

# АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА ДВУХФАЗНЫХ СМО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЗАЯВОК<sup>1</sup>

Вытовтов К. А.<sup>2</sup>, Барабанова Е. А.<sup>3</sup>, Вишневецкий В. М.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Волкова С. А.<sup>5</sup>, Вытовтов Г. К.<sup>6</sup>

(Астраханский государственный технический  
университет, Астрахань)

*Работа посвящена разработке алгоритма построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова для двухфазной системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе и произвольным конечным числом заявок в системе. Введены новые функции, существенно упрощающие алгоритм построения уравнений Колмогорова, а также инфинитезимальной матрицы системы. Проведен сравнительный анализ сложности ранее используемых алгоритмов и алгоритма, представленного авторами. Использование данного алгоритма позволит в дальнейшем получить аналитические и численные решения основных характеристик производительности двухфазной СМО с большим числом заявок в переходном режиме работы.*

Ключевые слова: двухфазная система массового обслуживания, переходной режим, уравнения Колмогорова, сложность алгоритма.

## 1. Введение

Многофазные системы массового обслуживания (СМО) в последние годы получили довольно широкое развитие [3, 6, 11, 13]. Данные модели в отличие от однофазных СМО позволяют более точно описать целые классы реальных систем

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>.

<sup>2</sup> Константин Анатольевич Вытовтов, д.т.н., доцент (vytovtov\_konstan@mail.ru).

<sup>3</sup> Елизавета Александровна Барабанова, д.т.н., доцент (elizavetaalex@yandex.ru).

<sup>4</sup> Владимир Миронович Вишневецкий, д.т.н., профессор (vishn@inbox.ru).

<sup>5</sup> Светлана Анатольевна Волкова, к.ф.-м.н., доцент (svolkovav2017@gmail.com).

<sup>6</sup> Георгий Константинович Вытовтов, студент (georgii.vytovtov@gmail.com).

и получить для них основные характеристики производительности. Так, например, многофазные СМО используются для описания проводных и беспроводных сетей связи линейной топологии [13], процессов последовательного обслуживания клиентов в различных социальных или коммерческих организациях, центрах информационной и технической поддержки [4]. Кроме этого, такое распределение помогает достаточно точно описать многокаскадные коммутационные структуры, такие как, например, дуальные фотонные коммутаторы [1].

При исследовании СМО в ряде случаев важно рассмотреть не только стационарный [3], но и переходной режим ее функционирования [7, 8, 10, 12]. Такая необходимость возникает в случае нестационарного изменения интенсивностей поступления и обслуживания заявок, что применительно к телекоммуникационным приложениям отражает ситуации, связанные с изменением маршрутов передаваемых сообщений или выходом из строя обслуживающих устройств. В работах авторов [2, 14] рассматривается аналитический подход к описанию работы СМО с пуассоновским, а также коррелированным входными потоками и экспоненциальным распределением времени обслуживания в переходном режиме. Метод позволяет получить решение системы любого конечного числа уравнений Колмогорова, используя так называемую матрицу преобразования вероятностей. На первом шаге предлагаемого подхода составляется система уравнений Колмогорова, что для экспоненциального распределения времени обслуживания не представляет особого труда. В случае многофазных систем данная задача значительно усложняется, так как реализовать алгоритм составления системы уравнений Колмогорова для большого числа заявок в каждой фазе даже для двух фаз требует больших вычислительных ресурсов.

Система уравнений Колмогорова для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением временем обслуживания на каждой фазе и неограниченным буфером впервые представлена в [9]. Однако разработанные ранее алгоритмы построения уравнений Колмогорова содержат большое количество условий, что приводит к их высокой

вычислительной сложности и, соответственно, высоким требованиями к вычислительным ресурсам.

Поэтому актуальна разработка усовершенствованного алгоритма построения системы уравнений Колмогорова для дальнейшего исследования двухфазных СМО в переходном режиме, позволяющего описывать систему с любым сколь угодно большим числом заявок и не требующего значительных вычислительных ресурсов.

Такой алгоритм представлен авторами в данной статье. Статья построена следующим образом. В разделе 3 приведен метод построения системы уравнений Колмогорова с применением новых функций, введенных авторами. Этот метод исключает использование в алгоритме построения уравнений Колмогорова многочисленных условий «если» и позволяет в дальнейшем проводить аналитическое исследование поведения двухфазных СМО с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе, в частности, использовать метод матрицы преобразования вероятностей [2, 14] для нахождения вероятностей состояний системы в переходном режиме. Раздел 4 посвящен разработке алгоритма построения матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. Для этого введена функция, преобразующая числа, соответствующие количеству заявок в каждой из фаз, в порядковый номер элемента матрицы в столбце или строке. В разделе 5 описаны новые функции, позволяющие упростить алгоритм построения матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. В разделе 6 приведен сравнительный анализ алгоритмов построения системы уравнений Колмогорова в соответствии с хорошо известным методом [9] и с методом, использующим новые функции.

## **2. Постановка задачи**

В данной работе рассматривается двухфазная система массового обслуживания с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе. Система имеет одно обслуживаемое устройство,

обработка заявок в котором происходит в два этапа с интенсивностями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  для первого и второго этапов соответственно. Входные заявки поступают в систему с интенсивностью  $\lambda$ . Максимальное количество заявок, находящихся в системе, равно  $N$ ,  $n_1$  – число заявок, обслуживаемых на первом этапе,  $n_2$  – число заявок, обслуживаемых на втором этапе, при этом  $n_1 + n_2 \leq N$ . Граф состояний рассматриваемой СМО представлен на рис. 1. Состояние  $S(0, 0)$  соответствует отсутствию заявок в системе,  $S(n_1, n_2)$ ,  $n_1 = 0, \dots, N$ ,  $n_2 = 0, \dots, N$ , соответствует наличию  $n_1$  заявок в первой фазе обслуживания и  $n_2$  заявок на второй фазе обслуживания.

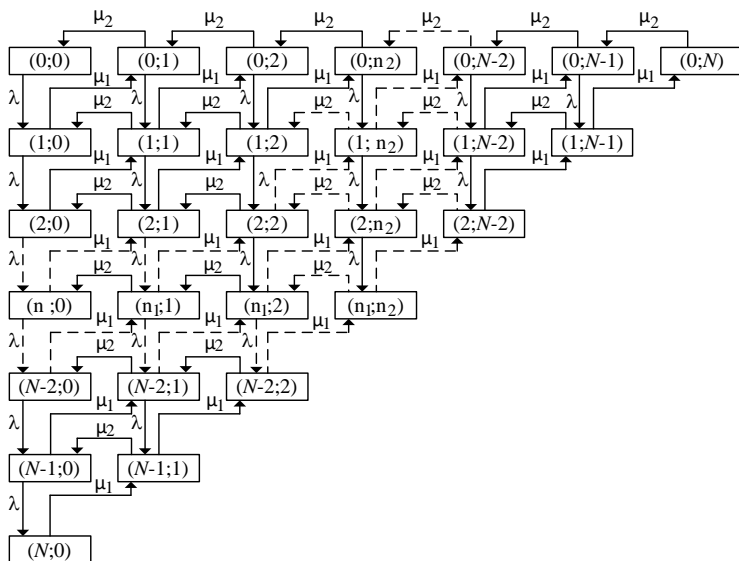


Рис. 1. Граф состояний двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе и ограниченным буфером

Целью данной статьи является модернизация алгоритма построения системы уравнений Колмогорова для случая двухфазной СМО с ограниченным буфером с целью уменьшения его сложности и упрощения ее дальнейшего исследования.

### 3. Система уравнений Колмогорова

Прежде всего оценим количество возможных состояний системы в зависимости от максимального количества заявок  $N$ . Из графа (рис. 1) видно, что любому  $n_2$  соответствует  $S_{n_2} = N + 1 - n_2$  состояний. Тогда общее число состояний находится как

$$(1) \quad S = \sum_{n_2=0}^N (N + 1 - n_2).$$

Очевидно, что сумма ряда (1) равна

$$(2) \quad S = \frac{1}{2}(N^2 + 3N + 2)$$

и она соответствует количеству дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих данную систему.

Для этой системы уравнения Колмогорова были записаны в развернутом аналитическом виде еще в [9]:

$$\begin{aligned} \frac{dP(0,0,t)}{dt} &= -\lambda P(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t), \quad n_1, n_2 = 0; \\ \frac{dP(0,n,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu) P(0,n,t) + \mu P(0,n-1,t) + \\ &+ \mu P(0,n+1,t), \quad n = 0, n = \overline{1, N-1}; \\ \frac{dP(0,N,t)}{dt} &= -\mu_2 P(0,N,t) + \mu_1 P(1,N-1,t), \quad n_1 = 0, n_2 = N; \\ (3) \quad \frac{dP(n_1,0,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2) P(n_1,0,t) + \mu_2 P(n_1,1,t), \quad n_1 = \overline{1, N-1}, n_2 = 0; \\ \frac{dP(N,0,t)}{dt} &= -\mu_1 P(N,0,t) + \lambda P(N-1,0,t), \quad n_1 = N, n_2 = 0; \\ \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ &+ \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t) + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t), \quad n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N; \\ \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2) P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ &+ \lambda P(n_1 - 1, n_2, t), \quad n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N. \end{aligned}$$

Следует отметить, что данный метод, предусматривающий использование различных форм записи при различных значениях  $n_1$  и  $n_2$ , является очень неудобным для дальнейшего анализа рассматриваемой СМО с большим числом заявок и расчета ее характеристик. Он не позволяет получить общий вид рассматриваемой системы, а при составлении программ потребует усложнения программного кода, использования дополнительных условий и ограничений. Однако очень важно отметить, что в записи (3) наблюдаются определенные закономерности. Для их описания возьмем за основу уравнение для  $n_1, n_2 > 0$ ,  $n_1 + n_2 = N$ :

$$(4) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} - (\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t) + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t),$$

содержащее наибольшее количество слагаемых. Допустим, что все эти слагаемые содержатся и в остальных уравнениях системы (3). Однако каждое из слагаемых умножается на некоторую функцию  $f_i(n_1, n_2, N)$ , которая принимает значения 0 или 1 в зависимости от значений  $n_1$  и  $n_2$ . Тогда все уравнения в (3) с использованием (4) и функции  $f_i(n_1, n_2, N)$  можно записать в виде

$$(5) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} f_1(n_1, n_2, N) - (\lambda f_2(n_1, n_2, N) + \mu_1 f_2(n_1, n_2, N) + \mu_2 f_3(n_1, n_2, N)) P(n_1, n_2, t) + \mu_1 f_4(n_1, n_2, N) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \mu_2 f_5(n_1, n_2, N) P(n_1, n_2 + 1, t) + \lambda f_6(n_1, n_2, N) P(n_1 - 1, n_2, t).$$

Теперь рассмотрим условия, при которых функции  $f_i(n_1, n_2, N)$  должны принимать значения 0 или 1. В соответствии с (3) вероятности в левой части под знаком производной имеют вид  $P(n_1, n_2, t)$ ,  $n_1 = 0, \dots, N$ ,  $n_2 = 0, \dots, N$ . При этом соответствующее уравнение в (3) отсутствует, если  $n_1 + n_2 > N$ , и сохраняется, если  $n_1 + n_2 \leq N$ . В сохраненных уравнениях в первой скобке правой части (множитель при  $P(n_1, n_2, t)$ ) интенсивность поступления  $\lambda$  отсутствует при условии  $n_1 + n_2 \geq N$  и сохраняется при  $n_1 + n_2 < N$ . Интенсивность обслуживания  $\mu_1$  отсутствует

при  $n_1 < 1$  и сохраняется при  $n_1 \geq 1$ . Интенсивность обслуживания  $\mu_2$  отсутствует при  $n_2 < 1$  и сохраняется при  $n_2 \geq 1$ . Второе слагаемое  $\mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t)$  в правой части уравнений (3) отсутствует при  $n_1 + n_2 > N$  и сохраняется при  $n_1 + n_2 \leq N$ . Третье слагаемое  $\mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t)$  в правой части уравнений (1) отсутствует при  $n_2 < 0$  и сохраняется при  $n_2 \geq 0$ . Четвертое слагаемое  $\lambda P(n_1 - 1, n_2, t)$  отсутствует при  $n_1 < 0$  и сохраняется при  $n_1 \geq 0$ .

Исходя из этого анализа для корректной записи системы (3) в общем виде (5) необходимо ввести функцию  $v_1(x, M)$ , ограничивающую возможные состояния системы снизу (минимально допустимые значения  $x = n_1, n_2, n_1 + n_2$  должны быть большими либо равными  $M$ ), а также функцию  $v_2(x, K)$ , ограничивающую возможные состояния сверху (максимально допустимые значения  $n_1, n_2, n_1 + n_2$  должны быть меньшими либо равными  $K$ ). Тогда система (3) с использованием введенных функций  $v_1(x, M)$  и  $v_2(x, K)$  принимает вид

$$\begin{aligned} v_2(n_1 + n_2, N) \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = & -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \\ & + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)] P(n_1, n_2, t) v_2(n_1 + n_2, N + 1) + \\ (6) \quad & + \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ & + \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N) P(n_1, n_2 + 1, t) + \\ & + \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 - 1, n_2, t), \quad n_1 = 0, \dots, N, n_2 = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Неудобным в записи (6) является то, что вместо отсутствующих уравнений появляется равенство  $0 = 0$ . Это затрудняет решение системы (6) матричными методами, поскольку матрица коэффициентов (6) оказывается вырожденной. Поэтому вместо (6) целесообразно использовать запись уравнений Колмогорова в виде

$$\begin{aligned} \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = & -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \\ & + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)] P(n_1, n_2, t) + \\ (7) \quad & + \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ & + \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N) P(n_1, n_2 + 1, t) + \\ & + \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1) P(n_1 - 1, n_2, t), \end{aligned}$$

где  $n_1 = 0, \dots, N, n_2 = 0, \dots, N, n_1 + n_2 \leq N$ .

Таким образом, (7) является общей записью системы уравнений Колмогорова для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением временем обслуживания на каждой фазе и ограниченным буфером.

В Приложении 1 представлен код программы и результаты построения системы уравнений Колмогорова для  $N = 4$  в символьном пакете вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом (6), подтверждающие корректность предлагаемого метода.

В стационарном режиме дифференциальные уравнения (7) сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)\pi(n_1, n_2) + \\ & + \mu_1 v_1(n_2, 1)v_2(n_1 + n_2, N + 1)\pi(n_1 + 1, n_2 - 1) + \\ (8) \quad & + \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N)\pi(n_1, n_2 + 1) + \\ & + \lambda v_1(n_1, 1)v_2(n_1 + n_2, N + 1)\pi(n_1 - 1, n_2) = 0, \end{aligned}$$

где  $n_1 = 0, \dots, N, n_2 = 0, \dots, N, n_1 + n_2 \leq N$ , которая позволяет записать инфинитезимальную матрицу в общем виде для данного случая.

#### **4. Построение матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова. Функция $\mathcal{P}(n_k, n_l)$**

Для нахождения вероятностей состояний системы авторы считают целесообразным применение метода матрицы преобразования вероятностей [2, 14]. Для этого прямое уравнение Колмогорова должно быть записано в матричной форме

$$(9) \quad \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \mathbf{A}\vec{P}(t),$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений (7),  $\vec{P}(t)$  – вектор-столбец вероятностей состояний системы. Отметим, что  $\mathbf{A}$  является также инфинитезимальной матрицей рассматриваемой системы. Для построения матрицы  $\mathbf{A}$  авторами введена функция



$$(10) \mathcal{G}(n_k, n_l) = (N + 1)n_k + n_l - \frac{n_k(n_k - 1)}{2} + 1,$$

преобразующая число заявок  $n_k$ ,  $n_l$  в номер столбца (строки) этой матрицы. Проиллюстрируем ее для случая  $N = 4$ . Подставляя все необходимые комбинации  $n_k$  и  $n_l$  в (10) для  $N = 4$ , получим порядковые номера столбцов (строк), представленные в таблице 1.

Таблица 1.

$n_k$	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$n_l$	0	1	2	3	4	0	1	2	3
$\mathcal{G}(n_k, n_l)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$n_k$	2	2	2	3	3	4
$n_l$	0	1	2	0	1	0
$\mathcal{G}(n_k, n_l)$	10	11	12	13	14	15

Таким образом, элементу  $A_{11}$  матрицы  $\mathbf{A}$  соответствует коэффициент при  $P(0, 0)$  в первом уравнении системы Колмогорова (7), элементу  $A_{21}$  соответствует коэффициент при  $P(0, 0)$  во втором уравнении системы (7), элементу  $A_{15,15}$  соответствует коэффициент при  $P(4, 0)$  в последнем уравнении системы (7) и т.д. В соответствии с вышесказанным, а также видом уравнений Колмогорова для данной системы, элементы матрицы, расположенные на главной диагонали, записываются как

$$(11) A_{\mathcal{G}(n_1, n_2), \mathcal{G}(n_1, n_2)} = -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)].$$

Остальные ненулевые элементы определяются соотношениями

$$(12) A_{\mathcal{G}(n_1, n_2), \mathcal{G}(n_1, n_2)} = \mu_4 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1),$$

$$A_{\mathcal{G}(n_1, n_2), \mathcal{G}(n_1, n_5)} = \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N),$$

$$A_{\mathcal{G}(n_1, n_2), \mathcal{G}(n_6, n_2)} = \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1).$$

Оставшиеся элементы  $A_{i,j}$  матрицы  $\mathbf{A}$  равны нулю. В (11) и (12) имеем  $n_1 = 0, \dots, N$ ,  $n_2 = 0, \dots, N$ ,  $n_3 = n_1 + 1$ ,  $n_4 = n_2 - 1$ ,  $n_5 = n_2 + 1$ ,  $n_6 = n_1 + n_2$ .

Таким образом, метод, основанный на использовании функции (10), позволяет построить матрицу коэффициентов (9) (инфинитезимальную матрицу) без использования дополнительных условий «если» при переборе состояний  $n_k$  и  $n_l$  и существенно упрощает алгоритм.

### 5. Функции $v_1(x, M)$ и $v_2(x, K)$

Условия, при которых в уравнении (7) отсутствуют определенные слагаемые, были описаны в предыдущем разделе. Теперь необходимо определить вид функций  $v_1(x, M)$  и  $v_2(x, K)$ . Формально исключение определенных слагаемых в (7) и сохранение оставшихся можно осуществить с помощью функции Хевисайда

$$(13) \quad \sigma(x, x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ 1, & x \geq x_0. \end{cases}$$

Однако эта функция, по сути, является логической, а не аналитической и, следовательно, не очень удобна при разработке программы. В частности, при ее использовании в программном коде необходимо использовать дополнительные условия «если». Аналитически зависимость (13) может быть записана, например, как

$$(14) \quad \sigma(x, x_0) = \frac{1}{2} \left( 1 + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \tanh \left[ \alpha (x - x_0) \right] \right\} \right).$$

Но вычисление данного предела также затруднительно. Кроме того, гиперболический тангенс равен единице только при  $x \rightarrow \infty$ , а при остальных  $x$  он близок к единице, но не равен ей. Поэтому для возможности компактного аналитического представления системы уравнений Колмогорова была введена функция

$$(15) \quad \sigma_1(x, x_0) = \frac{|x - x_0| + x - x_0}{2|x - x_0|},$$

которая является аналитической и принимает те же значения, что и (13). Таким образом, функция, ограничивающая снизу допустимые состояния системы, системы имеет вид

$$(16) \nu_1(x, M) = \frac{|x - M + 0.5| + x - M + 0.5}{2|x - M + 0.5|},$$

где  $M$  – нижнее допустимое состояние системы. Смещение на 0,5 по оси  $x$  выбрано в связи с тем, что в противном случае при  $x = M$  эта функция была бы неопределенна, а ее производная стремилась бы к бесконечности в этой точке.

Аналогично с (15) введем функцию

$$(17) \sigma_2(x, x_0) = \frac{|x_0 - x| + x_0 - x}{2|x_0 - x|},$$

которая позволяет записать окончательное выражение функции, ограничивающей сверху допустимые состояния системы

$$(18) \nu_1(x, K) = \frac{|K - x - 0.5| + K - x - 0.5}{2|K - x - 0.5|},$$

где  $K$  – верхнее допустимое состояние системы. Применительно к решаемой задаче  $x$  может принимать значения  $n_1, n_2, n_1+n_2$  и т.д.

Преимуществом функций (16) и (18) в сравнении с (13) является отсутствие дополнительных условий «если», что существенно сокращает сложность программного кода и позволяет упростить аналитическое исследование соответствующей системы.

## 6. Сравнение алгоритмов

Алгоритм составления уравнений Колмогорова для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе в соответствии с [9] представляет собой последовательную проверку условий в (3), т.е.:

если  $n_1, n_2 = 0$ , то

$$(19) \frac{dP(0,0,t)}{dt} = -\lambda P(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t);$$

если  $n_1 = 0, n_2 = 1, \dots, N - 1$ , то

$$(20) \quad \frac{dP(0, n_2, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P(0, n_2, t) + \mu_1 P(0, n_2 - 1, t) + \\ + \mu_2 P(0, n_2 + 1, t);$$

если  $n_1 = 0, n_2 = N$ , то

$$(21) \quad \frac{dP(0, N, t)}{dt} = -\mu_2 P(0, N, t) + \mu_1 P(1, N - 1, t);$$

если  $n_1 = 1, \dots, N - 1, n_2 = 0$ , то

$$(22) \quad \frac{dP(n_1, 0, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P(n_1, 0, t) + \mu_2 P(n_1, 1, t);$$

если  $n_1 = N, n_2 = 0$ , то

$$(23) \quad \frac{dP(N, 0, t)}{dt} = -\mu_1 P(N, 0, t) + \lambda P(N - 1, 0, t);$$

если  $n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$ , то

$$(24) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \\ + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t) + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t);$$

если  $n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N$ , то

$$(25) \quad \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\ + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t);$$

Блок-схема алгоритма (19)–(25) представлена на рис. 2.

Алгоритм составления уравнений Колмогорова в соответствии с методом, представленным в данной статье, сводится к вычислению (7) при различных значениях  $n_1, n_2$ . Блок-схема этого алгоритма представлена на рис. 3.

Для оценки временной асимптотической сложности алгоритмов введем следующие обозначения:  $A$  – число проходов первого цикла,  $B$  – число проходов второго цикла. Поскольку  $n_{1max} = n_{2max} = N$ , то число проходов в каждом цикле равно  $A = B = N$ . Общее число проходов равно числу уравнений в (3)  $(N^2 + 3N + 2)/2$ . Тогда временная сложность обоих алгоритмов одинакова и равна  $O(A \cdot B) = O(N^2)$  [5].

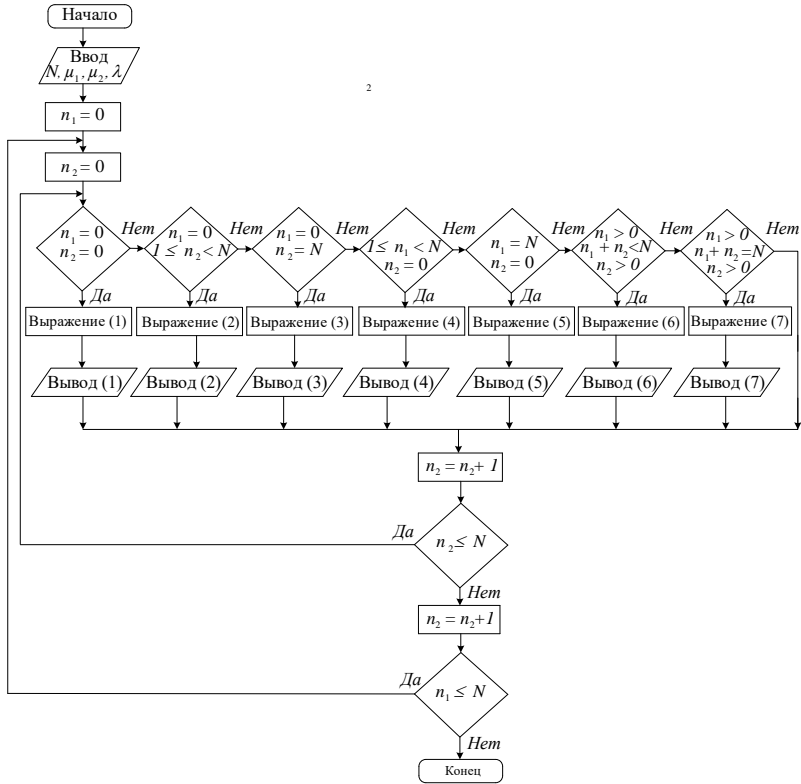


Рис. 2. Блок-схема алгоритма (19)–(25)

С точки зрения емкостной сложности (сложности по памяти), то она одинакова для обоих алгоритмов и равна  $O(A \cdot B) = O(N^2)$ , поскольку при каждом проходе записывается всего одно дифференциальное уравнение Колмогорова.

При этом в первом алгоритме для записи требуемого выражения имеется семь условных операторов «если». Проверка каждого условия в «лучшем варианте» занимает от 1 до 2 тактов условного процессора, в «худшем варианте» – от 10 до 20 тактов процессора. Во втором алгоритме присутствует только один условный оператор. Таким образом, выполнение первого алгоритма в «худшем варианте» предполагает использование на

$7 \cdot 20 - 20 = 120$  тактов условного процессора больше, в «лучшем варианте» количество тактов в обоих случаях равно. Таким образом, введение новых функций существенно уменьшает требуемый вычислительный ресурс, необходимый для выполнения поставленной задачи.

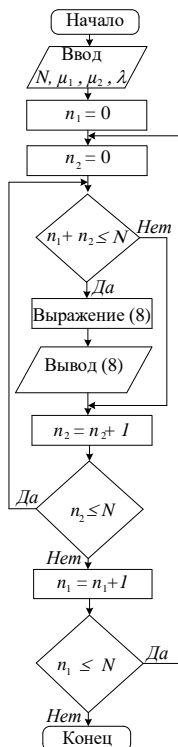


Рис. 3. Блок-схема нового алгоритма, использующего функции  $v_1(x, M)$  и  $v_2(x, K)$

Для определения эффективного по времени алгоритма также был проведен натурный эксперимент. Реализация обоих алгоритмов проведена на языке Python. Определение времени выполнения произведено с помощью литерала `%time it`. Для первого алгоритма получим время  $9 K$ , а во втором —  $3 K$ . Таким образом, за счет уменьшения общего числа итераций во втором

алгоритме значительно снизились вычислительные издержки, что говорит о временной эффективности предлагаемого алгоритма (таблица 2).

Таблица 2. Результаты определения времени выполнения алгоритма

$N$	10	20	30
Время выполнения алгоритма 1, с	0,001	1,05	2,9
Время выполнения алгоритма 2, с	0,001	0,35	0,97

## 7. Заключение

В данной работе предложен новый алгоритм построения прямой системы уравнений Колмогорова, существенно упрощающий анализ и расчет вероятностей состояний двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе в переходном режиме. Разработанный алгоритм основывается на использовании новых функций, введенных авторами. В работе также проведен сравнительный анализ сложности ранее используемых алгоритмов и алгоритма, представленного авторами. Показано, что предлагаемый алгоритм требует меньших объемов вычислительных ресурсов и особенно эффективен при исследовании переходного режима СМО с большим числом заявок в системе.

## Приложение 1

Код программы построения системы уравнений Колмогорова для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным временем обслуживания на каждой фазе и ограниченным буфером в символьном пакете вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом:

```
restart:
with(linalg):
N := 4:
```

```

v1:=(x,m) -> evalf((1/2)*(abs(x-m+.5)+x-m+.5)/abs(x-m+.5), 2)
v2 := (x, k) -> evalf((1/2)*(abs(k-x-.5)+k-x-.5)/abs(k-x-.5), 2)
for n1 from 0 to N do for n2
    from 0 to N do
        if n1+n2 <= N then
            print("n1=", n1, "n2=", n2);
            print((Diff(P(n1,n2),
t))*v2(n1+n2,N+1)+(lambda*v2(n1+n2,
N)+mu[1]*v1(n1,1)+mu[2]*v1(n2,
1))*P(n1,n2,t)*v2(n1+n2,N+1)-
mu[1]*v1(n2,1)*v2(n1+n2,N+1)*P(n1+1,n2-1,t)-
mu[2]*v2(n1+n2,N)*P(n1,n2+1,t)-
lambda*v1(n1,1)*v2(n1+n2,N+1)*P(n1-1,
n2,t)=0)
        end if;
    end do;
end do;
end do;

```

Результаты построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова для  $N = 4$  в пакете символьных вычислений MAPLE17 в соответствии с разработанным методом:

$$\begin{aligned}
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 0} \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 0) \right) + 1.00\lambda P(0, 0, t) - 1.0\mu_2 P(0, 1, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 1} \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 1) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_2) P(0, 1, t) - 1.0\mu_1 P(1, 0, t) - 1.0\mu_2 P(0, 2, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 2} \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 2) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_2) P(0, 2, t) - 1.0\mu_1 P(1, 1, t) - 1.0\mu_2 P(0, 3, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 3} \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 3) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_2) P(0, 3, t) - 1.0\mu_1 P(1, 2, t) - 1.0\mu_2 P(0, 4, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 0, "n2=", 4} \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(0, 4) \right) + 1.0\mu_2 P(0, 4, t) - 1.0\mu_1 P(1, 3, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 1, "n2=", 0} \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(1, 0) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1) P(1, 0, t) - 1.0\mu_2 P(1, 1, t) - 1.0\lambda P(0, 0, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 1, "n2=", 1} \\
 & 1.0 \left( \frac{d}{dt} P(1, 1) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(1, 1, t) - 1.0\mu_1 P(2, 0, t) - 1.0\mu_2 P(1, 2, t) - 1.0\lambda P(0, 1, t) = 0 \\
 & \text{"n1=", 1, "n2=", 2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &1.0 \left( \frac{d}{dt} P(1, 2) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(1, 2, t) - 1.0\mu_1 P(2, 1, t) - 1.0\mu_2 P(1, 3, t) - 1.0\lambda P(0, 2, t) = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad "n1=", 1, "n2=", 3 \\
 &1.0 \left( \frac{d}{dt} P(1, 3) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(1, 3, t) - 1.0\mu_1 P(2, 2, t) - 1.0\lambda P(0, 3, t) = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad "n1=", 2, "n2=", 0 \\
 &1.0 \left( \frac{d}{dt} P(2, 0) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1) P(2, 0, t) - 1.0\mu_2 P(2, 1, t) - 1.0\lambda P(1, 0, t) = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad "n1=", 2, "n2=", 1 \\
 &1.0 \left( \frac{d}{dt} P(2, 1) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(2, 1, t) - 1.0\mu_1 P(3, 0, t) - 1.0\mu_2 P(2, 2, t) - 1.0\lambda P(1, 1, t) = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad "n1=", 2, "n2=", 2 \\
 &1.0 \left( \frac{d}{dt} P(2, 2) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(2, 2, t) - 1.0\mu_1 P(3, 1, t) - 1.0\lambda P(1, 2, t) = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad "n1=", 3, "n2=", 0 \\
 &1.0 \left( \frac{d}{dt} P(3, 0) \right) + 1.0 (1.0\lambda + 1.0\mu_1) P(3, 0, t) - 1.0\mu_2 P(3, 1, t) - 1.0\lambda P(2, 0, t) = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad "n1=", 3, "n2=", 1 \\
 &1.0 \left( \frac{d}{dt} P(3, 1) \right) + 1.0 (1.0\mu_1 + 1.0\mu_2) P(3, 1, t) - 1.0\mu_1 P(4, 0, t) - 1.0\lambda P(2, 1, t) = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad "n1=", 4, "n2=", 0 \\
 &1.0 \left( \frac{d}{dt} P(4, 0) \right) + 1.0\mu_1 P(4, 0, t) - 1.0\lambda P(3, 0, t) = 0
 \end{aligned}$$

### Литература

1. БАРАБАНОВА Е.А., ВЫТОВТОВ К.А., ПОДЛАЗОВ В.С. *Двухкаскадные дуальные фотонные коммутаторы в расширенном схемном базисе* // Проблемы управления. – 2021. – № 1. – С. 69–81.
2. БАРАБАНОВА Е.А., ВЫТОВТОВ К.А. *Аналитический метод исследования поведения системы массового обслуживания при скачкообразно-изменяющихся потоках информации* // Физические основы приборостроения. – 2021. – Т. 10, №1(39). – С. 36–47.
3. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНОК В.И. *Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях.* – М.: Рекламно-издательский центр «ТЕХНОСФЕРА». – 2018. – 564 с.

4. ДУДИН С.А., ДУДИНА О.С. *Модель функционирования центра информационной и технической поддержки как двухфазная система массового обслуживания // Проблемы передачи информации.* – 2013. – Т. 49, №1. – С. 66–82. – DOI:10.1134/S0032946013010067.
5. КРУПКИЙ В.Н., ПЛИСКО В.Е. *Теория алгоритмов.* – М.: Академия, 2009. – 208 с.
6. САВИНОВ Ю.Г., ЩУКИН А.Н., ПОДГОРНОВ М.Д. *Математическая модель мультисервисного кол-центра с многоэтапным обслуживанием и дообслуживанием неприоритетных заявок // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ.Электрон. журн.* – 2021. – №1. – С. 109–117.
7. GRIFFITHS J.D., LEONENKO G.M., WILLIAMS J.E. *The transient solution to M/Ek/1 queue // Operations Research Letters.* – 2006. – Vol. 34. – P. 349–354.
8. GRIFFITHS J.D., LEONENKO G.M., WILLIAMS J.E. *Time-Dependent Analysis of Non-Empty M/Ek/1 Queue // Quality Technology of Quantitative Management Quantitative Management.* – 2008. – Vol. 5, No. 3. – P. 309–320.
9. JACKSON R.R.P. *Queueing Systems with Phase Type Service // Operational Research Society.* – 1954. – Vol. 5, No. 4. – P. 109–120.
10. KEMPA W.M., PAPROCKA I. *Transient behavior of a queueing model with hyper-exponentially distributed processing times and finite buffer capacity // Sensors.* – 2022. – Vol. 22(24). – P. 9909. <https://doi.org/10.3390/s22249909>.
11. KLIMENOK V.I., VISHNEVSKY V. *A dual tandem queue with multi-server stations and losses // Communications in Computer and Information Science.* – 2016. – Vol. 608. – P. 316–325.
12. RUBINO G. *Transient analysis of Markovian queueing systems: A survey with focus on closed forms and uniformization // Queueing Theory 2: Advanced Trends.* – Wiley-ISTE: Hoboken, NJ, USA. – 2021. – P. 269–307.

13. SHIN YANG WOO, KIM DONG OK, MOON DUG HEE. *An approximate analysis of tandem queues with general blocking nodes* // Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2022. – Vol. 26, Iss. 1. – P. 1–22.
14. VISHNEVSKY V., VYTOVTOV K., BARABANOVA E., SEMENOVA O. *Analysis of a MAP/M/1/N Queue with Periodic and Non-Periodic Piecewise Constant Input Rate* // Mathematics. – 2022. – Vol. 10(10). – 1684.

### **ALGORITHM FOR CONSTRUCTING A SYSTEM OF KOLMOGOROV EQUATIONS FOR STUDYING THE TRANSITION REGIME OF TWO-PHASE QUEUING SYSTEMS WITH A LARGE NUMBER OF REQUESTS**

**Konstantin Vytovtov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Associate Professor (vytovtov\_konstan@mail.ru).

**Elizaveta Barabanova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Associate Professor (elizavetaalex@yandex.ru).

**Vladimir Vishnevsky**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Doctor of Technical (Engineering) Science, Professor (vishn@inbox.ru).

**Svetlana Volkova**, Astrakhan State Technical University, PhD, Associate Professor, (svolkovav2017@gmail.com).

**Georgii Vytovtov**, Astrakhan State Technical University, Student, (georgii.vytovtov@gmail.com).

*Abstract: This work is devoted to the development of the Kolmogorov differential equations system constructing algorithm for a single-line queuing system with a Poisson input and phase service. The case of two phase system and an arbitrary finite number of customers in the system is considered. The new functions that significantly simplify the Kolmogorov differential equations system constructing algorithm and the system infinitesimal matrix are introduced. A comparative analysis of the complexity of previous algorithms and the algorithm presented by the authors is carried out too. The use of this algorithm will allow in the future to obtain analytical and numerical solutions of the main performance characteristics of the M/PH/1/n QS with a large number of applications in the transient operation mode.*

Keywords: a single-line queuing system, phase service, Kolmogorov differential equations system, algorithm complexity.

УДК 519.217.13

ББК 30в6

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.4

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

*Поступила в редакцию 09.03.2023.*

*Опубликована 30.09.2023.*