

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО МАРКИРОВАННОГО ММРР В ПРЕДЕЛЬНОМ УСЛОВИИ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ<sup>1</sup>

Пауль С. В.<sup>2</sup>, Назаров А. А.<sup>3</sup>, Лапатин И. Л.<sup>4</sup>  
(Национальный исследовательский Томский  
государственный университет, Томск)

*Рассматривается математическая модель потока разнородных данных в виде двумерного маркированного ММРР. Исследование таких моделей необходимо для анализа нагрузки на многомодальные системы. Многомодальные интерфейсы способны обрабатывать несколько естественных для человека способов ввода информации, каждый из которых требует определенных ресурсов для распознавания, обработки и передачи. Для проектирования таких систем необходимо строить оценки требуемых ресурсов. Эти оценки могут строиться на основании совместного распределения вероятностей количества событий каждого типа за определенный промежуток времени. В работе предлагается асимптотический подход оценки двумерного распределения вероятностей числа событий, наступивших в высокоинтенсивном маркированном марковски модулированном потоке за некоторое время. Предельное условие высокой интенсивности определяется ростом параметра интенсивности наступления событий в исследуемом потоке. Метод асимптотического анализа проводится в два этапа. На первом этапе находятся параметры, которые определяют асимптотические средние числа событий первого и второго типа, наступивших в высокоинтенсивном потоке. На втором этапе находятся параметры, определяющие асимптотические дисперсии и ковариацию числа событий первого и второго типов. Показано, что предельное распределение числа событий, наступивших в высокоинтенсивном маркированном ММРР, является двумерным гауссовским. Полученные формулы для нахождения распределения и его характеристик имеют достаточно простые выражения, неизвестные в которых находятся решением систем линейных уравнений.*

Ключевые слова: маркированный ММРР, метод асимптотического анализа, многомодальные системы.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00454, <https://rscf.ru/project/24-21-00454/>.

<sup>2</sup> Светлана Владимировна Пауль, д. ф.-м. н., доцент ([paulsv82@mail.ru](mailto:paulsv82@mail.ru)).

<sup>3</sup> Анатолий Андреевич Назаров, д.т.н., профессор ([nazarov.tsu@gmail.com](mailto:nazarov.tsu@gmail.com)).

<sup>4</sup> Иван Леонидович Лапатин, к. ф.-м. н. ([ilapatin@mail.ru](mailto:ilapatin@mail.ru)).

## **1. Введение**

Многомодальные системы [1, 4, 8], такие как картографические, медицинские, системы виртуальной реальности, робототехнические и управляемые системы, web-приложения, «умный дом», технологии интернета вещей, в настоящее время набирают стремительную популярность и становятся более сложными и многофункциональными. При проектировании многомодальных систем возникают проблемы эффективного взаимодействия человека с компьютером, решение которых позволяет разработать современные многомодальные интерфейсы, обеспечивающие привычные и естественные для пользователя способы взаимодействия. Они должны непрерывно интерпретировать поступающую информацию от различных визуальных, слуховых и тактильных каналов, реализовывать максимальную функциональность для достижения надежности в работе инфотелекоммуникационных систем.

Основным отличием многомодальных интерфейсов от профессиональных средств взаимодействия является применение способов коммуникации, характерных для общения между людьми. Задача разработки многомодальных интерфейсов возникла при появлении научной парадигмы окружающего интеллектуального пространства [9].

Для проектирования многомодальных интерфейсов необходимо прогнозировать нагрузку, которая на него поступает, чтобы обеспечить необходимое качество обработки запросов. Поскольку одновременно поступают запросы разных типов, которые требуют различных алгоритмов обработки и выделения разных ресурсов, необходимо исследовать характеристики их совместного поступления.

Современные потоки информации в многомодальных системах могут быть суперпозицией потоков речевых сообщений или звуковых сигналов, аудио-, видео-, мультимедиа информации, потоков интерактивных данных. Моделируя такие телекоммуникационные потоки с пакетным поступлением заявок или несколькими типами сообщений, иногда важно выделять (маркировать) необходимые входящие сообщения. Для модели-

рования таких неоднородных потоков используются маркированные потоки, самым общим из которых принято считать ВММАР (Batch Marked Markov Arrival Process) [2]. В случае моделирования коррелированных неоднородных потоков часто используют ММАР (Marked Markov Arrival Process) [11, 13]. ММАР являются обобщением МАР [6, 7, 12] на случай гетерогенных сообщений (разнородных по типу передаваемых данных). Такие потоки часто используются как входящие в системах массового обслуживания [10, 14, 15, 20, 21].

В работе [5] представлены два эквивалентных способа задания МАР: классический способ задания МАР, согласно определению Д. М. Лукантони и М. Ф. Ньютса, и эквивалентный способ задания МАР-потока, который предложил Д. Кокс, которым и воспользуемся в данной работе. Одним из наиболее распространенных частных случаев МАР является марковски модулированный пуассоновский поток событий (ММРР) [3, 16, 17, 18, 19].

## 2. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим один из классов маркированных МАР – маркированный ММРР, заданный генератором  $\mathbf{Q}_{dop} = [q_{vm}]$  инфинитезимальных характеристик цепи Маркова  $m(t) = 0, 1, \dots, M$  с непрерывным временем, управляющей потоком; диагональными матрицами  $\Lambda_{dop}^{(1)}$  и  $\Lambda_{dop}^{(2)}$  условных интенсивностей  $\lambda_m^{(1)}$  и  $\lambda_m^{(2)}$  наступления события в  $m$ -м состоянии двумерного маркированного ММРР, когда его управляющая цепь  $m(t)$  принимает значение  $m = 0, 1, \dots, M$  для первого и второго типа событий потока соответственно. Значения управляющего процесса  $m(t)$  также будем называть состояниями исследуемого двумерного маркированного ММРР.

Пусть в некоторый момент времени  $t_m$  управляющая цепь Маркова перейдет в состояние  $v$  или, что то же самое, двумерный маркированный ММРР сменит свое состояние на  $v$ . В этом состоянии поток будет находиться до момента  $t_{m+1}$ . Длина  $(t_{m+1} - t_m)$  интервала постоянства распределена по экспоненци-

альному закону с параметром  $-q_{vm}$ . В течение времени пребывания потока в состоянии  $v$  наступают события первого и второго типов с интенсивностями  $\lambda_m^{(1)}$  и  $\lambda_m^{(2)}$  соответственно. В момент времени  $t_{m+1}$  цепь Маркова (двумерный маркированный ММРР) перейдет в некоторое состояние  $m$ . Далее процедура повторяется для состояния  $m$  потока.

Обозначим распределение вероятностей

(1)  $P_m(n_1, n_2, t) = P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, m(t) = m\}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ , где  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  – число событий первого и второго типов соответственно, наступивших в двумерном маркированном ММРР за время  $t$ .

Трехмерный случайный процесс  $\{n_1(t), n_2(t), m(t)\}$  является марковским, что позволяет для распределения вероятностей (1) получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$(2) \quad \frac{\partial P_m(n_1, n_2, t)}{\partial t} = -(\lambda_m^{(1)} + \lambda_m^{(2)})P_m(n_1, n_2, t) + \lambda_m^{(1)}P_m(n_1 - 1, n_2, t) + \lambda_m^{(2)}P_m(n_1, n_2 - 1, t) + \sum_{v=0}^M P_v(n_1, n_2, t)q_{vm}.$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_m(u_1, u_2, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_2 n_2} P_m(n_1, n_2, t), \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Систему (2) перепишем в следующем виде:

$$(3) \quad \frac{\partial H_m(u_1, u_2, t)}{\partial t} = \left[ \lambda_m^{(1)}(e^{ju_1} - 1) + \lambda_m^{(2)}(e^{ju_2} - 1) \right] H_m(u_1, u_2, t) + \sum_{v=0}^M H_v(u_1, u_2, t)q_{vm}.$$

Обозначим вектор-строку

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, t) = \{H_1(u_1, u_2, t), H_2(u_1, u_2, t), \dots, H_M(u_1, u_2, t)\},$$

тогда систему уравнений (3) перепишем в матричном виде

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left\{ \mathbf{Q}_{dop} + (e^{ju_1} - 1)\mathbf{\Lambda}_{dop}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1)\mathbf{\Lambda}_{dop}^{(2)} \right\}.$$

Обозначим

$$(5) \quad \mathbf{H}(0, 0, t) = \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор-строка стационарного распределения вероятностей значений марковского процесса  $m(t)$ . Из (4) при  $u_1 = 0$  и  $u_2 = 0$  получим систему уравнений, которая совместно с условием нормировки однозначно определяет вектор  $\mathbf{r}$ :

$$(6) \quad \mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1.$$

Здесь  $\mathbf{e}$  – единичный вектор-столбец. Получим задачу Коши в виде

$$(7) \quad \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left\{ \mathbf{Q}_{dop} + (e^{ju_1} - 1) \mathbf{\Lambda}_{dop}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1) \mathbf{\Lambda}_{dop}^{(2)} \right\}, \\ \mathbf{H}(0, 0, t) = \mathbf{r},$$

решение которой, применяя метод матричной экспоненты, запишем в виде

$$(8) \quad \mathbf{H}(u_1, u_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ \left[ \mathbf{Q}_{dop} + (e^{ju_1} - 1) \mathbf{\Lambda}_{dop}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1) \mathbf{\Lambda}_{dop}^{(2)} \right] t \right\}.$$

Нахождение значений двумерной характеристической функции  $\mathbf{H}(u_1, u_2, t)$  при больших значениях интенсивностей входящего потока требует значительных затрат машинного времени, которое не всегда приводит к определенным результатам. Поэтому получим предельное при высокой интенсивности потока выражение для распределения вероятностей значений числа событий, наступивших в двумерном маркированном ММРР.

Умножив матричное уравнение (7) на единичный вектор-столбец  $\mathbf{e}$ , получим систему

$$(9) \quad \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left\{ \mathbf{Q}_{dop} + (e^{ju_1} - 1) \mathbf{\Lambda}_{dop}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1) \mathbf{\Lambda}_{dop}^{(2)} \right\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} \mathbf{e} = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left\{ (e^{ju_1} - 1) \mathbf{\Lambda}_{dop}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1) \mathbf{\Lambda}_{dop}^{(2)} \right\} \mathbf{e},$$

которая будет основной в дальнейших исследованиях.

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа событий первого и второго типов, наступивших в двумерном маркированном ММРР за время  $t$ .

### 3. Асимптотический анализ маркированного ММРР в условии большой интенсивности

Высокая интенсивность исследуемого потока обеспечивается за счет представления матриц интенсивностей  $\Lambda_{dop}^{(l)} = \Lambda^{(l)}N$ ,  $l = 1, 2$ ,  $Q_{dop} = QN$ , где  $\Lambda^{(l)}$   $Q$  – фиксированные матрицы,  $N$  – неограниченно возрастающий параметр. Величину  $N$  будем называть параметром высокой интенсивности двумерного маркированного ММРР, а предельное условие  $N \rightarrow \infty$  будем называть условием высокой интенсивности потока [5]. Заданный в таком предельном условии двумерный ММРР будем называть высокоинтенсивным. Проведем анализ высокоинтенсивного двумерного маркированного ММРР, а именно, получим предельное распределение вероятностей числа событий, наступивших в исследуемом потоке за время  $t$ .

Реализация метода асимптотического анализа проводится в два этапа. На первом этапе находятся параметры  $\kappa_1^{(1)}$  и  $\kappa_1^{(2)}$ , которые определяют асимптотические средние  $\kappa_1^{(1)}Nt$  и  $\kappa_1^{(2)}Nt$  числа событий первого и второго типа, наступивших в двумерном маркированном ММРР за время  $t$ .

При реализации второго этапа асимптотического анализа находятся параметры  $\kappa_2^{(1)}$ ,  $\kappa_2^{(2)}$  и  $\kappa_{12}$  определяющих асимптотические дисперсии числа событий  $\kappa_2^{(1)}Nt$  и  $\kappa_2^{(2)}Nt$  первого и второго типа, наступивших в двумерном маркированном ММРР за время  $t$ , и ковариацию  $\kappa_{12}Nt$  числа событий первого и второго типов. Показано, что предельное распределение числа событий, наступивших в высокоинтенсивном исследуемом потоке, является двумерным гауссовским.

Решим систему (9) методом асимптотического анализа в предельном условии высокой интенсивности потока.

#### 3.1. АСИМПТОТИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Введем обозначение  $\frac{1}{N} = \varepsilon$ , тогда систему (9) запишем в виде

$$(10) \quad \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left\{ \mathbf{Q} + (e^{ju_1} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\},$$

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} \mathbf{e} = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left\{ (e^{ju_1} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\} \mathbf{e},$$

и в системе (10) сделаем следующие замены

$$(11) \quad u_1 = \frac{w_1}{N} = \varepsilon w_1, \quad u_2 = \frac{w_2}{N} = \varepsilon w_2, \quad \mathbf{H}(u_1, u_2, t) = \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon).$$

Получим систему

$$(12) \quad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + (e^{j\varepsilon w_1} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(1)} + (e^{j\varepsilon w_2} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\},$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{e} = \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon) \left\{ (e^{j\varepsilon w_1} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(1)} + (e^{j\varepsilon w_2} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\} \mathbf{e}.$$

Решение  $\mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon)$  будем искать в классе вектор-функций, для которых существует конечный предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon) = \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t)$  и предел производной по  $t$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t)}{\partial t}.$$

**Теорема 1.** *Асимптотическое решение системы (12)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon) = \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t)$  в предельном условии высокой интенсивности потока имеет вид*

$$(13) \quad \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ \left( jw_1 \kappa_1^{(1)} + jw_2 \kappa_1^{(2)} \right) t \right\},$$

где вектор  $\mathbf{r}$  является решением системы уравнений (6), а величины  $\kappa_1^{(1)}$  и  $\kappa_1^{(2)}$  определяются равенствами

$$(14) \quad \kappa_1^{(1)} = \mathbf{r} \mathbf{\Lambda}_1^{(1)} \mathbf{e}, \quad \kappa_1^{(2)} = \mathbf{r} \mathbf{\Lambda}_1^{(2)} \mathbf{e}.$$

**Доказательство.** В (12) разложим экспоненты в ряд Тейлора, сгруппируем слагаемые порядка малости не выше  $\varepsilon$ , разделим на  $\varepsilon$  и устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Получим систему для предельных характеристических функций

$$(15) \quad \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t) \mathbf{Q} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t)}{\partial t} \mathbf{e} = j \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t) \left\{ w_1 \mathbf{\Lambda}^{(1)} + w_2 \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\} \mathbf{e}.$$

Решение системы (15) будем искать в виде

$$(16) \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t) = \mathbf{r}\Phi(w_1, w_2, t).$$

Получим систему

$$(17) \mathbf{r}\mathbf{Q} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_1(w_1, w_2, t) / \partial t}{\Phi_1(w_1, w_2, t)} = j \left\{ w_1 \mathbf{r}\Lambda^{(1)} + w_2 \mathbf{r}\Lambda^{(2)} \right\} \mathbf{e}.$$

Так как отношение  $\frac{\partial \Phi_1(w_1, w_2, t) / \partial t}{\Phi_1(w_1, w_2, t)}$  не зависит от  $t$ , то

функция  $\Phi(w_1, w_2, t)$  имеет вид

$$(18) \Phi(w_1, w_2, t) = \exp \left\{ \left( jw_1 \kappa_1^{(1)} + jw_2 \kappa_1^{(2)} \right) t \right\},$$

где ввели обозначения

$$(19) \kappa_1^{(1)} = \mathbf{r}\Lambda_1^{(1)} \mathbf{e}, \quad \kappa_1^{(2)} = \mathbf{r}\Lambda_1^{(2)} \mathbf{e}.$$

Подставляя полученное решение (18) в (16), доказано, что выполняется равенство (13).  $\square$

В силу замены (11)  $\mathbf{H}(u_1, u_2, t) = \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t, \varepsilon)$  и найденного в (16) и (18) предельного значения  $\mathbf{F}_1(w_1, w_2, t)$  можно записать приближенное равенство для  $\mathbf{H}(u_1, u_2, t)$ :

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ ju_1 \kappa_1^{(1)} Nt + ju_2 \kappa_1^{(2)} Nt \right\}.$$

Обозначим предельную характеристическую функцию  $h(u_1, u_2, t) = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \mathbf{e}$  числа событий первого и второго типа, наступивших в двумерном маркированном ММРР за время  $t$

$$h(u_1, u_2, t) = \exp \left\{ ju_1 \kappa_1^{(1)} Nt + ju_2 \kappa_1^{(2)} Nt \right\}.$$

Доказанная теорема 1 определяет лишь асимптотические средние значения  $\kappa_1^{(1)} Nt$  и  $\kappa_1^{(2)} Nt$  первого и второго типа событий, наступивших в двумерном маркированном ММРР за время  $t$  в условии высокой интенсивности наступления событий.

Для построения распределения вероятностей числа событий, наступивших в исследуемом потоке, построим асимптотику второго порядка.

### 3.2. АСИМПТОТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

На втором этапе реализации метода асимптотического анализа учитывая полученный вид характеристической функции  $h(u_1, u_2, t)$ , в системе (10) выполним замену



$$(20) \mathbf{H}(u_1, u_2, t) = e^{(ju_1 N \kappa_1^{(1)} + ju_2 N \kappa_1^{(2)})t} \mathbf{H}_2(u_1, u_2, t).$$

Получим систему уравнений

$$(21) \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, u_2, t)}{\partial t} + (ju_1 \kappa_1^{(1)} + ju_2 \kappa_1^{(2)}) \mathbf{H}_2(u_1, u_2, t) = \\ = \mathbf{H}_2(u_1, u_2, t) \left\{ \mathbf{Q} + (e^{ju_1} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\}, \\ \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, u_2, t)}{\partial t} \mathbf{e} + (ju_1 \kappa_1^{(1)} + ju_2 \kappa_1^{(2)}) \mathbf{H}_2(u_1, u_2, t) \mathbf{e} = \\ = \mathbf{H}_2(u_1, u_2, t) \left\{ (e^{ju_1} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(1)} + (e^{ju_2} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\} \mathbf{e}.$$

Обозначим  $\frac{1}{N} = \varepsilon^2$ , в системе (21) выполним замены

$$(22) u_1 = \frac{w_1}{\sqrt{N}} = \varepsilon w_1, \quad u_2 = \frac{w_2}{\sqrt{N}} = \varepsilon w_2,$$

$$\mathbf{H}_2(u_1, u_2, t) = \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon).$$

Получим систему для характеристических функций

$$(23) \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} + (j\varepsilon w_1 \kappa_1^{(1)} + j\varepsilon w_2 \kappa_1^{(2)}) \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon) = \\ = \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + (e^{j\varepsilon w_1} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(1)} + (e^{j\varepsilon w_2} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{e} + (j\varepsilon w_1 \kappa_1^{(1)} + j\varepsilon w_2 \kappa_1^{(2)}) \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon) \mathbf{e} = \\ = \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon) \left\{ (e^{j\varepsilon w_1} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(1)} + (e^{j\varepsilon w_2} - 1) \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right\} \mathbf{e}.$$

Решение  $\mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon)$  будем искать в классе вектор-функций, для которых существует конечный предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon) = \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t)$  и предел производной по  $t$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t)}{\partial t}.$$

**Теорема 2.** Асимптотическое решение системы (23)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon) = \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t)$  в предельном условии высокой интенсивности потока имеет вид

$$(24) \mathbf{F}_1(w_1, w_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{(jw_1)^2}{2} \kappa_2^{(1)} t + \frac{(jw_2)^2}{2} \kappa_2^{(2)} t + jw_1 \cdot jw_2 \cdot \kappa_{12} t \right\},$$

где вектор  $\mathbf{r}$  является решением системы уравнений (6), а величины  $\kappa_2^{(1)}$ ,  $\kappa_2^{(2)}$  и  $\kappa_{12}$  определяются равенствами

$$(25) \begin{aligned} \kappa_2^{(1)} &= 2\mathbf{g}_1 \mathbf{\Lambda}^{(1)} \mathbf{e} + \kappa_1^{(1)}, \\ \kappa_2^{(2)} &= 2\mathbf{g}_2 \mathbf{\Lambda}^{(2)} \mathbf{e} + \kappa_1^{(2)}, \\ \kappa_{12} &= \mathbf{g}_1 \mathbf{\Lambda}^{(2)} \mathbf{e} + \mathbf{g}_2 \mathbf{\Lambda}^{(1)} \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Здесь вектор-строки  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  являются решениями неоднородных систем уравнений

$$(26) \begin{aligned} \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} &= \mathbf{r} \left( \kappa_1^{(1)} \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right), \\ \mathbf{g}_1 \mathbf{e} &= 0. \end{aligned}$$

$$(27) \begin{aligned} \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} &= \mathbf{r} \left( \kappa_1^{(2)} \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right), \\ \mathbf{g}_2 \mathbf{e} &= 0. \end{aligned}$$

**Доказательство.** В систему (23) подставим следующее разложение

$$(28) \mathbf{F}_2(w_1, w_2, t, \varepsilon) = \Phi_2(w_1, w_2, t) \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w_1 \mathbf{f}_1 + j\varepsilon w_2 \mathbf{f}_2 \} + O(\varepsilon^2),$$

и, разложив экспоненту в ряд Тейлора, учитывая (19), получим

$$(29) \left( w_1 \kappa_1^{(1)} + w_2 \kappa_1^{(2)} \right) \mathbf{r} = w_1 \mathbf{r} \mathbf{\Lambda}^{(1)} + w_2 \mathbf{r} \mathbf{\Lambda}^{(2)} + w_1 \mathbf{f}_1 \mathbf{Q} + w_2 \mathbf{f}_2 \mathbf{Q} + \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t)}{\partial t} &= \frac{(jw_1)^2}{2} \left( 2\mathbf{f}_1 \mathbf{\Lambda}^{(1)} \mathbf{e} - 2\kappa_1^{(1)} \mathbf{f}_1 \mathbf{e} + \kappa_1^{(1)} \right) + \\ &+ \frac{(jw_2)^2}{2} \left( 2\mathbf{f}_2 \mathbf{\Lambda}^{(2)} \mathbf{e} - 2\kappa_1^{(2)} \mathbf{f}_2 \mathbf{e} + \kappa_1^{(2)} \right) + \\ &+ jw_1 jw_2 \left( \mathbf{f}_1 \mathbf{\Lambda}^{(2)} \mathbf{e} + \mathbf{f}_2 \mathbf{\Lambda}^{(1)} \mathbf{e} - \kappa_1^{(1)} \mathbf{f}_2 \mathbf{e} - \kappa_1^{(2)} \mathbf{f}_1 \mathbf{e} \right) + \frac{O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в последней системе (29), получим

$$(30) jw_1 \left( \mathbf{r} \left( \mathbf{\Lambda}^{(1)} - \kappa_1^{(1)} \right) + \mathbf{f}_1 \mathbf{Q} \right) + jw_2 \left( \mathbf{r} \left( \mathbf{\Lambda}^{(2)} - \kappa_1^{(2)} \right) + \mathbf{f}_2 \mathbf{Q} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t) / \partial t}{\Phi_2(w_1, w_2, t)} &= \frac{(jw_1)^2}{2} (2\mathbf{f}_1 \Lambda^{(1)} \mathbf{e} - 2\kappa_1^{(1)} \mathbf{f}_1 \mathbf{e} + \kappa_1^{(1)}) + \\ &+ \frac{(jw_2)^2}{2} (2\mathbf{f}_2 \Lambda^{(2)} \mathbf{e} - 2\kappa_1^{(2)} \mathbf{f}_2 \mathbf{e} + \kappa_1^{(2)}) + \\ &+ jw_1 jw_2 (\mathbf{f}_1 \Lambda^{(2)} \mathbf{e} + \mathbf{f}_2 \Lambda^{(1)} \mathbf{e} - \kappa_1^{(1)} \mathbf{f}_2 \mathbf{e} - \kappa_1^{(2)} \mathbf{f}_1 \mathbf{e}). \end{aligned}$$

Из первого уравнения системы (30) получим два неоднородных матричных уравнения, определяющих векторы  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$

$$(31) \quad \mathbf{f}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{r} (\kappa_1^{(1)} \mathbf{I} - \Lambda^{(1)}),$$

$$(32) \quad \mathbf{f}_2 \mathbf{Q} = \mathbf{r} (\kappa_1^{(2)} \mathbf{I} - \Lambda^{(2)}).$$

Системы (31) и (32) являются неоднородными системами линейных алгебраических уравнений для  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$ . Эти системы совместны и имеют множество решений, поскольку определитель матрицы коэффициентов системы равен 0, а ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов.

Система  $\mathbf{rQ} = 0$  является однородной системой для неоднородных систем (31) и (32). Тогда решения систем (31) и (32) можно записать в виде

$$(33) \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{g}_1,$$

$$(34) \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{g}_2.$$

Здесь  $C$  – константа, вектор вероятностей  $\mathbf{r}$  определен выше, а векторы  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  являются частными решениями неоднородных систем (31) и (32), удовлетворяющих дополнительным условиям  $\mathbf{g}_1 \mathbf{e} = 0$ ,  $\mathbf{g}_2 \mathbf{e} = 0$ . Подставим решения (33) и (34) в систему (30):

$$(35) \quad \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{r} (\kappa_1^{(1)} \mathbf{I} - \Lambda^{(1)}),$$

$$\mathbf{g}_2 \mathbf{Q} = \mathbf{r} (\kappa_1^{(2)} \mathbf{I} - \Lambda^{(2)}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t) / \partial t}{\Phi_2(w_1, w_2, t)} &= \frac{(jw_1)^2}{2} (2\mathbf{g}_1 \Lambda^{(1)} \mathbf{e} + \kappa_1^{(1)}) + \\ &+ \frac{(jw_2)^2}{2} (2\mathbf{g}_2 \Lambda^{(2)} \mathbf{e} + \kappa_1^{(2)}) + jw_1 jw_2 (\mathbf{g}_1 \Lambda^{(2)} \mathbf{e} + \mathbf{g}_2 \Lambda^{(1)} \mathbf{e}). \end{aligned}$$

Так как отношение  $\frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t) / \partial t}{\Phi_2(w_1, w_2, t)}$  не зависит от  $t$ , то скалярную функцию  $\Phi_2(w_1, w_2, t)$  определим в виде

$$(36) \quad \Phi_2(w_1, w_2, t) = \exp \left\{ \frac{(jw_1)^2}{2} \kappa_2^{(1)} t + \frac{(jw_2)^2}{2} \kappa_2^{(2)} t + jw_1 \cdot jw_2 \cdot \kappa_{12} t \right\},$$

Тогда

$$\frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t) / \partial t}{\Phi_2(w_1, w_2, t)} = \frac{(jw_1)^2}{2} \kappa_2^{(1)} + \frac{(jw_2)^2}{2} \kappa_2^{(2)} + jw_1 \cdot jw_2 \cdot \kappa_{12}.$$

Тогда систему (35) можно переписать в виде совокупности систем

$$(37) \quad \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{r} \left( \kappa_1^{(1)} \mathbf{I} - \Lambda^{(1)} \right),$$

$$\mathbf{g}_1 \mathbf{e} = 0.$$

$$(38) \quad \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} = \mathbf{r} \left( \kappa_1^{(2)} \mathbf{I} - \Lambda^{(2)} \right),$$

$$\mathbf{g}_2 \mathbf{e} = 0,$$

где

$$(39) \quad \kappa_2^{(1)} = 2\mathbf{g}_1 \Lambda^{(1)} \mathbf{e} + \kappa_1^{(1)},$$

$$\kappa_2^{(2)} = 2\mathbf{g}_2 \Lambda^{(2)} \mathbf{e} + \kappa_1^{(2)},$$

$$\kappa_{12} = \mathbf{g}_1 \Lambda^{(2)} \mathbf{e} + \mathbf{g}_2 \Lambda^{(1)} \mathbf{e}.$$

Решив системы (37) и (38), найдем векторы  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$ , которые подставим в выражения (39) для  $\kappa_2^{(1)}$ ,  $\kappa_2^{(2)}$  и  $\kappa_{12}$ . Полученные выражения полностью определяют предельную функцию  $\Phi(w_1, w_2, t)$  (36), которая полностью определяет предельную функцию (24), учитывая разложение (28).  $\square$

Возвращаясь к вектор-функции  $\mathbf{H}_2(u_1, u_2, t)$ , в силу замен (22) можно записать

$$\mathbf{H}_2(u_1, u_2, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{(ju_1)^2}{2} \kappa_2^{(1)} Nt + \frac{(ju_2)^2}{2} \kappa_2^{(2)} Nt + ju_1 \cdot ju_2 \cdot \kappa_{12} Nt \right\},$$

поэтому для вектора-функции  $\mathbf{H}(u_1, u_2, t)$  из (20) получим приближенное равенство

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ ju_1 \kappa_1^{(1)} Nt + ju_2 \kappa_1^{(2)} Nt + \frac{(ju_1)^2}{2} \kappa_2^{(1)} Nt + \frac{(ju_2)^2}{2} \kappa_2^{(2)} Nt + ju_1 \cdot ju_2 \cdot \kappa_{12} Nt \right\}.$$

Учитывая ранее введенное обозначение характеристической функции  $h(u_1, u_2, t) = \mathbf{H}(u_1, u_2, t)\mathbf{e}$  числа событий, наступивших в двумерном маркированном ММРР, запишем предельную при достаточно больших  $N$  характеристическую функцию

$$(40) \quad h(u_1, u_2, t) \approx \exp \left\{ ju_1 \kappa_1^{(1)} Nt + ju_2 \kappa_1^{(2)} Nt + \frac{(ju_1)^2}{2} \kappa_2^{(1)} Nt + \frac{(ju_2)^2}{2} \kappa_2^{(2)} Nt + ju_1 \cdot ju_2 \cdot \kappa_{12} Nt \right\}.$$

Таким образом получили, что распределение вероятностей числа заявок, наступивших в двумерном маркированном ММРР, можно аппроксимировать двумерным нормальным распределением, которое определяется асимптотическими средними  $\kappa_1^{(1)} Nt$  и  $\kappa_1^{(2)} Nt$ , дисперсиями  $\kappa_2^{(1)} Nt$  и  $\kappa_2^{(2)} Nt$  и ковариацией  $\kappa_{12} Nt$  числа событий первого и второго типов, наступивших в двумерном маркированном ММРР за время  $t$ .

#### 4. Численный пример

Опишем алгоритм построения аппроксимации распределения вероятностей числа заявок, наступивших в высокоинтенсивном двумерном маркированном ММРР.

**Алгоритм построения гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа заявок, наступивших в высокоинтенсивном двумерном маркированном ММРР.**

1. Задание значений параметров потока: элементов матриц  $\mathbf{Q}$ ,  $\Lambda^{(1)}$ ,  $\Lambda^{(2)}$ , значение параметра  $N$ .

2. Нахождение стационарного распределения вероятностей  $\mathbf{r}$  управляющего ММРР-потокком процесса  $m(t)$ , которое определяется системой уравнений  $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0$ ,  $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$ .

3. Нахождение параметров  $\kappa_1^{(1)}$ ,  $\kappa_1^{(2)}$  по формулам (14).

4. Нахождение векторов  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$  как решение матричных систем уравнений (26) и (27).

5. Нахождение параметров  $\kappa_2^{(1)}$ ,  $\kappa_2^{(2)}$ ,  $\kappa_{12}$  по формулам (25).

6. Построение двумерной гауссовской плотности  $p(x_1, x_2)$  распределения вероятностей числа заявок, наступивших в высокоинтенсивном двумерном маркированном ММРР с математическими ожиданиями  $\kappa_1^{(1)} Nt$  и  $\kappa_1^{(2)} Nt$ , дисперсиями  $\kappa_2^{(1)} Nt$  и  $\kappa_2^{(2)} Nt$ , ковариацией  $\kappa_{12} Nt$  числа событий первого и второго типов.

$$(41) \quad p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\kappa_2^{(1)} Nt \cdot \kappa_2^{(2)} Nt \cdot (1 - (\kappa_{12} Nt)^2)}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - (\kappa_{12} Nt)^2)} \times \left[ \frac{(x_1 - \kappa_1^{(1)} Nt)^2}{\kappa_2^{(1)} Nt} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\kappa_{12} Nt \frac{(x_1 - \kappa_1^{(2)} Nt)(x_2 - \kappa_2^{(2)} Nt)}{\sqrt{\kappa_2^{(1)} Nt \cdot \kappa_2^{(2)} Nt}} + \frac{(x_2 - \kappa_1^{(2)} Nt)^2}{\kappa_2^{(2)} Nt} \right] \right\}.$$

7. Построение аппроксимации двумерного дискретного распределения вероятностей  $P(n_1, n_2)$  числа событий, наступивших в высокоинтенсивном двумерном маркированном ММРР, по формуле

$$(42) \quad P(n_1, n_2) = \frac{p(n_1, n_2)}{\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} p(n_1, n_2)}.$$

Для предложенной модели двумерного маркированного ММРР положим

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & -0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & -0,7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix},$$

$$N = 30, \quad t = 1$$

Решая систему  $\mathbf{rQ} = 0$ ,  $\mathbf{re} = 1$ , получим  
 $\mathbf{r} = \{0,197; 0,444; 0,359\}$ .

Для рассматриваемых исходных данных  $\mathbf{Q}$ ,  $\Lambda^{(1)}$ ,  $\Lambda^{(2)}$ ,  $N$ ,  $t$  значения  $\kappa_1^{(1)}$ ,  $\kappa_1^{(2)}$ ,  $\kappa_2^{(1)}$ ,  $\kappa_2^{(2)}$ ,  $\kappa_{12}$  составляют

$$\kappa_1^{(1)} = 2,162, \quad \kappa_1^{(2)} = 0,175, \quad \kappa_2^{(1)} = 3,001, \quad \kappa_2^{(2)} = 0,272, \quad \kappa_{12} = -0,226.$$

График аппроксимаций дискретного распределения вероятностей  $P(n_1, n_2)$  числа событий, наступивших в высокоинтенсивном двумерном маркированном ММРР, представлен на рис. 1.

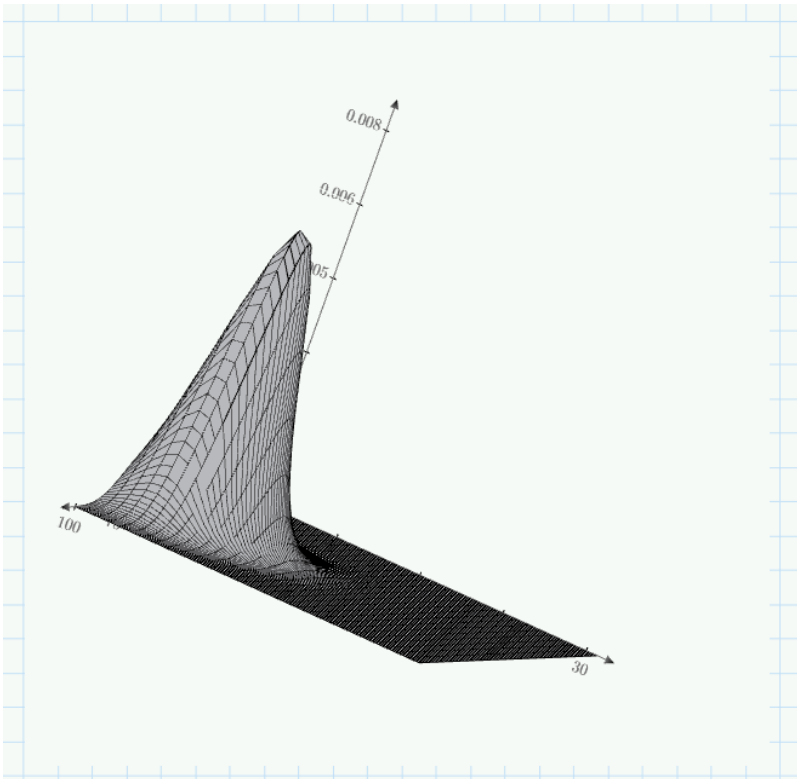


Рис. 1. Двумерная гауссовская аппроксимация распределения вероятностей  $P(n_1, n_2)$  числа заявок, наступивших в высокоинтенсивном двумерном маркированном ММРР

## 5. Заключение

На основе реализации метода асимптотического анализа в предельном условии высокой интенсивности наступления событий и введения неограниченно возрастающего параметра  $N$  построена гауссовская двумерная аппроксимация распределения вероятностей числа событий, наступивших в высокоинтенсивном двумерном маркированном ММРР за время  $t$ . При этом параметры гауссовской аппроксимации находятся с использованием достаточно простых математических процедур, без применения сложных преобразований, требующих многократного двумерного интегрирования. Для целей исследования нагрузки на многомодальные системы важно, что мы получаем именно оценку двумерного распределения, т.е. можем учитывать взаимосвязь нагрузки одного и второго типа. А относительная простота полученных формул позволяет рассчитывать эту зависимость для разных соотношений параметров потока и оценивать чувствительность общей нагрузки от них.

### Литература

1. БАСОВ О.О., ПАКУЛОВА Е.А., САИТОВ И.А. *Методологические основы построения интеллектуальных инфокоммуникационных систем: монография*. – Орёл : Академия ФСО России, 2020. – 272 с.
2. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНОК В.И. *Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях*. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018. – 564 с.
3. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания* : учебное пособие. 4-е изд. – М.: изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
4. КАГИРОВ И.А., РЮМИН Д.А., АКСЁНОВ А.А. и др. *Мультимедийная база данных жестов русского жестового языка в трехмерном формате // Вопросы языкознания*. – 2020. – №1 – С. 104–123.



5. МОИСЕЕВ А.Н., НАЗАРОВ А.А. *Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания*. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.
6. НАУМОВ В.А., САМУЙЛОВ К.Е. *О марковских и рациональных потоках случайных событий. I* // Информатика и ее применение. – 2020. – Т. 14, вып. 3. – С. 13–19.
7. НАУМОВ В.А., САМУЙЛОВ К.Е. *О марковских и рациональных потоках случайных событий. II* // Информатика и ее применение. – 2020. – Т. 14, вып. 4. – С. 37–46.
8. РОНЖИН А.Л., КАРПОВ А.А. *Проектирование интерактивных приложений с многомодальным интерфейсом* // Доклады ТУСУРа. – 2010 – №1(21), часть 1 – С. 124–127.
9. ЮСУПОВ Р.М., РОНЖИН А.Л. *От умных приборов к интеллектуальному пространству* // Вестник Российской академии наук. – 2010. – Т. 80, №1. – С. 45–51.
10. BAI X., JIN S. *Performance analysis of an energy-saving strategy in cloud data centres based on a MMAP[K]/M[K]/N<sub>1</sub> + N<sub>2</sub> non-preemptive priority queue* // Future Gener. Comput. Syst. – 2022. – No. 136. – P. 205–220.
11. DUDIN A.N., DUDIN S.A., DUDINA O.S. *Randomized Threshold Strategy for Providing Flexible Priority in Multi-Server Queueing System with a Marked Markov Arrival Process and Phase-Type Distribution of Service Time* // Mathematics. – 2023. – No. 11. – P. 2669.
12. DUDIN A.N., KLIMENOK V.I., VISHNEVSKY V.M. *The Theory of Queueing Systems with Correlated Flows*. – Springer Nature: Cham, Switzerland, 2020. – 410 p.
13. HE Q.M. *Queues with marked customers* // Adv. Appl. Probab. – 1996. – No. 28. – P. 567–587.
14. HE Q.M. *Fundamentals of Matrix-Analytic Methods*. – Springer: New York, NY, USA, 2014. – 349 p.
15. KLIMENOK V., DUDIN A., VISHNEVSKY V. *Priority multi-server queueing system with heterogeneous customers* // Mathematics. – 2020. – No. 8. – P. 1501.
16. NAUMOV V., GAIDAMAKA Y., YARKINA N. et al. *Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecom-*

- munication Systems.* – Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2021. – 305 p.
17. NAZAROV A., MOISEEV A., LAPATIN I. et al. *Real Waiting Time in Single-Server Resource Queue with Markovian Arrival Process* // *Communications in Computer and Information Science.* – 2023. – Vol. 1803. – P. 116–125.
  18. NAZAROV A., PAUL S., PHUNG-DUC T. et al. *Analysis of Tandem Retrial Queue with Common Orbit and MMPP Incoming Flow* // *Lecture Notes in Computer Science.* – 2022. – Vol. 13766. – P 270–283.
  19. NAZAROV A., PHUNG-DUC T., PAUL S. et al. *Two-Way Communication Retrial Queue with Markov Modulated Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls* // *Communications in Computer and Information Science.* – 2022. – Vol. 1748. – P. 370–381.
  20. RAJ R., JAIN V. *Optimization of traffic control in MMAP[2]/PH[2]/S priority queueing model with PH retrial times and the preemptive repeat policy* // *J. Ind. Manag. Optim.* – 2023. – No. 19. – P 2333–2353.
  21. SAMOUYLOV K., DUDINA O., DUDIN A. *Analysis of Multi-Server Queueing System with Flexible Priorities* // *Mathematics.* – 2023. – No. 11. – P. 1040.

## STUDY OF TWO-DIMENSIONAL MARKED MMPP UNDER THE HIGH RATE LIMIT CONDITION

**Svetlana Paul**, Tomsk State University, Tomsk, Doctor of Science, professor (paulsv82@mail.ru)

**Anatoly Nazarov**, Tomsk State University, Tomsk, Doctor of Science, professor (Nazarov.tsu@gmail.com)

**Ivan Lapatin**, Tomsk State University, Tomsk, Cand.Sc., associate professor (ilapatin@mail.ru).

*Abstract: This paper considers a mathematical model of a heterogeneous flow in the form of a two-dimensional marked MMPP. The study of such models is necessary to analyze the load on multimodal systems. Multimodal interfaces are capable of processing multiple natural human input methods, each of which requires specific resources for recognition, processing and transmission. To design such systems, it is*

*necessary to estimate the required resources. These estimates can be based on the joint probability distribution of the number of calls of each type over a certain period of time. The paper proposes an asymptotic method to estimating the two-dimensional probability distribution of the number of arrivals in a high-intensity marked Markov Modulated Process. The limiting condition of high intensity is determined by the parameter of the rate of arrivals in the process over a certain time. The asymptotic analysis method is carried out in two stages. At the first stage, the parameters are obtained that determine the asymptotic mean numbers of arrivals of the first and second types that occurred in the high-intensity flow. At the second stage, the parameters are found that determine the asymptotic variances and the covariance of the number of events of the first and second types. It is shown that the limiting distribution of the number of events that occurred in a high-intensity marked MMPP is a two-dimensional Gaussian. The resulting formulas for finding the distribution and its characteristics have fairly simple expressions, the unknowns in which are found by solving systems of linear equations.*

Keywords: Marked MMPP, asymptotic analysis method, multimodal system.

УДК 519.872

ББК 22.171

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

*Поступила в редакцию 03.06.2024.*

*Опубликована 30.11.2024.*