ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ В ЗАДАЧЕ О РАЗМЕЩЕНИИ ПОЛЮСОВ

Мухин А. В.[1]
(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*)

Рассматривается задача о размещении полюсов с помощью статического регулятора по выходу. Если задача разрешима, то спектр матрицы замкнутой системы можно расположить в любых заданных, симметричных относительно действительной оси точках комплексной полуплоскости. Это дает возможность не просто стабилизировать систему, но и задавать требуемые характеристики, такие, как запас устойчивости, время переходных процессов и другие. Известно, что если произведение числа входов и выходов превышает размерность системы, то задача о размещении полюсов для системы, заданной в виде передаточной матрицы, разрешима. В статье показано, что данное соотношение не является достаточным условием для системы, заданной в пространстве состояний. Существует исключительный случай, при котором задача о размещении полюсов принципиально неразрешима. Этот случай легко обнаруживается с помощью перемножения матриц выхода и входа. Если это произведение дает нулевую матрицу, то в силу неизменности следа матрицы замкнутой системы, задача неразрешима как в действительной, так и в комплексной области. Причем произведение матриц выхода и входа инвариантно относительно базиса. Сформулировано необходимое условие разрешимости.

Ключевые слова: задача о размещении полюсов, статический регулятор по выходу, след матрицы.

1. Введение

Задача о размещении полюсов с помощью статического регулятора по выходу представляет большой практический интерес. Если задача разрешима, то спектр матрицы замкнутой системы можно расположить в любых заданных, симметричных относительно действительной оси точках комплексной полуплоскости. Проблема размещения собственных значений входит в число трудных задач теории управления [3]. Необходимые условия, достаточные условия разрешимости, выражаемые в виде соотношения между размерностью системы, количеством

[1] *Алексей Валерьевич Мухин, аспирант* (*muhin-aleksei@yandex.ru*).

входов и выходов получены в [7, 8, 11, 16 ,17]. Различные подходы к решению задачи изложены в [5, 9, 12–14, 18–20]. Подробный обзор основных результатов можно найти в [4]. Задача затрагивалась также и в более ранних обзорах [6, 15].

В статье получен новый результат, дополняющий достаточные условия [17] для систем, заданных в пространстве состояний. Показано, что если произведение матриц выхода и входа дает нулевую матрицу, то задача о размещении полюсов с помощью статического регулятора по выходу принципиально неразрешима. Сформулировано необходимое условие разрешимости.

Структура статьи стандартная: во втором разделе приведены предварительные сведения; третий раздел содержит основной результат; в четвертом разделе рассмотрен практический пример; последний раздел – заключение.

2. Предварительные сведения

Дана линейная непрерывная стационарная управляемая и наблюдаемая система:

(1) $$x = Ax + Bu,\ x(0) = x_0,$$
$$y = Cx,$$

где $x \in R^n$ – состояние; $u \in R^m$ – вход; $y \in R^p$ – измеряемый выход; $A \in R^{n\times n}$ – обратимая матрица системы; $B \in R^{n\times m}$ – матрица входа; $C \in R^{p\times n}$ – матрица выхода.

Без потери общности полагаем, что размерности матриц B и C не избыточны:

$$\operatorname{rank}\left(B\right) = m,$$
$$\operatorname{rank}\left(C\right) = p.$$

Применим к (1) закон управления по измеряемому выходу:

$$u = Ky,$$

где $K \in R^{m\times p}$.

Основной результат статьи связан с задачей о размещении полюсов. Соответствующая задача формулируется следующим образом: *существует ли матрица K, которая обеспечивает совпадение спектра матрицы замкнутой системы*

$$\widetilde{A_c} = A + BKC$$

с любым наперед заданным множеством точек в комплексной плоскости, расположенных симметрично относительно действительной оси:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C}.$$

Задачу можно рассматривать как частный случай задачи о статическом регуляторе по выходу. Из разрешимости задачи о размещении полюсов следует разрешимость задачи о статическом регуляторе по выходу. Если матрица выхода является обратимой, то управляемость системы является необходимым и достаточным условием для разрешимости задачи (см., например, [4]). Для практических целей такая постановка менее интересна, поскольку осуществляется при полностью измеряемом состоянии. Наибольший интерес – когда матрицы B и C одновременно необратимы. Необходимым условием разрешимости задачи является соотношение $mp \geq n$ [16]. В случае комплексных матриц K это условие является также достаточным.

3. След матрицы замкнутой системы

Покажем условие, выражаемое в виде произведения матриц C и B, при котором след матрицы замкнутой системы является постоянным. Для этого нам понадобится новый базис, в котором это условие легко обнаруживается. С этой целью выполним линейное преобразование базиса системы (1) посредством обратимой матрицы $S \in R^{n\times n}$ так, чтобы матрица выхода приняла следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix},$$

где I_p – единичная матрица ранга p.

В новом базисе система (1) примет вид

$$x = SAS^{-1}x + SBu = Ax + Bu,\; x(0) = x_0, \tag{2}$$
$$y = CS^{-1}x = Cx = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix} x,$$

где x – вектор состояния системы в новом базисе.

Отметим, что никаких требований на структуру матрицы A не накладывается. Существует, вообще говоря, множество матриц S, обеспечивающих требуемый вид матрицы выхода. Действительно, запишем матрицу преобразования в виде

$$S = \begin{pmatrix} S_p \\ S_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Из уравнения

$$CS^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix}$$

следует равенство $C = S_p$. Нижние $(n-p)$ строк являются свободными и должны лишь обеспечивать обратимость матрицы S. Тогда в качестве матрицы S можно взять, например,

$$S = \begin{pmatrix} C \\ \mathcal{N}_C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

где$\mathcal{N}_C$ – любое решение уравнения $C\mathcal{N}_C = 0$.

Обратной матрицей будет:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} C^{\mathrm{T}}(CC^T)^{-1} & \mathcal{N}_C(\mathcal{N}_C^{\mathrm{T}}\mathcal{N}_C)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Запишем также уравнение замкнутой системы в новом базисе:

(3) $\quad x_c = A_c x = (A + BKC)x = \begin{pmatrix} A_p + BK & A_{n-p} \end{pmatrix} x,$

где $A_p \in R^{n\times p}$.

Равенство спектров $\widetilde{A_c}$ и A_c гарантируется подобием матриц. Далее будем рассматривать матрицу A_c. Докажем лемму:

Лемма. Если произведение $CB = 0$, то след матрицы A_c равен следу матрицы А.

Доказательство. Разобьем матрицы A и B на блоки следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} \in R^{p\times p}$; $B_{11} \in R^{p\times m}$.

Произведение матриц BKC примет вид

$$BKC = \begin{pmatrix} B_{11}K & 0_{p\times(n-p)} \\ B_{21}K & 0_{(n-p)\times(n-p)} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу замкнутой системы (3), можно записать следующим образом:

(4) $\quad A_c = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11}K & A_{12} \\ A_{21} + B_{21}K & A_{22} \end{pmatrix}.$

Если $B_{11} = 0$, то (4) примет вид

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + B_{21}K & A_{22} \end{pmatrix}.$$

След матрицы A_c в таком случае равен следу матрицы A:

(5) $\mathrm{tr}(A_c) = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Но так как в выбранном базисе имеет место равенство

$$CB = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = B_{11},$$

то если $B_{11} = 0$, то и $CB = 0$. Лемма доказана.

Характеристический многочлен A_c можно записать в виде:

$$\lambda^n - \left(\mathrm{tr}(A_c)\right)\lambda^{n-1} + \cdots + det(A_c) = 0.$$

Из спектрального ограничения (5) следует, что расположить произвольным образом n корней такого многочлена невозможно, так как $\mathrm{tr}(A_c) = const$. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1. Необходимым условием разрешимости задачи о размещении полюсов для управляемой и наблюдаемой системы является

(6) $CB \neq 0$.

В общем случае относительно ранга произведения матриц C и B имеет место соотношение

$$0 \leq \mathrm{rank}(CB) \leq \min\{m, p\}.$$

Обратимость хотя бы одной из матриц гарантированно обеспечивает выполнение (6). Следует принять во внимание, что произведение матриц выхода и входа не зависит от базиса. Поэтому из (6) следует $CB \neq 0$ и наоборот. Следовательно, проверку условия (6) можно выполнить и в исходном базисе. Отметим, что произведение матриц выхода и входа связаны с понятием относительного порядка системы [10]. Обратимся теперь к результату [17], согласно которому, для системы, заданной в виде передаточной матрицы, соотношение

(7) $mp > n$

является достаточным условием разрешимости задачи о размещении полюсов. Докажем, что соотношение (7) не является достаточным условием разрешимости задачи о размещении полюсов для системы, заданной в пространстве состояний. Для этого достаточно доказать, что из (7) не следует (6). Рассмотрим следующий пример. Пусть матрицы (2) имеют вид

$$(8)\quad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boldsymbol{a_{44}} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \boldsymbol{a_{55}} \end{pmatrix} \in R^{5\times 5},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0_{3\times 2} \\ I_2 \end{pmatrix},$$

$$C = (I_3 \quad 0_{3\times 2}).$$

Проверяем, что $CB = 0_{3\times 2}$. Таким образом, условие (7) выполняется, а условие (6) – нет. Пусть $K = \{k_{ij}\} \in R^{2\times 3}$. Запишем матрицу A_c:

$$A_c = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41}+k_{11} & a_{42}+k_{12} & a_{43}+k_{13} & \boldsymbol{a_{44}} & a_{45} \\ a_{51}+k_{21} & a_{52}+k_{22} & a_{53}+k_{23} & a_{54} & \boldsymbol{a_{55}} \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\mathrm{tr}(A_c) = \mathrm{tr}(A)$. Убеждаемся, что из (7) не следует (6). Если в приведенном выше примере увеличить число входов до $m = 3$, то условие (6) будет выполняться:

$$CB = (I_3 \quad 0_{3\times 2}) \begin{pmatrix} 0_{2\times 3} \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая матрица A_c будет равна:

$$A_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31}+k_{11} & a_{32}+k_{12} & \boldsymbol{a_{33}+k_{13}} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41}+k_{21} & a_{42}+k_{22} & a_{43}+k_{23} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51}+k_{31} & a_{52}+k_{32} & a_{53}+k_{33} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Теперь $\mathrm{tr}(A_c) \neq \mathrm{tr}(A)$. Справедливо утверждение:

Утверждение 2. Соотношение (7) не является достаточным условием разрешимости задачи о размещении полюсов для системы, заданной в пространстве состояний.

Покажем, что условия (6) и (7) можно обобщить. Введем соотношение:

$$(9)\quad m + p > n.$$

Так как $\mathrm{rank}\,(C) = p$ и $\mathrm{rank}\,(B) = m$, то для выполнения (7) достаточно, чтобы $m > n - p$. Поэтому из неравенства (9) следует (6). Обратное неверно. Из (7) следует, что $\min\{m, p\} > 1$. Тогда из (9) следует также условие (7). Если $\min\{m, p\} > 1$, то соотношение (9) выполняется при полной обратной связи. Задача о размещении полюсов в таком случае имеет простое решение. Следовательно, из соотношения (9) следуют условия (6) и (7). Необходимо отметить, соотношение (9) хорошо известно. В частности, в [11] получено достаточное условие разрешимости задачи в виде неравенства:

(10) $n - m - p + 1 \leq q$,

где q – порядок регулятора.

В случае статического регулятора ($q = 0$) неравенство (10) эквивалентно (9). Схожие соотношения получены также и в других работах (см. обзор [4]).

4. Практический пример

В практических задачах, когда в измерении и управлении задействуются отдельные переменные, а не их комбинации, равенство $CB = 0$ вполне возможно. Покажем это на примере системы, представляющей вертикальный жесткий ротор, вращающийся в электромагнитных подшипниках [1]. Электромагнитные подшипники представляют большой практический интерес для целого ряда промышленных применений. Преимущества таких систем – отсутствие физического контакта и как следствие, механического трения. Линеаризованная модель, описывающая динамику такого тела, имеет вид [2]:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_5,\\
&x_2 = x_6,\\
&x_3 = x_7,\\
&x_4 = x_8,\\
&x_5 = \lambda(x_9 - x_{10}) + 2\lambda x_1 - \rho x_6,\\
&x_6 = \lambda(x_{12} - x_{11}) + 2\lambda x_2 + \rho x_5,\\
&x_7 = -(x_{11} + x_{12}) + 2x_3,\\
&x_8 = -(x_9 + x_{10}) + 2x_4,\\
&x_9 = (x_8 - x_5) - \mu x_9 + u_1,\\
&x_{10} = -(x_8 + x_5) - \mu x_{10} + u_2,\\
&x_{11} = (x_7 + x_6) - \mu x_{11} + u_3,\\
&x_{12} = -(x_7 - x_6) - \mu x_{12} + u_4,
\end{aligned}
$$

где λ, ρ, μ – конструктивные параметры.

Первые две переменные описывают углы наклона центра масс ротора, вторые две – смещения в двух плоскостях, следующие четыре – скорости изменения первых четырех переменных, последние четыре – токи в цепях электромагнитов. Матрица входа задана следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 0_{8\times4} \\ I_4 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что измеряются первые восемь переменных. Матрица выхода имеет вид:

$$C = (I_8 \quad 0_{8\times4}).$$

Видим, что $CB = 0$. Решить задачу о размещении полюсов с помощью статического регулятора по выходу при такой организации измерений принципиально невозможно. В данном случае можно лишь стабилизировать систему.

5. Заключение

В статье показано, что при решении задачи о размещении полюсов с помощью статического регулятора по выходу для системы, заданной в пространстве состояний, необходимо учитывать структуру матриц входа и выхода. Если произведение матриц выхода и входа образует нулевую матрицу, то задача о размещении полюсов неразрешима как в действительной, так и в комплексной области. Достаточное условие разрешимости, выражаемое в виде произведения числа входов и выходов, в таком случае неприменимо для систем, заданных в пространстве состояний.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Управление движением вертикального жесткого ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках* // Известия РАН. ТиСУ. – 2011. – №5. – С. 13–17.
2. МУХИН А.В. *Математическое моделирование процесса стабилизации жесткого ротора, вращающего в электромагнитных подшипниках* // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2021. – №2. – С. 36–48.
3. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №5. – С. 4–46.
4. ШУМАФОВ М.М. *Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор* // Вестник СПбГУ.

Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6(64), вып. 4. – С. 564–591.
5. BELOZYOROV V.Ye. *New solution method of linear static output feedback design problem for linear control systems* // Linear Algebra and its Applications. – 2016. – Vol. 54. – P. 204–227.
6. BERNSTEIN D.S. *Some Open Problems in Matrix Theory Arising in Linear Systems and Control* // Linear Algebra and its Applications. – 1992. – Vol. 162–164. – P. 409–432.
7. BROCKETT R., BYRNES C. *Multivariable Nyquist criteria, loci root and pole placement: A geometric viewpoint* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – Vol. 26. – P. 271–284.
8. EREMENKO A., GABRIELOV A. *Pole placement by static output feedback for generic linear system* // SIAM J. Control Optim. – 2002. – Vol. 41. – P. 303–312.
9. HAMID M. *The resolution of the equation and the pole assignment problem: A general approach* // Automatica. – 2017. – Vol. 79. – P. 162–166.
10. ISIDORI A. *Nonlinear Control System*. – Berlin; New York: Springer-Verlag, 1985.
11. KIMURA H. *On pole placement by gain output feedback* // IEEE Trans. Automat. Control. –1975. – Vol. 20. – P. 509–519.
12. MOSTAFA EL-SAYED M.E., TAWHID M.A., ELWAN E.R. *Nonlinear conjugate gradient methods for the output feedback pole assignment problem* // Pacific Journal Optimization. – 2016. – Vol. 12(1). – P. 55–85.
13. SCHMID R., NTOGRAMATZIDIS L., NGYEN T. et al. *A unified method for optimal arbitrary placement* // Automatica. – 2014. – Vol. 50. – P. 2150–2154.
14. SHANA M., PRASANNA C., MADHU N.B. *Approximating constrained minimum cost input–output selection for generic arbitrary pole placement in structured systems* // Automatica. – 2019. – Vol. 107. – P. 200–210.
15. SYRMOS V.L, ABDALLAH C.T., DORATO P et al. *Static Output Feedback. A Survey* // Automatica. – 1997. – Vol. 33(2). – P. 125–137.
16. WILLEMS J.C., HESSELINK W.H. *Generic properties of the pole placement problem* // Proc. of the 7th IFAC Congress. – 1978. – P. 1725–1729.

17. WANG X. *Pole placement by static output feedback* // J. Math. System, Estimation and Control. – 1992. – Vol. 2. – P. 205–218.
18. YANG K., ORSI R. *Generalized pole placement via based on projections* // Automatica. – 2006. – Vol. 42. – P. 2143–2150.
19. YANNAKOUDACIS A.G. *The static output feedback from the invariant point of view* // IMA Journal of Mathematical Control and Information. – 2016. – Vol. 33. –P. 639–669.
20. ZUBOV N.E., MIKRIN E.A., MISRIKHANOV M.Sh. et al. *Controlling the finite eigenvalues of the descriptor system* // Doklady Akademy Nauk. – 2015. – No. 460(4). – P. 381–384.

ABOUT AN UNUSUAL CASE IN THE POLE PLACEMENT PROBLEM

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: The pole placement problem using a static output feedback is considered. If the problem is solvable, then the spectrum of the closed-loop system matrix can be located at any given points of the complex half-plane, symmetric with respect to the real axis. This makes it possible not only to stabilize the system, but also to set the required characteristics, such as stability margin, transition time, and others. It is known that if the multiplication of the number of inputs and outputs is greater than the dimension of the system, then the pole placement problem for a system in the form of a transfer matrix is solvable. The article shows that this ratio is not a sufficient condition for a system defined in the state space. There is an exceptional case in which the pole placement problem is fundamentally unsolvable. This case is simple discovered be means of multiplying of matrixes output and input. If this product gives a zero matrix, then due to the matrix trace consistency of the closed system matrix, the problem is unsolvable both in the real and in the complex domain. Moreover, the product of the output and input matrices is invariant with respect to the basis. A necessary condition for solvability is formulated.

Keywords: the pole placement problem, static output feedback, trace of matrix.

УДК 517.977
ББК 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.

Поступила в редакцию 23.07.2024.
Опубликована 30.11.2024.