

О КЛАССЕ ДВУХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДВУХ НЕСИНХРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ¹

Берлин Л. М. ², Галяев А. А. ³, Кравцова С. К. ⁴

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача быстрогодействия в системе, состоящей из двух несинхронных осцилляторов. Исследуемая постановка имеет ряд отличительных особенностей, таких как, например, то, что каждый из осцилляторов системы управляется единым ограниченным скалярным управлением, целью которого является разгон первого осциллятора из состояния покоя в заданное положение. В терминальный момент фазовые координаты второго осциллятора снова становятся равными нулю. Оптимальное управление в данной задаче имеет релейный вид, поэтому ключевыми являются решения с различным количеством переключений управления. Базовым является случай с тремя переключениями, так как в данном классе управления достаточно использовать решение системы уравнений динамики. Для большего количества неизвестных моментов переключения известны необходимые условия оптимальности, позволяющие рассматривать произвольные классы управления. При различных вырождениях указанных классов происходит изменение количества переключений управления. Интерес представляет класс двух переключений, для значений параметров которого выписаны функциональные зависимости. Проведено математическое моделирование для иллюстрации полученных аналитических результатов.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, релейное управление, осцилляторы.

1. Введение

Задачи с недостатком ресурса управления, когда размерность вектора управления меньше или значительно меньше размерности пространства состояний физической системы, имеют широкое применение на практике. Колебательные системы, такие как

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта молодёжной научной школы «Методы оптимизации и планирования движения управляемых объектов».

² Леонид Михайлович Берлин, математик (berlin.lm@phystech.edu).

³ Андрей Алексеевич Галяев, д.т.н., г.н.с (galaev@ipu.ru).

⁴ Софья Константиновна Кравцова, техник (kravtsovasofja@mail.ru).

механические системы [4, 8, 10] или квантовые осцилляторы [11], управляемые одной внешней силой, являются примерами подобных систем. Движение балки Тимошенко, которое описывается динамикой управляемой системы, состоящей из N осцилляторов, совершающих вынужденные колебания под действием скалярной и ограниченной силы, по энергетическому критерию было рассмотрено в работе [10]. Задача быстрогодействия для платформы с осцилляторами, которая может описывать малые перемещения платформы с упругими звеньями или сосуда с жидкостью, исследуется в [4]. Задача синтеза оптимального управления по критерию максимума изменения энергии колебаний системы осцилляторов за заданное время с управлением по частоте приводится в [6]. Ввиду трудности нахождения аналитического решения задач управления отдельный интерес представляет синтез асимптотически оптимального управления для системы, состоящей из произвольного числа линейных осцилляторов при общем ограниченном управлении, который получен в [8].

Исследуются задачи оптимального управления при помощи принципа максимума Понтрягина, началом разработки которого послужил в 50-х годах XX века семинар по теории колебаний и автоматическому управлению Л.С. Понтрягина и М.А. Айзермана, где, в частности, рассматривалась задача оптимального быстрогодействия одиночным осциллятором [9], для которой В.Г. Болтянский осуществил синтез оптимального управления [3]. В свою очередь, для систем осцилляторов зачастую необходимо, чтобы одна из подсистем как можно быстрее пришла в требуемое положение, тогда как другие подсистемы должны остаться в состоянии покоя в терминальный момент. Задача быстрогодействия системы уже многих маятников исследовалась Ф.Л. Черноусько в [5], где и была отмечена существенная аналитическая сложность получения решения, а само решение для двух осцилляторов было предложено только в частном случае отношения частот. При поиске решения задачи оптимального управления ключевым вопросом является исследование достижимости и управляемости. Для системы двух несинхронных осцилляторов с ограниченным

и скалярным управлением показана сильная достижимость и глобальная управляемость [1].

Настоящая работа является продолжением исследования системы, состоящей из двух несинхронных осцилляторов, и направлена на математическое описание класса двух переключений управления, который зачастую наблюдается при различных типах вырождений классов с большим числом переключений управления. Такая ситуация возникает, например, когда либо обнуляется крайний интервал в случае управления с тремя переключениями, либо становится равным нулю любой внутренний интервал в классе четырёх переключений.

Структура работы по исследованию класса двух переключений в задаче быстрогодействия для двух несинхронных осцилляторов включает в себя 3 раздела. В разделе 1 обсуждается постановка задачи оптимального управления, приводятся полученные авторами ранее необходимые условия экстремума в заданном и произвольном классе переключений управления. В разделе 2 формулируются и доказываются функциональные зависимости для класса двух переключений. Раздел 3 посвящен иллюстрации полученных результатов, в частности, математическому моделированию множества достижимости первого осциллятора и критерия задачи.

2. Постановка и решение задачи оптимального управления

Рассматривается система из двух несинхронных осцилляторов (т.е. имеющих различные собственные частоты колебаний: $\omega_1 \neq \omega_2$). Управление $u(t)$ входит симметрично в уравнения для импульсов осцилляторов. Динамика такой линейной управляемой системы описывается следующими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{q}_1(t) = p_1(t), \\ \dot{p}_1(t) = -\omega_1^2 q_1(t) + u(t), \\ \dot{q}_2(t) = p_2(t), \\ \dot{p}_2(t) = -\omega_2^2 q_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x = (q_1, p_1, q_2, p_2)^\top \in \mathbb{R}^4.$$

Система (1) может быть переписана в матричной форме

$$(2) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Стоит отметить, что число ненулевых компонент вектора управления B меньше размерности системы и само управление ограничено значением ε , которое является параметром задачи:

$$(3) \quad u(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon] = U.$$

В начальный момент времени фазовые координаты осцилляторов совпадают с началом координат фазовой плоскости, т.е. их координаты и импульсы равны нулю. В терминальный момент фазовые координаты второго осциллятора становятся равными нулю, в то время как первый осциллятор переводится в состояние $(q_1^{T_0}, p_1^{T_0})$, которое также является параметром задачи. Явный вид граничных условий выглядит следующим образом:

$$(4) \quad x(0) = x_0 = (0, 0, 0, 0)^\top,$$

$$(5) \quad x(T_0) = x_{T_0} = (q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, 0, 0)^\top,$$

где за T_0 обозначено общее время движения системы из начального состояния в конечное, которое выбрано в качестве критерия задачи:

$$(6) \quad T_0 = \int_0^{T_0} dt \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Для задачи (1)–(6) в работах [2, 7] получен релейный вид оптимального управления

$$(7) \quad u^*(t) = \varepsilon(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) + C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t))$$

и определены следующие величины: момент переключения управления t_i , $i = 1, \dots, K - 1$, $K \in \mathbb{N}$, когда управление меняет знак на противоположный, и длительность интервала управления τ_n , $n = 1, \dots, K$, в течение которого управление сохраняет знак после достижения соответствующего момента переключения.

Определение 1. Класс $K - 1$ переключения соответствует решению, в котором оптимальное управление имеет $K - 1$ переключение.

Решение системы (1) с условиями (4)–(5), принимая во внимание не только количество переключений $K - 1$, но и знак управления на первом интервале, выписывается в виде

$$(8) \quad \begin{cases} 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left(\omega_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = \\ = (-1)^{K-1} + (-1)^{k+1} \frac{q_1^{T_0} \omega_1^2}{\varepsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left(\omega_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = \\ = (-1)^k \frac{p_1^{T_0} \omega_1}{\varepsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left(\omega_2 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \cos \left(\omega_2 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = (-1)^{K-1}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left(\omega_2 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \sin \left(\omega_2 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = 0, \end{cases}$$

где дополнительный параметр k , равный 0 или 1, соответствует начальному управлению ε и $-\varepsilon$ соответственно. Доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Необходимые условия экстремума. Любое решение задачи (1)–(6) в классе релейных управлений (7) удовлетворяет системе (8) и уравнениям*

$$(9) \quad \det \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_i) & \cos(\omega_1 t_{i+1}) & \cos(\omega_1 t_{i+2}) & \cos(\omega_1 t_{i+3}) \\ \sin(\omega_1 t_i) & \sin(\omega_1 t_{i+1}) & \sin(\omega_1 t_{i+2}) & \sin(\omega_1 t_{i+3}) \\ \cos(\omega_2 t_i) & \cos(\omega_2 t_{i+1}) & \cos(\omega_2 t_{i+2}) & \cos(\omega_2 t_{i+3}) \\ \sin(\omega_2 t_i) & \sin(\omega_2 t_{i+1}) & \sin(\omega_2 t_{i+2}) & \sin(\omega_2 t_{i+3}) \end{pmatrix} = 0,$$

$$i = 1, \dots, K - 4.$$

В следующей главе будет подробно рассмотрен класс двух переключений управления ($K - 1 = 2$).

3. Класс двух переключений

Класс двух переключений охватывает все решения задачи оптимального управления (1)–(6), в которых оптимальное управление представлено кусочно-постоянной функцией (см. рис. 1).

Система (8) для различных конечных состояний первого осциллятора $(p_1^{T_0}, q_1^{T_0})$ и двух переключений управления записывается в следующем виде:

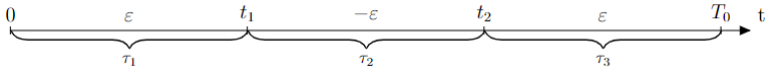


Рис. 1. Связь переменных τ и t при начальном управлении

$$(10) \quad \begin{cases} \cos(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\cos(\omega_1(\tau_2 + \tau_3)) + 2\cos(\omega_1\tau_3) = \\ = 1 + (-1)^{k+1} \frac{q_1^{T_0} \omega_1^2}{\epsilon}, \\ \sin(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\sin(\omega_1(\tau_2 + \tau_3)) + 2\sin(\omega_1\tau_3) = \\ = (-1)^k \frac{p_1^{T_0} \omega_1}{\epsilon}, \\ \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) + 2\cos(\omega_2\tau_3) = 1, \\ \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) + 2\sin(\omega_2\tau_3) = 0. \end{cases}$$

Если полученную систему (10) из четырёх уравнений рассматривать относительно неизвестных $\tau_1, \tau_2, \tau_3, q_1^{T_0}, p_1^{T_0}$, то, неявно разрешив эти уравнения, можно построить кривую на фазовой плоскости первого осциллятора, соответствующую классу двух переключений, что и будет показано в разделе, посвящённом моделированию. Для этого в следующей лемме приводится параметрическая зависимость $\tau_2(\tau_1)$ и $\tau_3(\tau_1)$, используя последние два уравнения системы (10), которые не содержат $q_1^{T_0}, p_1^{T_0}$.

Лемма 1. В классе двух переключений функциональные зависимости для длительностей интервалов управления τ_1, τ_2, τ_3 выглядят следующим образом:

$$(11) \quad \left[\begin{cases} \tau_3 = \tau_1 + \frac{2\pi z_1}{\omega_2}, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2}{\omega_2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \frac{2\pi z_4}{\omega_2}, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_3 = -\tau_1 + \frac{2\pi z_2}{\omega_2}, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2\pi z_8}{\omega_2}, \quad z_8 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right.$$

Доказательство.

Рассматриваются отдельно последние два уравнения системы (10):

$$(12) \quad \begin{cases} \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) = 1 - 2\cos(\omega_2\tau_3), \\ \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) = -2\sin(\omega_2\tau_3). \end{cases}$$

Представленные уравнения возводятся в квадрат и суммируются, что приводит к следующему равенству:

$$(13) \quad \begin{aligned} 1 - 4\cos(\omega_2\tau_3) + 4 &= 1 + 4 - 4\cos(\omega_2\tau_1), \\ \cos(\omega_2\tau_3) &= \cos(\omega_2\tau_1), \\ \cos(\omega_2\tau_3) - \cos(\omega_2\tau_1) &= 0, \\ -2\sin\left(\frac{\omega_2\tau_3 + \omega_2\tau_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_2\tau_3 - \omega_2\tau_1}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Откуда следуют два периодических решения уравнения (13):

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_2\tau_3 = \omega_2\tau_1 + 2\pi z_1, & z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2\tau_3 = -\omega_2\tau_1 + 2\pi z_2, & z_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

которые для проверки подставляются в последние два уравнения системы (10):

$$(15) \quad \begin{cases} \omega_2\tau_3 = \omega_2\tau_1 + 2\pi z_1, & z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(\omega_2(2\tau_1 + \tau_2)) - 2\cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_1)) + 2\cos(\omega_2\tau_1) = 1, \\ \sin(\omega_2(2\tau_1 + \tau_2)) - 2\sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_1)) + 2\sin(\omega_2\tau_1) = 0, \\ \omega_2\tau_3 = -\omega_2\tau_1 + 2\pi z_2, & z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(\omega_2\tau_2) - 2\cos(\omega_2(\tau_2 - \tau_1)) + 2\cos(\omega_2\tau_1) = 1, \\ \sin(\omega_2\tau_2) - 2\sin(\omega_2(\tau_2 - \tau_1)) - 2\sin(\omega_2\tau_1) = 0. \end{cases}$$

Дальнейшая проверка решений (14) с целью исключения посторонних корней будет продолжена после нахождения дополнительных функциональных зависимостей, для чего складываются квадраты двух последних уравнений системы (10):

$$(16) \quad 2 + \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2)) - 2\cos(\omega_2\tau_2) - \cos(\omega_2\tau_1) = 0.$$

Дальнейшие преобразования направлены на разделение переменных в уравнении (16).

$$\begin{aligned} 2 + \cos(\omega_2\tau_1)\cos(\omega_2\tau_2) - \sin(\omega_2\tau_1)\sin(\omega_2\tau_2) - 2\cos(\omega_2\tau_2) &= \cos(\omega_2\tau_1), \\ \cos(\omega_2\tau_2)(\cos(\omega_2\tau_1) - 2) + 2 - \cos(\omega_2\tau_1) &= \sin(\omega_2\tau_1)\sin(\omega_2\tau_2), \\ (\cos(\omega_2\tau_1) - 2)(\cos(\omega_2\tau_2) - 1) &= \sin(\omega_2\tau_1)\sin(\omega_2\tau_2). \end{aligned}$$

Можно оставить с одной стороны слагаемые, зависящие только от τ_1 , а с другой стороны – от τ_2 , выполнив деление последнего равенства на $(\cos(\omega_2\tau_1) - 2)$ и на $\sin(\omega_2\tau_2)$:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{\cos(\omega_2\tau_1) - 2} &= \frac{\cos(\omega_2\tau_2) - 1}{\sin(\omega_2\tau_2)}, \\ \frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{\cos(\omega_2\tau_1) - 2} &= -\frac{1 - \cos(\omega_2\tau_2)}{\sin(\omega_2\tau_2)}, \\ \frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{\cos(\omega_2\tau_1) - 2} &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2\tau_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Деление определяет ещё одно возможное решение

$$(18) \quad \omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}.$$

Из (17) следует выражение для τ_2 :

$$(19) \quad \frac{\omega_2 \tau_2}{2} = \arctg \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}.$$

Требуется проверить решения (18) и (19) на наличие посторонних корней путём подстановки в систему (15).

Случай $\omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}$:

$$(20) \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{z_3} \cos(2\omega_2 \tau_1) - 2(-1)^{z_3} \cos(\omega_2 \tau_1) + 2\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ (-1)^{z_3} \sin(2\omega_2 \tau_1) - 2(-1)^{z_3} \sin(\omega_2 \tau_1) + 2\sin(\omega_2 \tau_1) = 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{z_3} - 2(-1)^{z_3} \cos(\omega_2 \tau_1) + 2\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ 2(-1)^{z_3} \sin(\omega_2 \tau_1) - 2\sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Далее каждая система из совокупности (20) рассматривается по отдельности.

Первая система для нечётных $z_3 = 2z_5 + 1, \quad z_5 \in \mathbb{Z}$:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_5 + 1), \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ -\cos(2\omega_2 \tau_1) + 4\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ -\sin(2\omega_2 \tau_1) + 4\sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{array} \right.$$

$\omega_2 \tau_1 = \pi z_6, \quad z_6 \in \mathbb{Z}$, является решением последнего уравнение системы (21), но не удовлетворяет остальным.

Первая система для чётных $z_3 = 2z_5, \quad z_5 \in \mathbb{Z}$:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_5), \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(2\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin(2\omega_2 \tau_1) = 0, \end{array} \right.$$

решением которой является

$$(23) \quad \omega_2 \tau_1 = \pi z_7, \quad z_7 \in \mathbb{Z}.$$

Вторая система для нечётных $z_3 = 2z_8 + 1$, $z_8 \in \mathbb{Z}$:

$$(24) \quad \begin{cases} \omega_2\tau_3 = -\omega_2\tau_1 + 2\pi z_2, & z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2\tau_2 = \pi(2z_8 + 1), & z_8 \in \mathbb{Z}, \\ 2\cos(\omega_2\tau_1) = 1, \\ -4\sin(\omega_2\tau_1) = 0 \end{cases}$$

решений не имеет.

Вторая система для чётных $z_3 = 2z_8$, $z_8 \in \mathbb{Z}$:

$$(25) \quad \begin{cases} \omega_2\tau_3 = -\omega_2\tau_1 + 2\pi z_2, & z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2\tau_2 = \pi(2z_8), & z_8 \in \mathbb{Z}, \\ 1 - 2\cos(\omega_2\tau_1) + 2\cos(\omega_2\tau_1) = 1, \\ 2\sin(\omega_2\tau_1) - 2\sin(\omega_2\tau_1) = 0. \end{cases}$$

выполнена тождественно.

Проверка (19) для первой системы:

$$(26) \quad \begin{cases} \omega_2\tau_3 = \omega_2\tau_1 + 2\pi z_1, & z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\omega_2\tau_2}{2} = \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{2 - \cos(\omega_2\tau_1)}\right) + \pi z_4, & z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \cos\left(2\omega_2\tau_1 + 2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{2 - \cos(\omega_2\tau_1)}\right)\right) - \\ - 2\cos\left(\omega_2\tau_1 + 2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{2 - \cos(\omega_2\tau_1)}\right)\right) + \\ + 2\cos(\omega_2\tau_1) = 1, \\ \sin\left(2\omega_2\tau_1 + 2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{2 - \cos(\omega_2\tau_1)}\right)\right) - \\ - 2\sin\left(\omega_2\tau_1 + 2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{2 - \cos(\omega_2\tau_1)}\right)\right) + \\ + 2\sin(\omega_2\tau_1) = 0. \end{cases}$$

Используя вспомогательные равенства

$$(27) \quad \begin{aligned} \cos\left(2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{2 - \cos(\omega_2\tau_1)}\right)\right) &= \frac{4 - 4\cos(\omega_2\tau_1) + \cos(2\omega_2\tau_1)}{5 - 4\cos(\omega_2\tau_1)}, \\ \sin\left(2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{2 - \cos(\omega_2\tau_1)}\right)\right) &= \frac{4\sin(\omega_2\tau_1) - \sin(2\omega_2\tau_1)}{5 - 4\cos(\omega_2\tau_1)} \end{aligned}$$

можно показать, что уравнения системы (26) выполнены тождественно.

Проверка решения (19) для второй системы:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\omega_2 \tau_2}{2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \cos \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) \right) - \\ - 2 \cos \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) - \omega_2 \tau_1 \right) + \\ + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) \right) - \\ - 2 \sin \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) - \omega_2 \tau_1 \right) - \\ - 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{array} \right.$$

Преобразования для последнего уравнения системы (28):

$$(29) \quad \frac{4 \sin(\omega_2 \tau_1) - \sin(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1)} (1 - 2 \cos(\omega_2 \tau_1)) + \\ + 2 \sin(\omega_2 \tau_1) \left(\frac{4 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1) + \cos(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1)} - 1 \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} 2 \sin(\omega_2 \tau_1) - 5 \sin(2\omega_2 \tau_1) + 2 \sin(3\omega_2 \tau_1) &= 0, \\ 2 \sin(\omega_2 \tau_1) - 10 \sin(\omega_2 \tau_1) \cos(\omega_2 \tau_1) + 6 \sin(\omega_2 \tau_1) \cos^2(\omega_2 \tau_1) - \\ - 2 \sin^3(\omega_2 \tau_1) &= 0, \\ \sin(\omega_2 \tau_1) (2 - 10 \cos(\omega_2 \tau_1) + 6 \cos^2(\omega_2 \tau_1) - 2 \sin^2(\omega_2 \tau_1)) &= 0, \\ \sin(\omega_2 \tau_1) \cos(\omega_2 \tau_1) (10 + 8 \cos(\omega_2 \tau_1)) &= 0. \end{aligned}$$

$$(30) \quad \left[\begin{array}{l} \omega_2 \tau_1 = \pi z_9, \quad z_9 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_1 = \frac{\pi}{2} + \pi z_{10}, \quad z_{10} \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Только первое решение из совокупности (30) удовлетворяет третьему уравнению системы (28), которое после преобразований принимает вид

$$(31) \quad \cos(2\omega_2 \tau_1) - 2 \cos(3\omega_2 \tau_1) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) - 8 \sin^2(\omega_2 \tau_1) = 1.$$

Все результаты объединяются в единую совокупность

$$(32) \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = \frac{2\pi z_5}{\omega_2}, \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_1 = \frac{\pi z_7}{\omega_2}, \quad z_7 \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2\pi z_8}{\omega_2}, \quad z_8 \in \mathbb{Z}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_1 = \frac{\pi z_9}{\omega_2}, \quad z_9 \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Для каждой из систем можно отметить, что последняя система является частным случаем всей совокупности, поэтому справедливы следующие упрощения:

$$(33) \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2\pi z_8, \quad z_8 \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

которое и заканчивает доказательство леммы.

В следующей главе приводится иллюстрация полученных теоретических результатов.

4. Моделирование

Рассматривается задача оптимального управления (1)–(6) с параметрами

$$(34) \quad \varepsilon = 0,4, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1,4.$$

Ранее для некоторых конечных состояний первого осциллятора $(q_1^{T_0}, p_1^{T_0})$ рассматривались различные управления, в том числе с тремя и четырьмя переключениями, где фазовая плоскость

первого осциллятора была размечена соответствующими классами переключений [7].

Используя утверждение леммы 1, можно, фиксируя различные значения τ_1 , вычислить длительности τ_2 , τ_3 и построить множество достижимости для первого осциллятора в классе двух переключений с релейным управлением, подставляя вычисленные длительности интервалов в первые два уравнения системы (10). После указанных операций требуется сравнить значение критерия для различного количества переключений.

Для исследуемого множества на фазовой плоскости первого осциллятора только четыре кривые, найденные по лемме 1, могут считаться оптимальными среди рассматриваемых классов. (см. рис. 2)

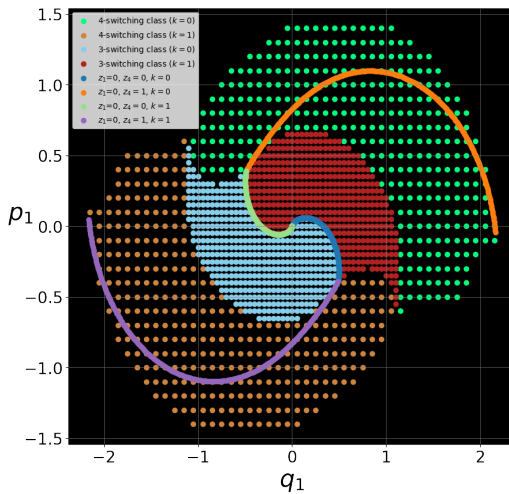


Рис. 2. Фазовая плоскость первого осциллятора

Различными цветами на рис. 2 обозначены классы трёх и четырёх переключений с различными управлениями на начальном интервале. Обнуление крайнего интервала управления в классе трёх переключений приводит к зелёной и голубой кривым класса двух переключений, которые разделяют классы трёх переключений. Обнуление внутреннего интервала управления в классе

четырёх переключений приводит к классу двух переключений, показанных оранжевой и фиолетовой кривой.

Для иллюстрации множества достижимости каждой точке исследуемой фазовой плоскости первого осциллятора будет поставлен в соответствие критерий задачи. Для удобства весь класс трёх переключений выделен красным цветом, четырёх – зелёным. (см. рис. 3)

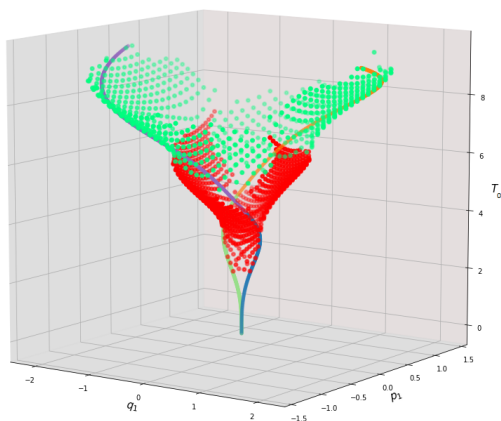


Рис. 3. Зависимость критерия задачи от конечных состояний первого осциллятора

5. Выводы

В работе рассмотрена задача оптимального управления двумя несинхронными осцилляторами. Релейный вид оптимального управления определяется количеством переключений управляющего воздействия. Подробно рассмотрен класс двух переключений, который получается при различных вырождениях последующих классов и обнулении длительностей интервалов управления. Для указанного класса получены функциональные зависи-

мости между переменными и параметрами задачи, что позволило провести математическое моделирование для иллюстрации приведённых аналитических результатов.

Литература

1. БЕРЛИН Л.М., ГАЛЯЕВ А.А., ЛЫСЕНКО П.В. *Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2022. – Т. 215. – С. 40–51.
2. БЕРЛИН Л.М., ГАЛЯЕВ А.А. *Условия экстремума при ограниченном скалярном управлении двумя несинхронными осцилляторами в задаче быстрогодействия* // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2022. – Т. 505, №1. – С. 86–91.
3. БОЛТЯНСКИЙ В.Г. *Математические методы оптимального управления*. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
4. КАЮМОВ О.Р. *Оптимальное по быстрдействию перемещение платформы с осцилляторами* // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85, №6. – С. 699–718.
5. ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л., АКУЛЕНКО Л.Д., СОКОЛОВ Б.Н. *Управление колебаниями*. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. ANDRESEN B., SALAMON P., HOFFMANN K.H., TSIRLIN A.M. *Optimal processes for controllable oscillators* // Automation and Remote Control – 2018. – Vol. 79. – P. 2103–2113.
7. BERLIN L.M., GALYAEV A.A., LYSSENKO P.V. *Time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators* // Mathematics – 2022. – Vol. 10, No. 19. – P. 3552.
8. FEDOROV A.K., OVSEEVICH A.I. *Asymptotic control theory for a system of linear oscillators* // Mosc. Math. J. – 2016. – Vol. 16. – P. 561–598.
9. PESCH H.J., PLAIL M. *The Maximum Principle of optimal control: A history of ingenious ideas and missed opportunities* // Control Cybern. – 2009. – Vol. 38. – P. 973–995.
10. SALOBUTINA E.O. *Regimes of more and more frequent switchings in the optimal control problem of oscillations of n oscillators* // J. Math. Sci. – 2008. – Vol. 151. – P. 3603–3610.

11. ZHAO Y., CHEN G.H. *Two oscillators in a dissipative bath* // Phys. A: Stat. Mech. Appl. – 2003. – Vol. 317. – P. 13–40.

ABOUT TWO-SWITCHING CONTROL CLASS IN THE TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF TWO NON-SYNCHRONOUS OSCILLATORS

Leonid Berlin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, mathematician (berlin.lm@phystech.edu).

Andrey Galyaev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Sciences, corresponding member of RAS (galyaev@ipu.ru).

Sofia Kravtsova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, technician (kravtsovasofja@mail.ru).

Abstract: The time-optimal control problem in a system consisting of two non-synchronous oscillators is considered. The studied formulation has a number of distinctive features, such as, for example, that each of the oscillators is controlled by a common bounded scalar control and the goal is to accelerate the first oscillator from rest to a given position in the shortest time. At the terminal moment the phase coordinates of the second oscillator become zero again. The optimal control is a relay mode, so solutions with different numbers of control switchings are the key. The basic one is the three-switching control class and for a larger number of unknown switching moments the necessary optimality conditions are known. The two-switching control class obtained by degeneracies is of interest, where functional dependences are written out for the values of interval durations. Mathematical modeling was carried out to illustrate the obtained analytical results.

Keywords: Pontryagin's maximum principle, relay control, oscillators.

УДК 517.9

ББК 32.96

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.

Поступила в редакцию 17.01.2023.

Дата опубликования 31.01.2023.