DOI: 10.25728/tas.2019.50.2.5

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Моисеев С.И., Мышовская Л.П., Половинкина А.И.
(*Воронежский государственный технический университет*)
mail@moiseevs.ru, u00114@vgasu.vrn.ru, kafedra5@vgasu.vrn.ru

В работе рассмотрены методы математического моделирования эволюции сложных технических систем. В основе математической модели лежит теория марковских случайных процессов с непрерывным временем и дискретным состоянием.

Ключевые слова: технические системы, марковские процессы, динамическая модель.

1. Введение

Большинство технических систем являются сложноструктурированными, обладающими множеством элементов и связей, поэтому из множества методов системного анализа, для их описания наилучшим образом подходят стохастические методы, мало зависимые от степени сложности системы [3]. Если анализировать систему с точки зрения динамики ее эволюции, то из стохастических методов лучше всего подходят математические методы теории случайных процессов [2, 5].

Если техническая система может находиться в конечном числе состояний и в ней отсутствует последействие, то для ее описания можно использовать марковские случайные процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем [4].

Целью данной работы является описание методики анализа динамики сложных технических систем с помощью математического аппарата марковских случайных процессов. При этом решим задачу для некоторой абстрактной технической системы с типичными обобщенными состояниями.

2. Математическая модель

Рассмотрим некоторую обобщенную техническую систему в виде некоторого технического устройства. Введем типичные состояния, в которых система может находиться:

S_1 – нормальное функционирование системы, когда техническое устройство исправно;

S_2 – в системе обнаружен сбой в работе, в технической системе обнаружены неполадки, идет диагностика;

S_3 – попытка ликвидировать сбой в системе, ремонт технического устройства;

S_4 – система перестала функционировать, техническое устройство списано введу невозможности ремонта (что когда-либо наступает для конечных систем.

Следует отметить, что можно ввести некоторые промежуточные состояния, увеличив их число, общий подход к решению не изменится, но решение в вычислительном плане усложниться.

На основании эмпирических данных, полученных из наблюдения за системами подобного типа, можно оценить следующие параметры:

T – среднее время работы нормального функционирования системы до первого сбоя;

T_d – среднее время диагностики в системе, определение неполадок технического устройства;

T_r – среднее время восстановления системы в случае, если это возможно;

p_d – вероятность того, что в после диагностики возможен возврат системы в нормальное функционирование;

p_r – вероятность того, что в результате попытки ликвидировать сбой в системе, она будет восстановлена.

Рассмотрим простейший случай, когда случайный процесс, функционирующий в системе, будет однородным и указанные выше параметры не зависят от времени. Тогда граф состояний для описанной системы и случайного процесса представлен на рис.

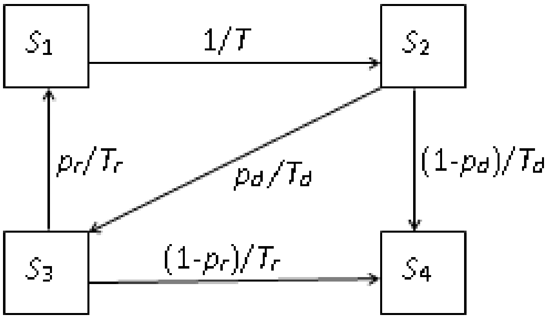

Рис. Граф состояний системы со случайным процессом

Так как система с течением времени неминуемо перейдет в состояние S_4, то случайный процесс не является эргодическим и у него не нет стационарного режима.

Для динамического анализа работы системы необходимо решить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \dfrac{p_r}{T_d} P_3(t) - \dfrac{P_1(t)}{T}; \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \dfrac{P_1(t)}{T} - \dfrac{P_2(t)}{T_d}; \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \dfrac{p_d P_2(t)}{T_d} - \dfrac{P_3(t)}{T_r}; \\ \dfrac{dP_4(t)}{dt} = \dfrac{(1-p_r)P_2(t)}{T_r} + \dfrac{(1-p_d)P_2(t)}{T_d}, \end{cases}$$

где $P_i(t)$ (i=1, 2, 3, 4) – вероятности состояний системы.

Так как система уравнений является вырожденной, заменим четвертое ее уравнение на условие нормировки: $P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)+P_4(t)=1$. Получим:

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \dfrac{p_r}{T_d} P_3(t) - \dfrac{P_1(t)}{T}; \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \dfrac{P_1(t)}{T} - \dfrac{P_2(t)}{T_d}; \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \dfrac{p_d P_2(t)}{T_d} - \dfrac{P_3(t)}{T_r}; \\ P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) = 1. \end{cases}
$$

Учитывая, что в начальный момент времени система нормально функционировала, уравнения Колмогорова (2) дополняются начальными условиями:

$$P_1(0) = 1;\ \ P_2(0) = 0;\ \ P_3(0) = 0;\ \ P_4(0) = 0.$$

3. Нахождение вероятностей состояний системы

Для решения (2) введем обозначения:

$$\frac{p_r}{T_d} = a;\ \frac{1}{T} = b; \frac{1}{T_d} = c;\ \frac{P_d}{T_d} = d; \frac{1}{T_r} = e.$$

В результате систему уравнений (2) можно переписать как:

$$
(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = aP_3(t) - bP_1(t); \\ \dfrac{P_2(t)}{dt} = bP_1(t) - cP_2(t); \\ \dfrac{P_3(t)}{dt} = dP_2(t) - eP_3(t); \\ P_4(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t) - P_3(t). \end{cases}
$$

Для решения (3) используем интегральное преобразование Лапласа [3].

Определим функцию $f\left(t\right) \ge 0$, $t \in R$, для которой образом будет:

$$\hat{F}\left(\tau\right) = L_{t\to\tau}\left[\, f\left(t\right)\right] = \int\limits_0^\infty e^{-t\tau} f\left(t\right) dt\,,$$

при этом:

$$f(t)=L^{-1}_{t\to\tau}\left[\hat{F}(\tau)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{t\tau}\hat{F}(\tau)dt,$$

где σ_1 — некоторый параметр, который должен удовлетворять условиям существования [6].

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям всех уравнений системы (3), можно записать:

$$\hat{P}_i(\tau)=L_{t\to\tau}\left[P_i(t)\right];\quad \frac{d\hat{P}_i(\tau)}{dt}=L_{t\to\tau}\left[\frac{d}{dt}P_i(t)\right]=-\hat{P}_i(0)+\tau\hat{P}_i(\tau).$$

В результате, с учетом начальных условий, решение (3) сводится к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -1+\tau\hat{P}_1(\tau)=-b\hat{P}_1(\tau)+a\hat{P}_3(\tau); \\ \tau\hat{P}_2(\tau)=b\hat{P}_1(\tau)-c\hat{P}_2(\tau); \\ \tau\hat{P}_3(\tau)=d\hat{P}_2(\tau)-e\hat{P}_3(\tau); \\ P_4(t)=1-P_1(t)-P_2(t)-P_3(t). \end{cases}$$

Ее решение есть:

$$\begin{cases} \hat{P}_1(\tau)=\dfrac{1}{\tau+b}+\dfrac{abd}{(\tau+b)^2(\tau+e)(\tau+c)}; \\ \hat{P}_2(\tau)=\dfrac{b}{(\tau+b)(\tau+c)}; \\ \hat{P}_3(\tau)=\dfrac{db}{(\tau+e)(\tau+c)(\tau+b)}; \\ P_4(t)=1-P_1(t)-P_2(t)-P_3(t). \end{cases}$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим вероятности состояний технической системы:

$$P_1(t)=\left(A_1t+B_1\right)\exp(-t/T)+C_1\exp(-t/T_r)+\mathrm{D}_1\exp(-t/T_d),$$

где

$$A_1=\frac{abd}{(e-b)(c-e)}=\frac{p_r p_d T_r^2}{T_d(T-T_r)(T_r-T_d)};$$

$$B_1=\frac{abd(b-c)}{(e-b)}=\frac{p_r p_d T_r^2(T_d-T)}{TT_d^3(T-T_r)};$$

$$C_1=\frac{abd}{(b-e)^2(c-e)}=\frac{p_r p_d T_r^3 T}{T_d(T-T_r)^2(T_r-T_d)};$$

$$\mathrm{D}_1=\frac{abd}{(b-c)^2(e-c)}=\frac{p_r p_d T_r}{(T_d-T)^2(T_d-T_r)};$$

$$P_2(t)=\frac{T_d}{T_d-T}\left[\exp(-t/T)-\exp(-t/T_d)\right];$$

$$P_3(t)=A_3\exp(-t/T)+(B_3+C_3)\exp(-t/T_d),$$

где

$$A_3=\frac{db}{(c-e)(b-e)}=\frac{p_d T_r^2}{(T_r-T_d)(T_r-T)};$$

$$B_3=\frac{db}{(e-c)(b-c)}=\frac{p_d T_d T_r}{(T_d-T_r)(T_d-T)};$$

$$C_3=\frac{db}{(e-b)(c-b)}=\frac{p_d T\, T_r}{(T-T_r)(T-T_d)};$$

$$P_4(t)=1-P_1(t)-P_2(t)-P_3(t).$$

В итоге решение задачи об исследовании динамики технических систем найдено.

4. Заключение

Из анализа полученного решения подтверждается то, что с течением времени вероятность всех состояний стремиться к нулю, а вероятность окончания функционирования системы (состояние S_4) – к единице. при этом скорость выхода вероятностей состояний на постоянное значение обратно пропорциональна среднему времени нормального функционирования системы до первого сбоя T. Зависимости вероятностей состояний S_2 и S_3 имеют максимум при временных диапазонах порядка T_d и T_r. Максимум дальше по временному интервалу, чем больше значения параметров T_d и T_r. Особый интерес представляет вероятность состояния S_4, когда техническая система прекращает свою эволюцию. Эта вероятность поможет оценить длительность функционирования технической системы или время работы технического устройства.

Предложенная модель может быть использована и для иных, не технических систем [1], функционирование которых осуществляется по описанной схеме.

Литература

1. БАРКАЛОВ С.А. *Динамическая модель потребительского спроса, основанная на марковских случайных процессах* / С.А. Баркалов, С.И. Моисеев. В сборнике: «Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы XII международной научно-практической конференции». 2016. С. 4-7.
2. БАРКАЛОВ С.А. *Математические методы и модели в управлении и их реализация в MS Excel* / С.А. Баркалов, С.И. Моисеев, В.Л. Порядина. - Воронежский ГАСУ. – Воронеж, 2015.- 265 с.
3. БАРКАЛОВ С.А. *Синтез организационной структуры управления строительным предприятием* / С.А. Баркалов, П.Н. Курочка. Управление строительством. 2017. № 1 (9). С. 6-30.
4. БАРКАЛОВ С.А. *Модели и методы в управлении и экономике с применением информационных технологий* [Электронный ресурс]: учебное пособие/ С.А. Баркалов, С.И. Моисеев, В.Л. Порядина. — СПб.: Интермедия, 2017. 264 с.
5. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения* / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Высш. шк., 1998. 354 с.
6. ВЛАДИМИРОВ В.С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1981. — 512 с.