

ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ

Управление в больших системах обычно имеет иерархическую структуру. Такая структура позволяет лицам, принимающим решения, справляться с необходимыми объемами информации. Проблемы синтеза оптимальных иерархических структур может быть формализована при достаточно общих предположениях. Данная работа посвящена описанию такой формализации и алгоритмов решения соответствующей математической модели.

I. Формализация задачи

Пусть управляемая система состоит из N подсистем, которые будем называть объектами. Основное предположение состоит в следующем: для каждой пары объектов заданы величины, характеризующие степень связи между ними. Обозначим эти величины через $a(i, j)$, где $i, j = 1, 2, \dots, N$. Будем считать, что числа $a(i, j)$ неотрицательны, причем, $a(i, j) = 0$ лишь при отсутствии связи между объектами i и j или при $i = j$. Дадим формальное описание некоторой фиксированной иерархической структуры управления. Пусть структура имеет M уровней. Каждый уровень имеет m_i элементов ($i = 1, 2, \dots, M$), при этом $m_1 = N$ (первый уровень состоит из объектов управляемой системы) и $m_M = 1$ (система подчиняется единому центру). Обозначим через m вектор размерности M с компонентами m_i . Пусть k -ый элемент l -го уровня иерархии ($k = 1, 2, \dots, m_l; l = 2, 3, \dots, M$) "управляет" элементами $(l-1)$ -го уровня, составляющими множество R_k^{l-1} . Множества R_k^{l-1} можно описывать булевыми векторами γ_k^{l-1} размерности m_{l-1} : i -ая компонента γ_k^{l-1} равна единице, если i -ый элемент $(l-1)$ -го уровня входит в R_k^{l-1} , и равна нулю в противном случае. Векторы γ_k^{l-1} можно свести в один вектор γ^{l-1} размерности $m_{l-1} \cdot m_l$, а векторы γ^{l-1}

($\ell = 2, 3, \dots, M-1$), в свою очередь, свести в вектор 2 размерности $\sum_{\ell=2}^{M-1} m_{\ell-1} \cdot m_{\ell}$. Описанную иерархическую структуру управления будем обозначать через $S(M, m, z)$, или для краткости просто через S .

Опишем способ определения эффективности структуры S . Эффективность разбиения элементов первого уровня структуры S на множества R_k^1 ($k = 1, 2, \dots, m_1$) будем характеризовать величиной $\Phi_1(S)$, определяемой следующим образом:

$$\Phi_1(S) = \frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{|R_k^1|(|R_k^1|-1)} \sum_{p \in R_k^1} \sum_{t \in R_k^1} a(p, t) \quad (1)$$

($|R|$ - обозначает число элементов во множестве R). Величина $\Phi_1(S)$ дает среднее по множествам R_k^1 значение величины связи между элементами, попавшими в один и те же множества R_k^1 .

Чтобы определить эффективность $\Phi_2(S)$ разбиения элементов второго уровня структуры S на множества R_k^2 ($k = 1, 2, \dots, m_2$) предварительно определим величины связей $a^2(i, j)$ между элементами второго уровня. Сделаем это следующим образом. Положим

$$a^2(i, j) = \frac{1}{|R_i^2| \cdot |R_j^2|} \sum_{p \in R_i^2} \sum_{t \in R_j^2} a(p, t) \quad (2)$$

при $i \neq j$ и $a^2(i, j) = 0$ при $i = j$. Из (2) легко заключить, что $a^2(i, j)$ представляют собой средние значения величин связей между множествами элементов R_i^2 и R_j^2 , "управляемыми", соответственно, элементами i и j . Теперь величина $\Phi_2(S)$ определяется аналогично $\Phi_1(S)$ (см. (1)):

$$\Phi_2(S) = \frac{1}{m_2} \sum_{k=1}^{m_2} \frac{1}{|R_k^2|(|R_k^2|-1)} \sum_{p \in R_k^2} \sum_{t \in R_k^2} a^2(p, t). \quad (3)$$

Эффективность следующих уровней структуры S определяется аналогичным образом. Предварительно находятся величины связей между элементами каждого уровня. Это делается с помощью следующей рекуррентной процедуры:

$$a^l(i, j) = a(i, j), \quad i, j = 1, 2, \dots, m_l; \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} a^l(i, j) &= \frac{1}{|R_i^{l-1}| \cdot |R_j^{l-1}|} \sum_{p \in R_i^{l-1}} \sum_{t \in R_j^{l-1}} a^{l-1}(p, t), \\ (i \neq j); \quad a^l(j, j) &= 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, m_l; \\ \ell &= 2, 3, \dots, M-1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Эффективность каждого ℓ -го уровня структуры S определяется по формуле, обобщающей (3):

$$\Phi_\ell(S) = \frac{1}{m_{\ell+1}} \sum_{k=1}^{m_\ell} \frac{1}{|R_k^\ell| (|R_k^\ell| - 1)} \sum_{p \in R_k^\ell} \sum_{t \in R_k^\ell} a^\ell(p, t). \quad (6)$$

Эффективность $\Phi(S)$ всей структуры S может быть определена следующим образом:

$$\Phi(S) = \frac{1}{M-1} \sum_{\ell=1}^{M-2} \Phi_\ell(S). \quad (7)$$

Величина $\Phi(S)$ в (7) является оценкой качества структуры S . Поэтому задачу синтеза оптимальной структуры можно сформулировать как задачу выбора структуры S с максимальной величиной качества $\Phi(S)$.

На практике выбор оптимальной структуры производится из числа допустимых структур, выделяемых определенными ограничениями. Наиболее вероятный вид ограничений на структуру $S(M, m, r)$ следующий:

$$M_1 \leq M \leq M_2, \quad (8)$$

$$m_\ell^1 \leq m_\ell \leq m_\ell^2, \quad (9)$$

$$r_\ell^1 \leq |R_k^\ell| \leq r_\ell^2, \quad (10)$$

$$k = 1, 2, \dots, m_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, M-1.$$

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что число уровней в структуре S фиксировано и равно M (на практике M_1 и M_2 близки, так что задача синтеза может быть решена перебором по M). Обозначим множество струк-

тур $S(M, m, z)$, удовлетворяющих условиям (9) и (10), через S_0 . Тогда задача синтеза оптимальной структуры (задача I) принимает вид:

$$\max_{s \in S_0} \{ \Phi(s) \}.$$

2. Приближенный алгоритм решения задачи

Задача I относится к сложному классу задач дискретного программирования. Частный случай задачи I при $M=3$ и $m_1^a = m_2^a$ сводится к задаче классификации (задаче оптимального разбиения взаимосвязанных объектов на заданное число классов), трудности решения которой хорошо известны. Эти трудности заставляют искать для решения задач рассматриваемого типа приближенные алгоритмы. Из таких алгоритмов наибольшее применение находят алгоритмы, основанные на идее локальной оптимизации. Дадим описание метода локальной оптимизации для решения общей задачи дискретного программирования (задача II):

$$\max_{x \in \mathcal{D}} \{ f(x) \},$$

где \mathcal{D} - дискретное множество N -мерных векторов, x и f - функция N переменных.

При реализации метода локальной оптимизации необходимо построить оператор $g(\beta)$, действующий на множестве \mathcal{D} и зависящий от векторного параметра β . Значения параметра β при действии оператора на вектор x составляют множество $B(x)$. Оператор $g(\beta)$ должен удовлетворять следующему свойству: имеются эффективные процедуры, позволяющие для любого $x' \in \mathcal{D}$ либо определить $\beta' \in B(x')$ такое, что

$$x'' = g(\beta')x' \in \mathcal{D} \quad \text{и} \quad f(x') < f(x'')$$

либо установить, что для всех $\tilde{\beta} \in B(x')$

$$f(x') \geq f(\tilde{x}) \quad , \quad \tilde{x} = g(\tilde{\beta})x'.$$

Во втором случае x' называется локально оптимальным

решением для оператора $g(\beta)$. Эффективными процедурами названы процедуры, имеющие степенные оценки объема вычислений вида CN^α , где C - константа и $\alpha \sim 1$. Такие оценки достигаются либо благодаря сравнительно небольшой мощности множеств $B(x)$, либо благодаря простой структуре оператора $g(\beta)$.

Оператор $g(\beta)$, удовлетворяющий сформулированному выше свойству, будем называть оператором локальной оптимизации. Построение такого оператора составляет первую задачу реализации метода локальной оптимизации. Вторая задача состоит в получении начального допустимого решения x^0 . Если обе эти задачи решены, то может быть построена последовательность "улучшающихся" решений

$$x^0, x^1, \dots, x^K \quad (II)$$

$$(x^i = g(\beta^i)x^{i-1}, \beta^{i-1} \in B(x^{i-1}), f(x^i) < f(x^{i-1}), i = 1, 2, \dots, K),$$

начинающаяся с x^0 и заканчивающаяся локально оптимальным решением x^K . При построении последовательности (II) может быть использовано несколько операторов локальной оптимизации при различных режимах их чередования (в этом случае x^K является локально оптимальным решением одновременно для всех операторов).

В рамках решения первой задачи реализации метода локальной оптимизации рассмотрим оператор $g_i(L, i, k, R_p^L, R_t^L)$, переставляющий местами элементы i и k L -го уровня структуры, входящие во множества R_p^L и R_t^L , (т.е. множества, "управляемые" элементами p и t $(L+1)$ -го уровня). Рассмотрим изменения, вносимые в допустимую структуру S^L действием оператора $g_i(L+1, i_0, k_0, R_{i_0}^{L+1}, R_{k_0}^{L+1})$. Множества $R_{i_0}^{L+1}$ и $R_{k_0}^{L+1}$ структуры S^L в новой структуре S^{L+1} принимают вид:

$$\tilde{R}_{i_0}^{L+1} = (R_{i_0}^{L+1} \setminus i_0) \cup k_0, \quad \tilde{R}_{k_0}^{L+1} = (R_{k_0}^{L+1} \setminus k_0) \cup i_0. \quad (I2)$$

Структура S^{L+1} , очевидно, также является допустимой. Кроме того, на определенных уровнях $\ell \geq L$ меняются величины эффективностей и величины связей между некоторыми элемен-

тами. Соответствующие изменения могут быть вычислены следующим образом:

$$\Delta\Phi(L+p) = \frac{2}{|R_{i_p}^{L+p}|(|R_{i_p}^{L+p}|-1)} \sum_{t \in R_{i_p}^{L+p} \setminus i_{p-1}} [\alpha^{L+p}(k_{p-1}, t) - \alpha^{L+p}(i_{p-1}, t)] +$$

$$+ \frac{2}{|R_{k_p}^{L+p}|(|R_{k_p}^{L+p}|-1)} \sum_{t \in R_{k_p}^{L+p} \setminus k_{p-1}} [\alpha^{L+p}(i_{p-1}, t) - \alpha^{L+p}(k_{p-1}, t)]; \quad (I3)$$

$$\Delta\alpha^{L+p}(i_p, k_p) = \frac{1}{|R_{i_p}^{L+p}| \cdot |R_{k_p}^{L+p}|} \left\{ \sum_{t \in R_{i_p}^{L+p} \setminus i_{p-1}} [\alpha^{L+p}(k_{p-1}, t) - \right.$$

$$\left. - \alpha^{L+p}(i_{p-1}, t)] + \sum_{t \in R_{k_p}^{L+p} \setminus k_{p-1}} [\alpha^{L+p}(i_{p-1}, t) - \alpha^{L+p}(k_{p-1}, t)] \right\}. \quad (I4)$$

Изменения в эффективностях и величинах связей имеет место до P -го уровня структуры. При этом i_p и k_p определяются последовательно следующим образом:

$$R_{i_p}^{L+p} \ni i_{p-1}, R_{k_p}^{L+p} \ni k_{p-1}, i_p \neq k_p \quad (I5)$$

(элементы i_p и k_p $(L+p+1)$ -го уровня иерархии "управляют" множествами элементов $(L+p)$ -го уровня, содержащими соответственно элементы i_{p-1} и k_{p-1}).

Уровень P - это первый уровень, на котором не выполняется (I5), т.е. имеет место: $i_{P+1}, k_{P+1} \in R_{i_P}^{L+P-1}$ (очевидно, $P < M$).

Для $\Delta\Phi(L+P)$ имеем:

$$\Delta\Phi(L+P) = \frac{\Delta\alpha^{L+P-1}(i_{P+1}, k_{P+1})}{|R_{i_P}^{L+P}|(|R_{i_P}^{L+P}|-1)}. \quad (I6)$$

Суммарное изменение эффективности $\Delta\Phi$ определяется по формуле:

$$\Delta\Phi = \sum_{p=1}^P \Delta\Phi(L+p), \quad (I7)$$

в которую подставляются величины, полученные с помощью (I3) и (I6).

Таким образом, действие оператора

$g_s(L+1, i_s, k_s, R_{i_s}^{L+1}, R_{k_s}^{L+1})$ на структуру S' "обсчи-

тывается" по формулам (I3)-(I7). Из этих соотношений следует, что описанный оператор может быть отнесен к операторам локальной оптимизации. Можно было бы предложить операторы более общего вида, а именно оператор $g_2(L, R', R'', R_i^L, R_j^L)$, который при действии на структуру меняет местами подмножества R' и R'' множество R_i^L и R_j^L . "Обсчет" этого оператора может быть проведен по тем же формулам (I3)-(I7) с небольшой модификацией (I3) и (I4) для $p=1$.

Рассмотрим решение второй задачи реализации метода локальной оптимизации (определение начальной допустимой структуры). Обозначим интервалы, включающие числа элементов на ℓ -ом уровне для допустимых структур через

$$[m_\ell^3, m_\ell^4], \quad \ell = 1, 2, \dots, M-1. \quad (I8)$$

Интервалы (I8) могут быть определены рекуррентно. Для $\ell=1$ $m_\ell^3 = m_\ell^4 = N$. Пусть интервалы (I8) определены при $L > 2$ $\ell = 1, 2, \dots, L-1$. Покажем, как могут быть определены m_L^3 и m_L^4 . Рассмотрим множество m_L , для которых интервалы $[m_L n_L^1, m_L n_L^2]$ и $[m_{L-1}^3, m_{L-1}^4]$ пересекаются, т.е.

$$[m_L n_L^1, m_L n_L^2] \cap [m_{L-1}^3, m_{L-1}^4] = \emptyset. \quad (I9)$$

Проверить условие (I9) следует лишь для m_L , лежащих в интервале между $\left[\frac{m_{L-1}^3}{n_L^1} \right]$ и $\left[\frac{m_{L-1}^4}{n_L^2} \right]$. Кроме того, при проверке (I9) можно учесть, что если это условие выполняется для m_L^1 и m_L^2 , где $m_L^2 > m_L^1$, то оно выполняется для всех $m_L \in [m_L^1, m_L^2]$.

Итак, при наличии допустимых структур могут быть найдены все интервалы (I8) (в случае, если при каком-то L условие (I9) не выполняется ни при одном m_L , то допустимых структур нет). При известных интервалах (I8) выбор начальной структуры производится последовательным выбором m_ℓ^0 из интервалов $[m_\ell^3, m_\ell^4]$ при изменении ℓ от $M-1$ до 2. Выбор этот производится так, что

$$m_{\ell-1}^0 \in [m_\ell^0 n_{\ell-1}^1, m_\ell^0 n_{\ell-1}^2].$$

Описанный алгоритм локальной оптимизации может быть исследован экспериментально.

УДК 330.115

Теория активных систем (обзор). Емельянов С. В., Бурков В. Н. Согласованное управление. Сборник статей. М., ИАТ, 1975.

Дается аксиоматика теории активных систем и приводятся основные результаты. Библи. наим. 50.

УДК 330.115

Согласованное планирование в активных системах при адаптивном способе формирования данных. Кондратьев В. В. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается ряд задач согласованного планирования в активных системах при адаптивном способе формирования данных. Приводятся достаточные условия, обеспечивающие достоверность сообщаемой элементами информации. Библи. наим. 5.

УДК 330.115

Управление стохастическими активными системами. Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Бексентов Х. И. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается проблема стимулирования в стохастических активных системах. Приводится краткий обзор результатов в этой области, дается постановка задачи, исследуется проблема достоверности информации для случая многомерных активных элементов. Библи. наим. 9.

УДК 330.115

Обобщенные оценки в законах управления активными системами. Щепкин А. В. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается управление активной системой на основе обобщенных оценок. Изучается динамика поведения активных элементов, входящих в систему. Илл. 2, библи. наим. 5.

УДК 330.115

Задачи синтеза иерархических систем управления. Рубинштейн М. И. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Дается формализация и приближенный алгоритм решения задачи синтеза иерархических систем управления.