

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПРИ ПИД УПРАВЛЕНИИ. ЧАСТЬ 2**

**Шубладзе А. М.<sup>1</sup>**

*(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова  
РАН, г. Москва)*

**Попадько В. Е.<sup>2</sup>, Якушева А. А.<sup>3</sup>**

*(Российский государственный университет нефти и газа  
им. И.М. Губкина, г. Москва)*

**Бобриков Н. М.<sup>4</sup>**

*(ОАО «Газавтоматика»)*

**Кузнецов С. И.<sup>5</sup>**

*(ОАО НИИТЕПЛОПРИБОР, г. Москва)*

*В работе рассматривается синтез систем управления по критерию максимальной степени устойчивости для ПИД – закона управления. Проводится исследование основных оптимальных по степени устойчивости решений, что позволило*

---

<sup>1</sup> Александр Михайлович Шубладзе, заведующий лабораторией, доктор технических наук, профессор (*shub@ipu.rssi.ru*).

<sup>2</sup> Владимир Ефимович Попадько, декан факультета «Автоматики и вычислительной техники» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, доктор технических наук, профессор (Москва, Ленинский проспект, д. 65, тел. (499) 1357096).

<sup>3</sup> Анна Александровна Якушева, магистр техники и технологии РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина (*yakusheva\_a@mail.ru*).

<sup>4</sup> Николай Михайлович Бобриков, начальник департамента ОАО «Газавтоматика», (499) 246-63-45..

<sup>5</sup> Сергей Иванович Кузнецов, генеральный директор ОАО «НИИТЕПЛОПРИБОР», (495) 999-18-16.

*наметить дальнейший путь развития метода машинным способом.*

Ключевые слова: синтез систем максимальной степени устойчивости, исследование оптимальных по степени устойчивости решений.

## **Введение**

Работа продолжает исследования по синтезу систем максимальной степени устойчивости, проведенные в [1]. В цитированной работе был рассмотрен ряд оптимальных по степени устойчивости решений для ПИД закона управления которые касались следующих четырех случаев:

- 1) случай действительных корней оптимального решения;
- 2) случай трех действительных корней и одной комплексно-сопряженной пары корней;
- 3) случай двух действительных корней и одной комплексно-сопряженной пары корней;
- 4) случай двух действительных и двух пар комплексно-сопряженных корней;

Всего при ПИД законе управления, как указывалось в [2], возможны 9 случаев оптимальных по степени устойчивости решений. В настоящей работе будут исследованы оставшиеся 5 случаев. При этом постановка самой задачи оптимального по степени устойчивости управления и все используемые обозначения будут те же самые, что и в работе [1]. С целью более понятного и удобного восприятия материала статьи повторим некоторые из этих обозначений.

Максимальная степень устойчивости

$$(1) \quad I_{\text{оп}} = -\min \max \operatorname{Re} \lambda_j(k_{\text{п}}, k_{\text{и}}, k_{\text{д}}),$$

где  $\lambda_j$  – корни характеристического полинома

$$D_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + \sum_1^n a_i \lambda^i + k_0(k_{\text{п}} \lambda + k_{\text{и}} + \lambda^2 k_{\text{д}})$$

который после замены  $\lambda$  на  $\lambda - I_{\text{оп}}$  при  $k_{\Pi} = k_{\text{Поп}}$ ,  $k_{\text{И}} = k_{\text{Иоп}}$  и  $k_{\text{Д}} = k_{\text{Доп}}$  превращается в

$$(2) D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \lambda_1^{n_q} \prod_{i=1}^{n_k} (\lambda_1^2 + \omega_i^2)^{\gamma_i} D_{1[(n+1-n_g-2n_k)]}(\lambda_1) = \\ = \lambda_1^{n+1} + \sum_{i=3}^n a_i^* \lambda_1^{i-1} + \sum_{i=1}^2 a_i^* (k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) \lambda_1^{i-1},$$

где

$$(3) a_i^* = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} D_{(n+1)}(\lambda, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})}{\partial \lambda^{i-1}},$$

– это  $i$ -я производная  $D_{n+1}(\lambda)$  при  $\lambda = -I_{\text{оп}}$ ;  $D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1)$  – полином, не имеющий корней в правой полуплоскости. В процессе исследований будет использован следующий модифицированный годограф характеристического полинома (3), в котором  $\lambda_1 = i\omega$ ,  $i^2 = -1$ ,

$$(4) Z_{n_0}(i\omega) = \text{Re } D_{1(n+1)}(i\omega) + i\omega^{-1} \text{Im } D_{1(n+1)}(i\omega) = \text{Re}_0(\omega^2) + i \text{Im}_0(\omega^2)$$

Проведем рассмотрение следующих 5 случаев, которые не были рассмотрены в [1].

### 1. Случай одного действительного корня и трех пар комплексно-сопряженных корней

В этом случае справедливы условия

$$(5) n_g = 1, n_k = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются один действительный корень и три пары комплексно-сопряженных корней. Условие (5) может выполняться при

$$(6) a_1^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0, \\ \Delta^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta^{(1)}_{n-5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \\ = \Delta^{(2)}_{n-5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0, \\ \Delta^{(0)}_j(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) > 0,$$

где  $1 < j < n - 5$ ;  $\Delta^{(0)}_{n-5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$ ,  $\Delta^{(1)}_{n-5}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$ ,

$\Delta_{n-5}^{(2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$  – основной и побочные определители Гурвица;  $a_1^*$  определяется соотношением (2). Из четырех уравнений (6) можно найти оптимальные значения  $I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}},$  и  $k_{\text{Доп}}$ . Но эти условия являются необходимыми условиями оптимальности (1). На рис. 1 изображен годограф (4) полинома (2), построенного при выполнении (6), не являющийся годографом оптимальной системы. Из этого годографа видно, что увеличение  $k_{\text{Доп}}$ , полученного из (6), приводит к появлению области, размещение в которой начала координат делает полином (2) устойчивым.

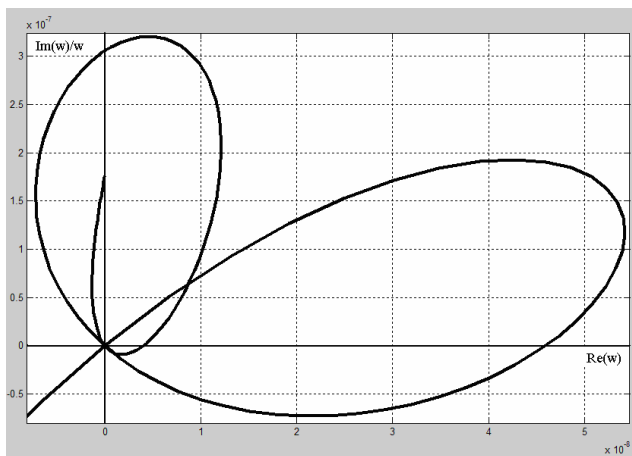


Рис. 1. Годограф неоптимальной системы

Годограф на рис. 1 получен для полинома (6), в котором

$$D_{[l_{n+1}-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{[l_{40}]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$

$$n_g = 1, n_k = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \omega_1 = 0,03, \omega_2 = 0,1, \omega_3 = 0,14.$$

Оптимальность в рассматриваемом случае можно гарантировать следующими соображениями. Рассмотрим векторы, нормальные к годографу (4)

$$Z_{n0}^*(i\omega) = (\text{Re}_0(\omega^2) + i\text{Im}_0(\omega^2)),$$

в точках  $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2, \omega = \omega_3$  пересечения им начала коорди-

нат. Такими векторами являются

$$\bar{y}_1(\omega_1^2) = (-\text{Im}_1(\omega_1^2), -\text{Re}_1(\omega_1^2)),$$

$$\bar{y}_2(\omega_2^2) = (-\text{Im}_1(\omega_2^2), -\text{Re}_1(\omega_2^2)),$$

$$\bar{y}_3(\omega_3^2) = (-\text{Im}_1(\omega_3^2), -\text{Re}_1(\omega_3^2)),$$

$$\text{где } \text{Im}_1(\omega^2) = \frac{\partial \omega^{-1} \text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}, \quad \text{Re}_1(\omega^2) = \frac{\partial \text{Re} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}.$$

Найдем условие, при котором вариациями параметров управления  $k_{\text{П}}$ ,  $k_{\text{И}}$  и  $k_{\text{Д}}$  степень устойчивости полинома (2) не может быть увеличена. Каждая из трех пар комплексных корней вариациями  $\delta_{\text{П}}$ ,  $\delta_{\text{И}}$  и  $\delta_{\text{Д}}$  параметров  $k_{\text{П}}$ ,  $k_{\text{И}}$  и  $k_{\text{Д}}$  может быть сдвинута в область устойчивости корней плоскости  $\lambda_1$  (2), если каждое из скалярных произведений

$$(7) \quad \langle \bar{y}_i(\omega_i^2), (\delta_{\text{Е}} - \omega_i^2 \delta_{\text{А}}, \delta_{\text{I}}) \rangle < 0, \quad \text{где } i = 1, 2, 3.$$

Но (7) справедливо, если матрица

$$(8) \quad A = \begin{pmatrix} -\text{Im}_1(\omega_1^2) & \text{Re}_1(\omega_1^2) & \omega_1^2 \text{Im}_1(\omega_1^2) \\ -\text{Im}_1(\omega_2^2) & \text{Re}_1(\omega_2^2) & \omega_2^2 \text{Im}_1(\omega_2^2) \\ -\text{Im}_1(\omega_3^2) & \text{Re}_1(\omega_3^2) & \omega_3^2 \text{Im}_1(\omega_3^2) \end{pmatrix}$$

невырождена, т.е. ее определитель  $|A| \neq 0$ . Искомое дополнительное условие, гарантирующее оптимальность решения, зависит от знака вариации  $\delta_{\text{И}}$ , при которой наряду с вариациями  $\delta_{\text{П}}$  и  $\delta_{\text{Д}}$  хотя бы одна из комплексных пар корней сдвинулась влево от прямой  $\lambda_1 = 0$  (2), сохранив значение степени устойчивости  $I$ . В частном случае годограф(4) на частоте  $\omega_1$  может быть сдвинут в направлении  $-\bar{y}_1(\omega_1^2)$  обратном направлению вектора нормали, обеспечивая на этой частоте устойчивость, а на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$  – в направлениях, перпендикулярных направлениям векторов нормали  $\bar{y}_2(\omega_2^2)$  и  $\bar{y}_3(\omega_3^2)$ , сохраняя на этих частотах систему на границе устойчивости. Вариации  $\delta_{\text{П}}$ ,  $\delta_{\text{И}}$  и  $\delta_{\text{Д}}$ , которые обеспечивают указанное движение годографа, находятся из уравнения

$$(9) \quad A \begin{pmatrix} \delta_{И} \\ \delta_{П} \\ \delta_{Д} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\delta > 0$  – достаточно малое число. При выполнении (9) возможность увеличения степени устойчивости полинома (2), как было отмечено выше, зависит от знака вариации  $\delta_{И}$  его свободного члена, который, как следует из (5), равен нулю. Член в (2) становится отрицательным, нарушая необходимое условие его устойчивости, и действительный корень в (5) переходит в правую полуплоскость  $\lambda_1$  (2). Условие  $\delta_{И} < 0$  имеет место при выполнении неравенства

$$(10) \quad |A| \begin{vmatrix} \text{Re}_1(\omega_2^2) & \omega_2^2 \text{Im}_1(\omega_2^2) \\ \text{Re}_1(\omega_3^2) & \omega_3^2 \text{Im}_1(\omega_3^2) \end{vmatrix} > 0,$$

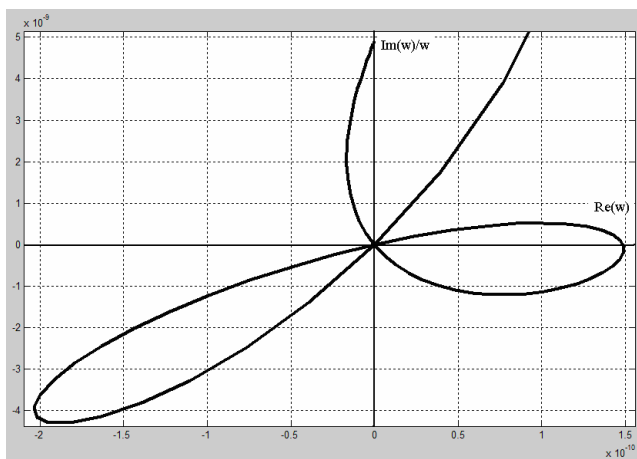


Рис. 2. Годограф оптимальной системы

Таким образом, неравенство (10) наряду с выражениями (6) являются достаточными условиями оптимальности в случае (5).

На рис. 2 изображен годограф полинома (6) оптимальной системы, для которой выполнено условие (10). Из этого годо-

графа следует, что любое изменение  $k_{\text{Доп}}$ , полученного из (6), приводит к появлению областей, размещение в которых начала координат делает полином (2) неустойчивым.

Годограф на рис. 2 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$

$$n_g = 1, n_k = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \omega_1 = 0,02, \omega_2 = 0,05, \omega_3 = 0,07.$$

## 2. Случай одного действительного корня и кратной комплексно-сопряженной пары корней

В этом случае справедливы условия

$$(11) n_g = 1, n_k = 1, \gamma_1 = 2,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются один действительный корень и кратная комплексно-сопряженная пара корней. Условие (11) может быть выполнено при

$$(12) a_1^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

$$\Delta_{n-3}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta_{n-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

$$\Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) > 0,$$

где  $1 < j < n - 3$ ;  $a_1^*$  – из (3);  $\Delta_{n-4}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$ ,  $\Delta_{n-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}})$  – основной и побочный определители Гурвица. Для нахождения четырех параметров  $I_{\text{оп}}$ ,  $k_{\text{Поп}}$ ,  $k_{\text{Иоп}}$  и  $k_{\text{Доп}}$  введем полином

$$(13) D_{1(n-1)}^{(1)}(I_{\text{оп}}) = \text{Re}_1(\omega^2) + i\omega \text{Im}_1(\omega^2),$$

$$\text{где } \text{Re}_1(\omega^2) = \frac{\partial \text{Re } D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}, \quad \text{Im}_1(\omega^2) = \frac{\partial \omega^{-1} \text{Im } D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial(\omega^2)}$$

Полином (13) имеет корень на той же частоте, что и полином (2), поэтому справедливо условие

$$(14) \Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

где  $\Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}})$  – основной определитель Гурвица полинома (13). Условия (12) и (14) являются необходимыми условиями оптимальности. Поэтому найденные из них четыре неизвестных  $I_{\text{оп}}$ ,  $k_{\text{П}}$ ,  $k_{\text{И}}$ ,  $k_{\text{Д}}$  могут и не быть оптимальными. На рис. 3 изображен годограф полинома (2), построенного при выполнении (12), (14), который не является годографом оптимальной системы, так

как при увеличении  $k_d$  «носик» преобразуется в петлю и сдвигается влево, образуя соответствующим выбором  $k_{II}$  и  $k_{II}$  область «устойчивых» корней.

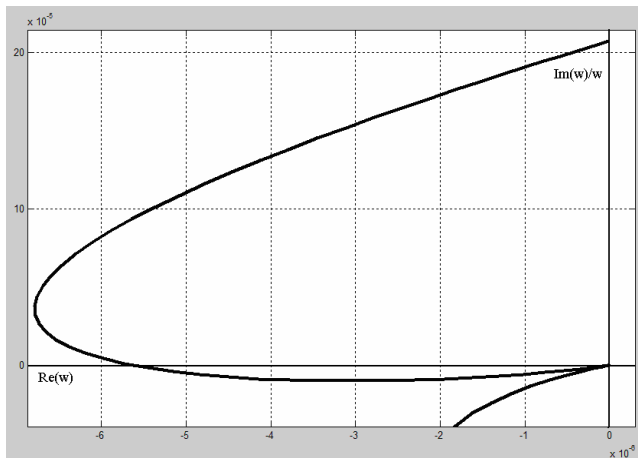


Рис. 3 Годограф неоптимальной системы

Годограф на рис. 3 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 24, n_g = 1, n_k = 1, \gamma_1 = 2, \omega_1 = 0,12.$$

Для оптимальности системы (2), (12) и (14) достаточно выполнения условия на знак второй производной мнимой части:

$$(15) \text{Im}_2(\omega_1^2) > 0,$$

где  $\text{Im}_2(\omega^2) = \frac{\partial^2 \omega^{-1} \text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial^2 (\omega^2)}$  при  $\omega = \omega_1$ ;  $\omega_1$  – частота, на

которой годограф (4) «касается» начала координат. На рис. 4 изображен годограф (4) полинома оптимальной системы (2), для которой выполнено условие (15).



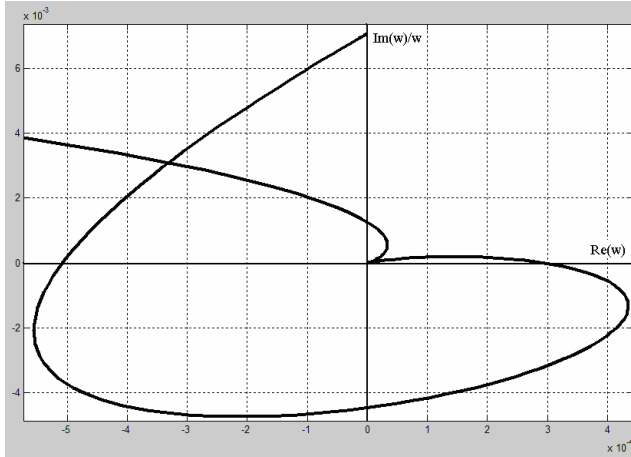


Рис. 4. Годограф оптимальной системы

Годограф на рис. 4 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 24, n_g = 1, n_k = 1, \gamma_1 = 2, \omega_1 = 0,29.$$

### 3. Случай одной комплексно-сопряженной пары и кратной комплексно-сопряженной пары корней

В этом случае справедливы условия

$$(16) n_g = 0, n_{k1} = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются пара комплексно-сопряженных корней и кратная комплексно-сопряженная пара корней. Условие (16) может выполняться при

$$(17) \Delta_{n-4}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \Delta_{n-4}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \\ = \Delta_{n-4}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0,$$

$$\Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) > 0,$$

где  $1 < j < n - 4$ ;  $\Delta_{n-4}^{(0)}$ ,  $\Delta_{n-4}^{(1)}$  и  $\Delta_{n-4}^{(2)}$  – основной и побочные определители Гурвица. Для нахождения четырех параметров  $I_{оп}$ ,  $k_{Поп}$ ,  $k_{Иоп}$ ,  $k_{Доп}$ , как и в предыдущем случае, введем полином

$$(18) D_{1(n-1)}^{(1)}(I_{оп}) = \text{Re}_1(\omega^2) + i\omega \text{Im}_1(\omega^2),$$

где функции  $\text{Re}_1(\omega^2)$  и  $\text{Im}_1(\omega^2)$  определены в (13). Полином (18) имеет корень на той же частоте, что и полином (2). Поэтому справедливо условие

$$(19) \Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

где  $\Delta_{1(n-2)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Доп}})$  – основной определитель Гурвица полинома (18). Условия (17) и (19) являются необходимыми условиями оптимальности. Найденные из них четыре неизвестных  $I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}$  не всегда оптимальны. На рис. 5 изображен годограф полинома (2), построенного при выполнении (17), (19), который при этом не является годографом оптимальной системы, потому что его, как и в предыдущем случае 7, вариациями  $k_{\text{П}}, k_{\text{И}}$  и  $k_{\text{Д}}$  можно сделать годографом устойчивой системы.

Годограф на рис. 5 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{60},$$

$$n = 65, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \omega_1 = 0,09, \omega_2 = 0,23.$$

Для оптимальности системы (2), (17) и (19) достаточно выполнение условия на знак произведения мнимых частей:

$$(20) \text{Im}_1(\omega_1^2) \text{Im}_2(\omega_2^2) > 0,$$

где  $\text{Im}_1(\omega_1^2)$  – мнимая часть направляющего вектора годографа (4) при пересечении им на частоте  $\omega_1$  начала координат (что соответствует некротной паре корней (46));

$$\text{Im}_2(\omega^2) = \frac{\partial^2 \omega^{-1} \text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial^2 (\omega^2)} \quad \text{при } \omega = \omega_2; \quad \omega_2 - \text{частота, на}$$

которой годограф (9) «касается» начала координат. На рис. 6 изображен годограф (4) полинома оптимальной системы (2), для которой выполнено условие (20).

Годограф на рис. 6 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 25, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \omega_1 = 0,3, \omega_2 = 0,6.$$

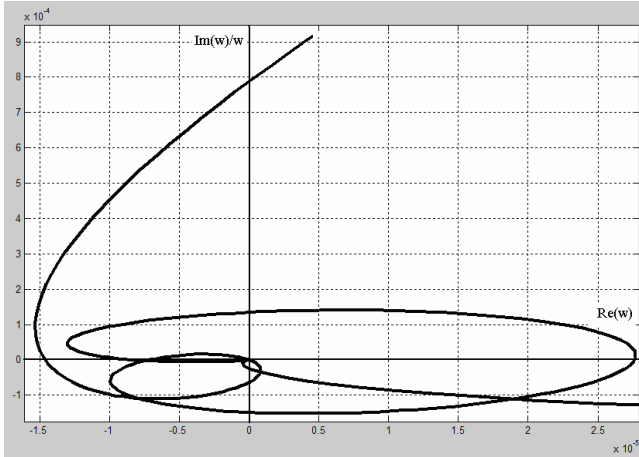


Рис. 5. Годограф неоптимальной системы

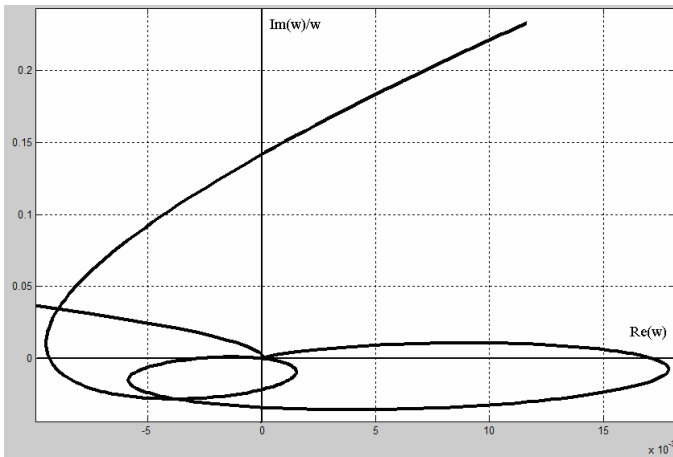


Рис. 6. Годограф оптимальной системы

#### 4. Случай двух комплексно-сопряженных пар корней

В этом случае справедливы условия

$$(21) n_g = 0, n_{k1} = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются две пары комплексно-сопряженных корней с касанием годографом (4) при пересечении им начала координат на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  действительной оси. Условию (21) соответствуют уравнения

$$(22) \Delta_{n-2}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = \Delta_{n-2}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) = 0,$$

$$\Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}, k_{\text{Доп}}) > 0,$$

где  $1 < j < n - 3$ ;  $\Delta_{n-2}^{(0)}$  и  $\Delta_{n-2}^{(1)}$  – основной и побочный определители Гурвица. Для получения двух дополнительных уравнений введем полином, учитывающий факт касания годографом (4) действительной оси. Такой факт имеет место при выполнении условия

$$(23) \text{Im}_1(\omega_1^2) = \text{Im}_1(\omega_2^2) = 0,$$

где  $\text{Im}_1(\omega^2)$  из (15). Из (23) следует, что полином

$$(24) D_{1n_1}(\omega^2) = \text{Im}_0(\omega^2) + i\omega \text{Im}_1(\omega^2),$$

где  $n_l = 2 \left[ \frac{n}{2} \right]$ ,  $\left[ \frac{n}{2} \right]$  – целая часть числа  $\frac{n}{2}$ , имеет те же комплексно-сопряженные пары корней, что и исходный полином

(2). Поэтому в оптимальном случае справедливо уравнение

$$(25) \Delta_{n_1-3}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}) = \Delta_{n_1-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}) = 0,$$

где  $\Delta_{n_1-3}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}})$ ,  $\Delta_{n_1-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}})$  – определители Гурвица размерности  $n_1 - 3$  полинома (24).

Из (22) и (25) можно определить четыре неизвестных параметра  $I_{\text{оп}}$ ,  $k_{\text{Поп}}$ ,  $k_{\text{Иоп}}$ ,  $k_{\text{Доп}}$ . Но условия (22) и (25) являются необходимыми условиями оптимальности. Подтверждается это годографом (4) полинома (2), изображенным на рис. 7, для которого условия (22) и (25) выполнены, но очевидно, что изменением только параметров  $k_{\text{П}}$  и  $k_{\text{И}}$  полином (2) может быть сделан устойчивым.

Годограф на рис. 7 получен для полинома (2), в котором  $D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40}$ .

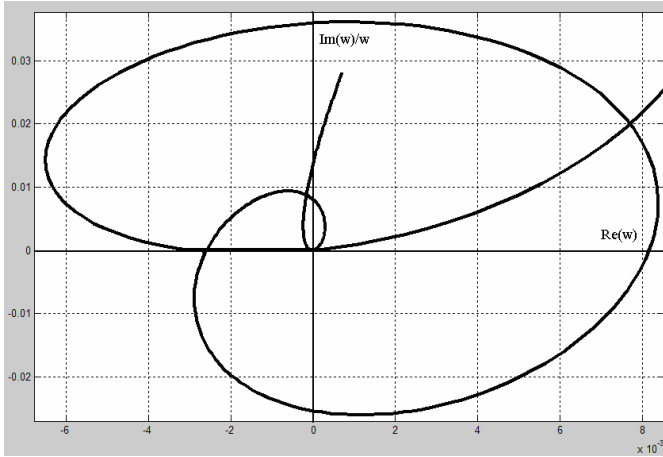


Рис. 7. Годограф неоптимальной системы

Достаточные условия оптимальности можно получить добавлением к (22), (25) условия на направления годографа в точке пересечения им на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  начала координат. Эти направления, лежащие на прямой  $\text{Im} = 0$ , должны быть противоположны друг другу, что имеет место при выполнении неравенства

$$(26) \text{Re}_1(\omega_1^2)\text{Re}_1(\omega_2^2) < 0,$$

где  $\text{Re}_1(\omega^2)$  из (13).

Условия (22), (25) и (26) являются достаточными условиями оптимальности в рассматриваемом случае. На рис. 8 изображен годограф (4), соответствующий оптимальному по степени устойчивости решению и удовлетворяющий условиям (22), (25) и (26).

Годограф на рис. 8 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[20]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{20},$$

$$n = 23, n_g = 0, n_k = 2, \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \omega_1 = 0,16, \omega_2 = 0,51.$$

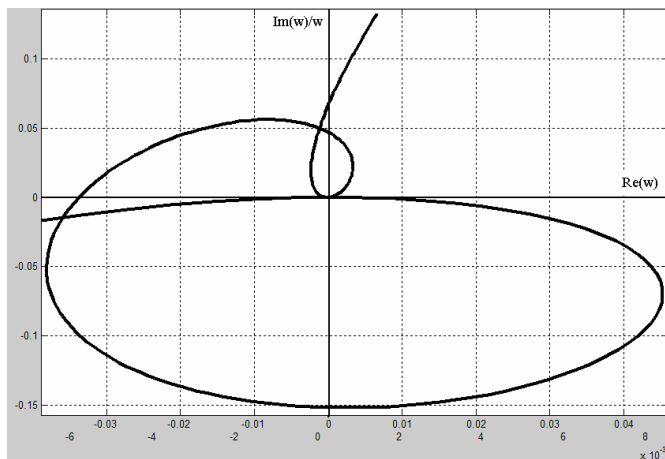


Рис. 8. Годограф оптимальной системы

### 5. Случай четырех комплексно-сопряженных пар корней

В этом случае справедливы условия

$$(27) n_g = 0, n_k = 4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1,$$

при которых крайними правыми корнями (2) являются четыре пары комплексно-сопряженных корней. Условие (27) может быть выполнено при

$$(28) \Delta_{n-6}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \Delta_{n-6}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \\ = \Delta_{n-6}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = \Delta_{n-6}^{(3)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) = 0, \\ \Delta_{j}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп}) > 0,$$

где  $1 < j < n - 6$ ;  $\Delta_{n-5}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$ ,  $\Delta_{n-5}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$ ,  $\Delta_{n-5}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$  и  $\Delta_{n-6}^{(3)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}, k_{Доп})$  – основной и побочные определители Гурвица. Из четырех уравнений (28) можно найти оптимальные значения  $I_{оп}$ ,  $k_{Поп}$ ,  $k_{Иоп}$  и  $k_{Доп}$ . Эти условия - необходимые условия оптимальности (1). На рис. 11 изображен годограф (4) полинома (2), построенного при выполнении (28), но который не является годографом оптимальной системы.

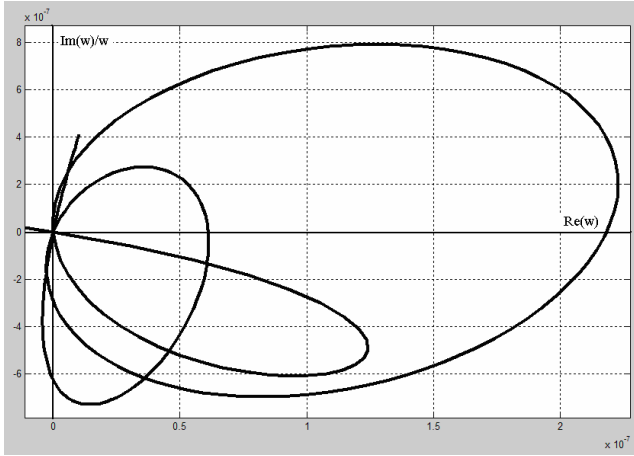


Рис. 9. Годограф неоптимальной системы

Годограф на рис. 9 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$

$$n = 47, n_g = 0, n_k = 4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1, \omega_1 = 0,02, \omega_2 = 0,11, \omega_3 = 0,2, \omega_4 = 0,23.$$

Оптимальность в рассматриваемом случае гарантируется следующим образом. Рассмотрим векторы кривизны годографа  $Z_{n0}^*(i\omega)$  (7) в точках  $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2, \omega = \omega_3$ , пересечения им начала координат трехмерного пространства  $(\text{Re}_0(\omega^2), \text{Im}_0(\omega^2), -\omega^2 \text{Re}_0(\omega^2))$ . Такими векторами являются введенные при рассмотрении случая 1 векторы, используемые в матрице  $A$  (8). В силу линейной независимости этих векторов линейное уравнение (9), как было отмечено ранее, имеет единственное решение  $\Delta k_{И}, \Delta k_{П}, \Delta k_{Д}$ , при котором годограф (7) на частоте  $\omega_1$  сдвигается в сторону устойчивости, а на частотах  $\omega_2$  и  $\omega_3$  этот годограф сохраняется на границе устойчивости. В этом случае достаточным условием оптимальности наряду с (39) будет условие на знак скалярного произведения вектора кривизны на частоте  $\omega = \omega_4$  на вариацию вектора  $\Delta k_{И}, \Delta k_{П}, \Delta k_{Д}$ , решения линейного уравнения (9)

$$(29) \quad \langle (\operatorname{Re}_2(\omega_4^2), \operatorname{Im}_2(\omega_4^2), -\omega_4^2 \operatorname{Re}_2(\omega_4^2) - 2\operatorname{Re}_1(\omega_4^2)), (\Delta k_i, \Delta k_n, \Delta k_d) \rangle = -\delta_4 < 0$$

На рис. 10 изображен годограф полинома (2) оптимальной системы (1), для которой выполнены условия (28), (29).

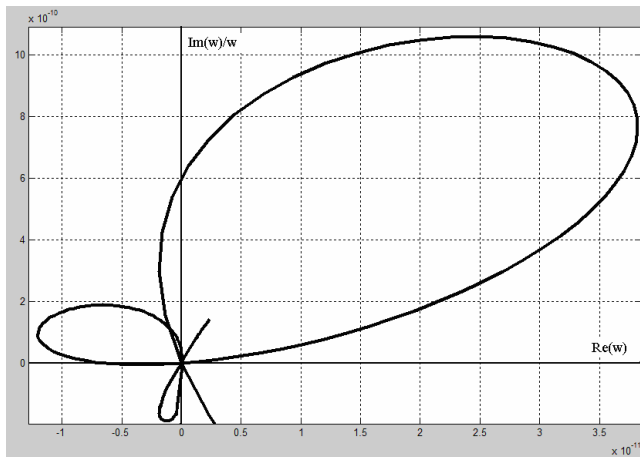


Рис. 10. Годограф оптимальной системы

Годограф на рис. 10 получен для полинома (2), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[40]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^{40},$$

$$n = 47, n_g = 0, n_k = 4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1, \omega_1 = 0,015, \\ \omega_2 = 0,023, \omega_3 = 0,055, \omega_4 = 0,08.$$

## Заключение

Проведено исследование шести структур оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД законе управления. Получены достаточные условия оптимальности каждой из возможных оптимальных структур. С помощью машинных методов расчета построены годографы замкнутых систем управления, для которых в одном случае выполняются только необходимые



условия оптимальности, в другом – достаточные условия. Вид построенных годографов оптимальных систем отражает геометрический смысл полученных решений.

### **Литература**

1. ШУБЛАДЗЕ А. М., ПОПАДЬКО В. Е., КУЗНЕЦОВ С. И., ЯКУШЕВА А. А. *Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Часть I* // Управление большими системами / Сборник трудов. Выпуск 22: М.: ИПУ РАН, 2008. – С. 86-100.
2. ШУБЛАДЗЕ А. М. *Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. II.* // Автоматика и телемеханика. 1997, №8. С. 67-79.

### **PID CONTROLLERS' STABILITY DEGREE OPTIMIZATION**

**Alexander M. Shubladze**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., professor (shub@ipu.rssi.ru).

**Vladimir E. Popad'ko**, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow, professor, dean (Moscow, Lenin's Ave, 65, (495) 930-92-25).

**Anna A. Yakusheva**, student (yakusheva\_a@mail.ru).

**Sergey I. Kuznecov**, («SRITeplopribor», (495) 999-18-16).

*Synthesis of control systems by criterion of the maximum degree of stability for PID is considered. Solutions with optimal degree of stability had been obtained. These solutions enable us to find further prospects of computer based development of control systems.*

Keywords: synthesis of systems with maximal degree of stability, optimal on degree of stability solutions.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Дорофеевом*