC Symp. Power Syst. Power Plant Contr. Seoul. Korea. – 1989. – Pp. 219-223.
  18. MCFARLANE D.C., GLOVER K. *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factorization Description*. – N.-Y.: Springer-Verlag, 1990.
  19. MCFARLANE D.C., GLOVER K. *A Loop Shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  Synthesis* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1992. – Vol. 37. – №6. – Pp. 759-769.
  20. NEMIROVSKII A., GAHINET P. *Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming: Theory and Applications* // SIAM Studies Appl. – 1994. – Math. – Vol. 13.
  21. NESTEROV Y., NEMIROVSKII A. *The Projective Method*

- for Solving Linear Matrix Inequalities* // Math. Programming Series B. – 1997. – Vol. 77. – Pp. 163-190.
22. PAL B., CHAUDHURI B. *Robust Control in Power Systems*. N.-Y.: Springer Science+Business Media Inc, 2005. – Pp. 140-150.
  23. PAPAGEORGIU G. *Robust Control System Design:  $H_\infty$  Loop Shaping and Aerospace Applications*. PhD thesis. University of Cambridge. Department of Engineering, 1998.
  24. PELLEGRINETTI G., BENTSMAN J.  *$H_\infty$  controller design for boilers* // Int. J. Robust Nonlinear Contr. – 1994. – Vol. 4. – Pp. 645-671.
  25. PETROVIX T.B., IVEZIC D.D., DEBELJKOVIC D.L.J. *Robust IMC controllers for a solid-fuel boiler* // Eng. Simulation. – 2000. – Vol. 17. – №2. – Pp. 211-224.
  26. SAFONOV, M.G., CHIANG R.Y. *Schur Method for Balanced Model Reduction* // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1989. – Vol. 34. – №7. – Pp. 729-733.
  27. SCHERER C., GAHINET P., CHILALI M. *Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization* // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – Pp. 896-911.
  28. SKOGESTAD S., POSTLETHWAITE I. *Multivariable Feedback Control*. – London: John Wiley and Sons, 2001.
  29. TAN W., MARQUEZ H.J., CHEN T. *Multivariable Robust Controller Design for Boiler System* // IEEE Transactions on Automatic Control System Technology. – 2002. – Vol.10. – №5. – Pp. 735-742.
  30. TAN W., CHEN T. *Robust Controller Design and PID Tuning for Multivariable Processes*. <http://coblitz.codeen.org:3125/citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/28407/>  
[http://zSzzSznyquist.ee.ualberta.ca/zSztchenzSz.zSzpaperszSztan\\_ajc02.pdf/robust-controller-design-and.pdf](http://zSzzSznyquist.ee.ualberta.ca/zSztchenzSz.zSzpaperszSztan_ajc02.pdf/robust-controller-design-and.pdf)  
(дата обращения 23.08.2008).
  31. VIDYASAGAR M. *A Coprime Factorization Approach*. – USA, Cambridge: MIT Press, 1985.

32. ZAMES G. *Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses* // IEEE Trans. Auto. Control. – 1981. – Vol. AC-26. – №2. – Pp. 301-320.
33. ZHOU K., DOYLE J.C., GLOVER K. *Robust and Optimal Control*. – New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

## $H_\infty$ ROBUST CONTROLLER DESIGN FOR BOILER SYSTEM

**Alexander Kurdjukov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, doctor of technical sciences, professor (akurd@ipu.ru).

**Victor Timin**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, candidate of technical sciences, senior staff scientist, (timin.victor@rambler.ru.) (Moscow, Profsoyuznaya st., 65).

*Abstract: This paper is devoted to the problem of the boiler system control. This problem solution is based on the technique of closed-loop pole placement in given LMI region of the complex plain, as well as  $H_\infty$  loop shaping using LMI. Closed-loop performance requirements are established in form of both frequency-domain constraints onto the singular values of open-loop transfer function and constraints onto closed-loop pole placement at the complex plain. The designed full-order  $H_\infty$  controller is reduced via balanced truncation technique.*

Keywords: boiler system control,  $H_\infty$  control theory, linear matrix inequality (LMI),  $H_\infty$  loop shaping, closed-loop pole placement in LMI region, controller reduction.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Б.Т. Поляком*