

## РЕАЛИЗАЦИЯ КОМБИНИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ВХОДОМ

Краснов Д. В.<sup>1</sup>, Антипов А. С.<sup>2</sup>  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Объектом управления является однозвенный манипулятор с гибким шарниром, функционирующий в условиях параметрической неопределенности и воздействия внешних неконтролируемых возмущений. Динамика токового контура не учитывается. В качестве управления рассматривается ток якоря двигателя постоянного тока, который может быть пересчитан в крутящий момент, приложенный к валу редуктора. Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей заданные изменения углового положения манипулятора в следующих нетипичных предположениях: 1) измерениям доступно только текущее отклонение положения манипулятора от заданного сигнала (ошибка слежения); 2) множитель перед управлением точно не известен. Первый фактор предписывает переход к блочной форме «вход – выход» относительно ошибки слежения для решения задачи наблюдения и синтеза динамической обратной связи на основе смешанных переменных (комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных). К основным полученным научным результатам относится, во-первых, метод проектирования наблюдателя смешанных переменных минимально возможной размерности с кусочно-линейной коррекцией на основе измерений ошибки слежения. Для упрощения настройки параметров наблюдателя в одном алгоритме одновременно используются и принципы построения наблюдателя состояния, и дифференциатора внешних сигналов. Вторым основным результатом – метод формирования комбинированного управления с компенсацией согласованных возмущений в условиях неопределенного множителя перед управлением. Приведены результаты численного моделирования, которые демонстрируют робастность замкнутой системы и гарантированную стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью при изменении внешних возмущений, задающих воздействия и неопределенных параметров в допустимых диапазонах.

Ключевые слова: однозвенный манипулятор с гибким шарниром, слежение, внешние возмущения, неопределенный вход, комбинированное управление, наблюдатель смешанных переменных.

---

<sup>1</sup> Дмитрий Валентинович Краснов, н.с. (dim93kr@mail.ru).

<sup>2</sup> Алексей Семенович Антипов, к.т.н. (scholess18@mail.ru).

## 1. Введение

Задачи управления механическими системами в разных постановках и предположениях рассматривались в рамках различных подходов, прежде всего с применением классических методов теории автоматического управления, таких как оптимальное управление [7, 12], построение ПИ- и ПИД- регуляторов [9, 13]. В настоящее время популярность приобрели нечеткие регуляторы и методы нейросетевого управления [11, 17]. Лучшая производительность, как правило, достигается при сочетании различных подходов.

Основные усилия специалистов направлены на разработку робастного и адаптивного управления в условиях параметрической неопределенности модели объекта и при воздействии на него внешних неконтролируемых возмущений. Отдельную проблему составляют задачи построения наблюдателей состояния, когда по разным причинам нельзя установить полный комплект датчиков [2]. Часто указанные проблемы рассматриваются по отдельности, когда к системе с параметрическими или внешними возмущениями конкретного типа можно применить известные подходы [10, 14, 20].

В данной работе на примере механического объекта управления с одним входом и одним выходом рассматривается проблема синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание выходной переменной заданного сигнала в условиях параметрических и внешних (согласованных и несогласованных) возмущений, а также измерения только ошибки слежения. Цель состоит в разработке простого в вычислительной реализации робастного регулятора с минимальным расширением динамического порядка замкнутой системы. С этой целью модель объекта управления приводится к блочной форме «вход – выход» относительно ошибки слежения и смешанных переменных (комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных) [1]. В этой форме все неопределенности становятся согласованными, т.е. действуют по одному каналу с управлением. Однако множитель перед управлением точно

не известен, что является препятствием для реализации желаемого закона управления и компенсации возмущений.

Научная новизна предлагаемого подхода заключается в том, что, во-первых, проблемы оценивания неизвестных параметров, внешних возмущений и неизмеряемых переменных состояния рассматриваются в комплексе и сводятся к наблюдению смешанных переменных с помощью редуцированного наблюдателя состояния. Для упрощения его настройки в одном алгоритме одновременно реализуются принципы построения наблюдателя состояния и дифференциатора внешних сигналов. Во-вторых, управляющее воздействие представлено в виде суммы двух слагаемых с номинальным (известным) коэффициентом усиления и неопределенным множителем. Сформулированы условия, при которых второе слагаемое может быть включено в состав смешанной переменной, которая описывает согласованные возмущения. Этот прием позволил синтезировать наблюдатель смешанных переменных и реализовать комбинированное управление с простой линейной составляющей, стабилизирующей ошибку слежения. Вторая составляющая комбинированного управления, которая содержит оценку согласованного возмущения, полученную с помощью наблюдателя, компенсирует его воздействие и обеспечивает инвариантность к возмущениям в координатном базисе смешанных переменных.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится описание математической модели объекта управления, ее особенностей и выдвигаемых предположений, формулируется постановка задачи. В разделе 3 описывается преобразование исходной модели к блочной форме «вход – выход» относительно ошибки слежения, на основе которой в разделе 4 синтезируется редуцированный наблюдатель смешанных переменных, а в разделе 5 – выполняется синтез комбинированного управления. В разделе 6 приведены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов.

## 2. Описание модели объекта управления. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается однозвенный манипулятор, эластично соединенный с валом редуктора, динамика токового контура не учитывается. Математическая модель включает четыре связанных обыкновенных дифференциальных уравнения [16]:

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}(x_3 - x_1) - a_{22} \sin(x_1) + f_2(t),$$

$$(2) \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -a_{43}(x_3 - x_1) - a_{44}x_4 + f_4(t) + a_{45}u,$$

где  $x_1, x_2 \in R$  и  $x_3, x_4 \in R$  – угловые положения и скорости звена манипулятора и вала редуктора соответственно;  $a_{ij}$  – положительные конструктивные коэффициенты [5];  $f_2(t), f_4(t)$  – соответственно несогласованные и согласованные (т.е. действующие по одному каналу с управлением) внешние неконтролируемые возмущения;  $u$  – ток якоря, который рассматривается как управляющее воздействие.

Рассматривается задача отслеживания выходной переменной  $x_1(t)$  заданного сигнала  $g(t)$  в следующих предположениях:

– прямым измерениям доступна только ошибка слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ , шумы в измерениях отсутствуют; датчик положения имеет высокое разрешение;

– задание  $g(t)$  является допустимым и гладким, его производные ограничены, но неизвестны;

– внешние возмущения  $f_2(t), f_4(t)$  и конструктивные коэффициенты  $a_{ij}$  точно не известны и могут меняться в известных диапазонах; все функции подсистемы (1) – гладкие, в подсистеме (2) допускаются негладкие;

– система (1)–(2) при отсутствии внешних возмущений ( $f_2(t) \equiv 0, f_4(t) \equiv 0$ ) является управляемой и наблюдаемой относительно выходной переменной  $x_1(t)$  во всех диапазонах неопределенных параметров, в частности, при всех  $a_{21} > 0, a_{45} > 0$ . Произведение этих коэффициентов представимо в виде

$$(3) \quad b = a_{21}a_{45} = b_0 + \hat{b} > 0, \quad b_0 > 0,$$

где  $b_0$  – номинальное (известное) значение.

В сделанных предположениях ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей в замкнутой системе стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью в установившемся режиме:

$$(4) \quad |e_1(t)| = |x_1(t) - g(t)| \leq \delta, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Данная задача включает решение следующих подзадач: 1) приведение системы (1)–(2) к блочной форме «вход – выход» относительно ошибки слежения и смешанных переменных с согласованным возмущением и определенным входом; 2) построение редуцированного наблюдателя для оценивания смешанных переменных и согласованного возмущения по измерениям ошибки слежения; 3) синтез комбинированного управления по полученным оценкам, которое линеаризует замкнутую систему.

### 3. Переход в координатный базис смешанных переменных

В сделанных предположениях для системы (1)–(2) существует невырожденная замена переменных

$$(5) \quad \begin{aligned} e_1 &= x_1 - g, \quad e_2 = x_2 - \dot{g} + k_1 e_1, \\ e_3 &= a_{21} x_3 + w_2 + k_2 e_2, \quad e_4 = a_{21} x_4 + w_3 + k_3 e_3, \end{aligned}$$

где  $e_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , – смешанные переменные, они являются комбинацией переменных состояния системы (1)–(2), внешних возмущений и их производных, а также производных задающих воздействий,

$$w_2 = -a_{21} x_1 - a_{22} \sin(x_1) + f_2(t) - \ddot{g} + k_1(x_2 - \dot{g}),$$

$$w_3 = \frac{d}{dt} w_2 + k_2(a_{21} x_3 + w_2).$$

После выполнения замены переменных (5) система (1)–(2) будет представлена в блочной форме «вход – выход» с замкнутыми линейными локальными связями [1], входом (управлением) с определенным коэффициентом  $b_0$  (3) и согласованным возмущением:

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -k_2 e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 &= -k_3 e_3 + e_4, \quad \dot{e}_4 = b_0 u + e_5, \quad k_i = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

В качестве согласованного возмущения выступает смешанная переменная

$$e_5 = a_{21}(-a_{43}(x_3 - x_1) - a_{44}x_4 + f_4(t)) + \\ + \frac{d}{dt}w_3 + k_3(a_{21}x_4 + w_3) + \hat{b}u,$$

которая зависит от параметров и переменных состояния системы (1)–(2), внешних воздействий и их производных

$$\dot{f}_2(t), \ddot{f}_2(t), f_4(t), g(t), g^{(i)}(t), i = \overline{1,4}.$$

Сюда включена также часть управления с неопределенным множителем  $\hat{b}u$  (3) [19]. Предполагается, что в процессе управления все смешанные переменные в системе (6) ограничены по модулю известными положительными константами:

$$(7) \quad |e_i(0)| \leq E_i, |e_i(t)| \leq \bar{E}_i, i = \overline{1,5}, t \geq 0.$$

Эти оценки рассчитываются для «худшего» случая и будут конкретизированы ниже.

Форма (6), которая управляема и наблюдаема относительно выхода  $e_1(t)$ , является основой и для построения динамического наблюдателя, и синтеза комбинированного управления. Обе задачи решаются относительно смешанных переменных (5).

#### **4. Синтез редуцированного наблюдателя смешанных переменных**

Для синтеза обратной связи, обеспечивающей достижение цели управления (4), нужно получить оценки смешанных переменных  $e_i(t)$ ,  $i = 2, \dots, 5$ , по измерениям ошибки слежения  $e_1(t)$ . Для решения этой задачи вводится наблюдатель смешанных переменных минимально возможного динамического порядка как копия системы (6), где  $u(t)$  полагается известной функцией времени. В отличие от стандартных подходов [8, 15, 18, 19], уравнение, описывающее динамику согласованного возмущения  $e_5(t)$ , в построения не вводится. Таким образом, осуществляется редукция динамического порядка подсистемы наблюдения, которая будет включать четыре дифференциальных уравнения при наличии пяти смешанных переменных.

Для упрощения настройки наблюдателя была модифицирована схема, предложенная в работах [4, 5]: в одном алгоритме одновременно реализуются принципы построения и наблюдателя состояния, и дифференциатора внешних сигналов [3, 6]. Эта модифицированная динамическая модель имеет вид:

$$(8) \quad \dot{z}_i = -k_i z_i + v_i, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \dot{z}_4 = b_0 u + v_4,$$

где  $z_i \in R$  – переменные состояния,  $v_i \in R$  – корректирующие воздействия наблюдателя – дифференциатора. Введем ошибки наблюдения  $\varepsilon_i = e_i - z_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , и в силу (6), (8) составим виртуальную систему

$$(9) \quad \dot{\varepsilon}_i = -k_i \varepsilon_i + e_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \dot{\varepsilon}_4 = e_5 - v_4,$$

где смешанные переменные  $e_i(t)$ ,  $i = 2, \dots, 5$ , рассматриваются как внешние ограниченные возмущения (7).

В системах (8), (9) установим следующие начальные значения:

$$(10) \quad \begin{aligned} z_1(0) = e_1(0) &\Rightarrow \varepsilon_1(0) = 0; \\ z_i(0) = 0 &\Rightarrow \varepsilon_i(0) = e_i(0), \quad |\varepsilon_i(0)| \leq E_i, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Настройка наблюдателя – дифференциатора (8) выполняется так, чтобы последовательно обеспечить стабилизацию с заданной точностью ошибок наблюдения и их производных (9):

$$(11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1(t) \approx 0, \dot{\varepsilon}_1(t) \approx 0 &\Rightarrow v_1(t) \approx e_2(t), \\ \varepsilon_i(t) \approx 0, \dot{\varepsilon}_i(t) \approx 0 &\Rightarrow v_i(t) \approx e_{i+1}(t), \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Тогда в качестве оценочных сигналов смешанных переменных можно использовать и переменные наблюдателя, и его корректирующие воздействия. Введем кусочно-линейные корректирующие воздействия как функции от измеряемого выхода  $e_1(t)$  и переменных наблюдателя в виде

$$(12) \quad \begin{aligned} v_1 = m_1 \text{sat}(l_1(e_1 - z_1)), \quad v_i = m_i \text{sat}(l_i(v_{i-1} - z_i)), \\ m_i, l_i = \text{const} > 0, \quad i = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$m_i \text{sat}(l_i \varepsilon_i) = \begin{cases} m_i \text{sign}(l_i \varepsilon_i), & |\varepsilon_i| > 1/l_i, \\ m_i l_i \varepsilon_i, & |\varepsilon_i| \leq 1/l_i; \end{cases}$$

$$m_i \text{sat}(l_i(v_{i-1} - z_i)) = \begin{cases} m_i \text{sign}(l_i(v_{i-1} - z_i)), & |(v_{i-1} - z_i)| > 1/l_i, \\ m_i l_i(v_{i-1} - z_i), & |(v_{i-1} - z_i)| \leq 1/l_i. \end{cases}$$

Кусочно-линейные корректирующие воздействия с насыщением (12) являются непрерывным негладким гибридом линейных и разрывных функций и имеют по два настраиваемых параметра. Первый параметр  $m_i$  – это амплитуда, его нужно выбрать так, чтобы обеспечить сходимость ошибки наблюдения  $\varepsilon_i(t)$  в малую окрестность нуля, где корректирующее воздействие  $v_i$  является линейным (12). Вторым параметром  $l_i$  – это большой коэффициент, его величина обратно пропорциональна радиусу линейной зоны, от которой зависит точность стабилизации.

Сформулируем достаточные условия для настройки наблюдателя – дифференциатора, обеспечивающие заданную точность решения задачи наблюдения.

**Лемма.** Если в системе (9)–(10), (12) выполняются условия (7), то тогда можно обеспечить выполнение приближенных равенств (11) с заданной точностью на следующих временных интервалах:

$$(13) \quad \begin{aligned} & |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1 \leq \beta, \quad t \geq 0; \\ & |e_2(t) - v_1(t)| \leq \alpha_1, \quad t \geq t_1; \\ & |v_{i-1}(t)| \leq 1/l_i \Leftrightarrow |\varepsilon_i(t)| \leq \alpha_{i-1} + 1/l_i \leq \beta_i, \quad t \geq t_{2i-2}; \\ & \qquad \qquad \qquad \leq \beta_i/2 \quad \leq \beta_i/2 \\ & |e_{i+1}(t) - v_i(t)| \leq \alpha_i, \quad t \geq t_{2i-1}, \quad i = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_6 < t_7, \quad t_2 > t_1 + 1/k_2, \quad t_4 > t_3 + 1/k_3, \quad t_6 > 2t_5,$$

$t_7 = T$  – общее время оценивания, при выборе коэффициентов кусочно-линейных корректирующих воздействий (12) на основе следующих неравенств:



$$m_1 > \bar{E}_2, m_i \geq \frac{E_i k_i + \bar{E}_{i+1} (k_i (t_{2i-2} - t_{2i-3}) + 1)}{k_i (t_{2i-2} - t_{2i-3}) - 1}, \quad i = 2, 3,$$

$$m_4 \geq \frac{E_4 + \bar{E}_5 t_6}{t_6 - 2t_5};$$

$$(14) \quad l_1 \geq \max \left\{ \frac{1}{\beta_1}; \frac{1}{m_1} \left( \frac{1}{t_1} \ln \frac{2(m_1 - \bar{E}_2)}{\beta_2} - k_1 \right) \right\};$$

$$l_i \geq \max \left\{ \frac{2}{\beta_i}; \frac{1}{m_i} \left( \frac{1}{t_{2i-1} - t_{2i-2}} \ln \frac{2(m_i - \bar{E}_{i+1})}{\beta_{i+1}} - k_i \right) \right\}, \quad i = 2, 3;$$

$$l_4 \geq \max \left\{ \frac{2}{\beta_4}; \frac{1}{m_4 (t_7 - t_6)} \ln \frac{m_4 - \bar{E}_5}{\alpha_4} \right\}.$$

В доказательстве, которое здесь не приводится, реализуется метод разделения движений в задаче наблюдения (по аналогии со схемами, представленными в работах [3–6]).

Из (14) также следуют условия

$$k_1 < \frac{1}{t_1} \ln \frac{2(m_1 - \bar{E}_2)}{\beta_2},$$

$$k_i < \frac{1}{t_{2i-1} - t_{2i-2}} \ln \frac{2(m_i - \bar{E}_{i+1})}{\beta_{i+1}}, \quad i = 2, 3.$$

Таким образом, с помощью наблюдателя (8), (12) за конечное время можно восстановить смешанные переменные системы (6). Из неравенств (13) следует, что оценочные сигналы

$$v_i(t) \approx e_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, 3$$

содержат меньшую погрешность, чем оценочные сигналы

$$z_i(t) \approx e_i(t), \quad i = 2, 3, 4.$$

Поэтому в качестве оценок смешанных переменных в законе управления будут использованы корректирующие воздействия, а именно:

$$(15) \quad v_i(t) = e_{i+1}(t) \pm \alpha_i, \quad i = \overline{1, 4}, \quad t \geq T.$$

## 5. Синтез комбинированного управления

Для стабилизации системы (6) применим комбинированное управление, которое состоит из двух частей. Первая часть – это обычная и легко реализуемая линейная стабилизирующая составляющая. Вторая часть компенсирует согласованное возмущение  $e_5(t)$ . В условиях полной информации статическая обратная связь

$$(16) \quad u = -(k_4 e_4 + e_5) / b_0, \quad k_4 = \text{const} > 0, b_0 > 0$$

полностью линеаризует замкнутую виртуальную систему (6), (16), а именно:

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -k_2 e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 &= -k_3 e_3 + e_4, \quad \dot{e}_4 = -k_4 e_4. \end{aligned}$$

Переменные системы (17) последовательно «снизу вверх» экспоненциально сходятся к нулю

$$|e_i(t)|_{t \rightarrow +\infty} = O(\exp(-k_i t)), \quad i = \overline{4, 1}.$$

Соответственно, в замкнутой системе (1)–(2), (16) обеспечивается экспоненциальная стабилизация ошибки слежения:

$$(18) \quad \begin{aligned} |x_1(t) - g_1(t)|_{t \rightarrow +\infty} &= O(\exp(-k_1 t)) + \\ &+ \frac{1}{k_1} \left( O(\exp(-k_2 t)) + \frac{1}{k_2} \left( O(\exp(-k_3 t)) + \frac{1}{k_3} (\exp(-k_4 t)) \right) \right). \end{aligned}$$

Как видим, система (18) является более удобной для анализа устойчивости по сравнению с классической канонической системой, так как здесь можно выбирать коэффициенты усиления, непосредственно влияющие на скорость стабилизации выходной переменной.

В условиях неполной информации с использованием наблюдателя смешанных переменных (8) и оценочных сигналов (15) базовый закон комбинированного управления (16) будет реализован в виде

$$(19) \quad u = -(k_4 v_3 + v_4) / b_0.$$

На рис. 1 приведена блок-схема замкнутой системы (1)–(2), (19) с наблюдателем смешанных переменных (8), (12).

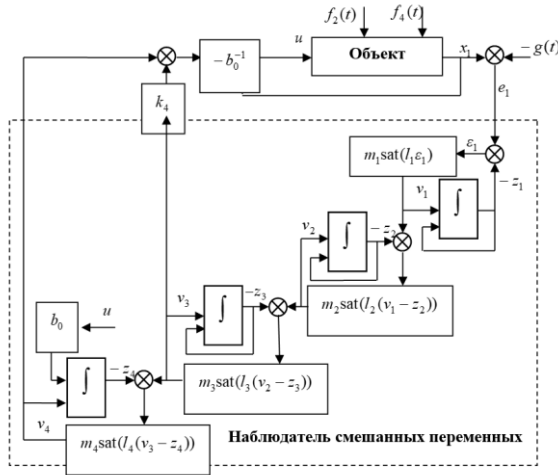


Рис. 1. Блок-схема замкнутой системы (1)–(2), (19)

В замкнутой системе (6) с динамической обратной связью (19) последнее уравнение в силу (15) принимает вид

$$(20) \quad \dot{e}_4 = -k_4 e_4 + \phi(t), \quad |\phi(t)| \leq k_4 \alpha_3 + \alpha_4, \quad t \geq T,$$

где  $\phi(t) = k_4(e_4 - v_3) + e_5 - v_4$ ,  $k_4 \alpha_3 + \alpha_4$  – некомпенсируемые малые погрешности оценивания.

С учетом (20) для смешанных переменных (5) можно конкретизировать области изменения (7) при известных допустимых границах их начальных значений:

$$|e_4(t)| \leq E_4 + \frac{|\phi(t)|}{k_4} = \bar{E}_4,$$

$$|e_i(t)| \leq E_i + \frac{\bar{E}_{i+1}}{k_i} = \bar{E}_i, \quad i = 3, 2, 1, \quad t \geq 0.$$

Для ошибки слежения в установившемся режиме имеем оценку:

$$|e_1(t)| = |x_1(t) - g(t)| \leq \frac{k_4 \alpha_3 + \alpha_4}{k_1 k_2 k_3 k_4}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Желаемая точность стабилизации ошибки слежения (4) достигается заданием точности решения задачи наблюдения (13) с учетом выбранных коэффициентов усиления  $k_i$ .

Таким образом, наблюдатель (8), построенный как копия виртуальной системы (6), дает оценки смешанных переменных, которые непосредственно используются в законе управления (19). Это очень упрощает структуру регулятора, так как не нужно выполнять прямых и обратных замен переменных в реальном времени. Более того, наблюдатель (8) может повысить производительность замкнутой системы даже в условиях полной определенности и полных измерений. Это связано с тем, что аналитический вид выражений  $e_4(t)$ ,  $e_5(t)$  очень громоздкий и вычисление этих формул в реальном времени может потребовать гораздо больше времени, чем счет динамической модели (8), (12), которая имеет минимально допустимый динамический порядок, равный четырем. Реализация разработанного подхода может потребовать меньшую вычислительную сложность по сравнению с методами адаптивного управления, которые также подстраиваются под разные рабочие режимы объекта и практически не опираются на знание его модели. Однако в отличие от методов адаптивного управления для предложенного подхода необходимо, чтобы система была устойчивой, т.е. выполнялись условия (7). В отличие от ПИД-регуляторов предложенный подход позволяет адаптироваться к разным рабочим режимам объекта, но настройка его параметров может быть более трудоемкой.

## 6. Результаты численных экспериментов

Численное моделирование проводилось в среде MATLAB-Simulink. При интегрировании дифференциальных уравнений применялся явный метод Эйлера с постоянным шагом  $10^{-4}$  (с). Номинальные значения параметров объекта полагались следующими:

$$(21) \quad \begin{aligned} a_{210} &= 8,8 \text{ (1/с}^2\text{)}, \quad a_{220} = 29,43 \text{ (1/с}^2\text{)}, \quad a_{430} = 9,9 \text{ (1/с}^2\text{)}, \\ a_{440} &= 2,475 \text{ (1/с)}, \quad a_{450} = 13,5 \text{ (рад/(А} \cdot \text{с}^2\text{))}. \end{aligned}$$

При этом для синтеза системы управления использовались только значения  $a_{210}$  и  $a_{450}$ , которые определяли множитель при управлении  $b_0 = a_{210}a_{450} = 118,8$  (3) в преобразованной системе (6). Кроме того, были известны допустимые области изменения неопределенностей. Их значения не превышали 70 % от значений номинальных параметров (21). С учетом этой информации и желаемой точности оценивания смешанных переменных  $|e_4(t) - v_3(t)| \leq \alpha_3 = 0,02$  (рад/с<sup>3</sup>) и  $|e_5(t) - v_4(t)| \leq \alpha_4 = 5$  (рад/с<sup>4</sup>) на основе (14) были приняты следующие коэффициенты наблюдателя (8):

$$l_1 = 110, l_2 = 840, l_3 = 510, l_4 = 5,$$

$$(22) m_1 = 6 \text{ (рад/с)}, m_2 = 15 \text{ (рад/с}^2\text{)},$$

$$m_3 = 35 \text{ (рад/с}^3\text{)}, m_4 = 280 \text{ (рад/с}^4\text{)}.$$

Исходя из желаемого времени регулирования 3 (с) и заданной точности в установившемся режиме  $|x_1(t) - g(t)| \leq 0,005$  (рад),  $t \rightarrow +\infty$  были выбраны коэффициенты регулятора (19):

$$(23) k_1 = 2 \text{ (1/с)}, k_i = 5 \text{ (1/с)}, i = \overline{2,4}.$$

Для моделирования были заданы следующие значения параметров объекта:

$$a_{21} = 10,56 \text{ (1/с}^2\text{)}, a_{22} = 35,32 \text{ (1/с}^2\text{)}, a_{43} = 11,88 \text{ (1/с}^2\text{)},$$

$$a_{44} = 2,97 \text{ (1/с)}, a_{45}(t) = (1 + 0,2 \sin(t))a_{450} \text{ (рад/(A} \cdot \text{с}^2\text{))}.$$

Они отличались от номинальных значений (21) не более чем на 20%. При этом параметр  $a_{45}(t)$  был функцией, зависящей от времени. Функции, описывающие внешние возмущения, имели вид:

$$f_2(t) = 0,04 \sin(2t) \text{ (рад/с}^2\text{)}, f_4(t) = 0,08t \text{ (рад/с}^2\text{)},$$

где  $f_4(t)$  – пилообразная функция с главным периодом 2 (с).

Требовалось, чтобы угловое положение маятника отслеживало заданный сигнал:

$$g(t) = 0,18 \sin(t) + 0,02 \text{ (рад)}.$$

При этом начальные условия объекта и наблюдателя были следующими:

$$(24) \quad \begin{aligned} x_i(0) &= 0, \quad i = \overline{1,4}, \\ z_1(0) &= e_1(0), \quad z_i(0) = 0, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Для сравнения моделировались две замкнутые системы:

1) эталонная система с законом управления  $u = -(k_4 e_4 + e_5)/b_0$  (16) в предположении, что все значения параметров объекта, внешние воздействия и их производные известны и все сигналы доступны для измерений;

2) замкнутая система с законом управления  $u = -(k_4 v_3 + v_4)/b_0$  (19) и информационной поддержкой наблюдателя (8), когда из параметров объекта известны только номинальные значения  $a_{210}$  и  $a_{450}$  (21) и измеряется лишь ошибка слежения  $e_1$  (разработанный подход).

Для этих замкнутых систем на рис. 2а приведены графики задающего воздействия  $g(t)$  и выходной переменной  $x_1(t)$ , которая его отслеживает, на рис. 2б – графики ошибки слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ . На рис. 3 представлены графики управления  $u(t)$ .

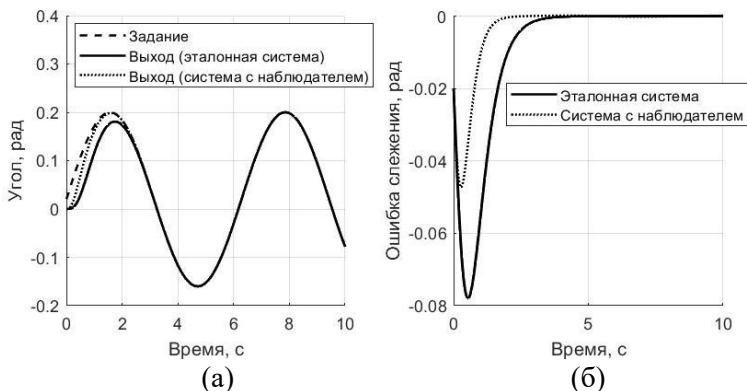


Рис. 2. Графики задающего воздействия  $g(t)$ , углового положения  $x_1(t)$  (а) и ошибки слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$  (б)

Для замкнутой системы с наблюдателем на рис. 4а приведены графики смешанной переменной  $e_4(t)$  и ее оценки  $v_3(t)$ , полученной с помощью наблюдателя (8). На рис. 4б показаны гра-

фики ошибки оценивания  $e_4(t) - v_3(t)$ ; на рис. 5а показаны графики смешанной переменной  $e_5(t)$ , которая трактовалась как внешнее возмущение, а также ее оценки  $v_4(t)$ . На рис. 5б – графики ошибки оценивания  $e_5(t) - v_4(t)$ .

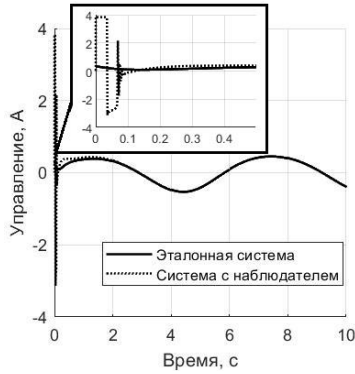


Рис. 3. Графики управления  $u(t)$

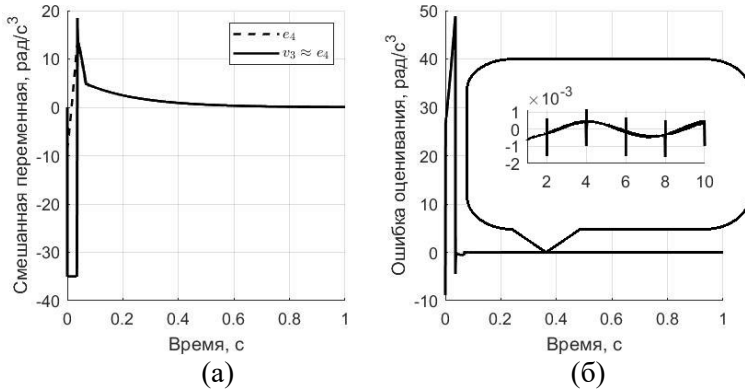


Рис. 4. Графики смешанной переменной  $e_4(t)$  и ее оценки  $v_3(t)$  (а) и ошибки оценивания  $e_4(t) - v_3(t)$  (б)

В таблице 1 для замкнутых систем приведены значения следующих показателей качества регулирования: времени регулирования  $t_p$  (с):  $|e_1(t)| \leq 0,005$  (рад),  $t \geq t_p$ ; перерегулирования для ошибки слежения  $e_{1,\max}$  (рад):  $e_{1,\max} \geq |e_1(t)|$ ,  $t \geq 0$ , средне-

квадратической ошибки слежения в установившемся режиме  $\Delta_1$  (рад); максимального значения модуля управления  $u_{\max}$  (А):  $u_{\max} \geq |u(t)|, t \geq 0$ .

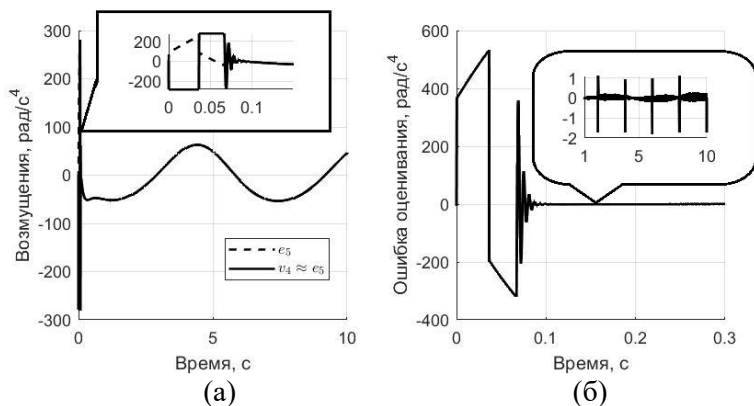


Рис. 5. Графики смешанной переменной  $e_5(t)$ , ее оценки  $v_4(t)$  (а) и ошибки оценивания  $e_5(t) - v_4(t)$  (б)

Таблица 1. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Замкнутая система	
	Эталонная	С наблюдателем
$t_p, c$	2,3695	1,2293
$e_{1,\max}, \text{рад}$	0,0780	0,0473
$\Delta_1, \text{рад}$	$7,04 \cdot 10^{-6}$	$1,03 \cdot 10^{-4}$
$u_{\max}, A$	0,5325	3,83

Из рис. 2 следует, что цель управления достигнута: ошибка слежения сходится в заданную окрестность. Были получены следующие значения показателей качества оценивания сигналов  $e_4(t)$  и  $e_5(t)$ , на основе которых формировалось управление (19):



$$\begin{aligned}
 &|e_4(t) - v_3(t)| \leq 48,90 \text{ (рад/с}^3\text{)}, t \geq 0, \\
 &|e_5(t) - v_4(t)| \leq 532,74 \text{ (рад/с}^4\text{)}, t \geq 0, \\
 (25) \quad &|e_4(t) - v_3(t)| \leq 0,02 \text{ (рад/с}^3\text{)}, t \geq 0,1 \text{ (с)}, \\
 &|e_5(t) - v_4(t)| \leq 5 \text{ (рад/с}^4\text{)}, t \geq 0,1 \text{ (с)}, \\
 &|e_4(t) - v_3(t)| \leq 0,0017 \text{ (рад/с}^3\text{)}, t \geq 1 \text{ (с)}, \\
 &|e_5(t) - v_4(t)| \leq 1,88 \text{ (рад/с}^4\text{)}, t \geq 1 \text{ (с)}.
 \end{aligned}$$

Ошибки оценивания в переходном процессе до 532,74 (рад/с<sup>4</sup>) (25) приводят к увеличению максимального значения управления примерно в 7 раз для замкнутой системы с наблюдателем по сравнению с эталонной системой (таблица 1). При этом ухудшается точность отслеживания заданного сигнала примерно в 14,6 раз (для эталонной системы теоретически достигается асимптотическая сходимость ошибки слежения). Однако ошибки оценивания сходятся достаточно быстро (менее чем за 0,2 с) (25)), и значения времени регулирования и перерегулирования для ошибки слежения не превышают значений, полученных для эталонной системы (таблица 1). Заметим, что для эталонной системы требуется точное знание не только всех значений параметров объекта, но также и внешних воздействий вместе с их производными. Организация таких измерений нереализуема на практике. При этом значения показателей качества, полученных для неопределенной системы с наблюдателем, могут соответствовать заданным требованиям.

Для проверки робастности разработанного закона управления (19) было проведено три эксперимента с численным моделированием. В ходе экспериментов реальные значения параметров объекта были константами, превышающими номинальные значения (21) на 10, 40 и 70% соответственно. В этих экспериментах использовались другое задающее воздействие и другие внешние возмущения (по сравнению с прошлыми экспериментами):

$$\begin{aligned}
 f_2(t) &= 0,04 \cos t \text{ (рад/с}^2\text{)}, f_4(t) = 0,16 |\sin(t)| \text{ (рад/с}^2\text{)}, \\
 g(t) &= 0,1 \cos t - 0,13 \sin t \text{ (рад)}.
 \end{aligned}$$

При этом коэффициенты наблюдателя и регулятора оставались теми же (22), (23). Начальные условия объекта и наблюдателя задавались согласно (24).

Для эксперимента с изменением значений параметров объекта на 70% от номинальных на рис. 6а приведены графики задающего воздействия  $g(t)$  и выходной переменной  $x_1(t)$ , которая его отслеживает. На рис. 6б – графики ошибки слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ . Графики для случаев с изменением значений параметров на 10% и 40% от номинальных не приводятся, поскольку они практически полностью повторяют графики, представленные на рис. 6. В таблице 2 для всех экспериментов приведены значения показателей качества регулирования, аналогичных тем, что были в таблице 1.

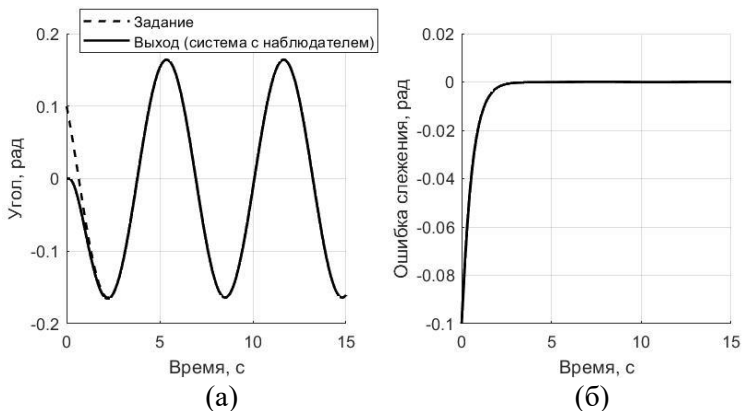


Рис. 6. Графики задающего воздействия  $g(t)$ , углового положения  $x_1(t)$  (а) и ошибки слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$  (б) (значения параметров объекта отличались от номинальных на 70%)

Таблица 2. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Вариация параметров		
	10%	40%	70%
$t_p, c$	1,6140	1,6166	1,6197
$e_{1,max}, рад$	0,1	0,1	0,1
$\Delta_1, рад$	$8 \cdot 10^{-5}$	$8,28 \cdot 10^{-5}$	$8,46 \cdot 10^{-5}$
$u_{max}, А$	3,83	3,83	3,83

Из таблицы 2 следует, что значения показателей качества регулирования остаются практически неизменными при разной вариации параметров объекта.

Таким образом, результаты численного моделирования подтверждают робастность разработанного метода синтеза следящей системы в условиях неполных измерений и при наличии неопределенности как в описании модели объекта управления, так и среды его функционирования.

## **7. Заключение**

Цель работы заключалась в разработке простой в вычислительной реализации и робастной системы слежения для однозвенного манипулятора с гибким шарниром без учета динамики токового контура. Задача осложнялась действием на систему параметрических и внешних возмущений, как согласованных, так и несогласованных. Допускалось, что согласованные возмущения могут быть негладкими. При этом измерениям была доступна только ошибка слежения. Цель была достигнута за счет приведения системы к блочной форме «вход – выход» относительно ошибок слежения, в которой все неопределенности находились в последнем уравнении и становились согласованными. На основе этой формы синтезирован комбинированный закон управления. Для его информационного обеспечения был разработан наблюдатель смешанных переменных с кусочно-линейными корректирующими воздействиями. Эти корректирующие воздействия позволяют ограничить всплески оценочных сигналов и предоставляют оценки смешанных переменных с заданной точностью. Как следствие, отслеживание заданного сигнала также происходит с заданной точностью.

В предложенной блочной форме использованы линейные локальные связи, за счет выбора коэффициентов которых можно непосредственно влиять на скорость стабилизации смешанных переменных и ошибки слежения. Поэтому блочная форма вход-выход является более удобным инструментом для анализа устойчивости по сравнению с канонической системой. При этом

разработанные наблюдатели смешанных переменных имеют наименьший возможный порядок.

Результаты моделирования подтвердили эффективность разработанного подхода. Без ограничения общности его можно распространить на полноприводные электромеханические системы с несколькими степенями свободы.

### Литература

1. АХОБАДЗЕ А.Г., КРАСНОВА С.А. *Решение задачи слежения в условиях неопределенности на основе совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости* // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 24. – С. 34–80.
2. БУСУРИН В.И., ШТЕК С.Г., КОРОБКОВ В.В., ЖЕГЛОВ М.А., КОРОБКОВ К.А. Исследование компенсационного преобразователя ускорения с дифференциальным оптическим считыванием // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2021. – №3. – С. 29–38.
3. КОКУНЬКО Ю.Г., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями* // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №7. – С. 37–68.
4. КРАСНОВ Д.В. *Синтез наблюдателя пониженного порядка для полноприводной электромеханической системы* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 31–48.
5. КРАСНОВ Д.В., АНТИПОВ А.С. Синтез двухконтурного наблюдателя в задаче управления однозвенным манипулятором в условиях неопределенности // Проблемы управления. – 2021. – №4. – С. 27–39.
6. КРАСНОВА С.А. *Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 76. – С. 6–25.
7. INDRI M., BELLISSIMO M., PESCE S., PERNA V. *A Robust  $H_\infty$  Application for Motor-Link Control Systems of Industrial Manipulators* // Applied Sciences. – 2022. – Vol. 12. – P. 1–22.

8. KHALIL H.K., PRALY L. *High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control* // Int. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2014. – Vol. 24, No. 6. – P. 993–1015.
9. LI H., HUI Y., WANG Q., WANG H., WANG L. *Design of Anti-Swing PID Controller for Bridge Crane Based on PSO and SA Algorithm* // Electronics. – 2022. – Vol. 11, No. 19. – P. 1–21.
10. LE-TIEN L., ALBU-SCHÄFFER A. *Robust Adaptive Tracking Control Based on State Feedback Controller With Integrator Terms for Elastic Joint Robots With Uncertain Parameters* // IEEE Trans. on Control Systems Technology. – 2018. – Vol. 26, No. 6. – P. 2259–2267.
11. LING S., WANG H., LIU P.X. *Adaptive fuzzy tracking control of flexible-joint robots based on command filtering* // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2019. – Vol. 67, No. 5. – P. 4046–4055.
12. MILIĆ V., KASAC' J., LUKAS M. *Min–Max Optimal Control of Robot Manipulators Affected by Sensor Faults* // Sensors. – 2023. – Vol. 23. – P. 1–28.
13. MOHAMED K.T., ABDEL-RAZAK M.H., HARAZ E.H., ATA A.A. *Fine tuning of a PID controller with inlet derivative filter using Pareto solution for gantry crane systems* // Alexandria Engineering Journal. – 2021. – Vol. 61, No. 9. – P. 6659–6673.
14. MUSTAFA M.M., HAMARASH I., CRANE C.D. *Dedicated Nonlinear Control of Robot Manipulators in the Presence of External Vibration and Uncertain Payload* // Robotics. – 2020. – Vol. 9, No. 2. – P. 1–16.
15. NGUYEN D.G., TRAN D.T., AHN K.K. *Disturbance Observer-Based Chattering-Attenuated Terminal Sliding Mode Control for Nonlinear Systems Subject to Matched and Mismatched Disturbances* // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11. – P. 1–23.
16. SPONG M. *Modeling and control of elastic joint robots* // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1987. – Vol. 109. – P. 310–319.

17. TEMKIN I., DERYABIN S., KONOV I., KIM M. *Possible Architecture and Some Neuro-Fuzzy Algorithms of an Intelligent Control System for Open Pit Mines Transport Facilities // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications.* – 2019. – Vol. 320. – P. 412–420.
18. ULLAH H., MALIK F.M., RAZA A., MAZHAR N., KHAN R., SAEED A., AHMAD I. *Robust Output Feedback Control of Single-Link Flexible-Joint Robot Manipulator with Matched Disturbances Using High Gain Observer // Sensors.* – 2021. – Vol. 21. – P. 1–22.
19. WANG H., ZHANG Z., TANG X., ZHAO Z., YAN Y. *Continuous output feedback sliding mode control for underactuated flexible-joint robot // Journal of the Franklin Institute.* – 2022. – Vol. 359. – P. 7847–7865.
20. ZHANG Q., MU M., WANG X. *A Modified Robotic Manipulator Controller Based on Bernstein-Kantorovich-Stancu Operator // Micromachines.* – 2023. – Vol. 14, No. 1. – P. 1–21.

## IMPLEMENTATION OF COMBINED CONTROL IN THE TRACKING SYSTEM OF A SINGLE-LINK MANIPULATOR WITH AN UNCERTAIN INPUT

**Dmitry Krasnov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (dim93kr@mail.ru)

**Aleksey Antipov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (scholess18@mail.ru).

*Abstract: As a control plant, we consider a single-link manipulator with a flexible joint that functions under parametric uncertainty and external uncontrollable disturbances. The dynamic of the current loop is not introduced. The armature current of the DC motor is considered as the control, which can be converted into torque applied to the gearbox shaft. We pose the problem of synthesizing dynamic feedback that provides specified changes in the angular position of the manipulator under the following atypical assumptions: 1) only the current deviation of the manipulator position from the reference signal (tracking error) is available for measurements; 2) the multiplier before the control (input matrix) is not known exactly. The first factor motivates the use the transformation to the block form of input-output with respect to the tracking error for solving the problem of observation and synthesis of dynamic feedback based on mixed variables (combinations of state variables, external influences and their derivatives). The main contributions include, firstly,*

*a method for designing a mixed variable observer of minimum possible order with piecewise linear corrective actions. This observer recovers mixed variables from tracking error measurements. To simplify its tuning, both the principles of construction of the state observer and the differentiator of external signals are simultaneously used in one algorithm. The second main contribution is a method for the formation of combined control with compensation of matched disturbances under conditions of uncertain multiplier before control. The numerical simulation results are presented. They demonstrate the robustness of the closed-loop system and guaranteed stabilization of the tracking error with a given accuracy when external disturbances, reference actions, and uncertain parameters change within acceptable ranges.*

**Keywords:** single-link manipulator with flexible joint, tracking, external disturbances, uncertain input, combined control, mixed variable observer.

УДК 62.50

ББК 32.817

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.03

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

*Поступила в редакцию 09.10.2023.*

*Опубликована 31.01.2024.*