Российская академия наук
Институт проблем управления

**Д.А. НОВИКОВ, А.Г. ЧХАРТИШВИЛИ**

# РЕФЛЕКСИЯ
# И
# УПРАВЛЕНИЕ
## (математические модели)

ФМ
Москва
Физматлит
2013

ББК 22.18
Н 73
УДК 519

**НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. Рефлексия и управление: математические модели**. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2013. – 412 с. ISBN 978-5-94052-226-3

Монография члена-корреспондента РАН Д.А. Новикова и д.ф.-м.н. А.Г. Чхартишвили посвящена обсуждению современных подходов к математическому моделированию рефлексивных процессов в управлении. Рассматриваются рефлексивные игры, описывающие взаимодействие субъектов (агентов), принимающих решения на основании иерархии представлений, во-первых, о существенных параметрах (информационная рефлексия), во-вторых – о принципах принятия решений оппонентами (стратегическая рефлексия), а также представлений о представлениях и т.д.

Анализ поведения фантомных агентов, существующих в представлениях других реальных или фантомных агентов, и свойств информационной (и рефлексивной) структур, отражающих взаимную информированность реальных и фантомных агентов, позволяет предложить в качестве решения игры информационное (соответственно, рефлексивное) равновесие, которые являются обобщением ряда известных концепций равновесия в некооперативных играх и в моделях коллективного поведения.

Модели информационной и стратегической рефлексии дают возможность:

- описывать и изучать поведение рефлексирующих субъектов;
- исследовать зависимость выигрышей агентов от рангов их рефлексии;
- ставить и решать задачи информационного и рефлексивного управления в организационных, экономических, социальных и других системах, в военном деле и т.д. (в книге рассмотрены около 30 примеров прикладных задач из перечисленных областей);
- единообразно описывать многие явления, связанные с рефлексией: скрытое управление, информационное управление через СМИ, рефлексию в психологии, художественных произведениях и др.

Книга адресована специалистам в области принятия решений и управления системами междисциплинарной природы, а также студентам вузов и аспирантам.

*Рецензенты*: д.т.н., проф. *В.Н. Бурков*,
д.т.н., проф. *А.В. Щепкин*

ISBN 978-5-94052-226-3

9 785940 522263

## СОДЕРЖАНИЕ

– Пескари привольно резвятся, в этом их радость!
– Ты же не рыба, откуда тебе знать, в чем ее радость?
– Ты же не я, откуда тебе знать, что я знаю, а чего не знаю?

*Из даосской притчи*

– Дело, разумеется, в том, достопочтенный архиепископ, что вы верите в то, во что вы верите, потому что вы были так воспитаны.
– Может быть, и так. Но остается фактом, что и вы верите в то, что я верю в то, во что я верю, потому что я был так воспитан, по той причине, что вы были так воспитаны.

*Из книги Д. Майерса «Социальная психология»*

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изложению современных подходов к математическому моделированию рефлексии в управлении, в том числе такому классу теоретико-игровых моделей, как рефлексивные игры, описывающие взаимодействие субъектов, принимающих решения на основании иерархии представлений о существенных параметрах, представлений о представлениях и т.д.

**Рефлексия.** Одним из фундаментальных свойств бытия человека является то, что наряду с природной («объективной») реальностью существует ее отражение в сознании. При этом между *природной реальностью* и ее образом в сознании (будем считать этот образ частью особой – *рефлексивной реальности*) существует неизбежный зазор, несовпадение.

Целенаправленное изучение этого феномена традиционно связано с термином «рефлексия», которому «Философский словарь» [157] дает следующее определение: «РЕФЛЕКСИЯ (лат. reflexio – обращение назад). Термин, означающий отражение, а также исследование познавательного акта».

Термин «рефлексия» введен Дж. Локком; в различных философских системах (у Дж. Локка, Г. Лейбница, Д. Юма, Г. Гегеля и др.) он имел различное содержание. Систематическое описание рефлексии с точки зрения психологии началось в 60-е годы XX века (школа В.А. Лефевра). Кроме того, следует отметить, что существует понимание рефлексии в другом значении, имеющем отношение к рефлексу – «реакции организма на возбуждение рецепторов» [146; с. 1122].

В настоящей работе используется первое (философское) определение рефлексии.

Для прояснения понимания сути рефлексии рассмотрим сначала ситуацию с одним субъектом. У него есть представления о природной реальности, но он может и осознавать (отражать, рефлексировать) эти представления, а также осознавать осознание этих представлений и т.д. Так формируется рефлексивная реальность. Рефлексия субъекта относительно своих собственных *представлений* о реальности, принципах своей деятельности и т.д. называется *авторефлексией* или *рефлексией первого рода*. Отметим, что в большинстве гуманитарных исследований речь идет, в первую очередь, об авторефлексии, под которой в философии понимается процесс размышления индивида о происходящем в его сознании [101].

*Рефлексия второго рода* имеет место относительно представлений о реальности, принципах принятия решений, авторефлексии и т.д. других субъектов.

**Ранги рефлексии.** Для того чтобы описывать рефлексивные «отражения», в психологии используется, в частности, следующий подход [101]. Рассмотрим взаимоотношения между тремя элементами, изображенными на Рис. 1 – субъектом деятельности (С), объектом его деятельности (О) и другими субъектами (Д). Стрелки на рисунке условно обозначают отдельные акты «размышления» («отражения»).

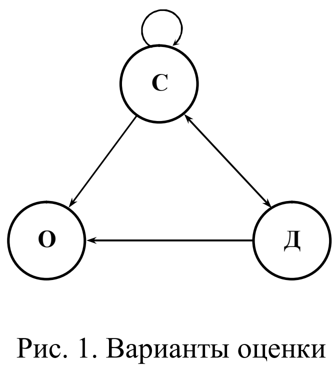


Рис. 1. Варианты оценки

Описывать отношения между элементами можно последовательностью букв «С», «О» или «Д», причем порядок их следования соответствует тому, кто что «отражает» или кто о чем рефлексирует (объект деятельности предполагается «пассивным» и рефлексировать не может).

Отношения первого порядка (нулевой *ранг рефлексии*, имеет место *оценка*):

СО – оценка субъектом результатов своей деятельности (*самооценка результатов*);

СС – оценка субъектом самого себя (*самооценка* себя как личности);

СД – оценка субъектом других субъектов – людей (как личностей);

ДО – оценка другими субъектами (людьми) результатов деятельности субъекта;

ДС – оценка субъекта (как личности) другими субъектами (людьми).

Этими пятью отношениями исчерпываются возможные комбинации отношений первого порядка (объект в силу своей пассивности не способен к оценке, самооценку других субъектов (ДД) мы не рассматриваем).

Отношения, изображенные на Рис. 1, могут стать предметом размышлений субъекта деятельности, а также и других субъектов. Возникает рефлексия первого ранга.

Отношения второго порядка (*рефлексия первого ранга*). Здесь необходимо разделить:

- авторефлексию (рефлексию первого рода), которой соответствуют последовательности, начинающиеся с «СС», то есть относящиеся к размышлениям субъекта о его самооценке, его самооценке его результатов:

ССО – размышления субъекта о самооценке результатов;

ССС – размышления субъекта о его самооценке;

и

- рефлексию второго рода (все остальные последовательности):

СДО – размышления субъекта об оценке другими субъектами результатов его деятельности («что другие думают о результатах моей деятельности);

СДС – размышления субъекта об оценке его самого другими субъектами («что другие думают обо мне»);

ДСС – размышления других субъектов о самооценке субъекта;

ДСО – размышления других субъектов о самооценке субъектом результатов своей деятельности;

ДСД – размышления других субъектов об оценке их субъектом.

Отношения третьего порядка (*рефлексия второго ранга*). Здесь уже вариантов больше. Приведем некоторые из них: СДСО – размышления субъекта о размышлениях других субъектов о самооценке субъектом своих результатов («что другие думают о том, как я оцениваю свои результаты»); ДСДО – размышления других субъектов о размышлениях субъекта об оценке другими субъектами результатов его деятельности и т.д.

Аналогично описываются и другие, более высокие ранги рефлексии.

**Примеры.** Приведем примеры рефлексии второго рода, иллюстрирующие, что во многих случаях правильные собственные умозаключения можно сделать, лишь если занять позицию других субъектов и проанализировать их возможные рассуждения.

Первым примером является классическая «*задача о грязных лицах*» (Dirty Face Game) [215], иногда ее называют «задачей о мудрецах и колпаках» [42] или «о мужьях и неверных женах» [243]. Опишем ее, следуя [42, с. 46].

«Представим себе, что в купе вагона Викторианской эпохи находятся Боб и его племянница Алиса. У каждого испачкано лицо. Однако никто не краснеет от стыда, хотя любой Викторианский пассажир покраснел бы, зная, что другой человек видит его грязным. Отсюда мы делаем вывод, что никто из пассажиров не знает, что его лицо грязное, хотя каждый видит грязное лицо своего компаньона.

В это время в купе заглядывает Проводник и объявляет, что в купе находится человек с грязным лицом. После этого Алиса покраснела. Она поняла, что лицо у нее испачкано. Но почему она поняла это? Разве Проводник не сообщил то, что она уже знала?

Проследим цепочку рассуждений Алисы. Алиса: Предположим, мое лицо чистое. Тогда Боб, зная, что кто-то из нас грязный, должен сделать вывод, что грязный он, и покраснеть. Раз он не краснеет, значит, моя посылка про мое чистое лицо ложная, мое лицо грязное и я должна покраснеть.

Проводник добавил к информации, известной Алисе, информацию о знаниях Боба. До этого она не знала, что Боб знает, что кто-то из них испачкан. Короче, сообщение проводника превратило знание о том, что в купе есть человек с грязным лицом, в общее знание».

Второй хрестоматийный пример – «*задача о скоординированной атаке*» (Coordinated Attack Problem) [217]; существуют близкие к ней задачи об оптимальном протоколе обмена информацией – Electronic Mail Game [252] и др. (см. обзоры в [208, 218, 261]).

Ситуация выглядит следующим образом. На вершинах двух холмов расположены две дивизии, а в долине расположился противник. Одержать победу можно, только если обе дивизии нападут на противника одновременно. Генерал – командир первой дивизии – посылает генералу – командиру второй дивизии – гонца с сообщением: «Атакуем на рассвете». Так как гонец может быть перехвачен противником, то первому генералу необходимо дождаться от второго генерала сообщения о том, что первое сообщение получено. Но так как второе сообщение также может быть перехвачено противником, то второму генералу необходимо получить от первого подтверждение, что тот получил подтверждение. И так далее до бесконечности. Задача заключается в том, чтобы определить, после какого числа сообщений (подтверждений) генералам имеет смысл атаковать противника. Вывод следующий – в описанных условиях скоординированная атака невозможна, а выходом является использование вероятностных моделей [240, 241].

Третья классическая задача – «*задача о двух брокерах*» (см. также модели спекуляций в [126]). Предположим, что у двух брокеров, играющих на фондовой бирже, имеются собственные экспертные системы, которые используются для поддержки принятия решений. Случается так, что сетевой администратор нелегально копирует обе экспертные системы и продает каждому брокеру экспертную систему своего оппонента. После этого администратор пытается продать каждому из них следующую информацию – «У вашего оппонента есть ваша экспертная система». Потом администратор пытается продать информацию: «Ваш оппонент знает, что у вас есть его экспертную систему», и т.д. Вопрос заключается в том, как брокерам следует использовать информацию, получаемую от администратора, а также какая информация на какой итерации является существенной?

Завершив рассмотрение примеров рефлексии второго рода, обсудим, в каких ситуациях рефлексия является существенной. Если единственный рефлексирующий субъект является экономическим агентом, который стремится максимизировать свою целевую функцию, выбирая одно из этически допустимых действий, то природная реальность входит в целевую функцию как некий параметр, а результаты рефлексии (представления о представлениях и пр.) аргументами целевой функции не являются. Тогда можно сказать, что авторефлексия «не нужна», так как она не изменяет действия, выбираемого агентом.

Заметим, что зависимость действий субъекта от рефлексии может иметь место в ситуации, когда действия этически неравноценны, то есть наряду с *утилитарным* аспектом существует деонтологический (*этический*) – см. [176, 228, 229]. Однако экономические решения, как правило, этически нейтральны, поэтому рассмотрим взаимодействие нескольких субъектов.

Если субъектов несколько (ситуация принятия решения является *интерактивной*), то в целевую функцию каждого субъекта входят действия других субъектов, то есть эти действия являются частью природной реальности (хотя сами они, разумеется, обусловлены рефлексивной реальностью). При этом рефлексия (и, следовательно, исследование рефлексивной реальности) становится необходимой. Перед тем как рассматривать основные подходы к математическому моделированию эффектов рефлексии, опишем кратко взаимосвязь двух базовых для настоящей работы категорий – «рефлексия» и «управление».

**Рефлексия и управление.** Прежде всего, определим суть категории «управление». *Управление* – «элемент, функция организованных систем различной природы: биологических, социальных, технических, обеспечивающая сохранение их определенной структуры, поддержание режима деятельности, реализацию программы, цели деятельности. [146, с. 1252; 157, с. 704]»; *управление* – «воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения» [112, с. 9].

Обсудим качественно общую постановку задачи управления. Пусть имеется *субъект управления* и *управляемая система* (*объект управления* – в терминах теории управления техническими системами, – или *управляемый субъект*). Состояние управляемой системы зависит от внешних воздействий, воздействий (управления) со стороны управляющего органа и, быть может (если субъект управления активен), действий самой управляемой системы – см. Рис. 2. Задача управляющего органа заключается в том, чтобы осуществить такие управляющие воздействия (жирная линия на Рис. 2), чтобы с учетом информации о внешних воздействиях (пунктирная линия на Рис. 2) обеспечить требуемое с его точки зрения состояние управляемой системы.

Отметим, что приведенная на Рис. 2 так называемая входо-выходная структура является типичной для теории управления, изучающей задачи управления системами различной природы. Наличие *обратной связи* (см. двойную линию на Рис. 2), дающей информацию о состоянии управляемой системы, является ключевым (но, справедливости ради надо сказать, не обязательным) свойством системы управления. Рядом исследователей **обратная связь трактуется как рефлексия** (отражение субъектом управления состояния управляемой системы). Это – первый аспект взаимосвязи управления и рефлексии.

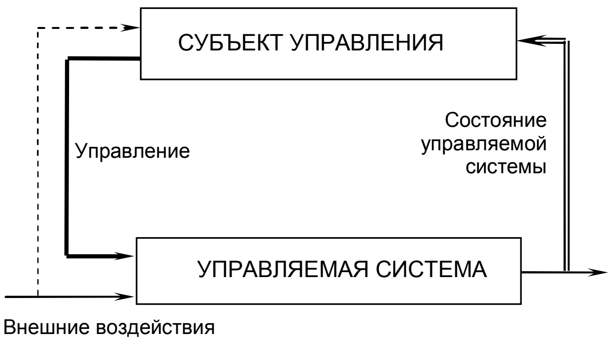


Рис. 2. Структура системы управления

Взаимодействие и деятельность субъекта управления и управляемой системы является предметом исследований ряда научных направлений. Наука об управлении («*теория управления*» на жаргоне своих представителей) акцентирует свое внимание, в основном, на взаимодействии субъекта управления и управляемой системы – см. Рис. 3. *Методология управления* [106] является учением об организации управленческой деятельности, то есть деятельности субъекта управления. Отметим, что говорить о *деятельности* можно только по отношению к активным субъектам – человеку, группе, коллективу и т.д. (в случае пассивных, например технических, систем говорят об их функционировании). В ходе дальнейшего изложения материала настоящей работы, если не оговорено особо, будет считаться, что и субъект управления, и управляемая система активны. Следовательно, **каждый из них может осуществлять как минимум авторефлексию**, «отражая» процесс, принципы организации и результаты своей собственной деятельности. Это – второй аспект взаимосвязи управления и рефлексии.

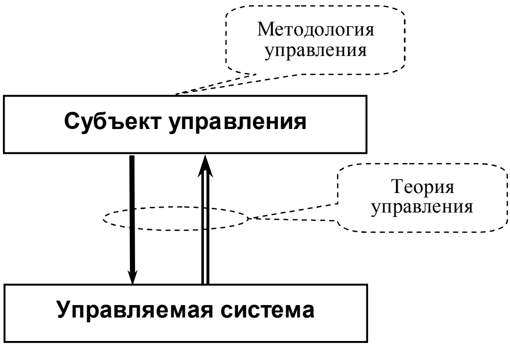


Рис. 3. Методология управления и теория управления

Для того чтобы искать *оптимальное управление*, то есть наиболее эффективное допустимое управление, субъекту управления нужно уметь прогнозировать реакции управляемой системы на те или иные управляющие воздействия. Для этого нужна та или иная модель управляемой системы. *Модель* – в широком смысле – любой образ, аналог (мысленный или условный: изображение, описание, схема, чертеж, график, план, карта и т.п.) какого-либо объекта, процесса или явления (оригинала данной модели) [146, статья «Модель», 5-е значение]; «аналог определенного фрагмента природной или социальной реальности <…> «заместитель» оригинала в познании и практике» [157, с. 382]. Условно говоря, модель можно считать образом управляемой системы в представлении субъекта управления. **Процесс моделирования** – «отражения», то есть построения этого образа, также **можно рассматривать как рефлексию**. Более того, управляемая система также может прогнозировать и оценивать деятельность субъекта управления. Все это можно отнести к третьему аспекту взаимосвязи управления и рефлексии.

Четвертый аспект связан с **«отражением» субъектом управления или управляемой системой** (рефлексией относительно) **внешних по отношению к ним субъектов или объектов**, явлений или процессов, их свойств и закономерностей их деятельности/функционирования. Для субъекта управления это может быть, например, внешняя среда; для элемента управляемой системы – внешняя среда и/или другие элементы управляемой системы. Действительно, если управляемая система включает нескольких активных агентов, то в общем случае каждый из них может осуществлять рефлексию относительно остальных. Именно этот аспект – взаимная рефлексия управляемых субъектов – подробно рассматривается ниже (см. вторую и третью главы).

Перечисленные четыре аспекта соответствуют нулевому рангу рефлексии – «оценке» (см. выше). По аналогии с конструкцией, приведенной на Рис. 1, можно единообразно описывать рефлексию первого, второго и других более высоких рангов. Например, рефлексией первого ранга будут представления субъекта управления об оценке тем или иным управляемым субъектом (агентом) других агентов. Рефлексией второго ранга будет оценка управляемой системой этих представлений субъекта управления. И т.д.

Существенно следующее – **ПРОЦЕСС И/ИЛИ РЕЗУЛЬТАТ РЕФЛЕКСИИ МОГУТ БЫТЬ ПРЕДМЕТОМ УПРАВЛЕНИЯ**, то есть целенаправленно изменяемым субъектом управления компонентом деятельности управляемой системы. Именно эта взаимосвязь управления и рефлексии позволяет говорить об информационном управлении и о рефлексивном управлении, подробно рассматриваемых ниже! Фактически, вся книга содержит теорию и примеры того, как управлять рефлексией.

В качестве отступления отметим, что результаты моделирования и информационного/рефлексивного управления, полученные для социальных, экономических, организационных и других систем, включающих человека, в последнее время широко транслируются в область искусственных технических систем. Примером могут служить так называемые *мультиагентные системы* (МАС) [255], которые состоят из большого числа взаимодействующих между собой автономных агентов технической или информационной природы (хрестоматийным примером является группа мобильных роботов – см., например, [55]). Такие свойства мультиагентных систем, как децентрализованность взаимодействия и множественность агентов, придают их качественно новые важные эмерджентные свойства (автономность, меньшая уязвимость к неблагоприятным воздействиям и др.).

МАС характеризуются сложной иерархической внутренней структурой. Так, типовая функциональная структура агента имеет несколько иерархических уровней – см. Рис. 4. На *операционном* (исполнительном) *уровне* осуществляется реализация действий, например – стабилизация движения по заданной траектории. На *тактическом уровне* осуществляется выбор действий (например, планирование действий как выбор траекторий или решение задач распределенной оптимизации), в том числе – с учетом взаимодействия с другими агентами. *Стратегический уровень* отвечает за принятие решений, обучение и адаптивность поведения агентов, а также за кооперативность управления – согласованного решения набором агентов единой задачи. Здесь существенной становится способность агента к стратегическому принятию решений, адаптации, обучению и РЕФЛЕКСИИ. И, наконец, *концептуальный уровень* соответствует принципам целеполагания. На каждом уровне используется тот или иной аппарат исследования (как правило, методы, применимые на некотором уровне, могут быть использованы и на более высоких иерархических уровнях – см. Рис. 4).

Одной из современных тенденций и теории мультиагентных систем, и теории игр (см. ниже), и искусственного интеллекта (последние два научных направления ориентированы на верхние уровни архитектуры агента) является стремление исследователей к интеграции этих научных направлений. При этом теория игр (в рамках так называемой алгоритмической теории игр) движется «сверху вниз» – от единого описания игры к его децентрализации и исследованию возможности автономной реализации механизмов поведения и реализации равновесий. А теория МАС, двигаясь «снизу вверх», то есть параллельным, но в силу локализации научных сообществ – не совпадающим путем, стремится все больше учитывать стратегическое поведение и «интеллектуальность агентов», включая их способность к рефлексии [110]. Поведение и взаимодействие активных субъектов описывается в рамках теории игр, которая на сегодняшний день является одним из основных инструментариев теории управления системами, включающими человека.

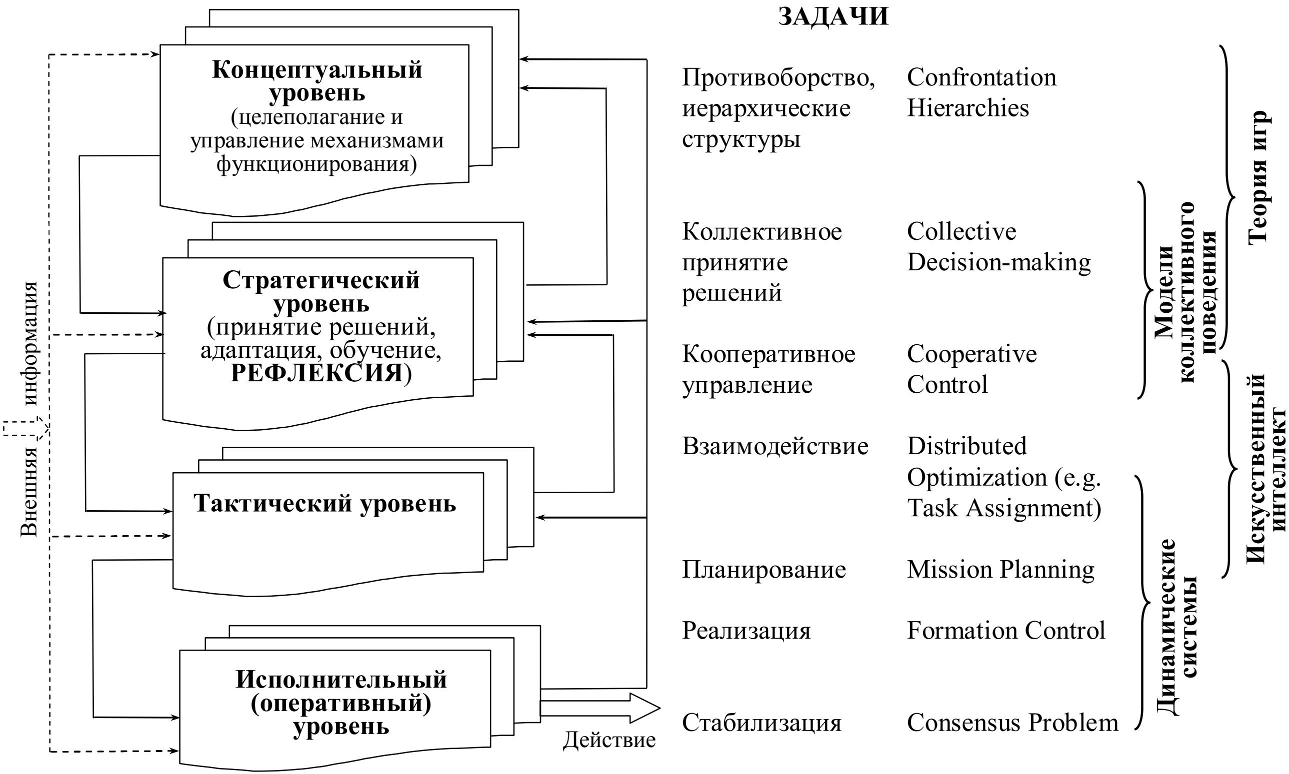


Рис. 4. МАС: Иерархическая архитектура агента

**Теория игр.** Формальные (математические) модели поведения человека создаются и изучаются уже более полутора веков (см. обзор в [1]) и находят все большее применение как в теории управления, экономике, психологии, социологии и т.д., так и при решении конкретных прикладных задач. Наиболее интенсивное развитие наблюдается начиная с 40-х годов XX века – момента появления *теории игр*, который обычно датируют 1944 годом (выход первого издания книги Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» [99]).

Под *игрой* в данной работе будем понимать взаимодействие субъектов, интересы которых не совпадают (отметим, что возможно и другое понимание игры – как «вида непродуктивной деятельности, мотив которой заключается не в ее результатах, а в самом процессе» [146, с. 475] – см. также [101, 160], где понятие игры трактуется гораздо более широко).

*Теория игр* – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [41]. Далее для обозначения субъекта, принимающего решения (игрока), используется термин *агент*. В настоящей работе рассматриваются в основном некооперативные статические игры в нормальной форме, то есть игры, в которых агенты однократно, одновременно и независимо выбирают свои *действия* (исключение составляют динамические модели коллективного поведения, рассматриваемые в разделе 3.4).

Таким образом, основная задача теории игр заключается в описании взаимодействия нескольких агентов, интересы которых не совпадают, а результаты деятельности (выигрыш, полезность и т.д.) каждого зависят в общем случае от действий всех [41, 243]. Итогом подобного описания является прогноз разумного и «устойчивого» исхода игры – так называемого *решения игры* (*равновесия*).

Описание *игры* заключается в задании следующих параметров:

- *множества агентов*;
- *предпочтений агентов* (зависимостей выигрышей от действий): при этом предполагается (и этим отражается целенаправленность поведения), что каждый агент заинтересован в максимизации своего выигрыша;
- *множеств допустимых действий агентов*;

- *информированности агентов* (той информации о существенных параметрах, которой они обладают на момент принятия решений о выбираемых действиях);
- *порядка функционирования* (*порядок ходов* – последовательность выбора действий).

Условно говоря, множество агентов определяет, кто участвует в игре. Предпочтения отражают, что хотят агенты, множества допустимых действий – что они могут, информированность – что они знают, а порядок функционирования – когда они выбирают действия.

Перечисленные параметры задают игру, но они недостаточны для того, чтобы предсказать ее исход – решение игры (или равновесие игры), то есть множество рациональных и устойчивых с той или иной точки зрения действий агентов [28, 41, 42]. На сегодняшний день в теории игр не существует универсальной концепции равновесия – принимая те или иные предположения о принципах принятия агентами решений, можно получать различные решения. Поэтому основной задачей любого теоретико-игрового исследования (включая настоящую работу) является построение концепции равновесия. Так как рефлексивные игры определяются как такое интерактивное взаимодействие агентов, в котором они принимают решения на основе иерархии своих представлений, то существенной является информированность агентов. Поэтому остановимся на ее качественном обсуждении более подробно.

**Роль информированности. Общее знание.** В теории игр, философии, психологии, распределенных системах и других областях науки (см. обзоры в [216, 241]) существенны не только *представления* (beliefs) агентов о существенных параметрах, но и их представления о представлениях других агентов и т.д. Совокупность этих представлений называется *иерархией представлений* (hierarchy of beliefs) и в настоящей работе моделируется деревом информационной структуры рефлексивной игры (см. ниже). Другими словами, в ситуациях интерактивного принятия решений (моделируемых в теории игр) каждый агент перед выбором своего действия должен «предсказать» поведение оппонентов. Для этого у него должны быть определенные представления о видении игры оппонентами. Но оппоненты должны проделать то же самое, поэтому неопределенность относительно той игры, которая будет разыграна, порождает бесконечную иерархию представлений участников игры.

Приведем пример иерархии представлений. Предположим, что имеются два агента – А и Б. Каждый из них может иметь собственные нерефлексивные представления о неопределенном параметре $\theta$, который мы будем в дальнейшем называть *состоянием природы* (state of nature, state of the world). Обозначим эти представления $\theta_А$ и $\theta_Б$ соответственно. Но каждый из агентов в рамках процесса *рефлексии первого ранга* может задуматься о представлениях оппонента. Эти представления (*представления второго порядка*) обозначим $\theta_{АБ}$ и $\theta_{БА}$, где $\theta_{АБ}$ – представления агента А о представлениях агента Б, $\theta_{БА}$ – представления агента Б о представлениях агента А. Но этим дело не ограничивается – каждый из агентов в рамках процесса дальнейшей рефлексии (*рефлексии второго ранга*) может задуматься над тем, каковы представления оппонента о его представлениях. Так порождаются представления *третьего порядка* – $\theta_{АБА}$ и $\theta_{БАБ}$. Процесс порождения представлений более высоких порядков может продолжаться до бесконечности (никаких логических ограничений увеличению ранга рефлексии не существует). Совокупность всех представлений – $\theta_А$, $\theta_Б$, $\theta_{АБ}$, $\theta_{БА}$, $\theta_{АБА}$, $\theta_{БАБ}$ и т.д. – образует иерархию представлений.

Частным случаем информированности – когда все представления, представления о представлениях и т.д. до бесконечности совпадают – является *общее знание*. Более корректно, термин «общее знание» (common knowledge) введен в [230] для обозначения факта, удовлетворяющего следующим требованиям:

1) о нем известно всем агентам;

2) всем агентам известно 1;

3) всем агентам известно 2 и т.д. до бесконечности

Формальная модель общего знания предложена в [184] и получила развитие во множестве работ – см. [185, 187, 209, 210, 211, 218, 222, 240, 256 и др.].

Моделям информированности агентов – иерархии представлений и общему знанию – в теории игр посвящена, фактически целиком, настоящая работа, поэтому приведем примеры, иллюстрирующие роль общего знания в других областях науки – философии, психологии и др. (см. также обзор [208]).

С точки зрения философии общее знание анализировалось при изучении *соглашений* [230, 264, 265]. Рассмотрим следующий пример. В Правилах дорожного движения записано, что каждый участник дорожного движения должен соблюдать эти правила, а также вправе рассчитывать на то, что их соблюдают другие участники дорожного движения. Но другие участники дорожного движения также должны быть уверены в том, что остальные соблюдают правила, и т.д. до бесконечности. Следовательно, соглашение «соблюдать ПДД» должно быть общим знанием.

В психологии существует понятие *дискурса* (от лат. discursus – рассуждение, довод) – «опосредованное прошлым опытом речевое мышление человека; выступает как процесс связанного логического рассуждения, в котором каждая последующая мысль обусловлена предыдущей» [137, с. 99]. Роль общего знания в понимании дискурса иллюстрируется в [202, 208] следующим примером.

Два человека выходят из кинотеатра. Один спрашивает другого: «Как тебе фильм?». Для того чтобы второй человек понял вопрос, он должен понять, что его спрашивают о том фильме, который они только что вместе посмотрели. Кроме того, он должен понимать, что это понимает первый. Задающий вопрос, в свою очередь, должен быть уверен, что второй поймет, что речь идет о том фильме, который они посмотрели, и т.д. То есть для адекватного взаимодействия (общения) «фильм» должен быть общим знанием (люди должны достичь соглашения об использовании языка [230]).

Взаимная информированность агентов является существенной также в распределенных вычислительных системах [209, 211, 218], в искусственном интеллекте [217, 234] и других областях.

В теории игр, как правило, предполагается, что все[1] параметры игры являются *общим знанием*, то есть каждому агенту известны все параметры игры, а также то, что это известно всем агентам, и т.д. до бесконечности. Такое предположение соответствует *объективному описанию игры* и дает возможность использовать концепцию *равно-*

[1] Если в исходной модели присутствуют неопределенные факторы, то используются процедуры устранения неопределенности, которые позволяют получить детерминированную модель.

*весия Нэша*[2] [246] как прогнозируемого исхода некооперативной игры (то есть игры, в которой невозможны переговоры между агентами с целью создания коалиций, обмена информацией, совместных действий, перераспределения выигрышей и т.д.). Таким образом, предположение об общем знании позволяет утверждать, что все агенты знают, в какую игру они играют, и их представления об игре совпадают.

Вместо действия агента можно рассматривать нечто более сложное – его *стратегию*, то есть отображение имеющейся у агента информации в множество его допустимых действий. Примерами могут служить: стратегии в многошаговой игре, смешанные стратегии, стратегии в метаиграх Ховарда [224, 225] (см. также информационные расширения игр [34, 71, 72]). Однако и в этих случаях правила игры являются общим знанием. Наконец, можно считать, что игра выбирается случайным образом в соответствии с некоторым распределением, которое является общим знанием – так называемые *байесовы игры* [213, 219, 243].

В общем случае каждый из агентов может иметь собственные представления о параметрах игры, и каждому из этих представлений соответствует некоторое *субъективное описание игры* [34]. При этом оказывается, что агенты участвуют в игре, но объективно не знают в какой, или по-разному представляют разыгрываемую игру – ее правила, цели, роли и информированность оппонентов и т.д. Универсальных подходов к построению равновесий при недостаточном общем знании на сегодняшний день в теории игр не существует.

С другой стороны, в рамках «рефлексивной традиции» гуманитарных наук для каждого агента окружающий его мир содержит (включает) остальных агентов, и представления о других агентах отражаются в процессе рефлексии (различия представлений могут быть обусловлены, в частности, неодинаковой информированностью). Однако до настоящего момента конструктивных формальных результатов в этой области получено не было.

Следовательно, возникает необходимость разработки и исследования математических моделей игр, в которых информированность

[2] Вектор действий агентов является равновесием Нэша, если никому из них не выгодно одностороннее (то есть при условии, что остальные агенты выбирают соответствующие компоненты равновесия) отклонение от равновесия – см. корректное определение ниже.

агентов не является общим знанием и агенты принимают решения на основе иерархии своих представлений. Этот класс игр назван **рефлексивными играми** (формальное определение приведено ниже) [118].

Следует признать, что термин «рефлексивные игры» был введен В.А. Лефевром в 1965 г. в [77]. Однако в этой работе, а также в работах [78-84, 229] того же автора содержится в основном качественное обсуждение эффектов рефлексии во взаимодействии субъектов, и никакой общей концепции решения для этого класса игр предложено не было. То же замечание справедливо и для работ [36, 44-46, 126, 147], в которых рассматривался ряд частных случаев информированности участников игры. Систематическое изучение рефлексивных игр и попытка построения для них единой концепции равновесия мотивировали исследование [121].

Прежде чем переходить к изложению основного содержания работы, обсудим на качественном уровне основные используемые ниже подходы.

**Основные подходы и структура работы.** Первой книгой, посвященной моделям рефлексии в теоретико-игровом контексте, является монография авторов [121]. С момента ее выхода прошло уже достаточно много лет, за которые данное направление получило существенное развитие (см., например, [39, 62, 120, 171]). Настоящая книга отражает текущее состояние исследований и содержит основные результаты авторов и их коллег, а также актуальный обзор подходов других исследователей.

В первой главе «Рефлексия в принятии решений», носящей, в основном, обзорный и вводный характер, приводятся модели индивидуального и интерактивного принятия решений, проводится анализ информированности, необходимой для реализации тех или иных известных концепций равновесия, а также обсуждаются известные модели общего знания и иерархии представлений.

Как определено выше, рефлексивной является игра, в которой информированность агентов не является общим знанием[3] и агенты принимают решения на основе иерархии своих представлений. С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия реше-

[3] Если в рассматриваемой модели информированность является общим знанием, то все результаты исследования рефлексивных игр переходят в соответствующие классические результаты теории игр – см. ниже.

ний целесообразно разделять стратегическую и информационную рефлексию.

*Информационная рефлексия* – процесс и результат размышлений агента о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие агенты). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений агент не принимает.

*Стратегическая рефлексия* – процесс и результат размышлений агента о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие агенты) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии.

Таким образом, информационная рефлексия обычно связана с недостаточной взаимной информированностью, и ее результат используется при принятии решений (в том числе при стратегической рефлексии). Стратегическая рефлексия имеет место даже в случае полной информированности, предваряя принятие агентом решения о выбранном действии. Другими словами, информационная и стратегическая рефлексии могут изучаться независимо, однако в условиях неполной и недостаточной информированности обе они имеют место.

Вторая глава «Информационная рефлексия и управление» посвящена исследованию формальных моделей информационной рефлексии и, соответственно, информационного управления. Так как ключевым фактором в рефлексивных играх является информированность агентов – иерархия представлений, то для ее формального описания вводится понятие *информационной структуры* – дерева (в общем случае бесконечного), вершинам которого соответствует информация (представления) агентов о существенных параметрах, представлениях других агентов и т.д. (см. пример иерархии представлений выше).

Понятие структуры информированности (информационной структуры) позволяет дать формальное определение некоторых интуитивно ясных понятий, таких как: адекватная информированность одного агента о другом, взаимная информированность, одинаковая информированность и др.

Одним из ключевых понятий, применяемых в данной работе для анализа рефлексивных игр, является понятие *фантомного агента*.

Обсудим его на качественном уровне (отложив строгое математическое определение до второй главы).

Пусть в некоторой ситуации взаимодействуют два агента – А и Б. Вполне естественно, что в сознании каждого из них имеется некий образ другого: у А имеется образ Б (назовем его АБ), а у Б – образ А (назовем его БА). Этот образы могут совпадать с реальностью, а могут отличаться от нее. Иными словами, агент, например А, может иметь адекватное представление о Б (этот факт можно записать в виде тождества АБ = Б), а может и не иметь.

Сразу возникает вопрос: а может ли в принципе выполняться тождество АБ = Б, ведь Б – это реальный агент, а АБ – лишь его образ? Не вдаваясь в обсуждение этого философского, по сути, вопроса, отметим следующие два обстоятельства. Во-первых, речь идет не о всецелом понимании личности во всей ее полноте, а о моделировании ее поведения в данной конкретной ситуации. На обыденном, житейском уровне человеческого общения мы постоянно сталкиваемся с ситуациями как адекватного, так и неадекватного восприятия одним человеком другого.

Во-вторых, в рамках формального (теоретико-игрового) моделирования человеческого поведения агент – участник ситуации – описывается относительно небольшим набором характеристик. И эти характеристики могут быть полностью известны другому агенту в той же мере, в какой они известны исследователю.

Рассмотрим подробнее случай, когда между Б и АБ имеется различие (это различие может проистекать, говоря формально, из неполноты информации А о Б, либо из доверия к ложной информации). Тогда А, принимая решение о каких-либо своих действиях, имеет в виду не Б, а тот его образ, который у него имеется, то есть АБ. Можно сказать, что субъективно А взаимодействует с АБ. Поэтому АБ можно назвать фантомным агентом. Его нет в реальности, но он присутствует в сознании *реального агента* А и, соответственно, влияет на его действия, то есть на реальность.

Приведем простейший пример. Пусть А считает, что они с Б друзья, а Б, зная об этом, является врагом А (эту ситуацию можно описать словом «предательство»). Тогда, очевидно, в ситуации имеется фантомный агент АБ, которого можно описать так: «Б, являющийся другом А»; в реальности такой субъект отсутствует.

Отметим, что при этом Б адекватно информирован об А, то есть БА = А.

Таким образом, помимо реальных агентов, фактически участвующих в игре, предлагается рассматривать фантомных агентов, то есть агентов, которые существуют в сознании реальных и других фантомных агентов. Реальные и фантомные агенты в рамках своей рефлексии наделяют фантомных агентов определенной информированностью, которая отражается в информационной структуре.

Участвующих в игре реальных и фантомных агентов может быть бесконечно много, что означает потенциальную бесконечность осуществления актов рефлексивного отражения (бесконечную глубину дерева структуры информированности). Действительно, даже в простейшей ситуации возможно бесконечное развертывание рассуждений вида «я знаю…», «я знаю, что ты знаешь…», «я знаю, что ты знаешь, что я знаю…», «я знаю, что ты знаешь, что я знаю, что ты знаешь…» и т. д. Однако на практике такая «дурная бесконечность» не имеет места, поскольку начиная с некоторого момента представления «стабилизируются», и увеличение ранга рефлексии не дает ничего нового. Таким образом, в реальных ситуациях структура информированности имеет конечную *сложность*: у соответствующего дерева имеется конечное число попарно различных поддеревьев. Иными словами, в игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов[4].

Введение понятия фантомного агента позволяет определить рефлексивную игру как игру реальных и фантомных агентов, а также определить *информационное равновесие* как обобщение равновесия Нэша на случай рефлексивной игры, в рамках которого предполагается, что каждый агент (реальный и фантомный) при вычислении своего *субъективного равновесия* (равновесия в той игре, в которую он со своей точки зрения играет) использует имеющуюся у него иерархию представлений об объективной и рефлексивной реальности [164].

Удобным инструментом исследования информационного равновесия является *граф рефлексивной игры*, в котором вершины соот-

---

[4] В предельном случае – когда присутствует общее знание – фантомный агент первого уровня совпадает со своим реальным прообразом и дерево имеет единичную глубину (точнее, все остальные поддеревья повторяют деревья более высокого уровня).

ветствуют реальным и фантомным агентам и в каждую вершину-агента входят дуги (их число на единицу меньше числа реальных агентов), идущие из вершин-агентов, от действий которых в субъективном равновесии зависит выигрыш данного агента. Граф рефлексивной игры может быть построен и без конкретизации целевых функций агентов. При этом он отражает если не количественное соотношение интересов, то качественное соотношение информированности рефлексирующих агентов, и является удобным и выразительным средством описания эффектов рефлексии (см. раздел 2.4).

Для описанного выше примера двух агентов граф рефлексивной игры имеет вид: Б $\leftarrow$ А $\leftrightarrow$ АБ – реальный агент Б (предатель) адекватно информирован об агенте А, который взаимодействует с фантомным агентом АБ (Б, являющимся другом А).

Стратегическая рефлексия рассматривается в третьей главе настоящей работы. Оказывается, что если предположить, что агент, моделируя поведение оппонентов, приписывает им и себе определенные ранги рефлексии, то исходная игра превращается в новую игру, в которой стратегией агента является выбор ранга рефлексии.

Если рассмотреть процесс рефлексии в новой игре, то получим новую игру и т.д. При этом, даже если в исходной игре множество возможных действий было конечно, то в новой игре множество возможных действий – число различных рангов рефлексии – бесконечно. Следовательно, основной задачей, решаемой при исследовании стратегической рефлексии, является определение максимального целесообразного ранга рефлексии. Ответ на этот вопрос получен в третьей главе для биматричных игр (раздел 3.2) и моделей, учитывающих ограниченность возможностей человека по переработке информации (раздел 3.3).

Приведем пример стратегической рефлексии – «*Пенальти*» (см. также примеры «Игра в прятки» и «Снос на мизере» в разделе 3.2). Агентами являются игрок, бьющий по воротам, и вратарь. Предположим для простоты, что у игрока есть два действия – «бить в левый угол ворот» и «бить в правый угол ворот». У вратаря также есть два действия – «ловить мяч в левом углу» и «ловить мяч в правом углу». Если вратарь угадывает, в какой угол бьет игрок, то он ловит мяч.

Промоделируем рассуждения агентов. Пусть вратарю известно, что данный игрок обычно бьет в правый угол. Следовательно, ему нужно ловить мяч в правом углу. Но если вратарь знает, что игроку известно, что вратарь знает, как обычно поступает игрок, то вратарю следует моделировать рассуждения игрока. Он может думать так: «Игроку известно, что я знаю его обычную тактику. Поэтому он ожидает, что я буду ловить мяч в правом углу и может ударить в левый угол. В этом случае мне надо ловить мяч в левом углу». Если игрок обладает достаточной глубиной рефлексии, то он может догадаться о рассуждениях вратаря и попытаться его перехитрить, ударив в правый угол. Эту же цепочку рассуждений может провести и вратарь и на этом основании ловить мяч в правом углу.

И игрок, и вратарь могут увеличивать глубину рефлексии до бесконечности, проводя рассуждения друг за друга, и ни один из них не имеет рациональных оснований остановиться на некотором конечном шаге. Следовательно, в рамках моделирования взаимных рассуждений нельзя априори определить исход рассматриваемой игры. Сама игра, в которой у каждого из агентов есть по два возможных действия, может быть заменена на другую игру, в которой агенты выбирают ранги рефлексии, приписываемые оппоненту. Но и в этой игре нет разумного решения, так как каждый агент может моделировать поведение оппонента, рассматривая «дважды рефлексивную» игру, и т.д. до бесконечности.

Единственное, чем можно помочь в рассматриваемой ситуации агентам, так это ограничить глубину их рефлексии, подметив, что начиная со второго ранга рефлексии (в силу конечности исходного множества возможных действий) ситуация начинает повторяться – находясь как на нулевом, так и на втором (и вообще на любом четном) уровне рефлексии, игрок будет бить в правый угол. Следовательно, вратарю остается угадать четность уровня рефлексии игрока.

Максимальный ранг рефлексии, который следует иметь агенту для того, чтобы охватить все многообразие исходов игры (упуская из виду некоторые стратегии оппонента, агент рискует уменьшить свой выигрыш), назовем *максимальным целесообразным рангом рефлексии*. Оказывается, что во многих случаях этот ранг конечен – соответствующие формальные результаты приводятся в разделах 2.6 и 3.2. В примере «Пенальти» максимальный целесообразный ранг рефлексии агентов равен двум.

В случае отсутствия у вратаря информации о том, куда обычно бьет нападающий, действия последнего симметричны (левый и правый углы «равноценны»). Однако остаются возможности искусственно внести асимметрию, чтобы попытаться ею воспользоваться в своих целях. Например, вратарь может сдвинуться в сторону одного из углов, как бы приглашая нападающего ударить в другой (и бросается именно в тот, «дальний» угол). Более сложная стратегия состоит в следующем. Игрок команды вратаря подходит к нему и показывает, куда собирается бить нападающий, причем делает это так, что нападающий это видит (после чего в момент удара вратарь ловит мяч не в том углу, на который демонстративно показал ему товарищ по команде, а в противоположном). Заметим, что оба описанных приема взяты «из жизни» и оказались успешными. Первый имел место в международном матче сборной СССР, второй – в финале Кубка СССР по футболу в серии послематчевых пенальти.

Введение информационной структуры, информационного равновесия и графа рефлексивной игры, во-первых, позволяет с единых методологических позиций и с помощью единого математического аппарата описывать и анализировать разнообразные ситуации коллективного принятия решений агентами, обладающими различной информированностью, исследовать влияние рангов рефлексии на выигрыши агентов, изучать условия существования и реализуемости информационных равновесий и т.д. Многочисленные примеры прикладных моделей приведены ниже.

Во-вторых, предложенная модель рефлексивной игры дает возможность изучать влияние рангов рефлексии (глубины информационной структуры) на выигрыши агентов. Полученные в разделах 2.5, 2.6 и 3.2 настоящей работы результаты свидетельствуют, что при минимальных предположениях можно показать ограниченность максимального целесообразного ранга рефлексии. Другими словами, во многих случаях неограниченное увеличение ранга рефлексии нецелесообразно с точки зрения выигрышей агентов.

В-третьих, наличие модели рефлексивной игры позволяет определить условия существования и свойства информационного равновесия, а также конструктивно и корректно сформулировать ***задачу информационного управления***, заключающуюся в поиске управляющим органом такой информационной структуры, что реализующееся в ней информационное равновесие наиболее выгодно с его точки зрения. Задача информационного управления формулируется и решается для ряда случаев в разделе 2.11. Теоретические результаты ее решения используются в ряде приводимых в четвертой главе прикладных моделей.

В третьей главе, в той же логике, что использована во второй главе для описания информационной рефлексии, рассматриваются модели стратегической рефлексии. Аналогично информационному управлению для информационной рефлексии, в разделе 3.4 формулируется ***задача рефлексивного управления*** (для стратегической рефлексии). Прикладные модели рефлексивного управления также рассматриваются в четвертой главе.

И, наконец, в-четвертых, язык рефлексивных игр (информационные структуры, графы рефлексивной игры и др.) является удобным для описания эффектов рефлексии в психологии (что иллюстрируется на примере шахматной игры, трансакционного анализа, моделей этического выбора и др.), в анализе художественных произведений, для моделирования организационных, экономических, социальных и многих других систем – см. четвертую главу настоящей работы.

Можно посмотреть на структуру настоящей работы и с другой точки зрения – с позиций теории принятия решений (см. Рис. 5, а также Рис. 6 ниже). Простейшей (базовой) моделью принятия решений является задача выбора, решаемая одним индивидуумом (лицом, принимающим решение – ЛПР) в условиях полной информированности. Усложнением этой базовой модели являются случаи наличия природной или/и игровой неопределенности. Последняя, в свою очередь, может подразделяться на неопределенность (неполную информированность ЛПР) относительно информированности оппонентов (информационная рефлексия) или относительно используемых ими принципов принятия решений (стратегическая рефлексия). Целенаправленные воздействия на представления ЛПР об информированности оппонентов или о принципах принятия ими решений составляют суть соответственно информационного и рефлексивного управления.

Завершив качественный обзор структуры и содержания работы, отметим, что можно предложить несколько подходов к ознакомлению с материалом настоящей книги. Первый – линейный, заключающийся в последовательном прочтении всех четырех глав. Второй рассчитан на читателя, интересующегося в большей степени формальными моделями, и заключается в прочтении второй и третьей глав и беглом ознакомлении с примерами в четвертой главе. Третий ориентирован на читателя, не желающего вникать в математические тонкости, и заключается в прочтении введения, содержательных интерпретаций примеров четвертой главы и заключения.


Рис. 5. Логика и структура работы

# ГЛАВА 1. РЕФЛЕКСИЯ В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

В первой главе настоящей работы приводится модель индивидуального принятия решений (раздел 1.1), проводится обзор основных концепций решения некооперативных игр, обсуждаются используемые в этих концепциях предположения об информированности и взаимной информированности агентов (раздел 1.2), анализируются известные модели информированности и общего знания (раздел 1.3).

## 1.1. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Опишем, следуя [41, 112, 117], модель принятия решений единственным агентом. Пусть агент способен выбирать некоторое *действие* $x$ из множества $X$ *допустимых действий*. В результате выбора действия $x \in X$ агент получает выигрыш $f(x)$, где $f: X \to \Re^1$ – действительнозначная *целевая функция*, отражающая предпочтения агента.

Примем *гипотезу рационального поведения*, заключающуюся в том, что агент с учетом всей имеющейся у него информации выбирает действия, которые наиболее предпочтительны с точки зрения значений своей целевой функции (данная гипотеза не является единственно возможной – см., например, концепцию ограниченной рациональности [141]). В соответствии с гипотезой рационального поведения агент выбирает альтернативу из множества «лучших» альтернатив. В рассматриваемом случае это множество является множеством альтернатив, на которых достигается максимум целевой функции.

Следовательно, выбор действия агентом определяется *правилом индивидуального рационального выбора* $P(f, X) \subseteq X$, которое выделяет множество наиболее предпочтительных с точки зрения агента действий[5]:

$$P(f, X) = \mathrm{Arg}\max_{x \in X} f(x).$$

---

[5] При использовании максимумов и минимумов подразумевается, что они достигаются.

Усложним модель, а именно предположим, что выигрыш агента определяется не только его собственными действиями, но и значением неопределенного параметра $\theta \in \Theta$ – *состояния природы*. То есть в результате выбора действия $x \in X$ и реализации состояния природы $\theta \in \Theta$ агент получает выигрыш $f(\theta, x)$, где $f: \Theta \times X \to \Re^1$.

Если выигрыш агента зависит, помимо его действий, от неопределенного параметра – состояния природы, то в общем случае не существует однозначно «лучшего» действия – принимая решение о выбираемом действии, агент должен «предсказывать» состояние природы.

Поэтому введем *гипотезу детерминизма*, заключающуюся в том, что агент стремится устранить с учетом всей имеющейся у него информации существующую неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности [41, 60] (другими словами, окончательный критерий, которым руководствуется агент, принимающий решения, не должен содержать неопределенных параметров). То есть агент должен в соответствии с гипотезой детерминизма устранить неопределенность относительно не зависящих от него параметров (быть может, путем введения определенных предположений об их значениях).

В зависимости от той *информации* $I$, которой обладает агент о неопределенных параметрах, различают [41, 114]:

- *интервальную неопределенность* (когда известно только множество $\Theta$ возможных значений неопределенных параметров);
- *вероятностную неопределенность* (когда, помимо множества $\Theta$ возможных значений неопределенных параметров, известно их вероятностное распределение $p(\theta)$);
- *нечеткую неопределенность* (когда, помимо множества $\Theta$ возможных значений неопределенных параметров, известна функция принадлежности их значений) [124].

В настоящей работе рассматривается, в основном, простейший – «*точечный*» – случай, когда агенты имеют представления о конкретном значении состояния природы.

Введем следующее <u>предположение</u> относительно используемых агентом процедур устранения неопределенности: интервальная неопределенность устраняется вычислением *максимального гарантированного результата* (МГР), вероятностная – ожидаемого значения целевой функции, нечеткая – множества максимально недоминируемых альтернатив[6].

Обозначим $f \underset{I}{\Rightarrow} \widehat{f}$ – процедуру устранения неопределенности, то есть процесс перехода от целевой функции $f(\theta, x)$ к целевой функции $\widehat{f}(x)$, которая не зависит от неопределенных параметров. В соответствии с введенным предположением в случае интервальной неопределенности $\widehat{f}(x) = \min_{\theta \in \Theta} f(\theta, x)$, в случае вероятностной неопределенности $\widehat{f}(x) = \int_{\Theta} f(x, \theta) p(\theta) d\theta$ и т.д. [15, 112, 114].

Устранив неопределенность, получаем детерминированную модель, то есть правило индивидуального рационального выбора имеет вид:

$$P(f, X, I) = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \widehat{f}(x),$$

где $I$ – информация, используемая агентом при устранении неопределенности $f \underset{I}{\Rightarrow} \widehat{f}$.

До сих пор мы рассматривали индивидуальное принятие решений. Рассмотрим теперь *игровую неопределенность*, в рамках которой существенными являются предположения агента о множестве возможных значений *обстановки игры* (действий других агентов, выбираемых ими в рамках тех или иных неточно известных рассматриваемому агенту принципов поведения).

## 1.2. ИНТЕРАКТИВНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ: ИГРЫ И РАВНОВЕСИЯ

**Модель игры.** Для описания коллективного поведения агентов недостаточно определить их предпочтения и правила индивидуального рационального выбора по отдельности. Как отмечалось выше, в

[6] Введенные предположения не являются единственно возможными. Использование других предположений (например, гипотезу об использовании МГР можно заменить гипотезой оптимизма, или гипотезой «взвешенного оптимизма-пессимизма» и т.д.) приведет к другим концепциям решения, однако процесс их получения будет следовать реализуемой ниже общей схеме.

случае, когда в системе имеется единственный агент, гипотеза его рационального (индивидуального) поведения предполагает, что агент ведет себя таким образом, чтобы выбором действия максимизировать значение своей целевой функции. В случае, когда агентов несколько, необходимо учитывать их взаимное влияние: в этом случае возникает *игра* – взаимодействие, в котором выигрыш каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов. Если в силу гипотезы рационального поведения каждый из агентов стремится выбором действия максимизировать свою целевую функцию, то понятно, что в случае нескольких агентов индивидуально рациональное действие каждого из них зависит от действий других агентов[7].

Рассмотрим теоретико-игровую модель взаимодействия между $n$ агентами. Каждый агент осуществляет выбор *действия* $x_i$, принадлежащего *допустимому множеству* $X_i$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$, – *множеству агентов*. Выбор действий агентами осуществляется однократно, одновременно и независимо.

Выигрыш $i$-го агента зависит от его собственного действия $x_i \in X_i$, от вектора действий $x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$ *оппонентов* $N \setminus \{i\}$ и от *состояния природы*[8] $\theta \in \Theta$ и описывается действительнозначной *функцией выигрыша* $f_i = f_i(\theta, x)$, где $x = (x_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X' = \prod_{j \in N} X_j$ – вектор действий всех агентов. При фиксированном значении состояния природы совокупность $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N})$ множества агентов, множеств их допустимых действий и целевых функций называется *игрой в нормальной форме*. *Решением игры* (*равновесием*) называется множество устойчивых в том или ином смысле векторов действий агентов – см. монографии и учебники по теории игр [28, 41, 86, 125, 129, 159, 213, 233, 243], а также по групповому принятию решений [95, 97].

В силу гипотезы рационального поведения каждый агент будет стремиться выбрать наилучшие для него (с точки зрения значения

---

[7] В теоретико-игровых моделях предполагается, что рациональность игроков, то есть следование их гипотезе рационального поведения, является общим знанием. В настоящей работе это предположение также принимается.

[8] Состояние природы может быть, в том числе, вектором, компоненты которого отражают индивидуальные характеристики агентов.

его целевой функции) действия при заданной обстановке. *Обстановкой* для него будет совокупность обстановки игры $x_{-i} \in X_{-i}$ и состояния природы $\theta \in \Theta$. Следовательно, принцип принятия им решения о выбираемом действии можно записать следующим образом ($BR$ обозначает наилучший ответ – best response):[9]

(1) $BR_i(\theta, x_{-i}) = \operatorname{Arg} \max\limits_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i \in N.$

Рассмотрим возможные принципы принятия решений агентами, каждый из которых порождает соответствующую концепцию равновесия, то есть определяет, в каком смысле устойчивым должен быть прогнозируемый исход игры. Параллельно будем обсуждать ту информированность, которая необходима для реализации равновесия.

**Равновесие в доминантных стратегиях.** Если для некоторого агента множество (1) не зависит от обстановки, то оно составляет множество его доминантных стратегий. Совокупность доминантных стратегий агентов называется *равновесием в доминантных стратегиях* – РДС [41]. Если у каждого из агентов существует доминантная стратегия, то они могут принимать решения независимо, то есть выбирать действия, не имея никакой информации и не делая никаких предположений об обстановке. К сожалению, РДС существует далеко не во всех играх.

Для реализации агентами равновесия в доминантных стратегиях, если последнее существует, достаточно знания каждым из них только своей целевой функции и допустимых множеств $X'$ и $\Theta$.

**Гарантирующее равновесие.** Той же информированностью должны обладать агенты для реализации *гарантирующего* (*максиминного*) *равновесия*, которое существует почти во всех играх:

(2) $x_i^г \in \operatorname{Arg} \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{x_{-i} \in X_{-i}} \min\limits_{\theta \in \Theta} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i \in N.$

Если хотя бы для одного из агентов множество (1) зависит от обстановки (то есть не существует РДС), то дело обстоит более сложным образом. Исследуем соответствующие случаи.

**Равновесие Нэша.** Определим многозначное отображение

(3) $BR(\theta, x) = (BR_1(\theta, x_{-1}); BR_2(\theta, x_{-2}), \ldots, BR_n(\theta, x_{-n})).$

[9] В настоящей работе принята независимая внутри подразделов нумерация формул.

*Равновесием Нэша* [41, 129, 243] при состоянии природы $\theta$ (точнее – *параметрическим равновесием Нэша*) называется точка $x^*(\theta) \in X'$, удовлетворяющая следующему условию:

(4) $x^*(\theta) \in BR(\theta, x^*(\theta))$.

Вложение (4) можно также записать в виде:

$$\forall\ i \in N, \forall\ y_i \in X_i \quad f_i(\theta, x^*(\theta)) \geq f_i(\theta, y_i,\ x^*_{-i}(\theta)\,).$$

Множество $E_N(\theta)$ всех точек вида (4) можно описать следующим образом:

(5) $E_N(\theta) = \{x \in X' \mid x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}),\ i \in N\}$.

Для случая двух агентов альтернативным эквивалентным способом определения множества $E_N(\theta)$ является его задание в виде множества пар точек ($x_1^*(\theta)$, $x_2^*(\theta)$), одновременно удовлетворяющих следующим условным соотношениям [31, 213, 243]:

(6) $x_1^*(\theta) \in BR_1(\theta, BR_2(\theta, BR_1(\theta, \dots BR_2(\theta,\ x_2^*(\theta)) \dots)))$,

(7) $x_2^*(\theta) \in BR_2(\theta, BR_1(\theta, BR_2(\theta, \dots BR_1(\theta,\ x_1^*(\theta)) \dots)))$.

Рассмотрим, какой информированностью должны обладать агенты, чтобы реализовать равновесие Нэша путем одновременного и независимого выбора своих действий.

По определению равновесие Нэша является той точкой, одностороннее отклонение от которой невыгодно ни для одного из агентов (при условии, что остальные агенты выбирают соответствующие компоненты равновесного по Нэшу вектора действий). Если агенты многократно осуществляют выбор действий, то точка Нэша является в определенном смысле (см. подробности в [123]) устойчивой и может считаться реализуемой в рамках знания, как и в случае с РДС, каждым агентом только своей целевой функции и допустимых множеств $X'$ и $\Theta$ (при этом, правда, необходимо введение дополнительных предположений о принципах принятия агентами решений о выборе действий в зависимости от истории игры [61, 107, 213]).

В настоящей работе рассмотрение ограничивается, в большинстве случаев, одношаговыми играми, поэтому в случае однократного выбора агентами своих действий знания ими только своих целевых функций и множеств $X'$ и $\Theta$ для реализации равновесия Нэша уже недостаточно. Поэтому введем следующее предположение, которое будем считать выполненным в ходе всего последующего изложения:

информация об игре $\Gamma$, множестве $\Theta$ и рациональности агентов является общим знанием.

Содержательно введенное предположение означает, что каждый из агентов рационален, знает множество участников игры, целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также знает множество возможных значений состояний природы. Кроме того, он знает, что другие агенты знают это, а также то, что они знают, что он это знает и т.д. до бесконечности (см. выше). Такая информированность может, в частности, достигаться публичным (то есть одновременно всем агентам, собранным вместе) сообщением соответствующей информации, что обеспечивает возможное достижение всеми агентами бесконечного *ранга информационной рефлексии*. Отметим, что введенное предположение ничего не говорит об информированности агентов относительно конкретного значения состояния природы.

Если значение состояния природы является общим знанием, то этого оказывается достаточно для реализации равновесия Нэша. В качестве обоснования этого утверждения промоделируем на примере игры двух лиц ход рассуждений первого агента (второй агент рассуждает полностью аналогично, и его рассуждения будут рассматриваться отдельно только в том случае, если они отличаются от рассуждений первого агента). Он рассуждает следующим образом (см. выражение (6)): «Мое действие, в силу (1), должно быть наилучшим ответом на действие второго агента при заданном состоянии природы. Следовательно, мне надо промоделировать его поведение. Про него (в силу предположения о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием) мне известно, что он будет действовать в рамках (1), то есть будет искать наилучший ответ на мои действия при заданном состоянии природы (см. (7)). Для этого ему необходимо промоделировать мои действия. При этом он будет (опять же, в силу введенных предположений о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием) рассуждать так же, как и я, и т.д. до бесконечности (см. (6))». В теории игр для подобных рассуждений используется удачная физическая аналогия отражения в зеркалах – см., например, [86].

Таким образом, для реализации равновесия Нэша достаточно, чтобы все параметры игры, а также значение состояния природы были общим знанием (ослабление этого предположения рассмотрено в [185]). Рассматриваемые в настоящей работе рефлексивные игры характеризуются тем, что значение состояния природы не является общим знанием, и каждый агент в общем случае имеет собственные представления об этом значении, представлениях других агентов и т.д.

**Субъективное равновесие.** Рассмотренные виды равновесия являются частными случаями *субъективного равновесия*, которое определяется как вектор действий агентов, каждая компонента которого является наилучшим ответом соответствующего агента на ту обстановку игры, которая может реализоваться с его субъективной точки зрения. Рассмотрим возможные случаи.

Предположим, что $i$-ый агент рассчитывает на реализацию обстановки игры $\hat{x}_{-i}^B$ («B» обозначает beliefs; иногда используются термины «предположение», «догадка» – conjecture) и состояния природы $\hat{\theta}_i$, тогда он выберет

(8) $x_i^B \in BR_i(\hat{\theta}_i, \hat{x}_{-i}^B), i \in N$.

Вектор $x^B$ является *точечным субъективным равновесием*.

Отметим, что при таком определении «равновесия» не требуется *обоснованности* предположений агентов о действиях оппонентов, то есть может оказаться, что $\exists\, i \in N$: $\hat{x}_{-i}^B \neq x_{-i}^B$. Обоснованное субъективное равновесие, то есть такое, что $\hat{x}_{-i}^B = x_{-i}^B$, $i \in N$, является равновесием Нэша (для этого, в частности, достаточно, чтобы все параметры игры были общим знанием, и чтобы каждый агент при построении $\hat{x}_{-i}^B$ моделировал рациональное поведение оппонентов). В частном случае, если наилучший ответ каждого агента не зависит от предположений об обстановке, то субъективное равновесие является равновесием в доминантных стратегиях.

В более общем случае $i$-ый агент может рассчитывать на выбор оппонентами действий из множества $X_{-i}^B \subseteq X_{-i}$ и реализацию состояния природы из множества $\hat{\Theta}_i \subseteq \Theta$, $i \in N$. Тогда наилучшим ответом будет *гарантирующее субъективное равновесие*:

(9) $x_i(X_{-i}^B, \hat{\Theta}_i) \in \operatorname{Arg} \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{x_{-i} \in X_{-i}^B} \min\limits_{\theta \in \hat{\Theta}_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), i \in N$.

Если $X_{-i}^{B} = X_{-i}$, $\widehat{\Theta}_i = \Theta$, $i \in N$, то $x_i(X_{-i}^{B}) = x_i^{г}$, $i \in N$, то есть гарантирующее субъективное равновесие является «классическим» гарантирующим равновесием. Разновидностью гарантирующего субъективного равновесия является П-равновесие, подробно описанное в [18].

В еще более общем случае в качестве наилучшего ответа $i$-го агента можно рассматривать распределение вероятностей $p_i(x_i)$, где $p_i(\cdot) \in \Delta(X_i)$ – множеству всевозможных распределений на $X_i$, которое максимизирует ожидаемый выигрыш агента с учетом его представлений о распределении вероятностей $\mu_i(x_{-i}) \in \Delta(X_{-i})$ действий, выбираемых другими агентами, и распределении вероятностей $q_i(\theta) \in \Delta(\Theta)$ состояния природы (получим *байесов принцип принятия решений*):

(10) $p_i(\mu_i(\cdot), q_i(\cdot), \cdot) =$

$$= \arg \max_{p_i \in \Delta(X_i)} \int\limits_{X',\Theta} f_i(\theta, x_i, x_{-i})\; p_i(x_i)\; q_i(\theta)\; \mu_i(x_{-i})\; d\theta\; dx\,,\; i \in N.$$

Таким образом, для реализации субъективного равновесия требуется минимальная информированность агентов – каждый из них должен знать свою целевую функцию $f_i(\cdot)$ и допустимые множества $\Theta$ и $X'$. Однако при такой информированности совокупность предположений агентов о состоянии природы и о поведении оппонентов могут быть *несогласованными*. Для достижения согласованности, то есть для того, чтобы предположения оправдывались, необходимы дополнительные предположения о взаимной информированности агентов. Наиболее сильным является предположение об общем знании, которое превращает субъективное точечное равновесие в равновесие Нэша, а совокупность байесовых принципов принятия решений – в равновесие Байеса–Нэша.

**Равновесие Байеса–Нэша.** Если в игре имеется неполная информация (см. [219]), то байесова игра описывается следующим набором:

- множеством $N$ агентов;

- множеством $K$ возможных *типов* агентов, где тип $i$-го агента $k_i \in K_i$, $i \in N$, вектор типов $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K' = \prod_{i \in N} K_i$;

- множеством $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимых векторов действий агентов;

- набором функций полезности $u_i$: $K' \times X' \to \Re^1$;

- представлениями $\mu_i(\cdot|k_i) \in \Delta(K_{-i})$, $i \in N$, агентов.

*Равновесие Байеса-Нэша* в игре с неполной информацией определяется как набор стратегий агентов вида $\sigma_i$: $K_i \to X_i$, $i \in N$, которые максимизируют соответствующие ожидаемые полезности

$$(11)\ U_i(k_i, \sigma_i(\cdot), \sigma_{-i}(\cdot)) = \int\limits_{k_{-i} \in \prod_{j \neq i} K_j} u_i(k, \sigma_i(k_i), \sigma_{-i}(k_{-i}))\, \mu_i(k_{-i}|\, k_i)\, dk_{-i},\ i \in N.$$

В байесовых играх, как правило, предполагается, что представления $\{\mu_i(\cdot|\cdot)\}_{i \in N}$ являются общим знанием. Для этого, в частности, достаточно, чтобы они были *согласованы*, то есть выводились каждым из агентов по формуле Байеса из распределения $\mu(k) \in \Delta(K')$, которое является общим знанием.

Для байесовых игр, в которых $\{\mu_i(\cdot|\cdot)\}_{i \in N}$ является общим знанием, в [189, 248] введено понятие *рационализируемых стратегий* (*rationalizable strategies*, см. также [182, 249]) $D_i \subseteq \Delta(X_i)$, $i \in N$, таких что $D_i \subseteq BR_i(D_{-i})$, $i \in N$. В играх двух лиц множество рационализируемых стратегий совпадает с множеством стратегий, полученным в результате итеративного исключения строго доминируемых стратегий[10] [243]. Возможно усложнение конструкций субъективного равновесия за счет введения запретов на определенные комбинации действий агентов и т.д.

Таким образом, реализация РДС, гарантирующего и субъективного равновесия (если они существуют) требует, чтобы каждый агент обладал, как минимум, информацией о своей целевой функции и всех допустимых множествах, а реализация равновесия Нэша, если оно существует, дополнительно требует, чтобы значения всех существенных параметров являлись общим знанием.

---

[10] Напомним, что строго доминируемой (strongly dominated) называется такая стратегия агента, что найдется другая его стратегия, которая при любой обстановке обеспечивает этому агенту строго больший выигрыш. Итеративное исключение (iterative elimination) строго доминируемых стратегий заключается в последовательном (в общем случае бесконечном) их исключении из множества рассматриваемых стратегий агентов, что приводит к нахождению «слабейшего» решения игры – множества недоминируемых стратегий.

Еще раз отметим, что реализуемость равновесия Нэша подразумевает возможность агентов (и управляющего органа – *центра*, или исследователя операций, если они обладают соответствующей информацией) априори и независимо рассчитать равновесие Нэша и в одношаговой игре сразу выбрать равновесные по Нэшу действия (при этом отдельный вопрос заключается в том, какое из равновесий выберут агенты и центр, если равновесий Нэша несколько [159]). Качественно, общее знание необходимо для того, чтобы каждый из агентов (и центр) мог промоделировать принципы принятия решений другими агентами, в том числе учитывающими его собственные принципы принятия решений и т.д.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что **концепция решения игры тесно связана с информированностью агентов**. Такие концепции решения, как РДС и равновесие Нэша, являются в некотором смысле предельными случаями – первая требует минимальной информированности, вторая – бесконечности ранга информационной рефлексии всех агентов. Поэтому ниже мы опишем другие («промежуточные») случаи информированности агентов – иерархии представлений – и построим соответствующие им решения игры. Прежде чем реализовывать эту программу, проведем обзор известных моделей общего знания и иерархии представлений.

## 1.3. ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ИНФОРМАЦИОННОЙ И СТРАТЕГИЧЕСКОЙ РЕФЛЕКСИИ

В рассмотренных в предыдущем разделе концепциях равновесия (за исключением, наверное, равновесий Нэша и Байеса-Нэша, в которых предполагается наличие общего знания) рефлексия отсутствует, так как каждый агент не пытается встать на позицию оппонентов.

Рефлексия имеет место в случае, когда агент имеет и использует при принятии решений иерархию представлений – свои представления о представлениях других агентов, их представлениях о его представлениях и представлениях друг друга и т.д. Анализ представлений о неопределенных факторах соответствует информационной рефлексии, а представлений о принципах принятия решений – стратегической рефлексии. В терминах субъективного равновесия стратегической рефлексии соответствуют предположения агента о том, что оппонент будет вычислять то или иное конкретное, например субъективное гарантирующее, равновесие, а информационной рефлексии – какие конкретные предположения об обстановке будет использовать оппонент.

Рассмотрим известные на сегодняшний день[11] подходы к описанию иерархии представлений и общего знания.

Как отмечается в [185, 187, 220], различают два подхода к описанию информированности – *синтаксический* и *семантический* (напомним, что «синтактика – синтаксис знаковых систем, то есть структура сочетания знаков и правил их образования и преобразования безотносительно к их значениям и функциям знаковых систем», «семантика – изучает знаковые систем как средства выражения смысла, основной ее предмет представляют интерпретации знаков и знакосочетаний» [157, с. 601]). Основы этих подходов были заложены в математической логике [222, 227].

При синтаксическом подходе иерархия представлений описывается в явном виде. Если представления задаются распределением вероятностей, то иерархии представлений на некотором уровне иерархии соответствуют распределения на произведении множества состояний природы и распределений, отражающих представления предыдущих уровней [238]. Альтернативой является использование «формул» (в логическом смысле), то есть правил преобразования элементов исходного множества на основе применения логических операций и операторов вида «игрок $i$ считает, что вероятность события … не меньше $\alpha$» [220, 268]. При этом знание моделируется предложениями (формулами), конструируемыми в соответствии с определенными синтаксическими правилами.

В рамках семантического подхода представления агентов задаются распределениями вероятностей на множестве состояний природы. Иерархия представлений при этом порождается исходя только из этих распределений. В простейшем детерминированном случае знание представляется множеством $\Theta$ возможных значений неопре-

[11] Следует отметить, что иерархии представлений и общее знание стали предметом исследований в теории игр совсем недавно – пионерскими являются упомянутые выше книга D. Lewis (1969) и статья R. Aumann (1976). Анализ хронологии публикаций (см. библиографию) свидетельствует о растущем интересе к этой проблемной области.

деленного параметра и разбиениями $\{P_i\}_{i \in N}$ этого множества. Элемент разбиения $P_i$, включающий $\theta \in \Theta$, представляет собой знание $i$-го агента – множество значений неопределенного параметра, неразличимых с его точки зрения при известном факте $\theta$ [184, 187].

Соответствие (условно говоря, «эквивалентность») между синтаксическим и семантическими подходами установлено в [185, 256 и др.].

Особо следует отметить экспериментальные исследования иерархий представлений в [194, 244, 259 и др.] – см. обзор в [266] и ссылки в разделе 3.4.

Проведенный краткий обзор свидетельствует, что существуют две «крайности». Первая «крайность» – общее знание (заслугой Дж. Харшаньи [219] является то, что он свел всю информацию об агенте, влияющую на его поведение, к единственной его характеристике – типу – и построил равновесие (Байеса-Нэша) в рамках гипотезы о том, что распределение вероятностей типов является общим знанием). Вторая «крайность» – бесконечная иерархия согласованных или несогласованных представлений. Примером последней служит конструкция, приведенная в [238], которая, с одной стороны, описывает все возможные Баейсовы игры и все возможные иерархии представлений, а, с другой стороны, (в силу своей общности) настолько громоздка, что не позволяет конструктивно ставить и решать конкретные задачи.

Большинство исследований информированности посвящено ответу на вопрос, в каких случаях иерархия представлений агентов описывает общее знание и/или адекватно отражает информированность агентов [192, 208 и др.]. Зависимость решения игры от конечной иерархии согласованных или несогласованных представлений агентов (то есть весь диапазон между двумя отмеченными выше «крайностями») практически не исследовалась. Исключения составляют, во-первых, работа [253], в которой равновесия Байеса–Нэша для трехуровневых иерархий несогласованных вероятностных представлений двух агентов строились в предположении, что на нижнем уровне иерархии представления совпадают с представлениями предыдущего уровня – см. также предположения типа $\Pi_m$ и соответствующие равновесия в [117]. Во-вторых – вторая глава настоящей работы, в которой описываются произвольные (конечные или бесконечные, согласованные или несогласованные) иерархии «точечных» представлений, для которых строится и исследуется информационное равновесие – равновесие рефлексивной игры (возможность и целесообразность обобщения полученных результатов на случай интервальных или вероятностных представлений агентов обсуждается в заключении).

Таким образом, актуальным является как исследование стратегической рефлексии (глава 3 настоящей работы), так и построение решения рефлексивной игры, и изучение его зависимости от иерархии представлений агентов (глава 2 настоящей работы).

**Информационная и стратегическая рефлексия.** Традиционно в теоретико-игровых моделях и/или в моделях принятия коллективных решений используется одно из двух предположений о взаимной информированности агентов [109]. Либо считается, что вся существенная информация и принципы принятия агентами решений всем им известны, всем известно, что всем это известно и т. д. до бесконечности (так называемая концепция *общего знания*, используемая, например, при определении равновесия Нэша). Либо предполагается, что каждый агент в рамках своей информированности следует некоторой процедуре принятия индивидуальных решений и почти «не задумывается» над тем, что знают и как ведут себя остальные агенты. Первый подход является каноническим для *теории игр*, второй – для моделей *коллективного поведения* (см., например, [27, 90, 123]). Но между двумя этими «крайностями» существует достаточно большое разнообразие возможных ситуаций. Предположим, что некоторый агент в условиях общего знания о существенных внешних параметрах (информационная рефлексия отсутствует) осуществил акт *стратегической рефлексии* – попытался спрогнозировать поведение (не информированность, но и принципы принятия решений) других агентов и выбирает свои действия с учетом этого прогноза (будем считать, что такой агент обладает первым рангом рефлексии). Другой агент (обладающий вторым рангом рефлексии) может знать о существовании агентов первого ранга и прогнозировать их поведение. И так далее. Возникает ряд вопросов: «Как поведение коллектива агентов зависит от их распределения по рангам рефлексии, т. е. от того, сколько в коллективе имеется агентов того или иного ранга? Если долями рефлексирующих агентов можно управлять, то каковы эти доли, оптимальные с точки зрения того или иного критерия эффективности, определенного на множестве действий агентов?»

В «классических» теоретико-игровых моделях предполагается, что в игре в нормальной форме агенты выберут равновесные по Нэшу действия. Однако исследования в области *экспериментальной экономики*[12] (experimental economics) свидетельствуют, что это далеко не всегда так (см., например, [263] и обзор [269]). Возможных объяснений отличиям поведения, наблюдаемого в экспериментах, от предсказанного теорией, может быть несколько:

– ограниченность когнитивных возможностей агентов – см. раздел 3.3 и [56, 132] (вычисление, тем более децентрализованное, равновесия Нэша трудоемко [247]). Следует также подчеркнуть, что Равновесие Нэша не всегда адекватно описывает реальное поведение агентов в лабораторных экспериментальных одношаговых играх, в том числе потому, что агенты не успевают «исправить» свои неправильные представления о существенных параметрах игры [189] – например, концепция рационализуемых стратегий Д. Бернхейма требует от агентов неограниченной рациональности (высоких когнитивных возможностей);

– необходимость уверенности каждого агента в том, что все его оппоненты могут вычислить равновесие Нэша и сделают это;

– неполная информированность;

– наличие нескольких равновесий.

Таким образом, существуют как минимум два основания (описанных выше – «теоретическое» и «экспериментальное») для рассмотрения моделей коллективного поведения агентов, обладающих различными рангами рефлексии.

**Коллективное поведение.** В отличие от теории игр *теория коллективного* (*группового*) *поведения* занимается исследованием динамики поведения рациональных агентов при достаточно слабых предположениях относительно их информированности. Так, например, не всегда требуется наличие среди агентов общего знания относительно множества агентов, множеств допустимых действий и целевых функций оппонентов. Или считается, что агенты не предсказывают поведение всех оппонентов, как это имеет место в теории

---

[12] В России сегодня существуют несколько лабораторий экспериментальной экономики в вузах и академических институтах, например: МФТИ-ВЦ РАН, ГУ ВШЭ, РЭШ, ЦЭМИ РАН.

игр (см. выше). Более того, зачастую агенты, принимая решения, могут «не знать о существовании» некоторых других агентов или иметь о них агрегированную информацию.

Наиболее распространенной моделью динамики коллективного поведения является *модель индикаторного поведения* [6, 90, 123], суть которой заключается в следующем. Предположим, что каждый агент в момент времени $t$ наблюдает действия всех агентов $\{x_i^{t-1}\}_{i \in N}$, выбранные ими в предыдущий момент времени $t-1$, $t = 1, 2, \ldots$ (начальный вектор действий $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ считается заданным).

Каждый агент может рассчитать свое *текущее положение цели* – такое его действие, которое максимизировало бы его целевую функцию при условии, что в текущем периоде все агенты выбрали бы те же действия, что и в предыдущем:

(1) $w_i(x_{-i}^{t-1}) = \arg \max\limits_{y \in \Re^1} F_i(y, x_{-i}^{t-1})$, $t = 1, 2, \ldots, i \in N$.

В рамках гипотезы индикаторного поведения каждый агент в каждый момент времени будет делать «шаг» от своего предыдущего действия к текущему положению цели:

(2) $x_i^t = x_i^{t-1} + \gamma_i^t \, [w_i(x_{-i}^{t-1}) - x_i^{t-1}]$, $i \in N$, $t = 1, 2, \ldots$,

где $\gamma_i^t \in [0; 1]$ – «величины шагов». Такое коллективное поведение можно условно назвать «оптимизационным», подчеркивая тем самым его отличие от игрового. Очевидно, что если $\gamma_i^t \equiv 0$, то динамика отсутствует; если $\gamma_i^t \equiv 1$, то каждый агент на каждом шаге выбирает свой наилучший ответ (см. (1.2.1)), однако в последнем случае соответствующая динамика может быть неустойчивой. Условия сходимости процедуры (2), области притяжения равновесий, условия на величины шагов $\{\gamma_i^t\}$, обеспечивающие сходимость, и т. д. можно найти в [6, 90].

Подходы теории коллективного поведения и теории игр согласованы в том смысле, что и та, и другая исследуют поведение рациональных агентов (ср. (1.2.1) и (2)), а равновесия игры, как правило, являются и равновесиями динамических процедур коллективного поведения (например, равновесие Нэша (1.2.2) является равновесием динамики (2) коллективного поведения).

Для полноты картины отметим, что в теории коллективного поведения существует и другой (выходящий за рамки настоящей работы) подход – *эволюционная теория игр* [267], которая исследует «поведение больших однородных групп (популяций) индивидуумов в типичных повторяющихся конфликтных ситуациях, причем каждую стратегию применяет множество игроков, а функция выигрыша характеризует успех отдельных стратегий, а не отдельных участников взаимодействия» [27, с. 296]. Русскоязычный обзор базовых результатов теории эволюционных игр можно найти в [27].

Таким образом, теория игр зачастую использует, условно говоря, максимальные предположения об информированности агентов (например, гипотезу о существовании общего знания), а теория коллективного поведения – минимальные. Промежуточное место занимают рефлексивные модели, поэтому перейдем к обсуждению роли рефлексии – информационной и стратегической – в принятии агентами решений.

**Рефлексия в теории игр и моделях коллективного поведения: структура предметной области**. Теория игр и теория коллективного поведения изучают модели взаимодействия рациональных агентов. Подходы и результаты этих теорий можно рассматривать с точки зрения трех взаимосвязанных гносеологических уровней (соответствующих различным функциям моделирования [102]) – см. Рис. 6:

– феноменологического уровня, на котором модель строится с целью описать и/или объяснить поведение исследуемой системы (коллектива агентов);

– прогностического уровня (цель – прогноз поведения исследуемой системы);

– нормативного уровня (цель – обеспечение требуемого поведения системы).

Для теории игр традиционной является схема, когда сначала описывается «модель игры» (феноменологический уровень); затем выбирается концепция равновесия, определяющая, что понимается под устойчивым исходом игры (прогностический уровень); после чего может формулироваться та или иная задача управления – выбора значений управляемых «параметров игры», приводящих к реализации требуемого равновесия (нормативный уровень) – см. Рис. 6.


Рис. 6. Дескриптивные и нормативные модели информационной и стратегической рефлексии

Учет информационной рефлексии приводит к необходимости построения и анализа структур информированности, что в итоге дает возможность определить информационное равновесие и в дальнейшем ставить и решать задачи информационного управления – см. Рис. 6.

Учет стратегической рефлексии приводит к аналогичной цепочке, выделенной на Рис. 6 жирными линиями: «модели стратегической рефлексии» – «рефлексивная структура» – «рефлексивное равновесие» – «рефлексивное управление».

Сравнение подходов к моделированию информационной и стратегической рефлексии проводится в Табл. 1.

*Табл. 1. Сравнение подходов к моделированию информационной и стратегической рефлексии*

| **ПАРАМЕТР** | **Информационная рефлексия (глава 2)** | **Стратегическая рефлексия (глава 3)** |
|---|---|---|
| Модель «игры» | Структура информированности | Рефлексивная структура |
| Равновесие | Информационное равновесие | Рефлексивное равновесие |
| Управление | Информационное управление | Рефлексивное управление |

Обсудив общие подходы к описанию информационной и стратегической рефлексии, перейдем к систематическому изложению соответствующих результатов: вторая глава посвящена информационной рефлексии и информационному управлению, третья – стратегической рефлексии и рефлексивному управлению (см. Табл. 1).

# ГЛАВА 2. ИНФОРМАЦИОННАЯ РЕФЛЕКСИЯ И УПРАВЛЕНИЕ

Целью данной главы является определение информационного равновесия и исследование его свойств. Для этого сначала описывается информационная рефлексия в играх двух лиц (раздел 2.1), затем (в разделе 2.2) приводится общая модель – описывается структура информированности, на основании которой принимаются решения участниками рефлексивной игры; определяется понятие сложности структуры информированности. В разделе 2.3 в качестве концепции решения рефлексивной игры вводится понятие информационного равновесия, в разделе 2.4 описывается граф рефлексивной игры, с помощью которого исследуются свойства информационного равновесия. В разделе 2.5 определяются регулярные структуры информированности и приводятся достаточные условия существования информационного равновесия. Раздел 2.6 посвящен исследованию влияния рангов рефлексии на выигрыши агентов, а также изучению зависимости между структурой информированности и информационным равновесием. Разделы 2.7-2.9 посвящены исследованию стабильности информационного равновесия, разделы 2.11-2.15 – моделированию информационных воздействий, а также постановкам задач информационного управления и исследованию его свойств (согласованность и др.). Заключительный раздел второй главы (раздел 2.16) содержит результаты исследования эффектов рефлексии в механизмах планирования.

## 2.1. ИНФОРМАЦИОННАЯ РЕФЛЕКСИЯ В ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ

Настоящий раздел содержит качественное обсуждение иерархии представлений и информационной рефлексии двух агентов и является вводным для общей модели, рассматриваемой в разделе 2.2.

Как отмечалось выше, предположение о том, что значение состояния природы – общее знание, является «предельным», то есть требующим от агентов бесконечной рефлексии, и ему в соответствие может быть поставлено классическое равновесие Нэша. Однако информированность агентов может быть другой, поэтому рассмотрим возможные случаи.

Примем следующие обозначения (см. также [117]): $\theta_i$ – информация (представления) $i$-го агента о состоянии природы, $\theta_{ij}$ – информация $i$-го агента об информации $j$-го агента о состоянии природы, $i \neq j$, $\theta_{iji}$ – информация $i$-го агента об информации $j$-го агента об информации $i$-го агента о состоянии природы[13], и т.д., $i, j = 1, 2$. Будем считать, что при принятии решений каждый агент считает истинной «свою» информацию о состоянии природы[14] (см. принцип доверия в [117]).

Таким образом, информированностью $i$-го агента будем называть $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk}, \ldots)$, то есть всю имеющуюся на момент принятия им решений информацию (иерархию его представлений, в которой уровни определяются длиной последовательности индексов в записи компонентов информированности). Совокупность $I_1$ и $I_2$ назовем информационной структурой рефлексивной игры двух агентов (модель информационной структуры рефлексивной игры произвольного конечного числа агентов приведена в следующем разделе). *Длина* максимальной *последовательности индексов* характеризует (на единицу превышает) ранг рефлексии агента.

В терминах *рефлексивных многочленов* В.А. Лефевра [78] единичной длине последовательности индексов соответствует ситуация, в которой $i$-ый агент, во-первых, «видит» только плацдарм $T$, в роли которого в рассматриваемой системе выступает множество возможных значений состояния природы. Во-вторых, у агента имеется информация о конкретном значении состояния природы – агент имеет свое представление о плацдарме: $T + Ti$, но рефлексия при этом по-прежнему отсутствует (ранг рефлексии равен нулю).

Максимальная длина последовательности индексов, равная двум, соответствует единичному рангу рефлексии, когда агент имеет информацию о представлениях других агентов (и, в том числе, быть может, о своих собственных представлениях – в этом случае говорят об *авторефлексии* $Tii$) о плацдарме: $T + Ti + Tji$, и т.д.[15]

[13] Отметим, что используемая система индексов (слева направо) является «обратной» предложенной В.А. Лефевром (справа налево).

[14] Вопрос о том, как $i$-ый агент на основании информации, например, об $\theta_{iji}$ корректирует свои представления $\theta_i$ о возможных значениях состояния природы, заслуживает отдельного исследования.

[15] Рефлексия начальных уровней также может интерпретироваться следующим образом. Предположим, что есть субъект, который воспринимает окружающий его мир. Можно выделить несколько уровней восприятия (уровней рефлексии). На

В общем случае, если интерпретировать $\theta$ как плацдарм $T$, то конечной информационной структуре $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{i_1 i_2 \ldots i_k})$, $k < \infty$, $i$-го агента соответствует рефлексивный многочлен $T\,i + T\,j\,i + \ldots + T\,i_k \ldots i = (T + T\,j + \ldots + i_k \ldots)\,i$. Другими словами, и информационные структуры, и рефлексивные многочлены описывают информированность агентов, однако информационные структуры позволяют конструктивно учитывать взаимную информированность агентов (см. раздел 2.2).

Примем следующее соглашение (аксиому автоинформированности): совпадение индексов, идущих подряд в записи информированности агентов, запрещено. Другими словами, запрещены модели информированности, включающие информацию, в записи которой фигурируют подряд одни и те же индексы, отражающие информированность агентов вида: «что я знаю (думаю и т.д.) о том, что оппонент думает (знает и т.д.) о том, что он знает (думает и т.д.) о ...» и т.д. Например, исключаются комбинации $\theta_{11}$ $\theta_{211}$, $\theta_{1221}$ и т.д.

Введенная система классификаций позволяет ввести обозначение $RG_{kl}$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, для рефлексивных игр (Reflexive Games) двух лиц, где первый индекс на единицу превышает ранг рефлексии (и соответствующую информированность) первого агента, а второй индекс – ранг рефлексии (и соответствующую информированность) второго агента.

---

нулевом (бытийном, нерефлексивном) уровне у субъекта существуют определенные представления об окружающем мире (возникающие как его отражение), однако он не осознает, что представления могут быть неполными, искаженными и т.д. Образно говоря, при этом окружающий субъекта мир совпадает с представлениями о нем. Следующий (первый) уровень соответствует осознанию субъектом возможности различия окружающего мира и своих представлений об этом мире (при этом субъект получает возможность «посмотреть» на себя со стороны). В результате этого осознания могут измениться как представления о мире, так и способы его отражения. Первый уровень восприятия, на котором уже присутствует рефлексия, назовем научным, так как именно на нем впервые возникают осознанные различия между субъективным и объективным описанием действительности (характерным примером первого ранга рефлексии является научная рефлексия по Г.П. Щедровицкому [179]). Второй уровень рефлексии назовем философским, так как он характеризуется появлением представлений о многообразии способов отражения и осознанием возможности выбора способа познания. Продолжать наращивание уровней рефлексии можно и дальше, однако в рамках используемых интерпретаций содержательные интерпретации третьего, четвертого и др. (более высоких) уровней затруднительны.

Между информированностью и рангом рефлексии в рамках рассматриваемой модели, очевидно, существует следующее соответствие: **ранг рефлексии агента на единицу меньше максимального числа индексов, отражающих его информированность**. Например, агент, имеющий информированность $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, ..., \theta_{i_1 i_2 ... i_k})$, где $i, j, i_1, i_2, ..., i_k \in N$ обладает рангом рефлексии $k - 1$.

Введенные предположения налагают следующие ограничения на структуру информированности двух агентов: если $\theta_{i_1 i_2 ... i_k} \neq \varnothing$ отражает информацию $i$-го агента, то $i_1 = i$ (то есть первый индекс всегда равен номеру агента, обладающего этой информацией); если $k > 2$, то индексы чередуются. Следовательно, при четных $k$ (то есть при нечетных рангах рефлексии) $i_k = 3 - i$ (первый и последний индексы различаются), а при нечетных $k$ (то есть при четных рангах рефлексии) $i_k = i$ (первый и последний индексы совпадают).

Таким образом, для задания рефлексивной игры необходимо, помимо целевых функций и допустимых множеств, перечислить информированности агентов, например, с помощью записи $RG_{kl}(I_1, I_2)$.

Сложность моделирования рефлексивных игр заключается отчасти в том, что приведенное описание и система классификаций произведены с точки зрения исследователя операций, то есть в каждом конкретном случае агенты могут не знать, в какую игру они играют.

В рамках модели принятия решений, описанной в [41, 117], будем считать, что каждый из агентов стремится с учетом всей имеющейся у него информации выбрать наилучшее с его точки зрения действие. Недостаточная информированность (отсутствие общего знания) приводит к тому, что фактический вектор действий агентов может отличаться от векторов, на которые они рассчитывают по отдельности, то есть реализуется не равновесие Нэша, а ***информационное равновесие***[16], которое является субъективным равновесием рефлексивной игры в традиционном смысле термина «равновесие».

При устранении существующей в моделях рефлексивных игр неопределенности агенты могут использовать два подхода: рассчитывать на наихудшие значения неопределенных параметров, то есть использовать принцип гарантированного результата, что приводит к

[16] *Корректное определение информационного равновесия приведено в разделе 2.3.*

реализации ***субъективного*** (рефлексивного – с учетом принципов принятия решений оппонентами) ***максиминного*** (***гарантирующего***) ***равновесия*** (см. третью главу настоящей работы); или «наделять» других агентов некоторой информированностью, например, той же, которой характеризуются они сами, что приводит к реализации ***субъективного «информационного» равновесия***.

Отметим существенность прилагательного «субъективный», так как в рефлексивных играх каждый из агентов вычисляет «свое» равновесие, а исход игры (вектор действий агентов), в общем случае не является равновесием[17] в «классическом» смысле [28, 41, 125]. При этом ключевой идеей является то, что каждый из агентов определяет «равновесие» *независимо* от других агентов, что существенно упрощает описание и исследование моделей их поведения.

Последнее утверждение существенно, так как оно позволяет рассматривать принципы принятия агентами решений, зависящие от той информации, которой они обладают к моменту принятия решений. Другими словами, вместо рефлексивной игры $RG_{kl}(I_1, I_2)$ можно рассматривать независимо две рефлексивные модели принятия решений агентами, обладающими иерархиями представлений $I_1$ и $I_2$ с рангами рефлексии $k - 1$ и $l - 1$, соответственно (еще раз подчеркнем, что ранг рефлексии агента в рассматриваемой модели определяется его информированностью). При этом существенно, что все знания агента (о состоянии природы, представлениях оппонента, его принципах принятия решений и т.д.) включены в его информированность – иерархию представлений.

Более подробно перечисленные аспекты рассматриваются в следующем разделе при систематическом описании информационной рефлексии.

## 2.2. ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ИГРЫ

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, ..., n\}$ агентов.

Если в ситуации присутствует неопределенный параметр $\theta \in \Theta$ (будем считать, что множество $\Theta$ является общим знанием), то

[17] Если классическое равновесие Нэша является «объективно» рациональным, то информационное равновесие является субъективно рациональным (в рамках имеющейся информированности).

*структура информированности* $I_i$ (как синоним будем употреблять термины *информационная структура* и иерархия представлений) $i$-го агента включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление $i$-го агента о параметре $\theta$ – обозначим его $\theta_i$, $\theta_i \in \Theta$. Во-вторых, представления $i$-го агента о представлениях других агентов о параметре $\theta$ – обозначим их $\theta_{ij}$, $\theta_{ij} \in \Theta$, $j \in N$. В-третьих, представления $i$-го агента о представлении $j$-го агента о представлении $k$-го агента – обозначим их $\theta_{ijk}$, $\theta_{ijk} \in \Theta$, $j$, $k \in N$. И так далее.

Таким образом, структура информированности $I_i$ $i$-го агента задается набором всевозможных значений вида $\theta_{ij_1 \dots j_l}$, где $l$ пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Theta$.

Аналогично задается *структура информированности* $I$ *игры* в целом – набором значений $\theta_{i_1 \dots i_l}$, где $l$ пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Theta$.. Подчеркнем, что структура информированности $I$ «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть.

Таким образом, структура информированности – бесконечное $n$-дерево (то есть тип структуры постоянен и является $n$-деревом), вершинам которого соответствует конкретная информированность реальных и фантомных агентов.

***Рефлексивной игрой*** $Г_I$ назовем игру, описываемую следующим кортежем:

(1) $Г_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, I\}$,

где $N$ – множество реальных агентов, $X_i$ – множество допустимых действий $i$-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Theta \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, $I$ – структура информированности.

Таким образом, рефлексивная игра является обобщением понятия игры в нормальной форме, задаваемой кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}\}$, на случай, когда информированность агентов отражена иерархией их представлений (информационной структурой $I$). В рамках принятого определения «классическая» игра в нормальной форме является частным случаем рефлексивной игры – игры с общим знанием. В «предельном» случае – когда состояние природы является общим знанием – предлагаемая в настоящей работе концепция решения рефлексивной игры (информационное равновесие – см. раздел 2.3) переходит в равновесие Нэша.

Совокупность связей между элементами информированности агентов можно изобразить в виде дерева (см. Рис. 7). При этом структура информированности $i$-го агента изображается поддеревом, исходящим из вершины $\theta_i$.

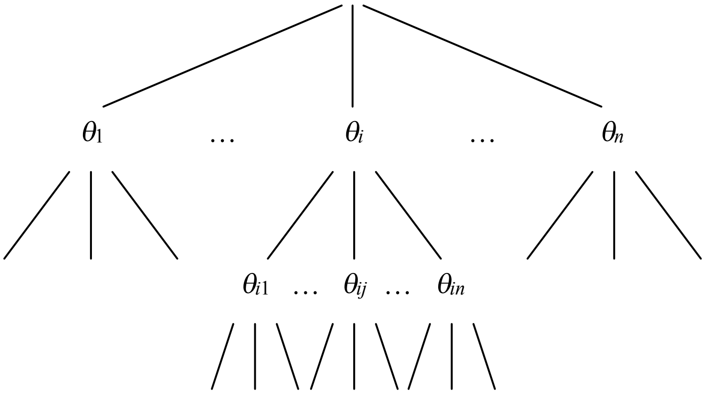


Рис. 7. Дерево информационной структуры

Сделаем важное замечание: в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением «точечной» структуры информированности, компоненты которой состоят лишь из элементов множества Θ. Более общим случаем является, например, интервальная или вероятностная информированность (см. описание моделей информированности в первой главе и обсуждение перспектив дальнейших исследований в заключении).

Для формулировки некоторых определений и свойств нам понадобятся следующие обозначения:

$\Sigma_+$ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из $N$;

$\Sigma$ – объединение $\Sigma_+$ с пустой последовательностью;

$|\sigma|$ – количество индексов в последовательности $\sigma$ (для пустой последовательности принимается равным нулю), которое выше было названо длиной последовательности индексов.

Если $\theta_i$ – представления $i$-го агента о неопределенном параметре, а $\theta_{ii}$ – представления $i$-го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $\theta_{ii} = \theta_i$. Иными словами, $i$-й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т. д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной.

**Аксиома автоинформированности:**

$$\forall\ i \in N\ \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma\ \theta_{\tau ii\sigma} = \theta_{\tau i\sigma}.$$

Эта аксиома означает, в частности, что, зная $\theta_\tau$ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| = \gamma$, можно однозначно найти $\theta_\tau$ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| < \gamma$.

Наряду со структурами информированности $I_i$, $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности $I_{ij}$ (структура информированности $j$-го агента в представлении $i$-го агента), $I_{ijk}$ и т.д. Отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с *n реальными* агентами (*i-агентами*, где $i \in N$) со структурами информированности $I_i$, в игре участвуют ***фантомные агенты*** ($\tau$-*агенты*, где $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \geq 2$) со структурами информированности $I_\tau = \{\theta_{\tau\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$. Фантомные агенты, существуя в сознании реальных агентов, влияют на их действия, о чем пойдет речь далее.

Определим фундаментальное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности.

Структуры информированности $I_\lambda$ и $I_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются *тождественными*, если выполнены два условия:

1. $\theta_{\lambda\sigma} = \theta_{\mu\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$;

2. последние индексы в последовательностях $\lambda$ и $\mu$ совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_\lambda = I_\mu$.

Первое из двух условий в определении тождественности структур прозрачно, второе же требует некоторых пояснений. Дело в том, что далее мы будем обсуждать действие $\tau$-агента в зависимости от его структуры информированности $I_\tau$ и целевой функции $f_i$, которая как раз определяется последним индексом последовательности $\tau$. Поэтому удобно считать, что тождественность структур информированности означает, в том числе, и тождественность целевых функций.

<u>Утверждение 2.2.1.</u> $I_\lambda = I_\mu \Leftrightarrow \forall\ \sigma \in \Sigma\quad I_{\lambda\sigma} = I_{\mu\sigma}$.

Доказательство. $I_\lambda = I_\mu \Rightarrow \forall\ \sigma, \kappa \in \Sigma \quad \theta_{\lambda\sigma\kappa} = \theta_{\mu\sigma\kappa} \Rightarrow \forall\ \sigma \in \Sigma$ $I_{\lambda\sigma} = I_{\mu\sigma}$.Обратная импликация очевидна: достаточно положить $\sigma$ равной пустой последовательности. •[18]

Содержательный смысл утверждения 2.2.1 состоит в том, что тождественность двух структур информированности в точности означает тождественность всех их подструктур.

Следующее утверждение является, по сути, иной формулировкой аксиомы автоинформированности.

<u>Утверждение 2.2.2.</u> $\forall\ i \in N\ \ \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma\ \ I_{\tau ii\sigma} = I_{\tau i\sigma}$.

Доказательство. $\forall\ i \in N \quad \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma \qquad \theta_{\tau ii\sigma} = \theta_{\tau i\sigma} \Leftrightarrow \forall\ i \in N$ $\forall\ \tau, \sigma, \kappa \in \Sigma \quad \theta_{\tau ii\sigma\kappa} = \theta_{\tau i\sigma\kappa} \Leftrightarrow \forall\ i \in N\ \ \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma \quad I_{\tau ii\sigma} = I_{\tau i\sigma}$. •

Определение тождественности структур информированности (как и последующие, приводимые в настоящем разделе) можно переформулировать так, чтобы соответствующее свойство структуры информированности выполнялось не объективно, а $\tau$-*субъективно* – в представлении $\tau$-агента ($\tau \in \Sigma_+$): структуры информированности $I_\lambda$ и $I_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются $\tau$-*субъективно тождественными*, если $I_{\tau\lambda} = I_{\tau\mu}$.

В дальнейшем будем формулировать определения и утверждения сразу $\tau$-субъективно для $\tau \in \Sigma$, имея в виду, что если $\tau$ – пустая последовательность индексов, то «$\tau$-субъективно» означает «объективно».

$\lambda$-агент называется $\tau$-субъективно *адекватно информированным* о представлениях $\mu$-агента (или, короче, о $\mu$-агенте), если

$$I_{\tau\lambda\mu} = I_{\tau\mu} \quad (\lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma).$$

Будем обозначать $\tau$-субъективную адекватную информированность $\lambda$-агента о $\mu$-агенте следующим образом: $I_\lambda >_\tau I_\mu$.

<u>Утверждение 2.2.3.</u> Каждый реальный агент $\tau$-субъективно считает себя адекватно информированным о любом агенте, то есть

$$\forall\, i \in N\ \ \forall\, \tau \in \Sigma\ \ \forall\, \sigma \in \Sigma_+\ \ I_i >_{\tau i} I_\sigma.$$

Доказательство. В силу утверждения 2.2.2 справедливо тождество $I_{\tau ii\sigma} = I_{\tau i\sigma}$, что по определению $\tau$-субъективно тождественных структур информированности означает, что $I_i >_{\tau i} I_\sigma$. •

Содержательно утверждение 2.2.3 отражает тот факт, что рассматриваемая точечная структура информированности подразумева-

---

[18] Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера или доказательства.

ет наличие у каждого агента уверенности в своей адекватной информированности о всех элементах этой структуры.

$\lambda$-агент и $\mu$-агент называются $\tau$-субъективно *взаимно информированными*, если одновременно выполнены тождества

$$I_{\tau\lambda\mu} = I_{\tau\mu}, \quad I_{\tau\mu\lambda} = I_{\tau\lambda} \quad (\lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma).$$

Будем обозначать $\tau$-субъективную взаимную информированность $\lambda$-агента и $\mu$-агента следующим образом: $I_\lambda >\!\!<_\tau I_\mu$.

$\lambda$-агент и $\mu$-агент называются $\tau$-субъективно *одинаково информированными о $\sigma$-агенте*, если $I_{\tau\lambda\sigma} = I_{\tau\mu\sigma}$ $(\sigma, \lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma)$.

Будем обозначать $\tau$-субъективную одинаковую информированность $\lambda$-агента и $\mu$-агента о $\sigma$-агенте следующим образом:

$$I_\lambda >_\sigma\!<_\tau I_\mu.$$

$\lambda$-агент и $\mu$-агент называются *$\tau$-субъективно одинаково информированными*, если $\forall\, i \in N$ $I_{\tau\lambda i} = I_{\tau\mu i}$ $(\lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma)$.

Будем обозначать $\tau$-субъективную одинаковую информированность $\lambda$-агента и $\mu$-агента следующим образом: $I_\lambda \sim_\tau I_\mu$.

Отметим, что отношения одинаковой информированности о каком-либо агенте и одинаковой информированности являются отношениями эквивалентности (то есть, рефлексивны, симметричны и транзитивны на множестве агентов).

Покажем, что одинаковая информированность равносильна одинаковой информированности о любом агенте.

Утверждение 2.2.4. $I_\lambda \sim_\tau I_\mu \Leftrightarrow \forall\, \sigma \in \Sigma_+$ $I_\lambda >_\sigma\!<_\tau I_\mu$.

Доказательство. $I_\lambda \sim_\tau I_\mu \Leftrightarrow \forall\, i \in N$ $I_{\tau\lambda i} = I_{\tau\mu i} \Leftrightarrow$ {в силу утверждения 2.2.1} $\Leftrightarrow \forall\, i \in N$ $\forall\, \kappa \in \Sigma$ $I_{\tau\lambda i\kappa} = I_{\tau\mu i\kappa} \Leftrightarrow$ {полагая $\sigma = i\,\kappa$} $\Leftrightarrow \forall\, \sigma \in \Sigma_+$ $I_{\tau\lambda\sigma} = I_{\tau\mu\sigma} \Leftrightarrow \forall\, \sigma \in \Sigma_+$ $I_\lambda >_\sigma\!<_\tau I_\mu$. •

Приведенные определения показывают, что описание ситуации в содержательных терминах адекватной, взаимной и одинаковой информированности могут быть описаны через тождество соответствующих структур информированности. Следующее утверждение касается связи введенных понятий друг с другом.

Утверждение 2.2.5. Для любого $\tau \in \Sigma$ следующие три условия равносильны:

1. любые два реальных агента $\tau$-субъективно являются взаимно информированными;

2. все реальные агенты $\tau$-субъективно являются одинаково информированными;

3. для любого $i \in N$ значение $I_{\sigma i}$ $\tau$-субъективно зависит только от $i$.

То есть для любого $\tau \in \Sigma$ выполнено:

$$(\forall\, i, j \in N\, I_i >\!<_\tau I_j) \Leftrightarrow (I_1 \sim_\tau \ldots \sim_\tau I_n) \Leftrightarrow (\forall\, i \in N\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \ I_{\tau\sigma i} = I_{\tau i}).$$

Доказательство. Докажем для трех условий утверждения импликации $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Для любых $i, j, m \in N$ имеем $I_i >_\tau I_m$, $I_j >_\tau I_m$, что означает выполнение тождеств $I_{\tau im} = I_{\tau m}$, $I_{\tau jm} = I_{\tau m}$. Отсюда $I_{\tau im} = I_{\tau jm}$, что доказывает условие 2 (с учетом утверждения 2.2.4).

$2 \Rightarrow 3$. Для пустой последовательности $\sigma$ условие 3 тривиально, поэтому возьмем произвольную непустую последовательность $\sigma \in \Sigma_+$. Тогда $\sigma = i_1 \ldots i_l$ $(i_k \in N,\ k = 1, \ldots, l)$, при этом для любого $i \in N$ справедливы следующие соотношения:

$I_{\tau i}$ = {в силу утверждения 2.2.2} = $I_{\tau ii}$ = {поскольку $I_i \sim_\tau I_{i_l}$} = $I_{\tau i_l i}$ = {в силу утверждения 2.2.2} = $I_{\tau i_l i_l i}$ = {поскольку $I_{i_l} \sim_\tau I_{i_{l-1}}$ и в силу утверждения 2.2.4} = $I_{\tau i_{l-1} i_l i}$ = … = $I_{\tau i_1 \ldots i_l i}$ = $I_{\tau\sigma i}$.

$3 \Rightarrow 1$. Для любых $i, j \in N$ имеем $I_{\tau ij} = I_{\tau j}$, $I_{\tau ji} = I_{\tau i}$, что означает $I_i >\!<_\tau I_j$. •

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой $I$ имеется счетное множество структур $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, среди которых можно при помощи отношения тождественности выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Будем говорить, что структура информированности $I$ имеет *конечную сложность* $\nu = \nu(I)$, если существует такой конечный набор попарно нетождественных структур $\{I_{\tau_1}, I_{\tau_2}, \ldots, I_{\tau_\nu}\}$, $\tau_l \in \Sigma_+$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$, что для любой структуры $I_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура $I_{\tau_l}$ из этого набора. Если такого конечного набора не существует, будем говорить, что структура $I$ имеет бесконечную сложность: $\nu(I) = \infty$.

Структуру информированности, имеющею конечную сложность, будем называть *конечной* (еще раз отметим, что при этом дерево структуры информированности все равно остается бесконечным). В противном случае структуру информированности будем называть *бесконечной*.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов (напомним, что по определению тождественности структур информированности они попарно различаются у реальных агентов).

Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, такой, что любая структура $I_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$, тождественна одной из них, назовем *базисом* структуры информированности $I$.

Если структура информированности $I$ имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последовательности индексов $\gamma$ такую, что, зная все структуры $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \gamma$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует ранг рефлексии, необходимый для описания структуры информированности.

Будем говорить, что структура информированности $I$, $\nu(I) < \infty$, имеет *конечную глубину* $\gamma = \gamma(I)$, если

1. для любой структуры $I_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \leq \gamma$;

2. для любого целого положительного числа $\xi$, $\xi < \gamma$, существует структура $I_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$, не тождественная никакой из структур $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \xi$.

Если $\nu(I) = \infty$, то и глубину будем считать бесконечной: $\gamma(I) = \infty$.

Имея описание структуры информированности, можно рассматривать процесс совместного принятия решений реальными и фантомными агентами, что приводит к понятию информационного равновесия.

## 2.3. ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Если задана структура $I$ информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор $\tau$-агентом своего действия $x_\tau$ в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности $I_\tau$, поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Набор действий $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, назовем **информационным равновесием**, если выполнены следующие условия:

1. структура информированности $I$ имеет конечную сложность;

2. $\forall \lambda, \mu \in \Sigma_+ \quad I_\lambda = I_\mu \Rightarrow x_\lambda^* = x_\mu^*$;

3. $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$

(1) $x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i1}^*, \ldots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^* \ldots, x_{\sigma i, n}^*)$.

Первое условие в определении информационного равновесия означает, что в рефлексивной игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов.

Второе условие отражает требование того, что одинаково информированные агенты выбирают одинаковые действия.

И, наконец, третье условие отражает рациональное поведение агентов – каждый из них стремится выбором собственного действия максимизировать свою целевую функцию, подставляя в нее действия других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента в рамках имеющихся у него представлений о других агентах.

Необходимость третьего условия в определении информационного равновесия, по-видимому, не вызывает сомнений. Приведем два примера, показывающих важность первых двух условий.

Примеры 2.3.1-2.3.2. В этих примерах участвуют два агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_1(\theta, x_1, x_2) = (\theta - x_2)x_1 - \frac{x_1^2}{2},\ \ f_2(\theta, x_1, x_2) = (\theta - x_1)x_2 - \frac{x_2^2}{2},$$

где $x_i \in \Re^1$, $i = 1, 2$. Различие лишь в структурах информированности.

Пример 2.3.1. Пусть структура информированности имеет следующий вид (напомним, что в силу аксиомы автоинформированности можно не рассматривать элементы с идущими подряд одинаковыми индексами):

$$\theta_1 = 1,\ \theta_{12} = 3,\ \theta_{121} = 5,\ \theta_{1212} = 7,\ \ldots;$$
$$\theta_2 = 2,\ \theta_{21} = 4,\ \theta_{212} = 6,\ \theta_{2121} = 8,\ \ldots .$$

Она имеет бесконечную сложность. Система уравнений (1) в данном случае принимает следующий вид:

| | |
|---|---|
| $x_1 = 1 - x_{12}$, | $x_2 = 2 - x_{21}$, |
| $x_{12} = 3 - x_{121}$, | $x_{21} = 4 - x_{212}$, |
| $x_{121} = 5 - x_{1212}$, | $x_{212} = 6 - x_{2121}$, |
| $x_{1212} = 7 - x_{12121}$, | $x_{2121} = 8 - x_{21212}$, |
| и т.д.; | и т.д. |

Видно, что в системе счетное число уравнений, причем решений у нее бесконечно много – произвольно выбирая значения $x_1$ и $x_2$, можно выразить через них остальные переменные. •

Пример 2.3.2. Пусть структура информированности имеет следующий вид: $\theta_\sigma = 1$ для любого $\sigma \in \Sigma_+$. Если при этом условие 2 определения информационного равновесия не выполнено, то в системе (1) оказывается счетное число уравнений:

| | |
|---|---|
| $x_1 = 1 - x_{12}$, | $x_2 = 1 - x_{21}$, |
| $x_{12} = 1 - x_{121}$, | $x_{21} = 1 - x_{212}$, |
| $x_{121} = 1 - x_{1212}$, | $x_{212} = 1 - x_{2121}$, |
| $x_{1212} = 1 - x_{12121}$, | $x_{2121} = 1 - x_{21212}$, |
| и т.д.; | и т.д. |

И здесь, как и в примере 2.3.1, решений бесконечно много – произвольно выбирая значения $x_1$ и $x_2$, можно выразить через них остальные переменные. •

В соответствии с условием 2, для определения информационного равновесия требуется решить, казалось бы, бесконечное (счетное) число уравнений и получить столько же значений $x_\tau^*$. Однако оказывается, что на самом деле число уравнений и значений конечно.

Утверждение 2.2.6. Если информационное равновесие $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем ν попарно различных действий, а в системе (1) содержится не более чем ν попарно различных уравнений.

Доказательство. Пусть $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, – информационное равновесие. Тогда из конечности структуры информированности и условия 2 сразу следует, что попарно различных чисел $x_\tau^*$ не более $\nu$.

Рассмотрим две любые тождественные структуры информированности: $I_\lambda = I_\mu$. Соответственно, имеем $\theta_\lambda = \theta_\mu$ и $x_\lambda^* = x_\mu^*$. Далее, для любого $i \in N$ справедливо $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$, следовательно, $x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$. Поэтому два уравнения системы (1), у которых в левой части стоят действия $x_\lambda^*$ и $x_\mu^*$, тождественно совпадают. •

Таким образом, для нахождения информационного равновесия $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, достаточно записать $\nu$ условий (1) для каждого из $\nu$ попарно различных значений $x_\tau^*$, отвечающих попарно различным структурам информированности $I_\tau$.

Если все агенты являются одинаково информированными, то сложность структуры информированности минимальна и равна числу агентов. В этом случае система (1) переходит в определение равновесия Нэша, а информационное равновесие – в равновесие Нэша.

Итак, в случае, когда все реальные агенты являются одинаково информированными (то есть рефлексивная реальность является общим знанием), информационное равновесие переходит в равновесие Нэша (фантомных агентов «не возникает»). Однако и в общем случае между информационным равновесием и равновесием Нэша существует тесная связь.

Пусть имеется структура информированности $I$ конечной сложности $\nu$ с базисом $\{I_{\tau_1}, \ldots, I_{\tau_\nu}\}$. Тогда в информационном равновесии участвуют реальные и фантомные агенты из множества $\Xi = \{\tau_1, \ldots, \tau_\nu\}$, каждый из которых выбирает действие $\{x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_\nu}\}$ соответственно, $x_{\tau_l} \in X_{\omega(\tau_l)}$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$ – здесь и далее в настоящем разделе будем обозначать $\omega(\sigma)$ последний индекс в последовательности $\sigma$, где $\sigma \in \Sigma_+$.

Запишем целевую функцию каждого из агентов из множества $\Xi$ следующим образом:

(2) $\varphi_{\tau_l}(x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_\nu}) = f_{\omega(\tau_l)}(\theta_{\tau_l}, x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_\nu})$,

где $I_{\tau_l i} = I_{\sigma_i}$, $\sigma_i \in \Xi$ для всех $i \in N$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$. Заметим, что $I_{\sigma_{\omega(\tau_l)}} = I_{\tau_l \omega(\tau_l)} = I_{\tau_l}$, поэтому соотношение (2) можно записать более подробно в следующем виде:

(3) $$\varphi_{\tau_l}(x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_{l-1}}, x_{\tau_l}, x_{\tau_{l+1}}, \ldots, x_{\tau_\nu}) =$$
$$= f_{\omega(\tau_l)}(\theta_{\tau_l}, x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_{\omega(\tau_l)-1}}, x_{\tau_l}, x_{\sigma_{\omega(\tau_l)-1}}, \ldots, x_{\sigma_n}).$$

Содержательно соотношения (2) и (3) означают следующее: целевая функция, которую $\tau_l$-агент ($\tau_l \in \Xi$) максимизирует в рефлексивной игре, субъективно зависит от его представлений о параметре $\theta$, от его действия и от действий $(n-1)$ агента из множества $\Xi$. Иными словами, функция $\varphi_{\tau_l}$ существенно зависит лишь от переменных $\{x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_\nu}\}$ (и от величины $\theta_{\tau_l}$ как от параметра), причем эта зависимость совпадает с функцией $f_i$, где $i = \omega(\tau_l)$. Поэтому функция $\varphi_{\tau_l}$ «наследует» свойства функции $f_{\omega(\tau_1)}$.

Несколько забегая вперед, приведем следующий пример. Пусть граф рефлексивной игры (см. следующий раздел) выглядит как на Рис. 9, а целевые функции реальных агентов – $f_i(\theta, x_1, x_2, x_3)$, $x_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда в информационном равновесии участвуют пять агентов из множества $\Xi = \{1, 2, 3, 31, 32\}$ со следующими целевыми функциями:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_1(\theta_1, x_1, x_2, x_3);$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_2(\theta_2, x_1, x_2, x_3);$$
$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_3(\theta_3, x_{31}, x_{32}, x_3);$$
$$\varphi_{31}(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_1(\theta_{31}, x_{31}, x_{32}, x_3);$$
$$\varphi_{32}(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_2(\theta_{32}, x_{31}, x_{32}, x_3).$$

С учетом соотношения (3) система уравнений (2) для определения информационного равновесия $(x^*_{\tau_1}, \ldots, x^*_{\tau_\nu})$ представима в виде:

$$x^*_{\tau_l} = \underset{x_{\tau_l} \in X_{\omega(\tau_l)}}{\arg\max}\ \varphi_{\tau_l}(x^*_{\tau_{l-1}}, \ldots, x^*_{\tau_{l-1}}, x_{\tau_l}, x^*_{\tau_{l+1}}, \ldots, x^*_{\tau_\nu}),$$

где $l$ пробегает все значения от 1 до $\nu$. Нетрудно видеть, что это не что иное, как система соотношений для определения равновесия Нэша в игре с одинаковой информированностью $\tau_l$–агентов, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$. Это обстоятельство позволяет применять к информационному равновесию (соответствующим образом модифицировав) достаточные условия существования, известные для равновесия Нэша.

Например, известен следующий факт (см. [41, с. 74]): если в непрерывной игре множества действий $X_i$ – выпуклые подмножества линейных метрических пространств, для каждого агента целевая функция $f_i$ непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной $x_i$, то в этой игре существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Этот факт можно переформулировать, получив достаточное условие существования информационного равновесия в рефлексивной игре.

Утверждение 2.2.7. Пусть в рефлексивной игре со структурой информированности конечной сложности множества действий $X_i$ – выпуклые подмножества линейных метрических пространств, для каждого агента целевая функция $f_i(\theta, x_1, \ldots, x_n)$ при любом $\theta \in \Theta$ непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной $x_i$. Тогда в этой игре существует информационное равновесие.

Доказательство. Непрерывность по всем аргументам функции $f_i$ и ее строгая вогнутость по переменной $x_i$ означает непрерывность по всем аргументам функций $\varphi_{\tau_l}$ (где $\tau_l \in \Xi$, $\omega(\tau_l) = i$), определяемых соотношениями (3), и строгую вогнутость каждой из них по $x_{\tau_l}$. Поэтому утверждение сразу вытекает из приведенного выше факта [41, с. 74]. •

Как нетрудно убедиться, требуемыми свойствами обладают целевые функции из примеров 2.4.1-2.4.3. Поэтому информационное равновесие для рефлексивных игр с этими функциями существует для любых структур информированности конечной сложности.

Информационное равновесие (см. (1)) является достаточно громоздкой конструкцией, и сразу увидеть связь между информационной структурой и информационным равновесием зачастую бывает затруднительно. Удобным языком описания взаимной информированности агентов и выразительным средством анализа свойств информационного равновесия является граф рефлексивной игры, к описанию которого мы и переходим.

## 2.4. ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ

Если структура информированности имеет конечную сложность, то можно построить **граф рефлексивной игры**, наглядно показывающий взаимосвязь между действиями агентов (как реальных, так и фантомных), участвующих в равновесии.

Вершинами этого ориентированного графа являются действия $x_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, отвечающие попарно нетождественным структурам информированности $I_\tau$, или компоненты структуры информированности $\theta_\tau$, или просто номер $\tau$ реального или фантомного агента, $\tau \in \Sigma_+$.

Между вершинами проведены дуги по следующему правилу: к каждой вершине $x_{\sigma i}$ проведены дуги от $(n - 1)$ вершин, отвечающих структурам $I_{\sigma ij}$, $j \in N \setminus \{i\}$. Если две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами, будем изображать одно ребро с двумя стрелками.

Подчеркнем, что граф рефлексивной игры соответствует системе уравнений (2.3.1) (то есть определению информационного равновесия), в то время как решения ее может и не существовать.

Итак, граф $G_I$ рефлексивной игры $\Gamma_I$ (см. определение рефлексивной игры в предыдущем разделе), структура информированности которой имеет конечную сложность, определяется следующим образом:

- вершины графа $G_I$ соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, то есть попарно нетождественным структурам информированности;

- дуги графа $G_I$ отражают взаимную информированность агентов: если от одного агента (реального или фантомного) существует путь к другому агенту, то второй адекватно информирован о первом.

Если в вершинах графа $G_I$ изображать представления соответствующего агента о состоянии природы, то рефлексивная игра $\Gamma_I$ с конечной структурой информированности $I$ может быть задана кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, G_I\}$, где $N$ – множество реальных агентов, $X_i$ – множество допустимых действий $i$-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Theta \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, $G_I$ – граф рефлексивной игры.

Отметим, что во многих случаях рефлексивную игру более удобно (и наглядно) описывать именно в терминах графа $G_I$, а не дерева информационной структуры.

Рассмотрим несколько примеров нахождения информационного равновесия.

Примеры 2.4.1-2.4.3. В этих примерах участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $\theta \in \Theta = \{1, 2\}$.

Содержательно, $x_i$ – объем выпуска продукции $i$-ым агентом, $\theta$ – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж (см. модели олигополии Курно в [1, 233, 243]), а второе слагаемое – как затраты на производство.

Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($\theta = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($\theta = 2$) – оптимистом. Таким образом, в примерах 2.4.1-2.4.3 ситуации различаются лишь вследствие различных структур информированности.

Пример 2.4.1. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы. Тогда, в соответствии с утверждением 2.2.5, для любого $\sigma \in \Sigma$ выполняются тождества $I_{\sigma 1} = I_1$, $I_{\sigma 2} = I_2$, $I_{\sigma 3} = I_3$.

В соответствии со свойством 2 определения информационного равновесия, аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий $x_\sigma^*$.

Видно, что любая структура информированности тождественна одной из трех, образующих базис: $\{I_1, I_2, I_3\}$. Поэтому сложность данной структуры информированности равна трем, а глубина равна единице. Граф рефлексивной игры изображен на Рис. 8.

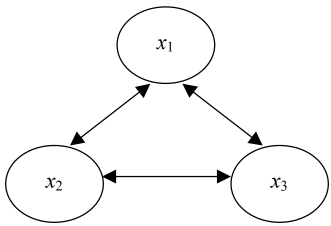


Рис. 8. Граф рефлексивной игры в примере 2.4.1

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (2.3.1)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

Таким образом, действия агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 1/2$, $x_3^* = 0$. •

<u>Пример 2.4.2.</u> Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.

Имеем: $I_1 \sim I_2$, $I_1 > I_3$, $I_2 > I_3$, $I_1 \sim_3 I_2 \sim_3 I_3$. Граф рефлексивной игры изображен на Рис. 9.

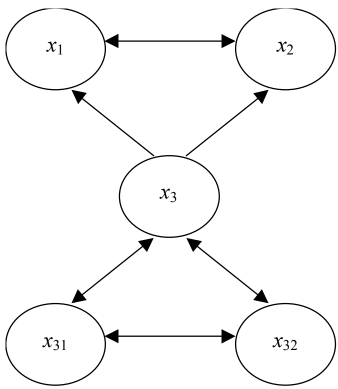


Рис. 9. Граф рефлексивной игры в примере 2.4.2

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, имеющих место для любого $\sigma \in \Sigma$ (воспользуемся соответствующими определениями и утверждениями 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.5):

$I_{12\sigma} = I_{2\sigma}$, $I_{13\sigma} = I_{3\sigma}$, $I_{21\sigma} = I_{1\sigma}$, $I_{23\sigma} = I_{3\sigma}$, $I_{3\sigma 1} = I_{31}$, $I_{3\sigma 2} = I_{32}$, $I_{3\sigma 3} = I_3$.

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий $x_\sigma^*$. Левые части этих тождеств показывают, что любая структура $I_\sigma$ при $|\sigma|>2$ тождественна некоторой структуре $I_\tau$, $|\tau|<|\sigma|$. Поэтому глубина структуры $I$ не превосходит двух и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части показывают, что базис образуют следующие структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{32}\}$ (нетрудно убедиться, что они попарно различны).

Таким образом, сложность данной структуры информированности равна пяти, а глубина равна двум.

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (2.3.1)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_2^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_3^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 9/20$, $x_3^* = 1/5$. •

<u>Пример 2.4.3.</u> Пусть все трое агентов оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами.

Имеем: $I_1 >< I_2$, $I_2 >< I_3$, $I_1 \sim_{13} I_2 \sim_{13} I_3$, $I_1 \sim_{31} I_2 \sim_{31} I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, имеющих место для любого $\sigma \in \Sigma$ (воспользуемся соответствующими определениями и утверждениями 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.5):

$$I_{12\sigma} = I_{2\sigma},\ I_{13\sigma1} = I_{131},\ I_{13\sigma2} = I_{132},\ I_{13\sigma3} = I_{13},\ I_{21\sigma} = I_{1\sigma},$$
$$I_{23\sigma} = I_{3\sigma},\ I_{31\sigma1} = I_{31},\ I_{31\sigma2} = I_{312},\ I_{31\sigma3} = I_{313},\ I_{32\sigma} = I_{2\sigma}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий $x_\sigma^*$.

Левые части этих тождеств показывают, что любая структура $I_\sigma$ при $|\sigma| > 3$ тождественна некоторой структуре $I_\tau$, $|\tau| < |\sigma|$. Поэтому глубина структуры $I$ не превосходит трех и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части тождеств показывают, что в базис могут входить лишь следующие структуры информированности: $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_{31}$, $I_{13}$, $I_{131}$, $I_{132}$, $I_{312}$, $I_{313}$.

Далее, для любого $\sigma \in \Sigma$ справедливы соотношения $\theta_{131\sigma} = \theta_{31\sigma} = \theta_{313\sigma} = \theta_{13\sigma} = \theta_{123\sigma} = \theta_{213\sigma} = 1$, из которых вытекают тождества $I_{131} = I_{31}$, $I_{313} = I_{13}$, $I_{123} = I_{213}$.

Таким образом, базис образуют следующие попарно различные структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{13}, I_{132}\}$. Сложность данной структуры информированности равна шести, а глубина равна трем. Граф соответствующей рефлексивной игры изображен на Рис. 10.

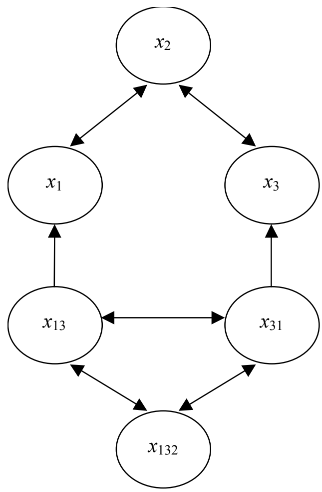


Рис. 10. Граф рефлексивной игры в примере 2.4.3

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (2.3.1)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{2 - x_{31}^* - x_2^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{132}^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{132}^*}{3}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{13}^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_2^* = \dfrac{12}{35}, \\ x_3^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_3^* = 17/35$, $x_2^* = 12/35$. •

Завершив описание графа рефлексивной игры, продолжим исследование свойств информационного равновесия.

## 2.5. РЕГУЛЯРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

В разделе 2.2 было введено понятие структуры информированности – бесконечного дерева, отражающего иерархию представлений агентов в рефлексивной игре. В разделе 2.3 показано, что информационное равновесие (как решение рефлексивной игры) существует в случае, если структура информированности конечна. Конечность информационной структуры по своему определению означает не конечность ее дерева, а существование конечного базиса, в рамках которого рассмотрение фантомных агентов, имеющих ту же информированность, что и другие реальные или фантомные агенты, не дает новой информации и поэтому нецелесообразно.

Если априори имеется (например, построено исходя из содержательных соображений) конечное дерево, отражающее несколько первых уровней представлений агентов, то в общем случае нельзя однозначно сказать какой бесконечной информационной структуре оно соответствует. Другими словами, может существовать множество информационных структур, любое конечное число верхних уровней которых совпадает.

Поэтому для определения информационного равновесия по конечному дереву представлений агентов необходимо введение дополнительных предположений. Например, можно постулировать, что каждый фантомный агент, соответствующий нижнему уровню конечного дерева представлений, при определении своего действия считает, что агент, соответствующий предыдущему уровню иерархии, адекватно информирован о нем (см. предположения $\Pi_m$ в [117] и субъективные байесовы равновесия в [253]).

В настоящем разделе рассматриваются регулярные структуры информированности, обладающие, в частности, тем свойством, что, если задано конечное дерево представлений и известно, что информационная структура регулярна, то информационное равновесие определяется однозначно. Кроме того, для регулярных структур информированности удается: получить конструктивные условия существования информационного равновесия, исследовать зависимость информационного равновесия от структуры информированности (раздел 2.6), поставить и решить задачу рефлексивного управления (раздел 2.11).

Как отмечалось выше, понятие структуры информированности является довольно общим и объемлет, в том числе, случаи, содержательная интерпретация которых представляется затруднительной. Поэтому введем в рассмотрение класс *регулярных структур информированности*, который, с одной стороны, является достаточно широким и охватывает множество реальных ситуаций, а с другой – легко описывается. Для задания этих структур введем вспомогательное понятие *регулярного конечного дерева* (РКД), которое определим рекуррентно.

Пусть в игре участвуют $n$ агентов. Если (в простейшем случае) все агенты одинаково информированы, то структура информированности имеет сложность $n$ и единичную глубину. Будем изображать эту ситуацию в виде дерева, состоящего из корневой вершины, $n$ ребер и $n$ висячих вершин. На Рис. 11 изображено такое дерево для случая трех агентов (здесь и далее будем для большей наглядности отмечать в вершинах дерева вместо $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_{12}$ и т.д. просто 1, 2, 12 и т.д.).

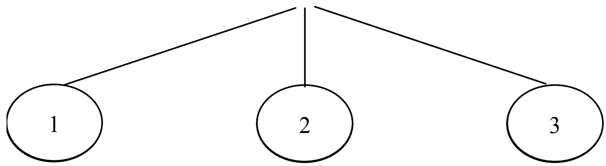


Рис. 11. Регулярное конечное дерево

Данному РКД соответствует граф рефлексивной игры, приведенный на Рис. 12.

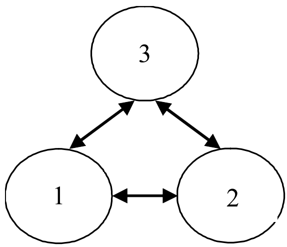


Рис. 12. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на Рис. 11

Далее РКД может «расти» следующим образом: к каждой висячей вершине $\tau i$, $\tau \in \Sigma$, присоединяется ровно $(n - 1)$ ребро, при этом возникает $(n - 1)$ висячая вершина $\tau ij$, $j = 1, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n$. Построенное РКД будем интерпретировать так: если имеется висячая вершина $\tau i$, $\tau \in \Sigma$, то $\tau i$-агент одинаково информирован с $\tau$-агентом (если $\tau$ – пустая последовательность, то $\tau i$-агент является реальным, и его субъективные представления совпадают с объективными).

В качестве примеров регулярных структур информированности приведем все возможные (с точностью до перенумерации агентов) структуры глубины 2.

Начнем с РКД, изображенного на Рис. 13.

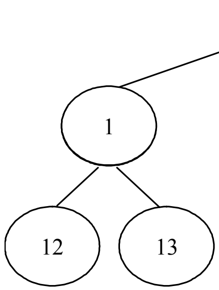


Рис. 13. Пример РКД глубины 2

Если $\theta_{12} = \theta_2$ и $\theta_{13} = \theta_3$, то опять получаем граф, приведенный на Рис. 13. Если же хотя бы одно из этих равенств нарушено, получается граф рефлексивной игры, изображенный на Рис. 14.

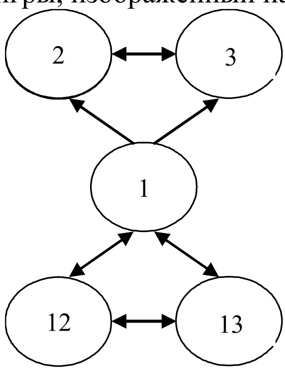


Рис. 14. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на Рис. 13

Следующий случай РКД изображен на Рис. 15.

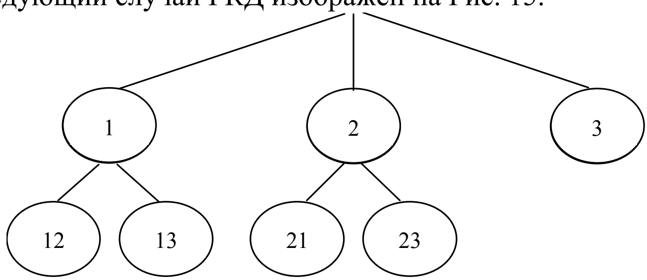


Рис. 15. Пример РКД глубины 2

Здесь возможны два варианта графов рефлексивной игры, не сводимых к предыдущим – см. Рис. 16 и Рис. 17.

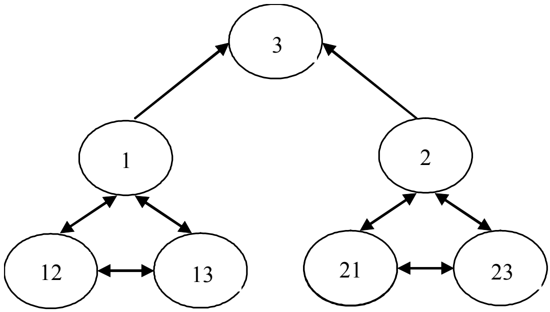


Рис. 16. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на Рис. 15

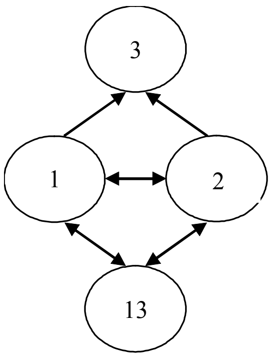


Рис. 17. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на Рис. 15

Наконец, последний случай РКД изображен на Рис. 18.

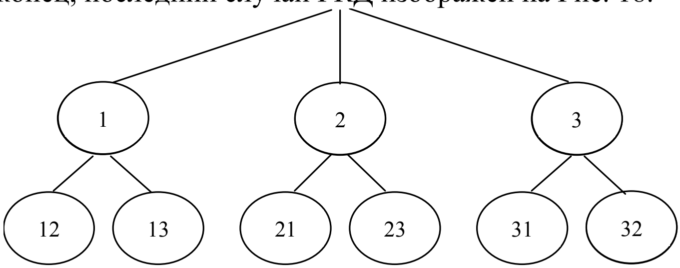


Рис. 18. Пример РКД глубины 2

Этому случаю соответствуют три варианта графов рефлексивной игры, не сводимых к предыдущим – см. Рис. 19, Рис. 20 и Рис. 21. Как видим, графы на рисунках Рис. 20 и Рис. 21 являются несвязными.

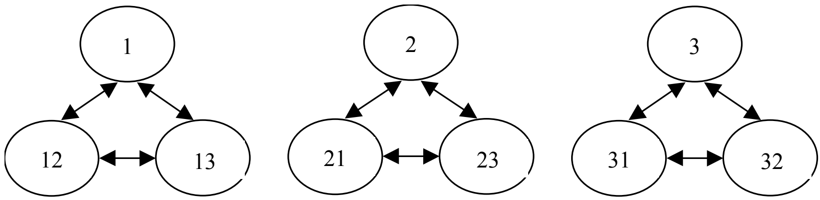


Рис. 19. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на Рис. 18

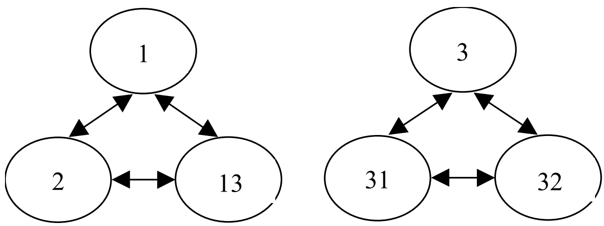


Рис. 20. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на Рис. 18

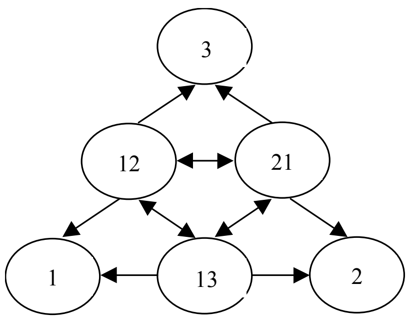


Рис. 21. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на Рис. 18

Содержательная интерпретация каждой из семи возможных структур информированности глубины не более двух не вызывает затруднений. Остановимся на трех симметричных структурах (см. Рис. 12, Рис. 19 и Рис. 21).

Рис. 12 соответствует, как отмечалось выше, одинаковой информированности агентов. Их рефлексивные реальности совпадают. Можно сказать, агенты играют в одну игру, правила которой являются общим знанием.

Рис. 19 соответствует в некотором смысле противоположной ситуации. У агентов искаженные и попарно несогласованные представления друг о друге. Каждый из них считает, что все одинаково информированы, но все агенты заблуждаются. На самом деле каждый играет в свою игру.

Рис. 21 соответствует ситуации, когда каждый агент считает себя более информированным, чем остальные. Например: агенты провели переговоры, сообщив друг другу свои представления о неизвестном параметре, однако все трое скрыли свои истинные представления, считая при этом, что остальные двое были правдивы и поверили своим оппонентам. Возможна и несколько иная интерпретация того же Рис. 21: агенты заключили договор, но каждый собирается его нарушить, считая при этом, что оппоненты считают договор стабильным – не собираются его нарушать, не ждут этого от оппонентов и т.д.

Описанные в настоящем разделе свойства регулярных информационных структур будут использованы ниже при исследовании задач рефлексивного управления (см. раздел 2.11).

Рассмотрим в заключение настоящего раздела вопрос о существовании информационного равновесия для регулярных структур информированности.

Из построения РКД видно, что равновесные действия агентов (если они существуют) могут быть найдены «снизу вверх», то есть от висячих вершин к корню РКД. Пусть, например, для некоторого $\tau \in \Sigma_+$ висячими являются $(n-1)$ вершин $\tau ij$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда, по определению РКД, $n$ агентов из множества $\{\tau ij\}$, $j \in N$, являются одинаково информированными (напомним, что в силу аксиомы автоинформированности (см. раздел 2.2) мы отождествляем $\tau i$- и $\tau ii$-агентов). Поэтому для их равновесных действий справедливы соотношения $x^*_{\tau ijk} = x^*_{\tau ik}$, $j, k \in N$,

(1) $x^*_{\tau ij} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_{\tau ij} \in X_i} f_j(\theta_{\tau ij}, x^*_{\tau i1}, \ldots, x^*_{\tau i,j-1}, x_{\tau ij}, x^*_{\tau i,j+1} \ldots, x^*_{\tau in}), j \in N.$

Отметим, что остальные агенты находятся «вне поля зрения» рассматриваемых нами $n$ агентов $\{\tau ij\}$, $j \in N$.

Система (1) является записью «обычного» равновесия Нэша в игре с общим знанием. Если она имеет решение, из нее, в частности, можно найти действие $\tau i$-агента.

Далее, рассмотрим вершину $\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, и вершины $\tau m$, $m \in N \setminus \{\omega(\tau)\}$, (напомним, что $\omega(\tau)$ – последний индекс в последовательности $\tau$), среди которых находится и вершина $\tau i$. Все $\tau m$ – агенты делятся на два множества: одинаково информированные с $\tau$–агентом и прочие (к последним относится и $\tau i$-агент). Чтобы удобнее было их разделять, введем обозначение:

$$\overline{N_\tau} = \{k \in N \mid I_{\tau k} \sim I_\tau\}.$$

Как мы видели, равновесное действие $\tau i$-агента (и, аналогично, действия всех $\tau m$-агентов, $m \notin \overline{N_\tau}$) определяется независимо от действия прочих $\tau m$-агентов, $m \in N$. Поэтому все $\tau k$-агенты, $k \in \overline{N_\tau}$, могут просто подставить действия $x^*_{\tau m}$, $m \notin \overline{N_\tau}$, в свои целевые функции. Таким образом, для вычисления равновесных действий $x^*_{\tau k}$, $k \in \overline{N_\tau}$ надо решить систему уравнений

(2) $x^*_{\tau k} = \arg\max\limits_{x_{\tau k} \in X_k} f_k(\theta_{\tau k}, x^*_{\tau 1}, \ldots, x^*_{\tau, k-1}, x_{\tau k}, x^*_{\tau, k+1} \ldots, x^*_{\tau n})$, $k \in \overline{N_\tau}$.

Система (2) является записью равновесия Нэша в игре $\tau k$-агентов, $k \in \overline{N_\tau}$. Ее решение (если оно существует), позволяет найти равновесное действие $x^*_\tau$.

Двигаясь от висячих вершин к корню, можно последовательно найти все равновесные действия. Для этого все системы типа (1) и (2) должны иметь решение. Таким образом, можно сформулировать следующее достаточное условие существования информационного равновесия для регулярных структур информированности (множество реальных агентов $N$, их целевые функции $\{f_i\}$, множества допустимых действий $\{X_i\}$, а также множество возможных значений $\Theta$ неопределенного параметра считаем фиксированными).

Утверждение 2.5.1. Пусть для любого непустого множества $\overline{N} \subseteq N$ справедлив следующий факт: для любых $\theta_k \in \Theta$, $k \in \overline{N}$, и любых $x_m^* \in X_m$, $m \notin \overline{N}$, существует равновесие Нэша в игре с общим знанием $k$-агентов, то есть существуют $x_k^*$, $k \in \overline{N}$, удовлетворяющие

$$x_k^* \in \operatorname{Arg} \max_{x_k \in X_k} f_k(\theta_k, x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^* \ldots, x_n^*),\ k \in \overline{N}.$$

Тогда для любой конечной структуры информированности существует информационное равновесие.

Имея язык описания информированности агентов (информационную структуру – см. раздел 2.2), определение решения рефлексивной игры (информационное равновесие – см. раздел 2.3), а также свойства графа рефлексивной игры (раздел 2.4) и регулярных структур информированности (настоящий раздел), мы имеем возможность перейти к исследованию влияния информированности агентов (и, в первую очередь, рангов их рефлексии) на информационное равновесие, и, следовательно, на их выигрыши, что, в свою очередь, далее (в разделе 2.11) позволит изучить задачи рефлексивного управления.

## 2.6. РАНГ РЕФЛЕКСИИ И ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Напомним, что в разделе 1.2 было определено параметрическое равновесие Нэша, в котором вектор равновесных действий зависел от значения состояния природы, которое являлось общим знанием. В разделе 2.3 было введено понятие информационного равновесия как субъективного равновесия, зависящего от структуры информированности $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$, где $I_i$ – структура информированности $i$-го агента, $i \in N$.

Обозначим $x_i^*(I_i)$ – множество субъективно равновесных действий[19] $i$-го агента, имеющего структуру информированности $I_i$, $i \in N$, $x^*(I_i)$ – соответствующие множество векторов субъективно равновесных действий. Введем $\Psi_i$ – множество всевозможных

[19] Напомним, что под субъективно равновесным действием агента понимается соответствующая его информированности компонента информационного равновесия.

структур информированности $i$-го агента[20], $\psi_i^{k_i}$ – множество всевозможных конечных (глубины не более $k_i$) структур информированности $i$–го агента, $i \in N$. В соответствии с определением, приведенным выше, будем считать, что **агент, имеющий конечную структуру информированности глубины *k*, обладает рангом информационной рефлексии, равным $k - 1$**. Если информационные структуры всех агентов конечны, то глубина $\gamma(I)$ информационной структуры $I$ также конечна и равна

$$\gamma(I) = 1 + \max_{i \in N} \{k_i\}.$$

Определим множество

$$(1)\quad X_i^*(\Psi) = \bigcup_{I_i \in \Psi} x_i^*(I_i),$$

где $\Psi \subseteq \Psi_i$, тех действий $i$-го агента, которые могут быть субъективно равновесными при условии, что его информационные структуры принадлежат множеству $\Psi$, $i \in N$, и множество субъективных равновесий при всевозможных информационных структурах из множества $\Psi$:

$$(2)\quad X^*(\Psi) = \bigcup_{I \in \Psi} x^*(I).$$

Так как при фиксированном множестве $\Theta$ возможных значений состояний природы выполнено $\psi_i^{k_i} \subseteq \psi_i^{k_i+1}$, $k_i \in \aleph$, $i \in N$, то с увеличением глубины структуры информированности множество возможных субъективных равновесий не сужается.

Таким образом, известны зависимости (1) и (2) множеств потенциальных равновесий от множества возможных информационных структур. При бесконечных информационных структурах $i$-го агента $I_i \in \Psi_i$ множество возможных субъективных равновесий составляет $X^*(\Psi_i) = \bigcup_{I_i \in \Psi_i} x^*(I_i)$, $i \in N$. Возникает вопрос – существует ли множество конечных информационных структур (и какова глубина этих структур), дающих для данного агента то же множество возможных

[20] Так как элементами информационной структуры являются значения состояния природы, то множество всевозможных структур информированности зависит от множества $\Theta$ возможных значений состояния природы. Помня об этом, отражать зависимость в явном виде мы не будем.

субъективных равновесий? Сформулируем соответствующую задачу.

Пусть целевые функции и допустимые множества всех агентов[21], а также множество возможных значений состояний природы фиксированы и являются общим знанием. Тогда ***задачей о максимальном целесообразном объективном ранге информационной рефлексии*** назовем задачу нахождения:

(3) $k_i^* = \min\,\{k_i \in \aleph \mid X^*(\Psi_i) = X^*(\Psi_i^{k_i})\},\ i \in N.$

Отметим, что задача (3) формулируется с точки зрения исследователя операций, и его интересует минимальный ранг рефлексии, при котором любое действие данного агента, являющееся субъективным равновесием при одной из допустимых его информационных структур, также является субъективным равновесием в одной из информационных структур, глубина которой превышает искомый ранг рефлексии не более чем на единицу. Этим обусловлено использование термина «объективный». Альтернативой является занятие позиции самого агента и сравнение его выигрышей (гарантированных значений целевой функции) при различных рангах рефлексии. Сформулируем соответствующую задачу.

Прежде всего, определим, что понимать под выигрышем агента. Обозначим классический МГР $i$-го агента[22]

(4) $v_i = \max\limits_{x_i \in X_i}\ \min\limits_{x_{-i} \in X_{-i}}\ \min\limits_{\theta_i \in \Theta} f_i(\theta_i, x_i, x_{-i}),\ i \in N,$

и введем субъективный МГР $i$-го агента по множеству всех субъективных равновесий при всевозможных информационных структурах из множества $\Psi \subseteq \Psi_i$:

(5) $v_i^s(\Psi) = \min\limits_{y \in X^*(\Psi)} f_i(\theta_i, x),\ i \in N.$

Из (2), (4) и (5) следует, что $v_i^s(\varphi) \geq v_i,\ \varphi \subseteq \Psi_i,\ i \in N.$

Пусть целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также множество возможных значений состояний природы фиксированы и являются общим знанием. ***Задачей о максимальном целесообразном i-субъективном ранге информационной рефлексии*** назовем задачу нахождения:

---

[21] По умолчанию будем предполагать, что целевые функции непрерывны, а допустимые множества компактны.

[22] Будем считать, что множество информационных структур $\Psi$ таково, что $\theta_i \in \Theta$, $i \in N$.

(6) $s_i^* = \min \{s_i \in \aleph \mid v_i^s(\Psi_i) = v_i^s(\Psi_i^{s_i})\}, i \in N.$

Выражение (6) означает, что требуется найти такой минимальный ранг информационной рефлексии агента, что при любом большем ранге рефлексии не найдется информационного равновесия, дающего ему строго меньший выигрыш.

Из (3), (5) и (6), а также из установленной выше монотонности множеств субъективных равновесий по глубине информационных структур следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.6.1. $s_i^* \leq k_i^*$, $i \in N$.

Утверждение 1.6.1 гласит, что, если под выигрышем агента понимать гарантированное по множеству всевозможных субъективных равновесий значение его целевой функции, то максимальный целесообразный субъективный ранг информационной рефлексии любого агента не превосходит максимального целесообразного объективного ранга его информационной рефлексии. Другими словами, если существует ранг информационной рефлексии, «исчерпывающий» множество субъективных равновесий, то он является оценкой сверху максимальной глубины структуры информированности, которая целесообразна с точки зрения рассматриваемого агента.

В соответствии с утверждением 2.6.1 имеет смысл рассматривать задачу (3), однако получение ее решения в общем случае затруднительно. Поэтому проанализируем частный случай рефлексивной игры двух лиц (по аналогии результаты могут быть распространены на случай любого конечного числа агентов) с регулярной информационной структурой.

Рассмотрим РКД и соответствующие графы рефлексивной игры. Напомним, что на нижних уровнях РКД возникает субъективное общее знание (субъективный common knowledge). То есть в рефлексивной игре, структура информированности которой является регулярной, агенты двух нижних уровней могут иметь как одинаковые представления о неопределенных параметрах, (назовем этом случай *симметричным общим знанием на нижнем уровне*), так и неодинаковые (назовем этом случай *несимметричным общим знанием на нижнем уровне*).

Обозначим «классическое» равновесие Нэша игры двух агентов, в котором информация о значениях $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ является общим знанием

(7) $E_N(\theta_1, \theta_2) = \{(x_1(\theta_1, \theta_2), x_2(\theta_1, \theta_2)) \in X' \mid$
$\forall\, y_1 \in X_1\ f_1(\theta_1, x_1(\theta_1, \theta_2), x_2(\theta_1, \theta_2)) \geq f_1(\theta_1, y_1, x_2(\theta_1, \theta_2))$
$\forall\, y_2 \in X_2\ f_2(\theta_2, x_1(\theta_1, \theta_2), x_2(\theta_1, \theta_2)) \geq f_2(\theta_2, x_1(\theta_1, \theta_2), y_2)\}$.

Введем множество наилучших ответов $i$-го агента на выбор оппонентом действий из множества $X_{-i}$ при множестве $\Theta$ возможных состояний природы:

$$BR_i(\Theta, X_{-i}) = \bigcup_{x_{-i} \in X_{-i},\, \theta \in \Theta} \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i = 1, 2,$$

а также следующие величины и множества

(8) $E_N = \bigcup_{\theta_1, \theta_2 \in \Theta} E_N(\theta_1, \theta_2)$, $E_N^0 = \bigcup_{\theta \in \Theta} E_N(\theta, \theta)$,

(9) $X_i^0 = \bigcup_{\theta_1, \theta_2 \in \Theta} x_i(\theta_1, \theta_2) = Proj_i\, E_N$, $i = 1, 2$,

(10) $X_i^k = BR_i(\Theta, X_{-i}^{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, i = 1, 2$.

Отображение $BR_i(\Theta, X_{-i})$: $\Theta \times X_{-i} \to X_i$ назовем *рефлексивным отображением* $i$-го агента, $i = 1, 2$.

Свойства введенных множеств описываются следующим утверждением, истинность которого следует из определений (7)-(10).

Утверждение 2.6.2. $E_N^0 \subseteq E_N$, $X_i^k \subseteq X_i^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, i = 1, 2$.

Исследуем рефлексивную игру двух агентов с конечной[23] и регулярной структурой информированности.

Рефлексивное отображение $i$-го агента назовем *стационарным*, если $X_i^k = X_i^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, i = 1, 2$.

Рассмотрим $i$-го агента, $i = 1, 2$, и исследуем его субъективные равновесия при различных рангах информационной рефлексии, увеличивая их последовательно, начиная с нулевого (еще раз напомним, что ранг информационной рефлексии на единицу меньше глубины соответствующей информационной структуры).

При фиксированной глубине регулярной информационной структуры $I_i$ граф рефлексивной игры может быть построен двумя способами. Во-первых, можно ввести предположение, что на нижнем уровне имеет место несимметричное общее знание. Во-вторых,

[23] Требование конечности информационной структуры представляется вполне естественным: как отмечалось выше, возможности человека по переработке информации ограничены, тем более, что глубина структуры информированности может быть ограничена любым (достаточно большим, но конечным) числом.

можно ввести предположение, что на нижнем уровне имеет место симметричное общее знание, то есть ввести «дополнительного» фантомного агента, наделив его той же информацией, что обладает агент, соответствующий нижнему уровню дерева $I_i$. Будем рассматривать параллельно оба случая.

**1.** Если глубина структуры $\psi_i^1$ информированности $i$-го агента, $i = 1, 2$, равна $k_i = 1$ (имеется только $\theta_i$), то соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftrightarrow x_{ij}$ (здесь и далее $j \neq i$). То есть реальный $i$-ый агент разыгрывает игру с фантомным $ij$-ым агентом, причем оба они с точки зрения $i$-го агента обладают информацией $\theta_i$ (симметричное общее знание на нижнем уровне). Следовательно, $X^*(\psi_i^1) = E_N^0$.

**2.** Если глубина структуры информированности $\psi_i^2$ $i$-го агента равна $k_i = 2$ (имеются $\theta_i$, $\theta_{ij}$), то возможны два варианта[24].

В первом случае соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftrightarrow x_{ij}$ (несимметричное общее знание на нижнем уровне). То есть реальный $i$-ый агент (полагающий, что состояние природы равно $\theta_i$) считает, что разыгрывает игру с фантомным $ij$-ым агентом, который обладает информацией $\theta_{ij}$. С точки зрения $i$-го агента множество возможных равновесий игры равно $E_N \supseteq X^*(\psi_i^1)$.

Во втором случае (симметричное общее знание на нижнем уровне) соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftarrow x_{ij} \leftrightarrow x_{iji}$. То есть реальный $i$-ый агент (полагающий, что состояние природы равно $\theta_i$) считает, что разыгрывает игру с фантомным $ij$-ым агентом, который, в свою очередь, разыгрывает игру с фантомным $iji$-ым агентом, причем оба они с точки зрения $i$-го агента обладают информацией $\theta_{ij}$. С точки зрения $i$-го агента множество возможных равновесий игры $ij$-го и $iji$-го агентов равно $E_N^0$, следовательно, $ij$-ый агент может (опять же с точки зрения $i$-го) выбрать одно из действий из множества $Proj_j\, E_N^0$. Таким образом,

(11) $X^*(\psi_i^2) = BR_i(\Theta, Proj_j\, E_N^0) \times Proj_j\, E_N^0 \subseteq X_i^1 \times X_j^0$.

24 Рассматриваемые для каждого ранга рефлексии два случая соответствуют «симметричному» и «несимметричному» (субъективному) общему знанию.

Так как $E_N \subseteq X_i^0 \times X_j^0$, то $X^*(\psi_i^1) \subseteq X^*(\psi_i^2)$, то есть увеличение ранга рефлексии с нуля до единицы с точки зрения задачи (3) для *i*-го агента целесообразно.

**3.** Если глубина структуры информированности $\psi_i^3$ *i*-го агента равна $k_i = 3$ (имеются $\theta_i$, $\theta_{ij}$, $\theta_{iji}$), то возможны два варианта.

В первом случае (несимметричное общее знание на нижнем уровне) соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftarrow x_{ij} \leftrightarrow x_{iji}$, то есть реальный *i*-ый агент (полагающий, что состояние природы равно $\theta_i$) считает, что разыгрывает игру с фантомным *ij*-ым агентом (полагающим, что состояние природы равно $\theta_{ij}$), который, в свою очередь, разыгрывает игру с фантомным *iji*-ым агентом (обладающим информацией $\theta_{iji}$). С точки зрения *i*-го агента множество возможных равновесий игры *ij*-го и *iji*-го агентов равно $E_N$, следовательно

$$X^*(\psi_i^3) = BR_i(\Theta,\ X_j^0) \times X_j^0 = X_i^1 \times X_j^0.$$

Во втором случае (симметричное общее знание на нижнем уровне) соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftarrow x_{ij} \leftarrow x_{iji} \leftrightarrow x_{ijij}$. То есть реальный *i*-ый агент (полагающий, что состояние природы равно $\theta_i$) считает, что разыгрывает игру с фантомным *ij*-ым агентом (полагающим, что состояние природы равно $\theta_{ij}$), который, в свою очередь, разыгрывает игру с фантомным *iji*-ым агентом, который, в свою очередь, разыгрывает игру с фантомным *ijij*-ым агентом, причем оба они с точки зрения *i*-го агента обладают информацией $\theta_{iji}$. С точки зрения *i*-го агента множество возможных равновесий игры *iji*-го и *ijij*-го агентов равно $E_N^0 \subseteq X_i^0 \times X_j^0$, следовательно, *iji*-ый агент может (с точки зрения *i*-го) выбрать одно из действий из множества $Proj_i\, E_N^0$. Тогда *ij*-ый агент может (опять же с точки зрения *i*-го) выбрать одно из действий из множества $BR_j(\Theta, Proj_i\, E_N^0)$. Таким образом,

$$X^*(\psi_i^3) = BR_i(\Theta, BR_j(\Theta, Proj_i\, E_N^0)) \times BR_j(\Theta, Proj_i\, E_N^0) \subseteq X_i^2 \times X_j^1.$$

Так как $X^*(\psi_i^2) \subseteq X^*(\psi_i^3)$, то увеличение ранга рефлексии с единицы до двух с точки зрения задачи (3) целесообразно для *i*-го агента.

По аналогии, легко показать, что при несимметричном (Asymmetric) общем знании на нижнем уровне множество субъективных равновесий $i$-го агента равно

(12) $AX_i^*(\Psi_i^{k_i}) = X_i^{k_i-2}$, $k_i = 2, 3, \ldots$ ,

а при симметричном (Symmetric) общем знании на нижнем уровне множество субъективных равновесий $i$-го агента равно

(13) $SX_i^*(\Psi_i^{k_i}) = BR_i(\Theta, \ldots BR_j(\Theta, Proj_i\, E_N^0), \ldots)$, $k_i = 2, 3, \ldots$ .

Так как $SX_i^*(\Psi_i^{k_i}) \subseteq X_i^{k_i-1} \subseteq X_i^{k_i}$, то справедливо следующее утверждение 2.6.3, из которого следует, что, увеличивая глубину структуры информированности (на единицу), любое субъективное равновесие, полученное в рамках симметричного общего знания на нижнем уровне, можно сделать субъективным равновесием в рамках несимметричного общего знания на нижнем уровне.

Утверждение 2.6.3. $SX_i^*(\Psi_i^{k_i}) \subseteq AX_i^*(\Psi_i^{k_i+1})$, $k_i = 2, 3, \ldots$ .

Из утверждения 2.6.3 и определения стационарности рефлексивного отображения следует, что для рефлексивных игр двух лиц с регулярной информационной структурой независимо то того, симметричное или асимметричное общее знание имеется на нижнем уровне, следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.6.4. Если рефлексивные отображения агентов стационарны, то максимальный целесообразный субъективный ранг информационной рефлексии равен двум и

$$X_i^*(\Psi) = X_i^0,\ i = 1, 2.$$

Результат утверждения 2.6.4 позволяет в случае стационарных рефлексивных отображений рассматривать рефлексивное управление как *информационное регулирование*, при котором объектом управления являются представления агентов о неопределенных параметрах [36, 117].

В общем случае возможны три варианта:

1) Если рефлексивные отображения стационарны, то множество субъективных равновесий есть $\prod_{i \in N} X_i^0 \subseteq X'$, то есть является подмножеством (быть может, собственным – см. пример 2.6.1) множества $X'$ допустимых действий агентов;

2) Если рефлексивные отображения не стационарны, то множество субъективных равновесий может совпадать с множеством $X'$ допустимых действий агентов – см. пример 2.6.2;

3) Если рефлексивные отображения не стационарны, то множество субъективных равновесий может быть строго шире $\prod_{i \in N} X_i^0$, но не совпадать (быть уже) с множеством $X'$ допустимых действий агентов – см. пример 2.6.3;

<u>Пример 2.6.1.</u> Пусть $f_i(\theta, x_1, x_2) = x_i - x_i^2 / 2\,(\theta + \alpha\, x_j)$, где $\alpha \in (0; 1)$, $j \neq i$, $i = 1, 2$, $\Theta = [0; 1]$. Тогда $BR_i(\theta_i, x_j) = \theta_i + \alpha\, x_j$, $j \neq i$, $i, j = 1, 2$.

Вычислим равновесие Нэша: $x_i^*(\theta_i, \theta_j) = (\theta_i + \alpha\, \theta_j) / (1 - \alpha^2)$, $j \neq i$, $i, j = 1, 2$. Определим $X_i^0 = [0; 1 / (1 - \alpha)]$, $i = 1, 2$. Легко проверить, что рефлексивное отображение в рассматриваемом примере является стационарным, то есть $X_i^k = X_i^0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$ – см. Рис. 22.

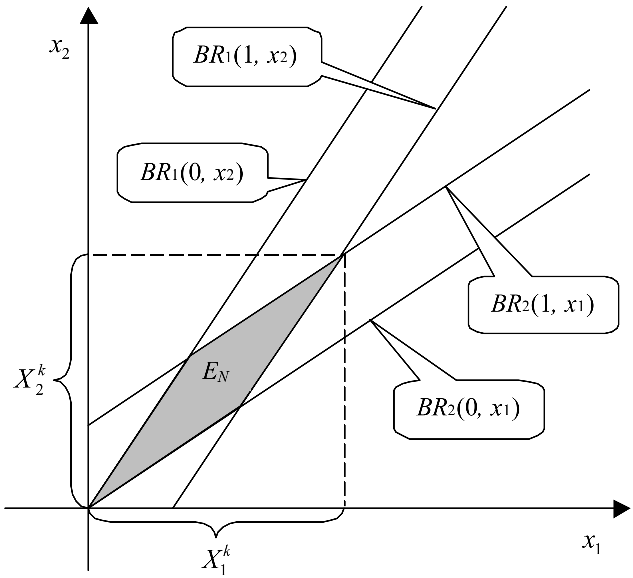


Рис. 22. Множество субъективных равновесий в примере 2.6.1

Изменяя $\theta_i$ и $\theta_j$, то есть, осуществляя информационное регулирование, центр может реализовать как субъективное равновесие любую точку из множества $[0; 1 / (1 - \alpha)]^2$. •

В общем случае (при нестационарных рефлексивных отображениях) с увеличением глубины структуры информированности множество субъективных равновесий не сужается, поэтому из анализа теоретико-игровой модели нельзя априори ограничить максимальный целесообразный ранг рефлексии (см. обсуждение роли информационных ограничений в разделе 3.3) агентов. Приведем пример.

<u>Пример 2.6.2.</u> Пусть $f_1(\theta, x_1, x_2) = \theta\,(1 - x_2)\,x_1 - x_1^2/2$, $f_2(\theta, x_1, x_2) = \theta\,x_1\,x_2 - x_2^2/2$, где $\Theta = [^1/_2; 1]$, $X_1 = X_2 = (0; 1)$. Тогда $BR_1(\theta, x_2) = \theta\,(1 - x_2)$, $BR_2(\theta, x_1) = \theta\,x_1$.

Легко проверить, что множеством $E_N$ является четырехугольник с вершинами $(^2/_5, {}^1/_5)$, $(^2/_3, {}^1/_3)$, $(^1/_2, {}^1/_2)$ и $(^1/_3, {}^1/_3)$, поэтому $X_1^0 = [^1/_3; {}^2/_3]$, $X_2^0 = [^1/_5; {}^1/_2]$ (см. Рис. 23).

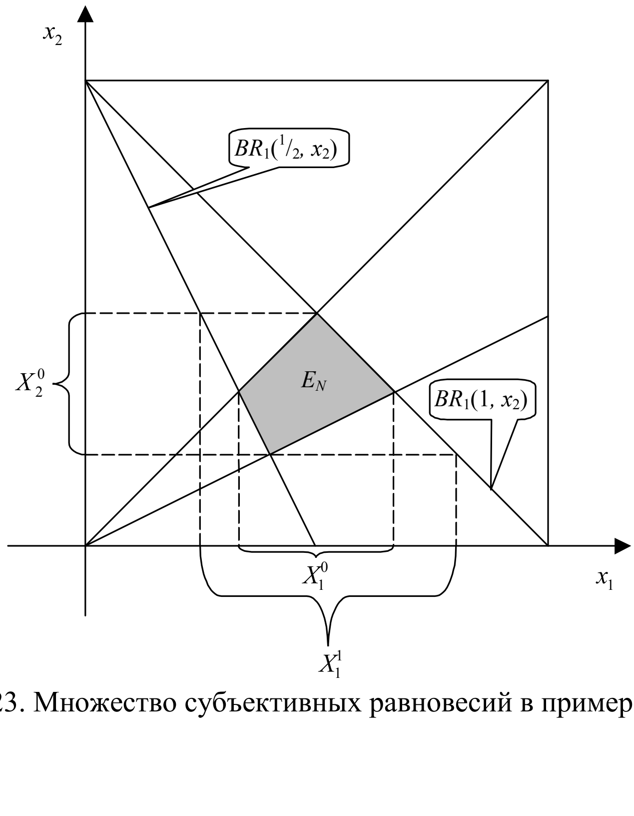


Рис. 23. Множество субъективных равновесий в примере 2.6.2

Обозначим левую и правую границы отрезка $X_i^k$ за $\alpha_{i,k}$ и $\beta_{i,k}$ соответственно, $i = 1, 2$. Тогда имеем следующие соотношения: $\alpha_{2,k+1} = ½\ \alpha_{1,k}$, $\beta_{2,k+1} = \beta_{1,k}$, $\alpha_{1,k+1} = ½\ (1 - \beta_{2,k})$, $\alpha_{1,k}$, $\beta_{1,k+1} = 1 - \alpha_{2,k}$, где $k = 0, 1, \ldots$ . Из последних соотношений нетрудно вывести следующие:

$$\alpha_{i,k+4} = ¼\ \alpha_{i,k},\ \beta_{i,k+4} = ¾ + ¼\ \beta_{i,k},\ i = 1, 2,\ k = 0,1,\ldots .$$

Таким образом, $\alpha_{i,k} \to 0$, $\beta_{i,k} \to 1$ при $k \to \infty$, где $i = 1, 2$. Поэтому $\bigcup_{k\geq 0} X_i^k = (0;1) = X_i$, $i = 1, 2$. Это означает, что, надлежащим образом увеличив глубину рефлексии агента, можно добиться любого его допустимого действия. •

Примеры 2.6.1 и 2.6.2 показывают, что множество субъективно равновесных действий $i$-агента (при всевозможных его структурах информированности) $\bigcup_{k\geq 0} X_i^k$ может как совпадать с $X_i^0$, то есть быть достаточно узким, так и совпадать с $X_i$, то есть быть максимально широким. Убедимся, что возможны и «промежуточные» варианты, то есть ситуации, в которых множество субъективных равновесий строго шире исходного множества $E_N$ равновесий Нэша, но строго уже множества допустимых действий.

<u>Пример 2.6.3.</u> Пусть целевые функции агентов и множество $\Theta$ такие же, как и в предыдущем примере. Изменим лишь множества допустимых действий: $X_1 = X_2 = (-c\ ;1 + c)$, $c > 0$. Тогда по-прежнему $\bigcup_{k\geq 0} X_i^k = (0;1)$, $i = 1, 2$, но теперь $(0;1) \subset X_i$. •

Приведем еще один пример, иллюстрирующий многообразие вариантов поведения рефлексирующих агентов с ростом рангов их рефлексии [111, 119].

<u>Пример 2.6.4.</u> Пусть имеются два агента, выбирающих действия из единичного отрезка и имеющих следующие целевые функции (экономической интерпретацией данной модели является «дуополия Курно»): $f_1(\theta, x_1, x_2) = 4\ \theta\, x_1\, x_2\, (1 - x_2) - x_1^2\ /\ 2$, $f_2(\theta, x_1, x_2) = x_1\, x_2 - x_2^2\ /\ 2$, а состояние природы принимает значения из множества $\Theta = (1/4;\ 1]$.

Предположим, что на нижнем уровне конечного РКД, имеющего глубину $m_0$, имеет место общее знание с некоторым значением

$\theta_0 \in \Theta$ состоянии природы. Вычисляем равновесие Нэша игры фантомных агентов: $x_1(\theta_0) = x_2(\theta_0) = 1 - 1 / (4\ \theta_0)$ и находим наилучшие ответы первого и второго агентов на действия оппонентов:

$$BR_1(\theta, x_2) = 4\ \theta\, x_2\ (1 - x_2),\ BR_2(\theta, x_1) = x_1,\ \theta \in \Theta.$$

Получаем, что наилучшие ответы $\tau 1$-агентов, $\tau \in \Sigma$, $|\tau| \le m_0$, удовлетворяют логистическому [89] отображению

(14) $x_1^m = 4\ \theta\ x_1^{m-1}\ (1 - x_1^{m-1})$, $m = 1, 2, \ldots, [m_0/2]$,

с начальной точкой $x_1^0 = 1 - 1 / (4\ \theta_0)$ (здесь за $[\cdot]$ обозначена целая часть).

Анализируя выражение (14), получаем, что в зависимости от информированности $\theta_\tau$ $\tau$-агентов (отметим, что эта информированность для всех агентов с первого по $(m_0 - 2)$-й уровень включительно считается одинаковой, т. е. $\theta_\tau \equiv \theta$ для некоторого $\theta \in \Theta$ при $|\tau| \le m_0 - 2$, и в случае различной информированности агентов может наблюдаться еще более сложное поведение) возможны следующие варианты асимптотически (при $m_0 \to \infty$) устойчивых и слабо зависящих от начальной точки стратегий первого реального агента: выбор единственного действия; периодическое поведение; хаотическое или периодическое поведение. Содержательные интерпретации и недостатки подобной неопределенности коллективного поведения очевидны. •

Так как множества субъективных равновесий монотонны по рангу рефлексии (глубине информационной структуры) – см. утверждение 2.6.2, то перспективными задачами будущих исследований являются:

1. Поиск минимального ранга рефлексии, при котором «исчерпывается» множество субъективных равновесий;

2. Получение оценок скорости изменения (или сходимости) последовательности $\{X_i^k\}$;

3. Определение для заданного действия агента минимального ранга его информационной рефлексии, при котором данное действие может оказаться субъективным равновесием и т.д.

Для случая квадратичных целевых функций агентов, то есть для линейных рефлексивных отображений, условия стационарности последних получены в [53].

В заключение настоящего раздела отметим, что, по-видимому, существует определенная аналогия между рефлексивными играми и информационными расширениями игр [26, 71, 72], в том числе – метаиграми Н. Ховарда [224, 225]. В информационных расширениях игр предполагается, что существует упорядочение агентов, в рамках которого агент, принимающий решение о выбираемом действии, может рассчитывать на знание действий агентов, которые производят свой выбор раньше (в заданном упорядочении) него. Такие игры – с фиксированной последовательностью ходов – называются *иерархическими играми* [34, 36, 61, 71]. В рамках этой модели доказано [71], что любой вектор действий, обеспечивающий агентам выигрыши не меньше соответствующих максиминов в исходной игре, может быть реализован как равновесие в некотором информационном расширении исходной игры. Для рефлексивных игр с РКД это, вообще говоря, не так – пример 2.6.1 показывает, что для некоторых случаев множество информационных равновесий остается достаточно узким. В то же время, «иерархичность» и «рефлексивность» игр не противоречат друг другу – например, иерархическая игра может быть рефлексивной. Синтез результатов исследования метаигр и рефлексивных игр представляется перспективной задачей будущих исследований.

Зная исследованную в настоящем разделе зависимость множества информационных равновесий от структуры информированности, можно ставить и решать задачу рефлексивного управления – управления информационной структурой и, следовательно, информационным равновесием (см. раздел 2.11).

Далее мы опишем специфические типы информационных равновесий [171]. В разделе 2.7 рассматривается свойство стабильности равновесия, состоящее в том, что каждый агент наблюдает именно тот результат игры, который ожидает в момент выбора действия. Тем самым, информационная структура игры не меняется.

В разделе 2.8 стабильные информационные равновесия подразделяются на истинные и ложные, а также формулируется достаточное условие, при выполнении которого все стабильные равновесия являются истинными (утверждение 2.8.1).

В разделе 2.9 рассматривается случай, когда агенты в результате игры наблюдают действия друг друга. Доказывается ряд утверждений, проясняющих взаимосвязь стабильности равновесия и свойств структуры информированности игры.

В разделе 2.10 проводится аналогия между рефлексивными играми и байесовыми играми – альтернативным способом моделирования принятия решения в ситуации с неполной информированностью. Доказывается теорема, в определенном смысле математически обосновывающая необходимость ограничения ранга рефлексии агента.

## 2.7. СТАБИЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Одной из особенностей «классического» равновесия Нэша является его самоподдерживающийся характер – если игра повторяется несколько раз и все игроки, кроме $i$-го, выбирают одни и те же равновесные действия, то и $i$-му нет резона отклоняться от своего равновесного действия. Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что представления всех игроков о реальности адекватны – значение состояния природы является общим знанием.

В случае информационного равновесия ситуация, вообще говоря, может быть иной. Действительно, в результате однократного разыгрывания игры может оказаться, что какие-то из игроков (или даже все) наблюдают не тот результат, на который они рассчитывали. Это может быть связано как с неверным представлением о состоянии природы, так и с неадекватной информированностью о представлениях оппонентов. В любом случае, самоподдерживающийся характер равновесия нарушается – если игра повторяется, действия игроков могут измениться.

Однако в некоторых случаях самоподдерживающийся характер равновесия может иметь место и при различных (и, вообще говоря, неверных) представлениях агентов. Говоря неформально, это происходит тогда, когда каждый агент (как реальный, так и фантомный) наблюдает тот результат игры, которого ожидает. Для формального изложения нам понадобится дополнить описание рефлексивной игры.

Напомним, что рефлексивная игра задается кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Theta, I\}$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество участников игры (игроков, агентов), $X_i$ – множество допустимых действий $i$-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Theta \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, $I$ – структура информированности. Дополним эту конструкцию набором функций

$w_i(\cdot)$: $\Theta \times X' \to W_i$, $i \in N$, каждая из которых отображает вектор $(\theta, x)$ в элемент $w_i$ некоторого множества $W_i$. Этот элемент $w_i$ и есть то, что $i$-й агент наблюдает в результате разыгрывания игры.

Функцию $w_i(\cdot)$ будем называть *функцией наблюдения* $i$-го агента [171]. Будем считать, что функции наблюдения являются общим знанием среди агентов.

Если $w_i(\theta, x) = (\theta, x)$, т. е. $W_i = \Theta \times X'$, то $i$-й агент наблюдает как состояние природы, так и действия всех агентов. Если, напротив, множество $W_i$ состоит из одного элемента, то $i$-й агент ничего не наблюдает.

Пусть в рефлексивной игре существует информационное равновесие $x_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$ (напомним, что $\tau$ – произвольная непустая конечная последовательность индексов из $N$). Зафиксируем $i \in N$ и рассмотрим $i$-го агента. Он ожидает в результате игры пронаблюдать величину

(1) $w_i\,(\theta_i, x_{i1}, \dots, x_{i,i-1}, x_i, x_{i,i+1}, \dots, x_{in})$.

На самом же деле он наблюдает величину

(2) $w_i\,(\theta, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Поэтому требование стабильности для $i$-агента означает совпадение величин (1) и (2) (напомним, что эти величины являются элементами некоторого множества $W_i$).

Пусть величины (1) и (2) равны, т. е. $i$-агент и после разыгрывания игры не сомневается в истинности своих представлений. Однако является ли это достаточным основанием для того, чтобы он и в следующий раз выбрал то же действие $x_i$? Ясно, что ответ отрицательный, что продемонстрируем на следующем примере.

<u>Пример 2.7.1.</u> Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Theta = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$), приведенными на Рис. 24,

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (0,1) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 24. Матрицы выигрышей в примере 2.7.1

а граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на Рис. 25.

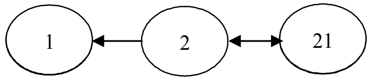


Рис. 25. Граф рефлексивной игры в примере 2.7.1

Пусть при этом $\theta = \theta_1 = 1$, $\theta_2 = \theta_{21} = 2$, и каждый агент наблюдает свой выигрыш (т. е. функция наблюдения агента совпадает с его функцией выигрыша). Ясно, что информационным равновесием является набор $x_1 = x_2 = x_{21} = 2$, т. е. первый и второй агенты, а также 21-агент и все прочие фантомные агенты выбирают вторые действия. Однако реальное состояние природы $\theta = 1$ становится известным второму агенту после розыгрыша игры (и получения им выигрыша 0, вместо ожидаемого 2). Поэтому в следующий раз второй агент выберет действие $x_2 = 1$, что побуждает и первого агента изменить свое действие (выбрать $x_1 = 1$). •

Таким образом, для стабильности равновесия необходимо чтобы и $ij$-агент, $i, j \in N$, наблюдал «нужную» величину. Он ожидает в результате игры пронаблюдать

(3) $w_j\ (\theta_{ij}, x_{ij1}, \ldots, x_{ij,j\text{-}1}, x_{ij}, x_{ij,j+1}, \ldots, x_{ijn})$.

На самом же деле (т. е. $i$-субъективно, ведь $ij$-агент существует в сознании $i$-агента) он наблюдает величину

(4) $w_j\ (\theta_i, x_{i1}, \ldots, x_{i,j\text{-}1}, x_{ij}, x_{i,j+1}, \ldots, x_{in})$.

Поэтому требование стабильности для $ij$-агента означает совпадение величин (3) и (4).

В общем случае, т. е. для $\tau i$-агента, $\tau i \in \Sigma_+$, условие стабильности определим следующим образом.

Определение. Информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности $I$, если для любого $\tau i \in \Sigma_+$ выполняется

(5) $w_i\ (\theta_{\tau i}, x_{\tau i1}, \ldots, x_{\tau i,i\text{-}1}, x_{\tau i}, x_{\tau i,i+1}, \ldots, x_{\tau in}) =$

$$= w_i\ (\theta_\tau, x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau,i\text{-}1}, x_{\tau i}, x_{\tau,i+1}, \ldots, x_{\tau n}).$$

Информационное равновесие, не являющееся стабильным, будем называть *нестабильным*. В частности, информационное равновесие в примере 2.7.1 является нестабильным.

Утверждение 2.7.1. Пусть структура информированности $I$ имеет сложность $\nu$ и существует информационное равновесие $x_{\tau i}$,

$\tau i \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (5) содержит не более чем $\nu$ попарно различных условий.

Доказательство. Рассмотрим две любые тождественные структуры информированности: $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$. Поскольку $x_{\tau i}$ – равновесие, имеем $\theta_{\lambda i} = \theta_{\mu i}$ , $x_{\lambda i} = x_{\mu i}$, $I_{\lambda ij} = I_{\mu ij}$, $x_{\lambda ij} = x_{\mu ij}$ для любого $j \in N$. Поэтому условия стабильности (5) для $\lambda i$- и $\mu i$-агентов тождественно совпадают. Так как имеется $\nu$ попарно различных структур информированности, количество попарно различных условий (5) не превышает $\nu$. •

## 2.8. ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Стабильные информационные равновесия будем разделять на два класса – истинные и ложные равновесия. Определение предварим примером.

Пример 2.8.1. Рассмотрим игру, в которой участвуют три агента с целевыми функциями

$$f_i(r_i, x_1, x_2, x_3) = x_i - \frac{x_i(x_1 + x_2 + x_3)}{r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$. Целевые функции являются общим знанием с точностью до типов агентов – параметров $r_i > 0$. Вектор $r = (r_1, r_2, r_3)$ типов агентов может интерпретироваться как состояние природы. При этом здесь и далее подразумевается, что свой собственный тип известен каждому агенту достоверно.

Граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на Рис. 26, при этом $r_2 = r_3 = r$, $r_{21} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = c$. Общим знанием является следующее: каждый игрок знает свой тип и наблюдает сумму действий оппонентов.

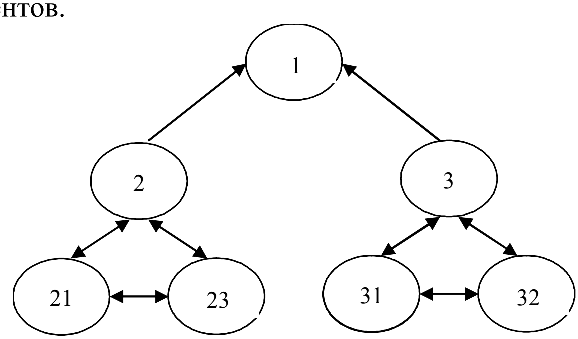


Рис. 26. Граф рефлексивной игры в примере 2.8.1

Нетрудно вычислить единственное информационное равновесие этой игры:

(1) $x_2 = x_3 = (3r - 2c) / 4,$

$x_{21} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = (2c - r) / 4,$

$x_1 = (2r_1 - 3r + 2c) / 4.$

Условия стабильности (см. выражение (5) предыдущего раздела) в данном случае выглядят следующим образом:

(2) $x_{21} + x_{23} = x_1 + x_3, \quad x_{31} + x_{32} = x_1 + x_2.$

Записаны условия для 2- и 3-агентов, поскольку для 1-, 21-, 23-, 31-, 32-агентов они тривиальны.

Подставляя (1) в (2), получаем, что необходимым и достаточным условием стабильности является равенство

(3) $2c = r_1 + r.$

Пусть условие (3) выполнено. Тогда равновесные действия реальных агентов таковы:

(4) $x_2 = x_3 = (3r - r_1) / 4, \quad x_1 = (3r_1 - 2r) / 4.$

Предположим теперь, что типы агентов стали общим знанием (см. Рис. 27).

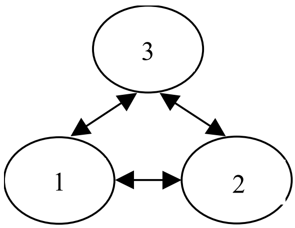


Рис. 27. Общее знание в примере 2.8.1

Нетрудно убедиться, что в случае общего знания единственным равновесием будет (4). •

Таким образом, при выполнении условия (3) имеет место несколько парадоксальная ситуация. Представления второго и третьего агентов не соответствуют действительности (см. Рис. 26), однако их равновесные действия (4) в точности такие, как были бы в случае одинаковой информированности (см. Рис. 27). Назовем такое стабильное информационное равновесие истинным.

<u>Определение.</u> Пусть набор действий $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесием в

условиях общего знания о состоянии природы $\theta$ (или о наборе $(r_1, ..., r_n)$ типов агентов).

Из определения, в частности, следует, что в условиях общего знания любое информационное равновесие является истинным. Рассмотрим еще один случай, когда этот факт имеет место.

Утверждение 2.8.1. Пусть целевые функции агентов имеют вид

$$f_i\,(r_i, x_1, ..., x_n) = \varphi_i\,(r_i, x_i, y_i(x_{-i})),$$

а функции наблюдения – вид $w_i(\theta, x) = y_i(x_{-i})$, $i \in N$. Содержательно это означает следующее: выигрыш каждого агента зависит от его типа, его действия и функции наблюдения, зависящей от действий остальных агентов (но не от их типов).

Тогда любое стабильное равновесие является истинным.

Доказательство. Пусть $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие, и условия утверждения выполнены. Тогда для любого $i \in N$ имеем:

$$x_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{i,-i}) = \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} \varphi_i\,(r_i, y_i, y_i(x_{i,-i})).$$

В силу стабильности справедливо равенство

$$y_i(x_{i,-i}) = y_i(x_{-i}),$$

поэтому

$$x_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} \varphi_i\,(r_i, y_i, y_i(x_{-i})) = \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{-i}).$$

Последнее соотношение означает (в силу произвольности $i \in N$), что набор $(x_1, ..., x_n)$ является равновесным при полной информированности. •

Определение. Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем *ложным*.

Таким образом, ложное равновесие – это такое стабильное информационное равновесие, которое не является равновесием в случае одинаковой информированности агентов (в условиях общего знания).

Пример 2.8.2. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Theta = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$) на Рис. 28.

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (2,2) & (4,1) \\ (1,4) & (3,3) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 28. Матрицы выигрышей в примере 2.8.2

Пусть, далее, в реальности $\theta = 2$, однако оба агента считают общим знанием $\theta = 1$. Каждый агент наблюдает пару $(x_1, x_2)$, которая и является функцией наблюдения.

Информационным равновесием является выбор каждым агентом действия 1. Если бы общим знанием было бы реальное состояние природы, равновесным был бы выбор каждым агентом действия 2. Таким образом, выигрыши агентов в информационном равновесии оказываются бóльшими, чем если бы общим знанием было реальное состояние природы. •

## 2.9. СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ АГЕНТОВ

В разделе 2.2 приведено определение информационного равновесия, которое может интерпретироваться как набор субъективных равновесий – $i$-й (реальный) агент, $i \in N$, обладающий структурой информированности $I_i$, определяет набор действий $(x^*_{i\sigma}(I_{i\sigma}))_{\sigma \in \Sigma}$, который является равновесием с его субъективной точки зрения. В частности, он ожидает от $j$-го реального агента, $j \in N$, выбора действия $x^*_{ij}(I_{ij})$ (напомним, что фантомный $ij$-агент является образом $j$-го агента в представлениях $i$-го).

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда функцией наблюдения является вектор действий всех агентов:

$$w_i\,(\theta, x_1,\ldots, x_n) = (x_1,\ldots, x_n).$$

Тогда *стабильным* является информационное равновесие $x^* = (x^*_{\sigma i})_{i \in N,\, \sigma \in \Sigma}$, удовлетворяющее следующему соотношению:

(1) $\forall\ i \in N, \forall\ \sigma \in \Sigma \quad x^*_{\sigma i} = x^*_i$.

Соотношение (1) означает, что действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим (реальным или фантомным) агентом.

Введем следующее предположение относительно целевых функций $f_i(\cdot)$ и множеств $\Theta$, $X_i$:

**А1.** Для любых $i \in N, \sigma \in \Sigma$, любых представлений $\theta_{\sigma i} \in \Theta$ и $\theta'_{\sigma i} \in \Theta$ таких, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры

$$x^*_{\sigma i,-i} \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$$

(2) $BR_i(\theta_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing$,

где $BR_i(\theta_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i 1}, ..., x^*_{\sigma i, i-1}, y_i, x^*_{\sigma i, i+1}, ..., x^*_{\sigma i n})$.

Утверждение 2.9.1. Пусть выполнено предположение А1 и существует информационное равновесие $x^*$. Тогда $x^*$ является стабильным информационным равновесием в том и только том случае, если структура информированности игры такова, что

(3) $\forall\ i \in N,\quad \forall\ \sigma \in \Sigma \quad \theta_{\sigma i} = \theta_i$.

Доказательство. Пусть выполнено (3). Тогда структура информированности игры имеет единичную глубину и $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$ $I_{\sigma i} = I_i$, откуда сразу следует равенство $x^*_{\sigma i} = x^*_i$ (см. второе условие в определении информационного равновесия). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (1), но существуют такие $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta_i$.

Поскольку $x^*_i$ и $x^*_{\sigma i}$ являются компонентами информационного равновесия $x^*$, они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x^*_i \in BR_i(\theta_i, x^*_{i,-i}), \\ x^*_{\sigma i} \in BR_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i,-i}). \end{cases}$$

С учетом (1) последнюю систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x^*_i \in BR_i(\theta_i, x^*_{-i}), \\ x^*_i \in BR_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{-i}), \end{cases}$$

откуда следует, что $BR_i(\theta_i,\ x^*_{-i}) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i},\ x^*_{-i}) \neq \varnothing$.

Пришли к противоречию с (2). •

Следствие. Если выполнено предположение А1, то стабильные информационные равновесия могут возникать только в рамках структур информированности, удовлетворяющих (3), то есть в рамках структур информированности единичной глубины. При этом, в частности, невозможны ложные равновесия.

Уместно отметить аналогию между условием А1 и «условием равноправия функций предпочтения» в [18, с. 259].

При ослаблении требования (1) результат утверждения 2.9.1 теряет силу. Например, если считать «стабильным» информационное равновесие $x^*$, удовлетворяющее свойству

(4) $\forall\ i, j \in N \quad x^*_{ji} = x^*_i$

(действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим реальным агентом), то в рамках предположения А1 существуют структуры информированности, не удовлетворяющие (3), при которых соответствующие информационные равновесия «стабильны» в смысле выражения (4).

Утверждение 2.9.1 важно как с точки зрения задач анализа, так и с точки зрения задач синтеза. Действительно, оно позволяет при исследовании свойств информационных равновесий для определенного класса ситуаций (определяемых предположением А1) выделять при помощи условия (3) множества информационных структур, при которых информационные равновесия могут быть стабильными. С точки зрения задачи информационного управления, утверждение 2.9.1 накладывает ограничения на множество управляющих воздействий, приводящих к стабильному равновесию игры управляемых субъектов.

Пусть теперь по-прежнему действия агентов наблюдаемы, т. е. стабильность определяется условием (1). Однако каждый из $n$ агентов характеризуется своим типом $r_i \geq 0$, $i \in N$, и тип агента достоверно ему известен, но, вообще говоря, не известен остальным агентам. Будем считать, что целевая функция $i$-го агента имеет вид $f_i(r_i, x)$, т. е. зависит от его собственного типа, но не от типов оппонентов. Относительно типов каждый из агентов имеет иерархию представлений $I_i$, состоящую из следующих компонент: $r_{ij}$ – представление $i$-го агента о типе $j$-го агента, $r_{ijk}$ – представление $i$-го агента о представлениях $j$-го агента о типе $k$-го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Содержательное различие между обсуждениями в терминах неопределенного параметра $\theta$ и в терминах вектора типов $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \Re^n_+$ состоит в следующем. В первом случае более естественным является предположение о том, что значение $\theta$ (состояние природы) так или иначе наблюдается агентом (является значимым аргументом функции наблюдения). Во втором случае, напротив, типы оппонентов, предположительно, не являются наблюдаемыми (не являются аргументами функции наблюдения). При этом, согласно утверждению 2.9.1, все стабильные равновесия являются истинными. Поэтому сосредоточим внимание на исследовании стабильности.

В рассматриваемом случае предположение А1 и утверждение 2.9.1 перепишем следующим образом.

**A1$^{\mathrm{r}}$.** Для любых $i \in N$, $\sigma \in \Sigma$, любых представлений $r_{\sigma i}$ и $r'_{\sigma i}$ таких, что $r_{\sigma i} \neq r'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x^*_{\sigma i,-i} \in X_{-i}$

$$BR_i(r_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(r'_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing,$$

где $BR_i(r_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y_i \in X_i} f_i(r_{\sigma i}, x^*_{\sigma i1}, \ldots, x^*_{\sigma i,i-1}, y_i, x^*_{\sigma i,i+1}, \ldots, x^*_{\sigma in})$.

<u>Утверждение 2.9.2.</u> Пусть выполнено предположение A1$^{\mathrm{r}}$ и существует информационное равновесие $x^*$. Тогда $x^*$ является стабильным информационным равновесием в том и только в том случае, если структура информированности игры такова, что

$$\forall\ i \in N,\quad \forall\ \sigma \in \Sigma \quad r_{\sigma i} = r_i.$$

Доказательство утверждения 2.9.2 дословно повторяет доказательство утверждения 2.9.1, надо лишь заменить $\theta$ на $r$ и A1 на A1$^{\mathrm{r}}$.

Определим следующие множества:

– множество $\Psi$ пар $(x, I)$ таких, что $x \in X'$, $I \in \Im$ и вектор действий реальных агентов $x$ является равновесным[25] при структуре информированности $I$, где $\Im$ – множество всевозможных структур информированности.

– множество $\Psi_X(I) \subseteq X'$ векторов действий реальных агентов, являющихся равновесными при структуре информированности $I$;

– множество $\Psi_I(x) \subseteq \Im$ информационных структур, при которых вектор действий реальных агентов $x$ является равновесным (решение обратной задачи).

Определим также подмножества этих множеств, выделяемые требованием стабильности информационного равновесия:

– множество $\Psi^s$ пар $(x, I)$ таких, что $x \in X'$, $I \in \Im$ и вектор $x$ является стабильно-равновесным[26] при структуре информированности $I$;

– множество $\Psi_X^s(I) \subseteq X'$ векторов действий агентов, являющихся стабильно-равновесными при структуре информированности $I$;

– множество $\Psi_I^s(x) \subseteq \Im$ информационных структур, при которых вектор действий реальных агентов $x$ является стабильно-равновесным.

[25] То есть является «реальной» частью информационного равновесия, являющегося набором действий как реальных, так и фантомных агентов.
[26] То есть является «реальной» частью стабильного информационного равновесия.

Обозначим через $I_0$ структуру информированности единичной глубины, которая соответствует тому, что вектор $r$ истинных типов агентов является общим знанием. Заметим, что $\Psi_X^s(I_0) = \Psi_X(I_0)$ – любой равновесный вектор, соответствующий общему знанию, – является стабильно-равновесным.

В терминах введенных множеств *истинное равновесие* образует любая пара $(x, I) \in \Psi^s$ такая, что $(x, I_0) \in \Psi$. Содержательно это означает, что вектор действий $x$ останется (стабильно-)равновесным, если вектор типов станет общим знанием.

*Ложное равновесие* образует любая пара $(x, I) \in \Psi^s$ такая, что $(x, I_0) \notin \Psi$. Содержательно это означает, что вектор действий $x$ перестанет быть равновесным, если вектор типов станет общим знанием.

Пусть вектор $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ является стабильно-равновесным. Определим для каждого $i \in N$ следующие множества:

$$\rho_i = \{r_i \in \Re_+ \mid x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*)\}.$$

Эти множества не зависят от структуры информированности. Поэтому они позволяют сформулировать два утверждения, проясняющие связь между структурой информированности и стабильностью равновесия.

Утверждение 2.9.3. Пусть $x^*$ – стабильно-равновесный вектор действий реальных агентов. Если для любого $i \in N$ множество $\rho_i$ состоит ровно из одного элемента, то вектор типов является общим знанием (и, соответственно, равновесие истинное).

Доказательство. Пусть $x^*$ – стабильно-равновесный вектор и для любого $i \in N$ множество $\rho_i$ состоит ровно из одного элемента. Предположим, что существуют такие $i$ и $\sigma$, что $r_{\sigma i} \neq r_i$. Из стабильности равновесия вытекает, что

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*), \\ x_i^* \in BR_i(r_{\sigma i}, x_{-i}^*), \end{cases}$$

откуда по определению множества $\rho_i$ вытекает, что несовпадающие $r_{\sigma i}$ и $r_i$ принадлежат этому множеству. Получили противоречие с тем, что оно состоит из одного элемента. •

Утверждение 2.9.4. Если вектор действий реальных агентов $x^*$ является стабильно-равновесным при некоторой структуре информированности, то для элементов этой структуры при любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется $r_{\sigma i} \in \rho_i$.

Доказательство. Пусть равновесие является стабильным. Тогда $\forall\ i \in N\ \forall\ \sigma \in \Sigma$ выполняется $x_i^* \in BR_i(r_{\sigma i}, x_{-i}^*)$, т. е. $r_{\sigma i} \in \rho_i$. •

Утверждение 2.9.4 накладывает довольно жесткие требования на структуру информированности: если равновесие является стабильным, то все типы реальных агентов, а также представления о типах принадлежат множествам $\rho_i$.

## 2.10. РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ И БАЙЕСОВЫ ИГРЫ

Наряду с рефлексивными играми возможным методом теоретико-игрового моделирования в условиях неполной информированности являются *байесовы игры*, предложенные в конце 60-х годов XX в. Дж. Харшаньи [219]. В байесовых играх вся частная (т. е. не являющаяся общим знанием) информация, имеющаяся у агента на момент выбора им своего действия, называется *типом* агента. При этом каждый агент, зная свой тип, имеет и предположения о типах остальных агентов (в виде вероятностного распределения). Формально байесова игра описывается следующим набором:

– множеством $N$ агентов;

– множествами $R_i$ возможных типов агентов, где тип $i$-го агента $r_i \in R_i$, $i \in N$, вектор типов $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R' = \prod_{i \in N} R_i$;

– множеством $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимых векторов действий агентов;

– набором целевых функций $f_i$: $R' \times X' \to \Re^1$ (целевая функция агента зависит в общем случае от типов и действий всех агентов);

– представлениями $F_i(\cdot|r_i) \in \Delta(R_{-i})$, $i \in N$, агентов (здесь через $R_{-i}$ обозначено множество всевозможных наборов типов всех агентов, кроме $i$-го, $R_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} R_j$, а через $\Delta(R_{-i})$ обозначено множество всевозможных вероятностных распределений на $R_{-i}$).

Решением байесовой игры является *равновесие Байеса–Нэша*, определяемое как набор стратегий агентов вида $x_i^* : R_i \to X_i$, $i \in N$, которые максимизируют математические ожидания соответствующих целевых функций:

$$(1)\ \forall i \in N\ \ x_i^*(r_i) \in Arg\max_{x_i \in X_i} \int\limits_{r_{-i} \in \prod_{j \neq i} R_j} f_i(r, x_i, x_{-i}^*(r_{-i}))\ dF_i(r_{-i}|\, r_i),$$

где $x_{-i}^*(r_{-i})$ обозначает набор стратегий всех агентов, кроме $i$-го. Подчеркнем, что в байесовой игре стратегией агента является не действие, а функция зависимости действия агента от его типа.

Модель Дж. Харшаньи можно интерпретировать различным образом (см. [219]). В соответствии с одной интерпретацией все агенты знают априорное распределение типов $F(r) \in \Delta(R')$ и, узнав собственный тип, вычисляют из него по формуле Байеса условное распределение $F_i(r_{-i}|\, r_i)$. В этом случае представления агентов $\{F_i(\cdot|\cdot)\}_{i \in N}$ называются *согласованными* (и, в частности, являются общим знанием – каждый агент может их вычислить, знает, что это могут сделать остальные и т. д.).

Другая интерпретация состоит в следующем. Пусть существует некоторый набор потенциальных участников игры всевозможных типов. Каждый такой «потенциальный» агент выбирает свою стратегию в зависимости от своего типа, после чего случайным образом выбирается $n$ «актуальных» участников игры. В этом случае представления агентов, вообще говоря, не обязательно согласованы (хотя и являются общим знанием). Отметим, что в [219] эта интерпретация названа *игрой Зельтена* (Р. Зельтен – лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 года, вместе с Дж. Нэшем и Дж. Харшаньи).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда условные распределения не обязательно являются общим знанием. Удобно описывать ее следующим образом. Пусть выигрыши агентов зависят от их действий и от некоторого параметра $\theta \in \Theta$ («состояния природы», которое может интерпретироваться и как набор типов агентов), значение которого не является общим знанием, т. е. целевая функция $i$-го агента имеет вид $f_i(\theta, x_1, ..., x_n) : \Theta \times X' \to \Re^1$, $i \in N$. Как было отмечено во второй главе данной работы, выбору агентом своей стратегии логически предшествует информационная рефлексия – размышления агента о том, что каждый агент знает (предполагает) о параметре $\theta$, а также о предположениях других агентов и пр. Тем самым, мы приходим к понятию структуры информированности агента, отражающей его информированность о неизвестном параметре, о представлениях других агентов и т. д.

В [238] в рамках вероятностной информированности (представления агентов включают в себя следующие компоненты: вероятностное распределение на множестве состояний природы; вероятностное распределение на множестве состояний природы и распределениях на множестве состояний природы, характеризующих представления остальных агентов, и т. д.) было построено универсальное пространство возможных взаимных представлений (universal beliefs space). При этом игра формально сводится к некоей «универсальной» байесовой игре, в которой типом агента является вся его структура информированности. Однако предложенная в [238] конструкция настолько громоздка, что найти решение «универсальной» байесовой игры в общем случае, по-видимому, невозможно.

В данном разделе мы ограничимся рассмотрением игр двух лиц, при этом представления агентов задаются точечной структурой информированности (у агентов имеются вполне определенные представления о значении неопределенного параметра; о том, каковы представления (также вполне определенные) оппонента, и т. д.) С учетом этих упрощений нахождение равновесия Байеса–Нэша сводится к решению системы двух соотношений, определяющих две функции, каждая из которых зависит от счетного числа переменных (см. ниже).

Итак, пусть в игре участвуют два агента с целевыми функциями

(2) $f_i(\theta, x_1, x_2)$, $\theta \in \Theta$, $x_i \in X_i$, $i$=1, 2,

причем функции $f_i$ и множества $X_i$, $\Theta$ являются общим знанием. Первый агент имеет следующие представления: неопределенный параметр равен $\theta_1 \in \Theta$; второй агент считает, что неопределенный параметр равен $\theta_{12} \in \Theta$; второй агент считает, что первый агент считает, что неопределенный параметр равен $\theta_{121} \in \Theta$ и т. д. Таким образом, точечная структура информированности первого агента $I_1$ задается бесконечной последовательностью элементов множества $\Theta$; пусть, аналогично, и у второго агента имеется точечная структура информированности $I_2$:

(3) $I_1=(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121},\ldots)$, $I_2=(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \ldots)$.

Посмотрим теперь на рефлексивную игру (2)–(3) с «байесовой» точки зрения [168]. Типом агента в данном случае является его структура информированности $I_i$, $i$=1, 2. Для нахождения равновесия Байеса–Нэша необходимо найти равновесные действия агентов всевозможных типов, а не только некоторых фиксированных типов (3).

Легко видеть, какими будут в данном случае распределения $F_i(\cdot|\cdot)$ из определения равновесия (1). Если, например, тип первого агента $I_1=(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \ldots)$, то распределение $F_1(\cdot|I_1)$ приписывает вероятность 1 типу оппонента $I_2=(\theta_{12}, \theta_{121}, \theta_{1212}, \ldots)$ и вероятность 0 остальным типам. Соответственно, если тип второго агента $I_2=(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \ldots)$, то распределение $F_2(\cdot|I_2)$ приписывает вероятность 1 типу оппонента $I_1=(\theta_{21}, \theta_{212}, \theta_{2121}, \ldots)$ и вероятность 0 остальным типам.

Для упрощения записи будем использовать в дальнейшем следующие обозначения:

$$BR_1(\theta, x_2) = \operatorname{Arg}\max_{x_1 \in X_1} f_1(\theta, x_1, x_2),$$

$$BR_2^{-1}(\theta, x_2) = \{x_1 \in X_1 \mid x_2 \in BR_2(\theta, x_1)\},$$

$$BR_2(\theta, x_1) = \operatorname{Arg}\max_{x_2 \in X_2} f_2(\theta, x_1, x_2),$$

$$BR_1^{-1}(\theta, x_1) = \{x_2 \in X_2 \mid x_1 \in BR_1(\theta, x_2)\}.$$

Введем также обозначения $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ для функций, ставящих в соответствие типу равновесное действие:

$$x_1^*(I_1) = \varphi(I_1) = \varphi(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \ldots), \quad x_2^*(I_2) = \psi(I_2) = \psi(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \ldots).$$

В этих обозначениях *точечное* равновесие Байеса–Нэша (1) записывается как пара функций $(\varphi(\cdot), \psi(\cdot))$, удовлетворяющих условиям

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \ldots) \in BR_1(\theta_1, \psi(\theta_{12}, \theta_{121}, \ldots)), \\ \psi(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \ldots) \in BR_2(\theta_2, \varphi(\theta_{21}, \theta_{212}, \ldots)). \end{cases}$$

Заметим, что в рамках точечной структуры информированности $i$-й агент уверен, что значение неопределенного параметра равно $\theta_i$ (вне зависимости от представлений оппонента).

Таким образом, для нахождения равновесия необходимо решить систему функциональных уравнений (4) для определения функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, каждая из которых зависит от счетного числа переменных.

Возможные структуры информированности могут иметь конечную либо бесконечную глубину. Покажем, что применение концепции равновесия Байеса–Нэша к агентам со структурой информированности бесконечной глубины дает парадоксальный результат – для них равновесным является любое допустимое действие.

Определим понятие конечности глубины структуры информированности применительно к случаю игры с двумя участниками, когда структура информированности каждого из них является бесконечной последовательностью элементов из Θ.

Пусть даны последовательность $T=\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов из Θ и целое неотрицательное число $k$. Последовательность $\omega_k(T)=\{t_i\}_{i=k+1}^{\infty}$ будем называть *k-окончанием* последовательности $T$.

Будем говорить, что последовательность $T$ имеет *бесконечную глубину*, если для любого $n$ найдется $k>n$ такое, что последовательность $\omega_k(T)$ не совпадает (имеется в виду обычное поэлементное совпадение) ни с одной из последовательностей набора $\omega_0(T)=T$, $\omega_1(T),\ldots, \omega_n(T)$. В противном случае последовательность $T$ имеет *конечную глубину*.

Иначе говоря, последовательность конечной глубины имеет конечное число попарно различных окончаний, в то время как у последовательности бесконечной глубины их бесконечно много. Например, последовательность (1, 2, 3, 4, 5, …) имеет бесконечную глубину, а последовательность (1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, …) – конечную.

Рассмотрим игру (2), в которой целевые функции $f_1$, $f_2$ и множества $X_1$, $X_2$, Θ обладают следующим свойством:
(5) для любых $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $\theta \in \Theta$ множества

$BR_1(\theta, x_2)$, $BR_2(\theta, x_1)$, $BR_2^{-1}(\theta, x_2)$ и $BR_1^{-1}(\theta, x_1)$ непусты.

Условия (5) означают, что для любого $\theta \in \Theta$ и любого действия $x_1 \in X_1$ у второго агента существует хотя бы один наилучший ответ и, в свою очередь, само действие $x_1$ является наилучшим ответом на какое-то действие второго агента; аналогично и любое действие $x_2 \in X_2$.

Оказывается, что при выполнении условий (5) в игре (2) *любое* действие агента со структурой информированности бесконечной глубины является равновесным (т. е. является компонентой некоторого равновесия (4)). Это справедливо для обоих агентов; для определенности сформулируем и докажем утверждение для первого.

Утверждение 2.10.1. Пусть в игре (2), в которой выполнены условия (5), существует хотя бы одно точечное равновесие Байеса–Нэша (4). Тогда для любой структуры информированности бесконечной глубины $I_1$ и любого $\chi \in X_1$ существует равновесие ($x_1^*(\cdot)$, $x_2^*(\cdot)$), в котором $x_1^*(I_1) = \chi$.

Идея доказательства состоит в конструктивном построении соответствующего равновесия. Зафиксируем произвольное равновесие ($\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$) и произвольную структуру информированности бесконечной глубины $I_1$. В силу условий (4) значение функции $\varphi(\cdot)$ на структуре $I_1$ связано со значениями функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ на ряде других структур. Определим заново значения функций на этих структурах таким образом, чтобы условия (4) не нарушались (оставив неизменными значения на остальных структурах) и при этом «определенная заново» функция $\tilde{\varphi}(\cdot)$ принимала на структуре $I_1$ значение $\chi$.

Доказательству утверждения 2.10.1 предпошлем четыре леммы, для формулировки которых введем обозначение: если $p=(p_1, \ldots, p_n)$ – конечная, а $T = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ – бесконечная последовательности элементов из $\Theta$, то $pT = (p_1, \ldots, p_n, t_1, t_2, \ldots)$.

Лемма 2.10.1. Если последовательность $T$ имеет бесконечную глубину, то для любой конечной последовательности $p$ и любого $k$ последовательность $p\omega_k(T)$ также имеет бесконечную глубину.

Доказательство. Поскольку $T$ имеет бесконечную глубину, у нее бесконечное множество попарно различных окончаний. При переходе от $T$ к $\omega_k(T)$ их число уменьшается не более, чем на $k$, все равно оставаясь бесконечным. При переходе от $\omega_k(T)$ к $p\omega_k(T)$ число попарно различных окончаний, очевидно, не уменьшается. •

Лемма 2.10.2. Пусть последовательность $T$ представима в виде $T = p\,p\,p\,\ldots$, где $p$ – некоторая непустая конечная последовательность. Тогда $T$ имеет конечную глубину.

Доказательство. Пусть $p$ имеет вид $p=(p_1, \ldots, p_n)$. Тогда элементы последовательности $T$ связаны соотношениями $t_{i+nk} = t_i$ для всех целых $i \geq 1$ и $k \geq 0$. Возьмем произвольное $j$-окончание, $j \geq n$. Число $j$ единственным образом представимо в виде $j = i + n\,k$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, $k \geq 0$. Нетрудно показать, что $\omega_j(T) = \omega_i(T)$: для любого целого $m \geq 0$ выполняется $t_{j+m} = t_{i+nk+m} = t_{i+m}$.

С учетом произвольности $j$ мы показали, что у последовательности $T$ не более $n$ попарно различных окончаний, т. е. ее глубина конечна. •

Лемма 2.10.3. Пусть для последовательности $T$ выполняется тождество $T = p\ T$, где $p$ – некоторая непустая конечная последовательность. Тогда $T$ имеет конечную глубину.

Доказательство. Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Имеем: $T = p\ T = p\ p\ T = p\ p\ p\ T = p\ p\ p\ p\ T = \ldots$ . Таким образом, для любого целого $k \geq 0$ фрагмент $(t_{nk+1}, \ldots, t_{nk+n})$ совпадает с $(p_1, \ldots, p_n)$. Поэтому $T$ представима в виде $T = p\ p\ p\ldots$ и, согласно лемме 2.10.2, имеет конечную глубину. •

Лемма 2.10.4. Пусть для последовательности $T$ выполняется тождество $p\ T = q\ T$, где $p$ и $q$ – некоторые нетождественные непустые конечные последовательности. Тогда $T$ имеет конечную глубину.

Доказательство. Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и $q = (q_1, \ldots, q_k)$. Если $n = k$, то, очевидно, тождество $p\ T = q\ T$ не может выполняться. Поэтому рассмотрим случай $n \neq k$. Пусть для определенности $n > k$. Тогда $p = (q_1, \ldots, q_k, p_{k+1}, \ldots, p_n)$, и из условия $p\ T = q\ T$ следует, что $d\ T = T$, где $d = (p_{k+1}, \ldots, p_n)$. Применяя лемму 2.10.3, получаем, что глубина последовательности $T$ конечна. •

Доказательство утверждения 2.10.1. Пусть имеется произвольная структура информированности первого агента бесконечной глубины – для единообразия с леммами 2.10.1-2.10.4 будем обозначать ее не $I_1$, а $T = (t_1, t_2, \ldots) = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$. По условию утверждения, существует по крайней мере одна пара функций $(\varphi(\cdot), \psi(\cdot))$, удовлетворяющая соотношениям (4); зафиксируем любую из таких пар. Положим значение функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$ на последовательности $T$ равным $\chi$: $\tilde{\varphi}(T) = \chi$ (здесь и далее для «заново определяемых» функций будем применять обозначения $\tilde{\varphi}(\cdot)$ и $\tilde{\psi}(\cdot)$). Подставляя $T$ в качестве аргумента функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$ в соотношения (4), получаем, что значение $\tilde{\varphi}(T) = \chi$ связано (в силу (4)) со значениями функции $\tilde{\psi}(\cdot)$ на последовательности $\omega_1(T)$, а также на всех таких последовательностях $T'$, для которых $\omega_1(T') = T$.

Выберем значения функции $\tilde{\psi}(\cdot)$ на этих последовательностях таким образом, чтобы выполнялись условия (4):

$$\tilde{\psi}(t_2, t_3, t_4, \ldots) \in BR_1^{-1}(t_1, \chi),\ \tilde{\psi}(t_1^1, t_1, t_2, \ldots) \in BR_2(t_1^1, \chi),$$

где $t_1^1 \in \Omega$; из (5) вытекает, что это можно сделать. Если множество $BR_1^{-1}(t_1, \chi)$ или $BR_2(t_1^1, \chi)$ содержит более одного элемента, возьмем любой из них.

Далее, подставляя в (4) последовательность ($t_2$, $t_3$, …) в качестве аргумента функции $\tilde{\psi}(\cdot)$, выберем

$$\tilde{\varphi}(t_3, t_4, ...) \in BR_2^{-1}(t_2, \tilde{\psi}(t_2, t_3, ...)),\ \tilde{\varphi}(t_2^1, t_2, t_3, ...) \in BR_1(t_2^1, \tilde{\psi}(t_2, t_3, ...)),$$

а, подставляя ($t_1^1$, $t_2$, $t_3$, …), выберем

$$\tilde{\varphi}(t_1^2, t_1^1, t_1, t_2, ...) \in BR_1(t_1^2, \tilde{\psi}(t_1^1, t_1, t_2, ...)) \text{ (здесь } t_2^1, t_1^2 \in \Omega \text{ ).}$$

Продолжая подставлять уже полученные значения в соотношения (4), можно последовательно определить значения функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$ на всех последовательностях вида

(6) ($t_m^k$, $t_m^{k-1}$, …, $t_m^2$, $t_m^1$, $t_m$, $t_{m+1}$, …), $t_m^k$, $t_m^{k-1}$, …, $t_m^2$, $t_m^1$ $\in \Theta$,

где ($m + k$) – нечетное, и значения функции $\tilde{\psi}(\cdot)$ на последовательностях вида (6) с четным ($m + k$). Далее будем считать, что в (6) при $m$>1 выполняется $t_m^1 \neq t_{m-1}$ – тогда представление в виде (6) является однозначным.

Алгоритм определения значения функций на последовательностях вида (6) состоит из двух этапов. На первом этапе полагаем $\tilde{\varphi}(T)=\chi$ и определяем значения соответствующих функций на последовательностях $\omega_m(T) = (t_m, t_{m+1}, \ldots)$, $m > 1$ (т. е. при $k = 0$), попеременно применяя отображения $BR_1^{-1}$ и $BR_2^{-1}$.

На втором этапе для определения значения соответствующих функций на последовательностях (6) при $k \geq 1$ исходим из определенного на первом этапе значения на последовательности ($t_m$, $t_{m+1}$, …), применяя попеременно отображения $BR_1$ и $BR_2$.

Согласно лемме 1 все последовательности вида (6) имеют бесконечную глубину. Согласно лемме 4 все они попарно различны (если бы какие-либо две последовательности вида (6) совпадали, это противоречило бы бесконечности глубины). Поэтому, определяя значения функций $\tilde{\varphi}(\cdot)$ и $\tilde{\psi}(\cdot)$, мы не рискуем присвоить одному и тому же аргументу разные значения функции.

Таким образом, мы определили значения функций $\tilde{\varphi}(\cdot)$ и $\tilde{\psi}(\cdot)$ на последовательностях вида (6) таким образом, что эти функции попрежнему удовлетворяют условиям (4) (т. е. являются точечным равновесием Байеса–Нэша) и при этом $\tilde{\varphi}(T) = \chi$. Утверждение 2.10.1 доказано. •

Итак, выше введено понятие точечного равновесия Байеса–Нэша. Доказано, что при выполнении дополнительных условий (5) любое допустимое действие агента, имеющего структуру информированности бесконечной глубины, является равновесным. (Все рассмотрения проводились для игры с двумя участниками, однако можно выдвинуть гипотезу о том, что полученный результат допускает обобщение на случай игры с произвольным числом участников.) Это обстоятельство, по-видимому, свидетельствует о нецелесообразности рассмотрения структур бесконечной глубины как в терминах информационного равновесия, так и в терминах равновесия Байеса–Нэша.

В более общем плане можно отметить, что доказанное утверждение является аргументом (причем не единственным, см., например, разделы 2.6 и 3.2) в пользу неизбежной ограниченности ранга информационной рефлексии принимающих решение субъектов.

## 2.11. ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

С точки зрения системного анализа любая система задается перечислением ее состава, структуры и функций. Поэтому, в том числе и модель организационной (ОС), социальной, экономической (активной) системы определяется заданием [112]:

- *состава* ОС (участников, входящих в ОС, то есть ее элементов);
- *структуры* ОС (совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС);
- *множеств допустимых стратегий* участников ОС, отражающих, в том числе, институциональные, технологические и другие ограничения их совместной деятельности;
- *целевых функций* участников ОС, отражающих их предпочтения и интересы;
- *информированности* – той информации, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях;

▪ *порядка функционирования*: последовательности получения информации и выбора стратегий участниками ОС.

Состав определяет, «кто» входит в систему, структура – «кто с кем взаимодействует» (с этой точки зрения порядок функционирования тесно связан со структурой системы, так как первый определяет причинно-следственные связи и порядок взаимодействия), допустимые множества – «кто что может», целевые функции – «кто что хочет», информированность – «кто что знает».

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из шести перечисленных параметров ее модели. Следовательно, первым основанием системы классификаций механизмов управления ОС (процедур принятия управленческих решений) является предмет управления – изменяемая в процессе и результате управления компонента ОС. По этому основанию можно выделить: управление составом, управление структурой, институциональное управление (управление «допустимыми множествами»), мотивационное управление (управление предпочтениями и интересами) – эти виды управления подробно рассмотрены, например, в [112], информационное управление (управление информацией, которой обладают участники ОС на момент принятия решений) и управление порядком функционирования (управление последовательностью получения информации и выбора стратегий участниками ОС) [113]. Отметим, что обычно в рамках теоретико-игровых моделей управление порядком функционирования рассматривается как управление структурой, поэтому можно и не рассматривать отдельно этот тип управления.

Обсудим кратко специфику некоторых типов управлений[27].

Институциональное управление является наиболее жестким и заключается в том, что центр целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности агента. Такое ограничение может осуществляться явными или неявными воздействиями – правовыми актами, распоряжениями, приказами и т.д. или морально-этическими нормами, корпоративной культурой и т.д.

[27] Естественно, на практике иногда трудно выделить в явном виде управление того или иного типа, так как они используются (и должны использоваться!) одновременно.

Мотивационное управление является более «мягким», чем институциональное, и заключается в целенаправленном изменении предпочтений (функции полезности) агента. Такое изменение может осуществляться введением системы штрафов и/или поощрений за выбор тех или иных действий и/или достижение определенных результатов деятельности. Широкий класс примеров моделей мотивационного управления составляют задачи планирования и стимулирования [112]. В случае, например, задачи стимулирования, мотивационное управление заключается в непосредственном (входящем в функцию полезности аддитивно) вознаграждении агента за выбор определенных действий.

Наиболее «мягким» (косвенным), по сравнению с институциональным и мотивационным, и в то же время наименее исследованным (с точки зрения формальных моделей) является информационное управление, которое является основным предметом рассмотрения в данной работе.

Предметом настоящей работы является вполне определенное управляющее воздействие – информационное, т. е. целенаправленное влияние на информированность агентов. Отметим, что, помимо теоретико-игровых, существуют и другие подходы к моделированию информационного управления (см. [81, 96, 154, 161]).

Предлагаемая общая модель информационного управления представлена на Рис. 29.

Модель включает в себя агента (агентов) и управляющий орган – центр. Каждый агент характеризуется циклом «информированность агента → действие агента → наблюдаемый агентом результат → информированность агента», и у разных агентов эти три компоненты цикла являются, вообще говоря, различными. В то же время, и это отражает надпись «*Агент*(*ы*)» на Рис. 29, можно считать этот цикл общим для всей управляемой подсистемы, т. е. для всего набора агентов.

Что касается взаимодействия агента (агентов) и центра, то оно характеризуется:

- информационным воздействием центра, формирующим ту или иную информированность агента (агентов). Отметим, что можно рассматривать и воздействие центра на наблюдаемый агентом (агентами) результат, т. е. «центр → наблюдаемый результат» на Рис. 29. Однако это рассмотрение (в некотором смысле сближающее информационное управление с мотивационным) выходит за рамки настоящей работы;

- реальным результатом действия агента (агентов), который оказывает влияние на интересы центра.

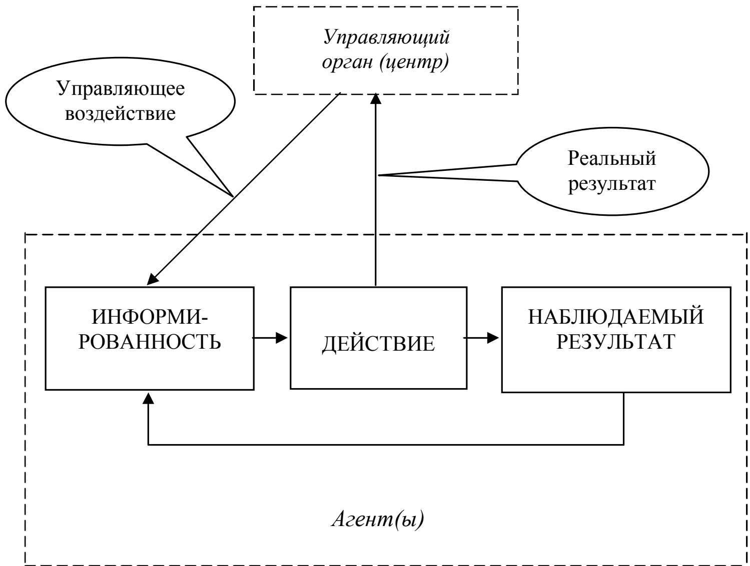


Рис. 29. Модель информационного управления

Обсудим модель, изображенную на Рис. 29, более подробно.

Математическим аппаратом, моделирующим теоретико-игровое взаимодействие агентов, являются *рефлексивные игры*, в которых агенты выбирают действия на основе своих *структур информированности* – иерархии представлений о существенных параметрах ситуации («состоянии природы»), представлений о представлениях оппонентов (других агентов) и т. д. Таким образом, в терминах рефлексивных игр информированность агента моделируется при помощи его структуры информированности (соответственно, информированность всей управляемой подсистемы моделируется при помощи *структуры информированности игры*, являющейся объединением структур информированности агентов).

Исходя из своей структуры информированности, агент выбирает то или иное действие. Для заданной структуры информированности действия агентов являются компонентами *информационного равновесия*, являющегося решением рефлексивной игры. Информационное равновесие является обобщением равновесия Нэша – наиболее распространенной концепции решения некооперативных игр.

Информированность агента о ситуации и о представлениях оппонентов может быть, вообще говоря, неадекватной. Поэтому наблюдаемый агентом результат рефлексивной игры может как соответствовать его ожиданиям, так и не соответствовать им. Соответствие определяется двумя факторами:

1) насколько адекватно информирован агент на момент выбора своего действия;

2) насколько подробную информацию о результатах игры он наблюдает.

Например, наблюдаемым результатом может быть значение его целевой функции, действия оппонентов, истинное значение неопределенного параметра и пр. В общем случае агент наблюдает значение некоторой функции, зависящей от состояния природы и действий оппонентов. Эта функция называется *функцией наблюдения*, и воздействие ее значения на информированность отображено на рисунке фрагментом «наблюдаемое действие $\to$ информированность». Если все агенты наблюдают именно тот результат, на какой рассчитывают (т. е. реальное значение функции наблюдения каждого агента равно ожидаемому), то естественным является предположение о том, что структура информированности не меняется. В этом случае информационное равновесие является *стабильным* (см. раздел 2.7).

Рассмотрим теперь взаимодействие агентов с центром. Осуществляя информационное управление, центр стремится к максимизации своей полезности (разумеется, это относится и к другим типам управления). Если считать, что центр может сформировать любую структуру информированности из некоторого допустимого множества, то задачу информационного управления можно сформулировать следующим образом: найти такую структуру информированности из допустимого множества структур, чтобы полезность центра в информационном равновесии была максимальной (быть может, с учетом затрат центра на формирование структуры). Более формальная постановка задачи информационного управления содержится в настоящем разделе ниже.

Подчеркнем следующее важное обстоятельство: в рамках предлагаемой модели мы исходим из предположения о том, что центр может сформировать у агентов *любую* структуру информированности. За рамками наших рассмотрений остается вопрос о том, каким образом центру следует «убедить» агентов в том, что имеют место те или иные состояния природы и представления оппонентов. Вопрос о том, *как* центру надлежит формировать соответствующую структуру, требует особого рассмотрения с привлечением данных психологии и социологии – см., например, [22, 48, 153, 154], а также разделы 2.12-2.14 и четвертую главу настоящей работы.

Перейдем к формальной постановке задачи. Пусть на множестве действий реальных агентов и структур информированности задана целевая функция центра $\Phi(x, I)$. Пусть, далее, центр может сформировать любую структуру информированности из некоторого множества $\mathfrak{I}'$. При структуре информированности $I \in \mathfrak{I}'$ вектор действий реальных агентов является элементом множества равновесных векторов $\Psi_X(I)$. Множество $\Psi_X(I)$ может быть пустым, тогда центр, ввиду отсутствия равновесия, не может рассчитывать на тот или иной исход игры. Поэтому введем множество допустимых структур, для которых существует хотя бы одно равновесие: $\mathfrak{I} = \{I \in \mathfrak{I}' \mid \Psi_X(I) \neq \varnothing\}$.

Если при заданной структуре $I \in \mathfrak{I}$ множество равновесных векторов $\Psi_X(I)$ состоит более чем из одного элемента, то обычно (см., например, [112]) принимается одно из следующих двух предположений:

1. *гипотеза благожелательности* (ГБ), состоящая в том, что у центра есть возможность обеспечить выбор агентами «нужного» равновесия;

2. *принцип максимального гарантированного результата* (МГР), состоящий в том, что центр рассчитывает на наихудшее для себя равновесие игры агентов.

В соответствии с ГБ и МГР получаем, соответственно, постановку задачи информационного управления в двух вариантах:

(1) $\max\limits_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow[I \in \mathfrak{I}]{} \max;$

(2) $\min\limits_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow[I \in \mathfrak{I}]{} \max.$

Разумеется, в случае, когда для любого $I \in \mathfrak{I}$ множество $\Psi_X(I)$ состоит ровно из одного элемента, (1) и (2) совпадают.

Задачу (1) (либо (2)) будем называть *задачей информационного управления в форме целевой функции*.

Опишем теперь задачу информационного управления в несколько иной постановке, не зависящей от целевой функции центра. Пусть центр стремится добиться от агентов выбора вектора действий $x \in X'$. Зададимся вопросом: для каких векторов $x$ и каким образом (т. е. при помощи формирования какой структуры $I$) центр может это сделать? Иначе говоря, вторая возможная постановка задачи информационного управления состоит в нахождении *множества достижимости* – множества векторов $x \in X'$, для каждого из которых множество структур $\Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$

(3) непусто, либо

(4) состоит ровно из одного элемента,

а также соответствующих допустимых структур информированности $I \in \Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$ для каждого такого вектора $x$. Условие (3) соответствует ГБ, условие (4) – МГР.

Задачу (3) (либо (4)) будем называть *задачей информационного управления в форме множества достижимости*.

Еще раз подчеркнем, что вторая постановка не зависит от целевой функции центра и отражает лишь его возможность при помощи информационного управления привести систему в то или иное состояние.

Как в первой, так и во второй постановке центр может либо интересоваться, либо не интересоваться стабильностью получившегося информационного равновесия. Если требуется осуществить стабильное информационное управление, т. е. привести систему в стабильное информационное равновесие, то в приведенных выше постановках требуется заменить $\Psi$ на $\Psi^s$, а термины «равновесие» и «равновесный» – на «стабильное равновесие» и «стабильно-равновесный» соответственно.

Подытожим вышесказанное. Задачу информационного управления будем рассматривать

- в форме целевой функции либо множества достижимости;
- с использованием гипотезы благожелательности (ГБ) либо принципа максимально гарантированного результата (МГР);
- с требованием стабильности или без требования стабильности.

Выбор одного из этих восьми вариантов определяется конкретной моделируемой ситуацией. Однако в любом случае необходимым (и, как показывает опыт, наиболее сложным и трудоемким для исследователя) этапом является установление связи между структурой информированности и вектором действий агентов, т. е. исследование информационного равновесия.

В четвертой главе рассмотрен ряд частных моделей информационного управления в различных прикладных областях, и для каждой модели мы будем оговаривать наиболее адекватную (с точки зрения автора) постановку задачи.

В данном разделе приводится общая схема исследования задач информационного управления. Не претендуя на исчерпывающий охват всех возможных случаев, эта схема описывает общую логику теоретико-игрового анализа (см. Рис. 30) [171].

- **Этап 1.** Описание множества управляемых субъектов (агентов), их допустимых действий и целевых функций. Заметим, что этот этап является необходимым при теоретико-игровом подходе к управлению (не только информационному) социально-экономическими системами.
- **Этап 2.** Формализация имеющейся в ситуации неопределенности – неопределенного параметра, значение которого не является общим знанием между агентами. Если не накладывать заранее ограничения на множество возможных значений неопределенного параметра, то всегда можно считать (см., например, [243, с. 77]), что этот параметр является аргументом целевых функций агентов.
- **Этап 3.** Определение множества информационных структур (см. раздел 2.1), которые могут быть сформированы управляющим органом (центром).

В результате этих трех этапов, составляющих **предварительную стадию** исследования, мы получаем теоретико-игровое описание ситуации. Отметим, что в настоящей работе, как правило, принимается предположение о том, что центру известно истинное значение неопределенного параметра.


Рис. 30. Этапы исследования задач информационного управления

▪ **Этап 4.** Вычисление (для структур, определенных на предыдущем этапе) информационного равновесия – зависимости между информационной структурой и действиями агентов.

- **Этап 5.** Исследование стабильности информационного равновесия. Если равновесие стабильно – установление его истинности либо ложности.
- **Этап 6.** Определение наиболее целесообразной постановки задачи информационного управления и нахождение информационной структуры, являющейся ее решением. Нахождение этого решения, как правило, облегчается в случае, когда рефлексивные отображения являются стационарными и, следовательно, нужная информационная структура довольно проста.

В результате этапов 4–6, составляющих **основную стадию** исследования, мы получаем информационную структуру, которую надлежит сформировать у агентов для достижения стоящих перед управляющим органом целей.

- **Этап 7.** Разработка информационного воздействия на агентов, приводящего к формированию найденной на этапе 6 информационной структуры.

Этап 7, составляющий **завершающую стадию** исследования, в значительной степени лежит за рамками теоретико-игрового подхода и относится к области психологии и социологии. В данной работе описаны лишь некоторые виды информационных воздействий, меняющих те или иные компоненты информационной структуры игры (см. разделы 2.12-2.14 и главу 4).

## 2.12. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В рамках принятой в данной работе (точнее – в данной главе) модели принятия решений, действия агента определяются не чем иным, как его информированностью о состоянии природы и представлениях оппонентов (других агентов). Поэтому весьма важным является вопрос о том, каким образом информационные воздействия центра влияют на эти представления. Иными словами, вопрос состоит в следующем: как формируется информационная структура игры в зависимости от тех или иных информационных воздействий центра.

Здесь необходимо признать, что сколько-нибудь исчерпывающий ответ на этот вопрос, по видимому, невозможно получить, оперируя исключительно математическими (и, в частности, теоретико-игровыми) моделями. Это обусловлено в первую очередь тем, что процесс усвоения человеком той или иной информации в очень большой степени обусловлен факторами социально-психологического порядка. Как отмечено в [51, с. 81], «секрет высокоэффективного информационного управления – обращение к бессознательному, в использовании приемов снятия барьеров восприятия и преодоления естественной толерантности человека к восприятию нового».

Понятно, с какими трудностями связана формализация этого процесса, когда речь идет о принятии решения умным и рациональным агентом (intelligent ratoinal decision-maker [243, p. 1]) – «главным героем» работ по теории игр. Все разработанные на данный момент концепции решения игры основываются, явно или неявно, на уже существующей к моменту начала игры структуре информированности[28]. Что было «до начала игры», как сложилась та или иная информированность – этот вопрос остается за рамками обсуждения. По-видимому, здесь проходит некая граница между реальным человеком и модельным «умным рациональным агентом».

Отдавая себе отчет в тех ограничениях, которые присущи математическому моделированию человеческого поведения (и, в частности, теоретико-игровому подходу к информационному управлению), рассмотрим возможные виды информационных воздействий.

В [138, с. 133] приведена следующая классификация информационных воздействий:

(1) входные данные – «сухие» факты;

(2) входные данные – логически обоснованные выводы, аналитические суждения, опирающиеся на определенный набор фактов;

(3) входные данные – эмоционально окрашенные утверждения, опирающиеся на «хорошо/плохо», «морально/аморально», «нравственно/безнравственно» и т. п.

Согласно [140, с. 203], новая информация, на основании которой агенты принимают решения, делится на

(4) жесткую, содержащую только реальные данные и факты;

---

[28] Не являются исключением и многошаговые игры, где в ходе разыгрывания игры может происходить изменение информированности участников (в том числе в силу информационного обмена между ними) – ведь и у многошаговой игры существует некий начальный момент и, соответственно, начальная информированность участников.

(5) мягкую, которая включает прогнозы и оценки.

Очевидна аналогия между пунктами (1) и (4), а также (2) и (5). О них речь пойдет несколько ниже, а сейчас остановимся подробнее на пункте (3).

В пункте (3) речь идет, по сути дела, об этическом аспекте информации и, соответственно, об этическом аспекте тех или иных решений. По-видимому, единственной пока попыткой формального описания этого аспекта являются работы В.А. Лефевра [76, 80, 82], а также других авторов, развивающих предложенную им модель этического выбора – см. [149, 150, 178] и др. В этих работах предполагается, что принимающий решение агент осуществляет *рефлексию первого рода* [101, 121], т. е. занимает позицию наблюдателя по отношению к своему поведению, своим мыслям и чувствам. В агенте существует несколько соотнесенных друг с другом уровней, в частности, уровень, «отвечающий» за этический аспект выбора. Итоговое решение агента определяется как влиянием внешней среды, так и состоянием этих уровней.

В теории игр (а также и в данной работе) агент понимается как индивид, т. е. «неделимый», и осуществляет *рефлексию второго рода* – относительно принятия решений оппонентами. Поэтому, оставив пункт (3) за рамками наших рассмотрений, обратимся к пунктам (1), (4) и (2), (5).

Структура информированности $i$-го агента (см. раздел 2.1) включает в себя представления:

– о состоянии природы ($\theta_i$);

– о представлениях оппонентов ($\theta_{i\sigma}$, $\sigma \in \Sigma_+$).

Сообщение как первого, так и второго может быть элементом информационного воздействия. Иными словами, центр может сообщить агенту (агентам) информацию как о состоянии природы (т. е. о значении неопределенного параметра), так и о представлениях оппонентов.

Соответственно, мы получаем следующие виды информационных воздействий:

(i) *информационное регулирование*;

(ii) *информационное управление*.

Они примерно соответствуют пунктам (1), (4).

Что касается пунктов (2), (5), то им примерно соответствует такой вид информационного воздействия, как

(iii) *активный прогноз*,

представляющий собой сообщение информации о будущих значениях неких параметров, зависящих от состояния природы и действий агентов [117].

В последующих разделах мы рассмотрим указанные три вида информационных воздействий (i–iii) более подробно.

Простейшим случаем информационного воздействия является следующий: центр собрал вместе всех агентов и во всеуслышание сообщил им значение неизвестного параметра $\theta$ – величину $\tilde{\theta}$. В этом случае естественно предположить, что образовавшаяся структура информированности игры имеет глубину 1 и состоит из единственного элемента $\tilde{\theta}$, т. е. для любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется равенство $\theta_{i\sigma} = \tilde{\theta}$. Иными словами, общим знанием среди агентов становится то, что неопределенный параметр равен $\tilde{\theta}$.

Такое **информационное регулирование** называется ***однородным*** [36, 117]. Предположение о том, что при сообщении центром единственной величины $\tilde{\theta}$ она становится общим знанием, назовем **предположением $\Pi_0$**. Собственно говоря, предположение $\Pi_0$ означает, что агенты доверяют центру, и это является общим знанием.

Более сложным случаем информационного регулирования является следующий: центр сообщает $i$-му агенту $\theta_i$ – значение неизвестного параметра $\theta$. В этом случае примем **предположение $\Pi_1$**, состоящее в том, что образовавшаяся структура информированности игры состоит из $n$ элементов и при этом для любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется равенство $\theta_{i\sigma} = \theta_i$. Иными словами, каждый $i$-й агент считает общим знанием, что неопределенный параметр равен $\theta_i$. Образующаяся при этом структура информированности имеет, вообще говоря, глубину 2.

Такое **информационное регулирование** называется ***неоднородным*** [36, 117]. Ясно, что однородное информационное регулирование является частным случаем неоднородного (при этом $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_n = \tilde{\theta}$ и структура информированности имеет глубину 1).

Пусть теперь центр сообщает $i$-му агенту не только значение неизвестного параметра, но и то, что о значении параметра думают другие агенты. Таким образом, $i$-му агенту сообщается набор чисел $\theta_{ij}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) – представлений о неизвестном параметре каждого

$j$-го агента. Примем в этом случае **предположение $\Pi_2$**, состоящее в следующем: $i$-й агент считает, что каждый $j$-й агент, $j \neq i$, субъективно считает значение неопределенного параметра $\theta_{ij}$ общим знанием. В этом случае образовавшаяся структура информированности игры имеет глубину 3 и любых $i, j \in N, j \neq i$, и $\sigma \in \Sigma$ выполняется равенство $\theta_{ij\sigma} = \theta_{ij}$.

Эта ситуация является примером **информационного управления**.

Рассмотрим иллюстративный пример. В [162, с. 235] описан психологический эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США говядину. «Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника.

… По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше… Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной» информацией… приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме».

В этом примере (более подробно он рассмотрен в разделе 4.73) отчетливо видно осуществление информационного регулирования («поставки импортной говядины будут сокращены») и рефлексивного управления («поставки импортной говядины будут сокращены… мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок»).

Ряд модельных примеров осуществления информационного регулирования и рефлексивного управления приведен в главе 6. Отметим, что более детальная классификация и исследование рефлексивного управления представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

В заключение данного раздела отметим, что на сегодняшний день существует несколько трактовок терминов «рефлексия» и «информационное управление» или «рефлексивное управление». В том числе, в рамках подходов школы В.А. Лефевра (см. [69, 78, 81, 149, 178] и др.), подходов «методологической школы» [4, 38, 179], подходов «психолого-педагогического» направления [98, 145, 155] и др., «рефлексивности по Дж. Соросу» [44-46, 147] и многих других (см., например, труды ежегодного симпозиума «Рефлексивные процессы и управление» под руководством В.А. Лефевра и В.Е. Лепского, а также одноименный журнал).

Вернемся теперь к вопросу, каким образом центр может формировать те или иные структуры информированности. Для этого в качестве примера приведем модель так называемых простых сообщений [139], для которых удается охарактеризовать множество реализуемых ими структур информированности.

**Простые сообщения.** *Простое сообщение* заключается в следующем. Агенты в некотором составе собираются, и центр[29] сообщает им значение неопределенного параметра $\theta \in \Theta$. Делается предположение, что все собравшиеся верят сообщенной им информации. Кроме этого, каждый видит, что его сосед теперь тоже осведомлен об этом значении неопределенного параметра, а также что тот видит, что другой сосед осведомлен и т.д. Т.е. тот факт, что сообщение о значении неопределенного параметра воспринимается на веру всеми присутствующими при этом сообщении агентами, является общим знанием среди этих агентов.

Более формально простое сообщение означает следующее. Для множества агентов $G \subseteq N$ определим

$$\tilde{G} = \{\sigma \in \Sigma \mid \text{в } \sigma \text{ содержатся индексы только из } G\}.$$

Под *простым информационным воздействием* (*простым сообщением*), обозначаемым $s \equiv G[\theta]$, где $G \subseteq N$, а $\theta \in \Theta$, будем понимать присваивание элементам структуры информированности $\theta_\sigma$ значения $\theta$ для каждой непустой последовательности индексов $\sigma \in \tilde{G}$.

Агенты могут так собираться не один раз, а несколько, причем в разных составах, и сообщения о значении неопределенного параметра могут быть различными. При этом делается предположение, что агенты, которые уже были на предыдущих «собраниях», верят вновь

[29] Центром, который делает сообщение, может быть, в частности один из агентов.

сообщенной информации. Тогда скажем, что *процедура простых сообщений* заключается в том, что центр формирует структуру информированности путем выбора конечной последовательности простых информационных воздействий

$$\Pi \equiv \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \equiv \{s_i\} \equiv \{G_i[\theta_i]\},$$

где $G_i \subseteq N$, $\theta_i \in \Theta$, которые последовательно изменяют структуру информированности по описываемому в определении простого сообщения закону.

Исследуем вопрос о том, все ли возможные структуры информированности может таким образом создать центр, а если не все, то какие, как их можно описать, какой они могут быть глубины, сложности и т.д. Начнем со следующего утверждения.

Утверждение 2.12.1. Для любой последовательности $\Pi$ найдется такая, которая формирует ту же структуру информированности и для которой при $q < m$ $G_q$ не является подмножеством $G_m$.

Доказательство. Суть утверждения 2.12.1 состоит в том, что не имеет смысла вызывать на отдельное «собрание» маленькую группу «раньше» большой, которая ту включает. Если $G_q \subseteq G_m$, то $\tilde{G}_q \subseteq \tilde{G}_m$. А это значит, что всем элементам структуры информированности, измененным простым информационным воздействием $G_q[\theta_q]$, будет присвоено новое значение воздействием $G_m[\theta_m]$. Делаем вывод, что в таком случае можно не прибегать к воздействию $G_q[\theta_q]$ вообще, и будет сформирована та же структура информированности. Из последовательности воздействий $\{s_i\}$ удалим $s_q$ и так же поступим во всех подобных случаях. Полученная последовательность будет обладать свойствами, указанными в формулировке утверждения. ●

Заметим, что если все множество агентов $N$ не было на общем собрании, то останется неопределенным хотя бы элемент $\theta_{12\ldots n}$ в структуре информированности. Поэтому будем всегда в дальнейшем полагать, что $G_1 = N$, т. е. первая вызванная группа агентов – все множество $N$. Также мы будем всегда полагать, что последовательность $\Pi$ удовлетворяет утверждению 2.12.1 (при $q < m$ $G_q$ не является подмножеством $G_m$), из которого и следует целесообразность собрания самой большой группы агентов первой.

Теперь, что очевидно из определения простого информационного воздействия, можно утверждать, что заданная последовательность простых информационных воздействий $\Pi$ однозначным образом формирует некоторую структуру информированности $I_\Pi$.

Наряду с объективной последовательностью $\Pi$ рассмотрим субъективные последовательности $\Pi_\sigma$ для $\sigma \in \Sigma_+$, которые имеют место с точки зрения реальных или фантомных агентов. Если какого то сообщения $s_i$ не было с точки зрения агента $\sigma$ (он не был на соответствующем «собрании»), то в последовательности $\Pi_\sigma$ поставим на $i$-м месте символ пустого множества $\varnothing$, в противном случае поместим туда сообщение $s_i$ и будем условно писать $\Pi_\sigma^i = s_i$. Заметим, что при сделанных нами предположениях всегда выполнено $\Pi_\sigma^1 = s_1$.

Определим операцию пересечения для последовательностей простых информационных воздействий $\Pi_\sigma \cap \Pi_{\sigma'}$. Это тоже последовательность сообщений, причем $(\Pi_\sigma \cap \Pi_{\sigma'})^{\mathrm{i}} = s_i$ в том и только в том случае, если $\Pi_\sigma^i = s_i$ и $\Pi_{\sigma'}^i = s_i$, в противном случае на $i$-м месте поставим значок $\varnothing$. Т.е. эту операцию можно определить как поэлементное пересечение по правилам:

$$s_i \cap s_i = s_i\,; \qquad s_i \cap \varnothing = \varnothing \cap s_i = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing.$$

Определим последовательность сообщений $\Pi_j$, которую видит реальный агент $j \in N$, следующим образом: $\Pi_j^i = s_i$, если $j \in G_i$, и $\Pi_j^i = \varnothing$ в противном случае. Мы тем самым предполагаем, что агент знает о существовании только тех совещаний, на которых он присутствовал.

Теперь определим, что такое, например, $\Pi_{12}$, т. е. последовательность сообщений, которую «видит» второй агент с точки зрения первого. Сюда надо отнести те совещания из $\Pi_1$, на которых присутствовал также второй агент, т. е.: $\Pi_{12}^i = s_i$, если $\{1, 2\} \subseteq G_i$, и $\Pi_{12}^i = \varnothing$ в противном случае. Легко видеть, что $\Pi_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Обобщим это определение до $\Pi_\sigma$ для произвольного $\sigma \in \Sigma_+$. Обозначим $M_\sigma \subseteq N$ – тех агентов, которые присутствуют в последовательности индексов $\sigma \in \Sigma_+$. Тогда для каждой $\sigma \in \Sigma_+$ определим $\Pi_\sigma = \bigcap\limits_{j \in M_\sigma} \Pi_j$.

Выше мы отмечали, что заданная последовательность простых информационных воздействий $\Pi$ однозначным образом формирует некоторую структуру информированности $I_\Pi$. Это утверждение позволяет сделать вывод о том, что если какие-либо два агента (реальных или фантомных) $\lambda$ и $\mu$ видели одну и ту же последовательность сообщений, т. е. $\Pi_\lambda = \Pi_\mu$, то в их сознании сформируется одна и та же структура информированности, т. е. $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$ для любого $i \in N$. Это есть определение одинаковой информированности агентов $\lambda$ и $\mu$ (см. раздел 2.2). Сформулируем это как утверждение.

Утверждение 2.12.2. Пусть $\lambda, \mu \in \Sigma_+$. Тогда если $\Pi_\lambda = \Pi_\mu$, то агенты $\lambda$ и $\mu$ одинаково информированы, (т. е. $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$ для любого $i \in N$).

Обратное в общем случае неверно, т.к. некоторые сообщения могут не изменять информированность. Приведем пример.

Пример 2.12.1. Пусть $N = \{1, 2\}$, $s_1 = \{1, 2\}[5]$, $s_2 = \{1\}[5]$. Структура информированности тривиальная, все элементы в ней равны одному и тому же значению 5, т. е. $\theta_\sigma = 5\ \forall\ \sigma \in \Sigma_+$. Поэтому имеем, что $I_{1i} = I_{2i}\ \forall\ i \in N$, т. е. агенты 1 и 2 одинаково информированы. Но в то же время $\Pi = \Pi_1 = \{s_1, s_2\} \neq \Pi_2 = \{s_1, \varnothing\}$. ●

Если $M_\lambda = M_\mu$, то в силу определения $\Pi_\lambda = \Pi_\mu$, а значит, агенты $\lambda$ и $\mu$ одинаково информированы. А пример 2.12.1 демонстрирует, что утверждение ($M_\lambda \neq M_\mu \Rightarrow$ агенты $\lambda$ и $\mu$ не являются одинаково информированными) в общем случае не имеет места. Но верно следующее

Утверждение 2.12.3. Пусть $\lambda, \mu \in \Sigma_+$. Если $M_\lambda \neq M_\mu$, то существует такая последовательность простых сообщений $\Pi$, при которой агенты $\lambda$ и $\mu$ не будут одинаково информированными.

Доказательство. $M_\lambda \neq M_\mu$ означает, что $\exists\ i \in N$: $i \notin M_\lambda \cap M_\mu$. Пусть для определенности $i \in M_\lambda$, но $i \notin M_\mu$. Тогда рассмотрим следующую последовательность простых сообщений $\Pi = \{s_1, s_2\}$, где $s_1 = N[\theta_1]$, $s_2 = M_\lambda[\theta_2]$, причем $\theta_1 \neq \theta_2$. В этом случае $\theta_{\lambda i} = \theta_2$, а $\theta_{\mu i} = \theta_1$. А это означает, что $I_{\lambda i} \neq I_{\mu i}$, т. е. агенты $\lambda$ и $\mu$ не являются одинаково информированными. ●

Можно немного конкретизировать это утверждение, показав, что при определенных условиях сообщения, которые «видит» агент $\lambda$, но не «видит» агент $\mu$, могут сделать их неодинаково информированными. Самое простое – потребовать, чтобы во всех сообщениях все значения неопределенного параметра $\theta_i$ были попарно различны. Но мы немного ослабим это требование.

Утверждение 2.12.4. Пусть $\lambda$, $\mu \in \Sigma_+$. Пусть, далее, $\exists\, s_i = G_i[\theta_i]$: $M_\lambda \subseteq G_i$, $M_\mu \not\subset G_i$ и $\neg\exists\, s_k = G_k[\theta_k]$: $M_\mu \cup G_i \subseteq G_k$ и $\theta_k = \theta_i$. Тогда агенты $\lambda$ и $\mu$ не являются одинаково информированными.

Доказательство. Обозначим $G_i \setminus M_\lambda = P$. Тогда возьмем произвольного агента $\sigma \in \Sigma$ такого, что $M_\sigma = P$ (если $P = \varnothing$, то $\sigma$ – пустая последовательность). Покажем неравенство $\theta_{\lambda\lambda\sigma} \neq \theta_{\mu\lambda\sigma}$. Т.к. $M_{\lambda\lambda\sigma} = M_\lambda \cup M_\lambda \cup M_\sigma = G_i$, и мы рассматриваем только такие последовательности сообщений, когда сначала вызываются более крупные группы, а затем лишь более мелкие, то результат присваивания $\theta_{\lambda\sigma} = \theta_i$ сообщением $s_i$ останется не измененным последующими сообщениями (уже не будет вызвана группа, которая включает в себя $G_i$). Для того чтобы было $\theta_{\mu\lambda\sigma} = \theta_i$, необходимо чтобы $\exists\, s_k = G_k[\theta_k]$: $M_{\mu\lambda\sigma} \subseteq G_k$ и $\theta_k = \theta_i$. Но $M_{\mu\lambda\sigma} = M_\mu \cup M_\lambda \cup M_\sigma = M_\mu \cup G_i$, и не существование такого сообщения потребовано в условии утверждения. ●

Подытожить рассуждения можно следующим образом. Для случая простых сообщений условие $M_\lambda = M_\mu$ и только оно является гарантией того, что агенты $\lambda$ и $\mu$ окажутся одинаково информированными. Это наталкивает на формулировку еще одного определения, которое станет главной темой следующего подраздела.

**Граф миров.** Будем говорить, что агенты $\lambda \in \Sigma_+$ и $\mu \in \Sigma_+$ принадлежат одному миру (из одного мира), если они заведомо одинаково информированы при любой последовательности сообщений П.

Подмножество множества реальных и фантомных агентов $W \subseteq \Sigma_+$ назовем *миром*, если для любых $\lambda, \mu \in W$ справедливо $I_\lambda \sim I_\mu$ при любой последовательности сообщений $\Pi$.

Из утверждений 2.12.2 и 2.12.3 следует следующее

Утверждение 2.12.5. Агенты $\lambda \in \Sigma_+$ и $\mu \in \Sigma_+$ принадлежат одному миру при использовании процедуры простых сообщений тогда и только тогда, когда $M_\lambda = M_\mu$.

Для процедуры простых сообщений будем говорить, что данному миру соответствует множество $Z \subseteq N$, если $Z = M_\lambda$, где $\lambda$ – один из агентов этого мира. Удобно обозначать мир соответствующим ему множеством $Z$ и говорить, что, например, в мире $\{1, 2\}$ содержатся агенты 12, 21, 121, 212, 1212, 2121, … .

Число различных миров – число непустых подмножеств множества реальных агентов $N$, т. е. $2^n - 1$, что есть конечное число. Теперь можно говорить о конечной сложности структуры информированности, сформированной с помощью простых сообщений, т.к. легко убедиться в том, что в базисе структуры информированности может находиться лишь конечное число элементов. Для этого нужно показать, что число попарно нетождественных структур информированности конечно. Для этого сформулируем тривиальное

Утверждение 2.12.6. Если фантомные агенты $\lambda$, $\mu \in \Sigma_+$ из одного мира и $\omega(\lambda) = \omega(\mu)$ (т. е. они оканчиваются на один и тот же индекс), то $I_\lambda = I_\mu$.

Доказательство. Если агенты из одного мира, они заведомо одинаково информированы. В частности это означает, что $I_{\lambda\omega(\lambda)} = I_{\mu\omega(\mu)}$. Но в последовательностях индексов $\lambda\,\omega(\lambda)$ и $\mu\,\omega(\mu)$ последние два индекса одинаковые, и они «схлопываются» по аксиоме автоинформированности: $I_{\lambda\omega(\lambda)} = I_\lambda = I_\mu = I_{\mu\omega(\mu)}$. ●

Теперь можно ограничить сверху число попарно нетождественных структур информированности в каждом конкретном мире.

Утверждение 2.12.7. Пусть $\lambda \in \Sigma_+$, тогда среди структур информированности, соответствующим агентам из мира $M_\lambda$, попарно нетождественных найдется не больше мощности множества $M_\lambda$, которое в свою очередь не больше $n$.

Доказательство. Если агент $\sigma$ принадлежит данному миру, то по определению в записи $\sigma$ должны быть использованы все индексы из множества $M_\lambda$ и только они. В частности последний индекс в последовательности $\sigma$ может быть тоже лишь из множества $M_\lambda$, поэтому из утверждения 6 сразу вытекает справедливость утверждения 2.12.7. ●

Утверждение 2.12.8. При использовании простых сообщений формируется структура информированности $I$, которая имеет глубину $\gamma(I) \le n$ и конечный базис, количество элементов в котором ограничено сверху числом $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k = 2^{n-1} n$. При этом существует последовательность простых сообщений $\Pi$, при которой эти оценки достигаются.

Доказательство. Множество $M_\lambda$ ($\lambda \in \Sigma_+$) есть подмножество множества $N$, в котором $n$ элементов, $k$ – мощность множества $M_\lambda$. В зависимости от $\lambda \in \Sigma_+$ $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Как известно, число различных подмножеств мощности $k$ множества мощности $n$ есть $C_n^k$.

Применяя утверждение 2.12.7, получаем оценку сверху для числа элементов в базисе структуры информированности $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k$.

Покажем, что $\gamma(I) \le n$. Возьмем произвольного агента $\sigma \in \Sigma_+$, $|\sigma| = m > n$. Тогда в последовательности индексов $\sigma$ присутствует, по крайней мере, одна пара одинаковых индексов. Удалив из $\sigma$ тот индекс из этой пары, который не является последним, получим последовательность $\sigma'$, $|\sigma'| = m - 1$. При этом второй индекс из пары остался, из чего следует, что $M_\sigma = M_{\sigma'}$, т. е. агенты $\sigma$ и $\sigma'$ из одного мира. Мы не изменили последний индекс, поэтому $\omega(\sigma) = \omega(\sigma')$, но тогда $I_\sigma = I_{\sigma'}$ по утверждению 2.12.6. Итак, мы показали, что $\forall\ \sigma \in \Sigma_+$: $|\sigma| > n\ \exists\ \sigma' \in \Sigma_+$: $|\sigma'| < |\sigma|$ и $I_\sigma = I_{\sigma'}$. Следовательно $\gamma(I) \le n$.

Рассмотрим последовательность простых сообщений $\Pi = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}\}$, где $s_1 = N[\theta_0]$, $s_2 = N\backslash\{1\}[\theta_1]$, $s_3 = N\backslash\{2\}[\theta_2]$, …, $s_{n+1} = N \setminus \{n\}[\theta_n]$, причем все $\theta_i \in \Theta$ попарно различны. Смысл ее в том, что каждый агент отсутствовал на одном совещании, где присутствовали все остальные. Поэтому агенты из разных миров, как нетрудно убедиться, будут видеть различные последовательности сообщений. Различные $\theta_i$ взяты специально для того, чтобы обеспечить условия утверждения 2.12.4, из которого сразу следует, что в этом примере любые два агента из различных миров не будут одинаково информированными. А это значит, что для структуры информированности, сформированной этой последовательностью простых сообщений, указанные оценки будут достигаться. ●

Ограниченное число элементов в базисе, а главное, ограниченное количество миров, «внутри» которых агенты одинаково информированы, позволяет именно для структур информированности, полученных с помощью механизма простых сообщений, ввести граф миров.

Сначала рассмотрим, как одинаковая информированность отражается на графе рефлексивной игры. Вершины графа будем отождествлять с агентами $\sigma \in \Sigma_+$, чьи структуры информированности $I_\sigma$ попали в базис общей структуры информированности $I$. Исходящая из агента дуга в графе рефлексивной игры обозначает адекватную информированность о нем, поэтому, если от некого агента $\sigma$ идет дуга к одному агенту из группы одинаково информированных, то от агента $\sigma$ идет дуга и ко всем остальным из этой группы. Это обстоятельство наталкивает на мысль о том, чтобы объединить в графе агентов, которые заведомо будут одинаково информированы. Гарантией этого, как мы знаем, является принадлежность агентов одному миру. Поэтому введем *граф миров*. Его вершинам соответствуют различные миры. Дуги в графе проводятся по следующему правилу. Если данному миру соответствует множество $Z \subseteq N$ (напомним, что $Z = M_\lambda$, где $\lambda$ – один из агентов данного мира) мощности $m \leq n$, то в него входят $(n - m)$ дуг от миров, которым соответствуют множества $Z \cup \{j\}$, $j \in N \setminus Z$. В качестве примера изобразим граф миров для $n = 2$ и $n = 3$ (см. Рис. 31).

Граф миров имеет такое же свойство, что и граф рефлексивной игры, в том плане, что если существует путь от одного мира к другому, то агенты второго мира адекватно информированы об агентах из первого мира. Вспомним, что агенты из одного мира одинаково информированы. Тогда можно сказать, что граф миров полностью отражает рефлексивную информированность агентов друг о друге, задаваемую структурой информированности, полученной с помощью механизма простых сообщений.

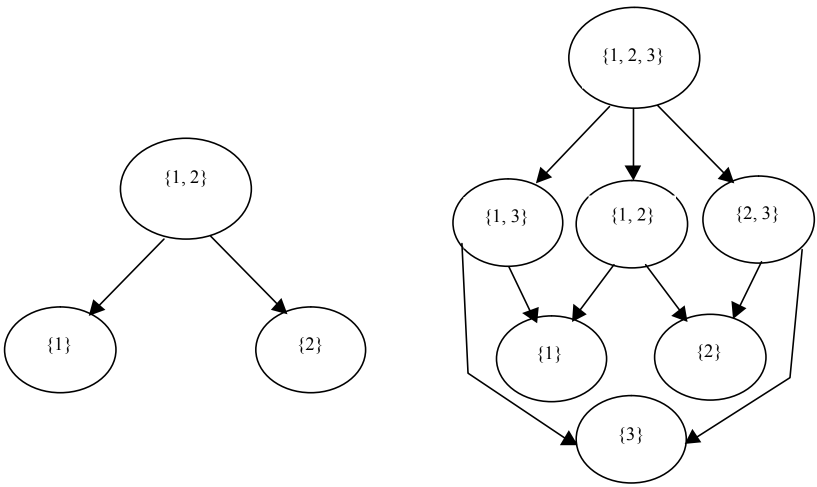


Рис. 31. Граф миров для двух (слева) и трех (справа) агентов

Очевидно, что $\sigma \in \tilde{G} \Leftrightarrow M_\sigma \subseteq G$. Тогда можно сказать (см. определение простого сообщения), что, если произошло присваивание

$\theta_\sigma = \theta$ для агента $\sigma$, то оно произошло и для всех агентов из его мира, а также для всех агентов из миров, в которые на графе существует путь от данного мира. Поэтому можно на графе миров помечать в вершине значение неопределенного параметра $\theta \in \Theta$, и оно будет распространяться на весь этот мир, т. е. $\theta_\tau = \theta$ длялюбого $\tau$ из этого мира.

Мы не случайно изобразили граф таким образом, что «большие» миры находятся выше более «мелких». Дело в том, что тут возможна следующая наглядная интерпретация. Будем различные значения неопределенного параметра $\theta \in \Theta$ связывать с различными цветами; будем «закрашивать» этими цветами вершины графа миров. Если вершина покрашена в какой-то цвет, то это означает, что для каждого агента $\sigma$ из этого мира $\theta_\sigma = \theta$, где $\theta$ – значение неопределенного параметра, соответствующее данному цвету. В виду вышесказанного можно представить, что воздействием $s \equiv G[\theta]$ центр на графе «капает каплю краски» цвета $\theta$ в мир, которому соответствует множество $G \subseteq N$. Далее эта капля окрашивает в цвет $\theta$ этот мир и, «стекая вниз по стрелкам», все миры, в которые существует из данного путь (т.к. для агентов $\sigma$ из этих миров также $M_\sigma \subseteq G$). Если данная вершина уже была ранее окрашена, то новое воздействие перекрашивает ее в новый цвет. В конечном итоге после последнего информационного воздействия перед нами будет «раскрашенный» граф миров.

На примере для трех агентов проиллюстрируем процесс раскраски графа миров.

<u>Пример 2.12.2.</u> $N = \{1, 2, 3\}$, $s_1 = \{1, 2, 3\}$[«нет штриховки»], $s_2 = \{1, 2\}$[«диагональная штриховка»], $s_3 = \{1, 3\}$[«горизонтальная штриховка»]. На Рис. 32 изображены графы миров после сообщений $s_2$ и $s_3$.

По «раскрашенному» графу миров можно однозначно восстановить структуру информированности $I$, т. е. все элементы $\theta_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$. Для этого нужно найти в графе мир, которому принадлежит конкретный агент $\sigma \in \Sigma_+$, и посмотреть, в какой цвет окрашена эта вершина.

Заметим, что при желании центра, он может создать любую раскраску графа миров. Потому что для того, чтобы данный мир был выкрашен в нужный цвет, достаточно «капнуть на него краской этого цвета», что на формальном языке означает наличие в последовательности сообщений $\Pi$ сообщения $s_i = Z[\theta]$, где $Z$ – соответствующее этому миру множество агентов, а $\theta$ – нужный цвет. Если, например, последовательно вызывать все группы агентов (непустые подмножества $N$), причем придерживаясь оговоренного порядка (более мелкие после более крупных), то можно добиться любой раскраски миров (в частном случае, чтобы каждый мир был выкрашен в свой уникальный цвет).

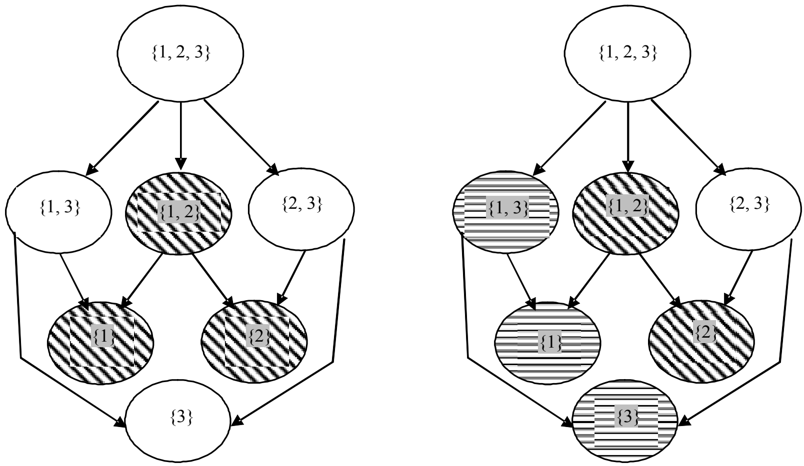


Рис. 32. Граф миров после $s_2$ (слева) и после $s_3$ (справа)

«Раскрашенный» граф является достаточно удобным отражением взаимной информированности. И даже если он в некоторых случаях содержит избыточное описание (например, если было лишь одно сообщение $s_1 = N[\theta]$), универсальность делает его привлекательным.

При помощи простых сообщений можно сформировать лишь довольно простые структуры информированности. Сформулируем это в виде утверждения.

<u>Утверждение 2.12.9.</u> Структура информированности $I$ может быть сформирована с помощью механизма простых сообщений тогда и только тогда, когда для нее выполняется $\forall\ \lambda, \mu \in \Sigma_+$ $M_\lambda = M_\mu \Rightarrow \theta_\lambda = \theta_\mu$.

Доказательство. Необходимость уже была обсуждена, т.к. при использовании механизма простых сообщений агенты из одного мира имеют одинаковые представления о значении неопределенного параметра. Для того чтобы показать достаточность, можно предъявить последовательность простых сообщений $\Pi$, реализующую структуру информированности $I_\Pi$ (будем ее элементы $\theta'_\sigma$ помечать штрихами), которая совпала бы с $I$ (ее элементы $\theta_\sigma$ – без штрихов). Будем вызывать последовательно (более мелкие после более крупных) все непустые подмножества реальных агентов (всего $2^n - 1$ таких подмножеств), иными словами, рассмотрим следующую последовательность сообщений $\Pi$: $s_1 = N[\theta_{1\ldots n}]$, $s_2 = N\backslash\{1\}[\theta_{2\ldots n}]$, $s_3 = N\backslash\{2\}[\theta_{13\ldots n}]$, …, $s_{n+1} = N \setminus \{n\}[\theta_{1\ldots n-1}]$, $s_{n+2} = N \setminus \{1, 2\}[\theta_{3\ldots n}]$, …, $s_{\frac{n^2+n+2}{2}} = N \setminus \{n-1, n\}[\theta_{1\ldots n-2}]$, …, $s_{2^n - n} = \{1\}[\theta_1]$, …, $s_{2^n - 1} = \{n\}[\theta_n]$.

Используя цветовую интерпретацию, можно сказать, что, двигаясь вниз по графу миров, мы в каждую вершину-мир капаем краску нужного цвета, которая, «стекая вниз», не может перекрасить вершины, находящиеся выше. Таким образом, данная последовательность сообщений каждый мир выкрасит в такой же цвет, в какой этот мир выкрашен в структуре $I$ (из условия утверждения следует, что в структуре $I$ агенты из одного мира имеют одинаковые представления о значении неопределенного параметра). Иными словами, $\forall\ \sigma \in \Sigma_+\ \theta'_\sigma = \theta_\sigma$, т. е. $I = I_\Pi$. ●

Два примера, иллюстрирующие, когда можно добиться нужной структуры информированности с помощью использования механизма простых сообщений, а когда нет, приведены в разделе 4.4. ниже.

Итак, в настоящем разделе описана процедура формирования структуры информированности в рефлексивной игре при помощи простых сообщений центра о значении неопределенного параметра. Сформулированы необходимые и достаточные условия на структуру информированности, при которых она может быть сформирована посредством простых сообщений. Кроме этого, разработан и описан удобный способ представления взаимной информированности – граф миров.

Естественным продолжением исследований в данном направлении является выделение более сложных типов сообщений, позволяющих более полно описывать реализующиеся на практике информационные воздействия.

## 2.13. МНОЖЕСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Как уже отмечалось ранее, почти везде в настоящей работе рассматриваются точечные структуры информированности, описывающие ситуацию точного (хотя, возможно, ошибочного) знания агентами значения неопределенного параметра, представления о нем оппонентов, представления о представлении и т.д. В этом и следующих двух разделах описана более сложная модель информированности, в которой представления агентов являются более сложными [169].

Для начала сформулируем задачу, которая могла бы встретиться[30] на олимпиаде по математике для школьников.

*Условие задачи*. Трое друзей играют в игру со следующими правилами. Третий задумывает два (возможно, совпадающих) целых числа в промежутке от 1 до 9 включительно и сообщает первому сумму этих чисел, а второму – их произведение. Затем третий спрашивает: «какие числа задуманы?» Первый и второй должны назвать эти числа, либо ответить «не знаю» (отвечают они одновременно и не обмениваясь какой-либо информацией).

Оба ответили на вопрос одинаково: «не знаю». Третий повторил вопрос: какие числа задуманы? Первый и второй, подумав, опять ответили: «не знаю». Третий опять повторил вопрос и получил тот же ответ. Так повторялось семь раз, а на восьмой первый назвал задуманные числа.

*Вопрос*: какие числа были задуманы?

Эта *задача* (в дальнейшем для ее обозначения будем употреблять курсив) послужит для иллюстрации вводимых по ходу изложения материала настоящего и последующего разделов понятий и конструкций.

Ясно, что для ответа на вопрос *задачи* необходимо описать, как изменялась информированность первого и второго игроков (в частности, каким образом первый игрок от неполной информированности о ситуации – ведь он знал лишь сумму чисел – пришел к полной информированности). Для этого, в свою очередь, необходимо описать эту информированность (в том числе ее рефлексивную компоненту – информированность об информированности оппонента), а

[30] Если и встретилась, то авторам это не известно.

также связь между информированностью и ответами игроков. Принципиальная новизна (по сравнению с предыдущими разделами настоящей главы) состоит в рассмотрении множественной структуры информированности, позволяющей моделировать динамику – см. раздел 2.14. Отметим, что альтернативным подходом к моделированию ситуаций с неполной информированностью является подход в русле байесовых игр, подробно изложенный, например, в [186, 187].

**Структура информированности**. Опишем структуру информированности агентов в ситуации неполной информированности. Сначала приведем формальное описание – в терминах множеств, их элементов, отображений. Затем поясним введенные понятия на примерах, обращаясь к *задаче*.

Пусть в ситуации участвует $n$ субъектов, будем их называть *реальными агентами*. Введем следующие понятия и множества (множества далее будем считать конечными):

$\Theta$ – множество состояний природы;

$A_i$ – множество возможных экземпляров $i$-го агента, $i \in N = \{1, ..., n\}$; ровно один из них является реальным, прочие являются *фантомными агентами*[31];

$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ – множество всех агентов;

$\Omega \subset \Theta \times A_1 \times \ldots \times A_n$ – множество *возможных миров*.

В каждом возможном мире $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ имеет место определенное состояние природы $\omega_0 \in \Theta$ и определенные экземпляры $\omega_i \in A_i$ каждого агента. Будем говорить, что агент $\omega_i$ принадлежит миру $\omega$ или входит в мир $\omega$.

$\eta$ – *функция информированности* агента, которая каждому агенту $a \in A$ ставит в соответствие множество миров $\eta(a) \subseteq \Omega$, которые агент считает возможными в силу своей информированности.

$\omega^* \in \Omega$ – *реальный мир*. Один из возможных миров является реальным, т. е. характеризуется тем состоянием природы $\omega_0^*$ и теми агентами $\omega_i^*$, которые существуют на самом деле.

Входящие в реальный мир агенты являются реальными, прочие экземпляры агентов являются фантомными. Будем считать, что выполнены следующее условия.

[31] Здесь и далее экземпляры агента будем, как правило, также называть агентами.

**Условие 1 (идентичности агента)**. $\forall i \in N$, $\forall a_i \in A_i$, $\forall \omega \in \eta(a_i)$ имеет место $\omega_i = a_i$, т. е. каждый агент входит во все миры, которые он считает возможными.

Далее, для каждого мира $\omega$ следующим образом определим множество миров и агентов $I(\omega)$, *связанных с миром* $\omega$.

Мир $\omega'$ *связан* с миром $\omega^1$, если существуют конечные последовательности миров $\omega^2, \ldots, \omega^m$ и агентов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ такие, что

$$a_{i_1} = \omega_{i_k}^k,\ k = 1,\ldots,m,\ \omega^{k+1} \in \eta(a_{i_k}),\ k = 1,\ldots,m-1,\ \omega' \in \eta(a_{i_m}).$$

Агент связан с миром $\omega'$, если он входит в мир, связанный с миром $\omega'$. Понятие миров и агентов, связанных с данным миром, позволяет определить второе условие.

**Условие 2 (единства мира).** $\omega \in I(\omega^*)$, $a \in I(\omega^*)$ для любого мира $\omega \in \Omega$ и любого агента $a \in A$, т. е. каждый мир и каждый агент связан с реальным миром.

Назовем (*множественной*) *структурой информированности* набор $(\Theta, A_1, \ldots, A_n, \Omega, \omega^*, \eta(\cdot))$, где $\Omega \subset \Theta \times A_1 \times \ldots \times A_n$, $\omega^* \in \Omega$, $\eta: A_1 \times \ldots \times A_n \to 2^\Omega$ и выполнены условия идентичности агента и единства мира (здесь через $2^\Omega$ обозначено множество всех подмножеств $\Omega$).

Выше в настоящей главе (за исключением раздела 2.12) рассматривалась *точечная* структура информированности, в которой каждый агент считает возможным лишь один мир, т. е. для каждого $a \in A$ множество $\eta(a)$ состоит ровно из одного элемента.

Назовем структуру информированности *правильной*, если для любого агента существует хотя бы один мир, который агент считает возможным: $\forall\ a \in A \quad \eta(a) \neq \varnothing$.

Назовем структуру информированности *регулярной*, если агент считает возможными все миры, в которые входит: $\forall\ \omega \in \Omega$, $\forall\ i \in N$ $\omega \in \eta(\omega_i)$.

Иначе говоря, правильность означает следующее: нет агента, который находится в полностью неопределенной ситуации. Регулярность же означает следующее: нет агента, который заблуждается настолько, что в его сознании вообще нет мира, в который он входит.

Нетрудно показать, что каждая регулярная структура информированности является правильной. Действительно возьмем произвольного агента. Из условия единства мира следует существование мира, в который входит данный агент; из условия регулярности следует, что этот мир является для агента возможным. В силу произвольности агента это доказывает правильность структуры.

**Граф структуры информированности**. Структуру информированности можно наглядно изображать в виде ориентированного графа с вершинами двух типов – миры (прямоугольники) и агенты (круги), реальный мир выделен особо. Стрелка от агента к миру означает, что данный агент входит в данный мир. Стрелка от мира к агенту означает, что данный агент считает данный мир возможным. Двойная стрелка является сокращенным обозначением двух стрелок – от агента к миру и от мира к агенту. Легко видеть, что для правильных структур информированности к каждому агенту идет хотя бы одна стрелка, а для регулярных все стрелки являются двойными.

Обратимся к *задаче* и приведем пример структуры информированности.

<u>Пример 2.13.1.</u> Пусть задумана пара чисел (6, 6). Тогда структура информированности имеет вид, изображенный на Рис. 33.

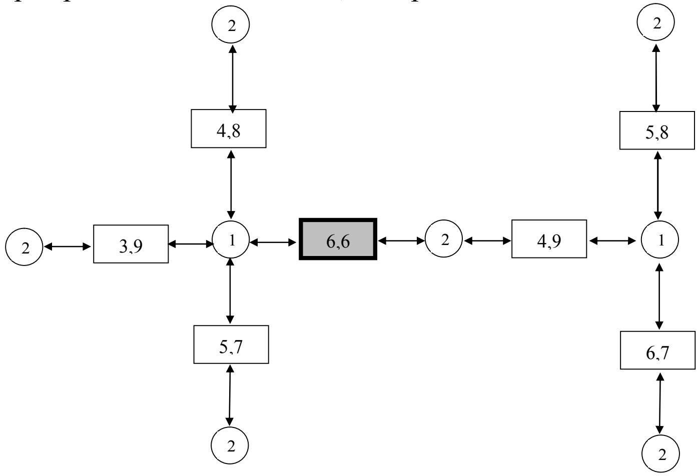


Рис. 33. Задумана пара (6, 6)

Каждый круг отмечен индексом $i \in N = \{1, 2\}$, что означает, что данный агент является экземпляром $i$-го агента. Каждый прямоугольник отмечен парой задуманных чисел. Поскольку в реальности задумана пара (6, 6), соответствующая вершина затемнена (если бы была задумана любая другая из отмеченных на Рис. 33 пар, рисунок остался бы таким же с точностью до маркировки реального мира).

Реальный 2-ой агент знает произведение задуманных чисел 36, поэтому наряду с истинной парой (6,6) он считает возможной пару (4,9). Реальный первый агент знает сумму чисел 12, поэтому он считает возможными пары (3,9), (4,8), (5,7), (6,6).

В мире, где была задумана пара (4,9), 1-й (фантомный) агент считает также возможными пары (5,8) и (6,7).

Для мира, в котором задумана одна из пар (3,9), (4,8), (5,7), (5,8), (6,7), 2-й агент знает эту пару (поскольку она однозначно определяется на основе известного ему произведения задуманных чисел). •

<u>Пример 2.13.2.</u> Пусть задумана пара чисел (4, 4). Тогда структура информированности имеет вид, изображенный на Рис. 34. В этом нетрудно убедиться, последовательно перебирая все пары чисел с данными суммами и произведениями.

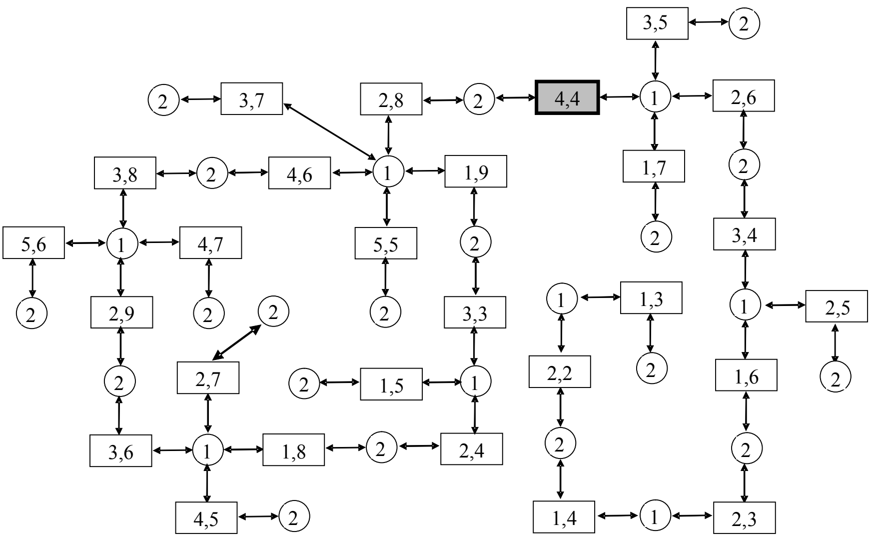


Рис. 34. Задумана пара (4,4)

**Различные аспекты информированности**. В терминах структуры информированности можно формализовать различные аспекты информированности агентов. В рамках данной работы остановимся на трех из них. Рассмотрим $i$-го и $j$-го агентов в мире $\omega$.

**Одинаковая информированность агентов.** Будем называть агентов *одинаково информированными*, если совпадают множества миров, которые они считают возможными: $\eta(\omega_i) = \eta(\omega_j)$.

**Адекватная информированность одного агента о другом.** У $i$-го агента существует множество миров, которые он считает возможными; в каждом из этих миров существует свой экземпляр $j$-го агента. Эти экземпляры могут совпадать либо не совпадать друг с другом и с $j$-м агентом. Будем говорить, что $i$-й агент *адекватно информирован* о $j$-м агенте, если такое совпадение имеет место:

$$\forall\ \xi \in \eta(\omega_i)\ \ \xi_j = \omega_j.$$

**Б*о*льшая либо меньшая информированность одного агента по сравнению с другим.** Понятно, что наиболее информированным (в данном мире) агентом является тот, для которого единственным возможным миром является данный – если такой агент существует. В более сложных случаях не всегда можно сравнивать агентов по критерию их большей информированности. Однако естественно считать, что $i$-й агент *более информирован*, чем $j$-й агент, если выполнены следующие два условия: $\omega \in \eta(\omega_i)$ ($i$-й агент считает возможным мир, в который входит); $\eta(\omega_i) \subset \eta(\omega_j)$ (множество возможных миров $j$-го агента шире, т. е. больше неопределенность).

**Информационное равновесие**. Если наряду со структурой информированности (характеризующей информированность агентов) заданы целевые функции (характеризующие интересы агентов) и их возможные действия, то можно задаться традиционным для теории игр (см. выше) вопросом: какие действия выберут агенты?

Пусть $\theta \in \Theta$ – состояние природы, а $x_i \in X_i$, – действие, выбираемое $i$-м агентом. Действия выбираются агентами одновременно и независимо, т. е. рассматривается игра в нормальной форме. Пусть, далее, $f_i(\theta, x_1, ..., x_n)$, $i \in N$, – целевые функции агентов и структура информированности является правильной[32].

Тогда назовем *информационным равновесием* набор функций

$$\chi_i\colon A_i \to X_i,\ i \in N,$$

[32] Если структура не является правильной, то существует агент, который не считает возможным ни один из миров. Моделирование действий такого агента выходит за рамки данной работы.

таких, что

$$\chi_i(a_i) \in \operatorname{Arg}\max_{x \in X_i} \min_{\omega \in \eta(a_i)} f_i(\omega_0, \chi_1(\omega_1), ..., \chi_{i-1}(\omega_{i-1}), x, \chi_{i+1}(\omega_{i+1}) ..., \chi_n(\omega_n)).$$

Это означает, что каждый агент максимизирует свой наихудший результат во всех мирах, которые он считает возможными.

Отметим, что это определение информационного равновесия является обобщением информационного равновесия в случае точечной структуры информированности (см. раздел 2.3).

Для иллюстрации понятия информационного равновесия вновь обратимся к *задаче*. В ней у каждого из агентов существует возможность либо назвать задуманные числа, либо сказать «не знаю» (что будем обозначать прочерком: $\{–\}$). Таким образом, множества возможных действий обоих агентов имеет вид

$$X_1 = X_2 = \Theta \cup \{–\},$$

где $\Theta = \{(a,b) \mid a \in \{1,\ldots,9\},\ b \in \{1,\ldots,9\}\}$.

Целевые функции агентов (в данном случае они совпадают) определим следующим образом (здесь $i = 1, 2$):

$$f_i(\theta, x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_1 = x_2 = \theta) \text{ или } (x_1 = \theta,\ x_2 = \{–\}) \text{ или } (x_1 = \{–\},\ x_2 = \theta); \\ 0, \text{ если } x_1 = x_2 = \{–\}; \\ -1, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Иными словами, агенты получают выигрыш 1 в случае, если хотя бы один из них верно назвал задуманные числа, а второй при этом не ошибся. Если оба сказали «не знаю», то каждый получает выигрыш 0. Если хотя бы один агент неверно назвал задуманные числа, оба получают выигрыш –1.

Тогда информационное равновесие имеет следующий вид: агент сообщает пару чисел в том и только том случае, когда он считает возможным ровно один мир (т. е. точно знает, какая пара чисел задумана). В противном случае он говорит «не знаю».

Перейдем теперь к описанию трансформации структур информированности.

## 2.14. ТРАНСФОРМАЦИЯ СТРУКТУР ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Структура информированности представляет собой своего рода «моментальный снимок» взаимной информированности агентов.

Ясно, что с течением времени информированность может меняться. Выше описаны модели изменения структуры информированности под влиянием сообщений (см. раздел 2.12), либо наблюдения агентами тех или иных результатов игры. Однако в этих моделях допускалась возможность достаточно радикального отказа агентов от имеющейся информированности в пользу новой. По сути, агенты при этом предполагались в большой степени забывчивыми либо неуверенными в своей информированности.

В данном разделе мы опишем трансформацию структуры информированности игры вследствие наблюдения агентами ее результатов. При этом считается, что сохраняется вся имеющаяся у агентов информированность, не противоречащая новым наблюдениям. Напомним, что мы рассматриваем игру в нормальной форме, т. е. ходы выбираются агентами одновременно и независимо. При этом если в результате игры информированность агентов меняется, то каждую следующую игру (если она состоится) агенты разыграют с новой информированностью независимо от предыдущих и последующих.

Пусть у $i$-го реального агента имеется являющаяся общим знанием *функция наблюдения* $w_i = w_i(\theta, x_1, ..., x_n)$ (подробнее о функции наблюдения в точечном случае см. в разделах 2.7 и 2.13). Смысл ее следующий: если в мире, в который входит агент[33] $a_i \in A_i$, имеет место состояние природы $\theta$ и агенты выбрали действия $(x_1, ..., x_n)$, то агент $a_i$ наблюдает значение $w_i \in W_i$, где $W_i$ – множество возможных наблюдений экземпляров $i$-го агента.

Суть трансформации структуры информированности состоит (вкратце) в следующем: для каждого агента $a \in A$ (как реального, так и фантомного), модифицируется множество миров $\eta(a)$, которые он считает возможными. Модификация состоит в том, что исключаются те миры, для которых значение функции наблюдения принимает значение, отличное от наблюдаемого агентом. При этом может оказаться, что агенту поступают разные «сигналы» (разные значения функции наблюдения) из разных миров. В этом случае агент «исчезает», и вместо него «возникает» несколько агентов, каждый со своей информированностью (см. Рис. 35, в прямоугольниках приведены значения функции наблюдения).

---

[33] Напомним, что в каждый мир входит ровно один экземпляр $i$-го агента, $i \in N$.

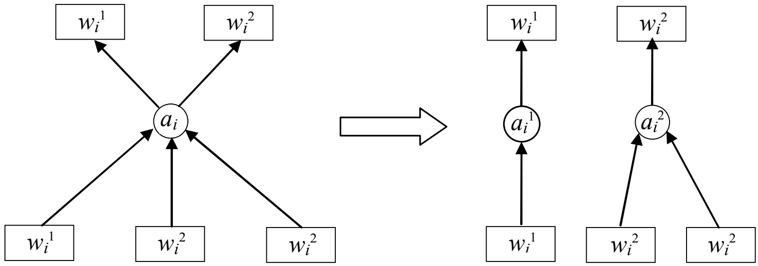


Рис. 35. При трансформации структуры информированности количество агентов может меняться

Теперь опишем правило трансформации структуры информированности подробнее – в предположении, что существует единственное информационное равновесие $\chi$, в результате реализации которого функция наблюдения каждого агента принимает определенное значение в каждом мире $\omega$: $w_i = w_i(\omega_0, \chi_1(\omega_1),..., \chi_n(\omega_n))$.

Тогда значение функции наблюдения зависит лишь от мира $\omega$, т. е. $w_i = w_i(\omega)$.

Пусть имеется агент $a_i \in A_i$, $i \in N$. Опишем процедуру трансформации его информированности. Будем использовать обозначение

$$\mathrm{H}(a_i) = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = a_i\}$$

для множества миров, в которые входит агент $a_i$. Далее, обозначим за $M = M(a_i)$ количество попарно-различных значений функции наблюдения $w_i$ на мирах из множества Н, а сами эти значения обозначим $w_i^1, w_i^2, ..., w_i^M$.

Тогда в результате трансформации вместо агента $a_i$ образуется (т. е. добавляется во множество $A_i$) $M$ агентов, обозначим их $a_i^1, a_i^2, ..., a_i^M$, причем связи этих агентов с мирами задаются следующими двумя соотношениями для каждого $k \in \{1, \ldots, M\}$:

$$\mathrm{H}(a_i^k) := \{\omega \in \mathrm{H}(a_i) \mid w_i(\omega) = w_i^k\};$$

$$\eta(a_i^k) := \{\omega \in \eta(a_i) \mid w_i(\omega) = w_i^k\}.$$

Агент $a_i$ при этом удаляется из множества $A_i$.

После того, как вышеописанная процедура проведена для всех агентов $a \in A$, из множеств $\Omega$ и $A$ удаляются все миры и агенты, не связанные с реальным миром. Это завершает изменение структуры информированности в результате наблюдения агентами результатов взаимодействия.

Для регулярных структур информированности множества Η $(a_i)$ и $\eta$ $(a_i)$ совпадают, поэтому совпадают и множества $\mathrm{H}(a_i^k)$ и $\eta(a_i^k)$. Отсюда вытекает, что при трансформации свойство регулярности структуры информированности сохраняется, т. е. регулярная структура трансформируется в регулярную структуру (см. Рис. 36).

Обратимся к *задаче* (см. раздел 2.13) и рассмотрим продолжение примера 2.13.1 (см. Рис. 33). Функции наблюдения обоих агентов таковы: агент узнает сообщение оппонента и свой выигрыш. Как было показано выше, агент называет конкретную пару чисел лишь тогда, когда точно знает ее (т. е. лишь один мир считает возможным). Поэтому после первого вопроса и ответов структура информированности примет вид на Рис. 37 – удалены миры, в которых один из агентов называл конкретную пару чисел. Видно, что теперь 1-й агент точно знает, какие числа задуманы.

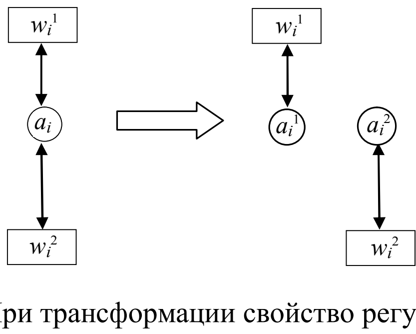


Рис. 36. При трансформации свойство регулярности структуры информированности сохраняется

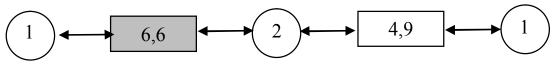


Рис. 37. После первого вопроса и ответов (задумана пара (6, 6))

Рассмотрим теперь продолжение примера 2.13.2 (см. Рис. 34). Здесь после первого вопроса и ответов структура информированности примет вид на Рис. 38.

Как нетрудно убедиться, для достижения полной информированности одного из агентов потребуется ровно семь вопросов и ответов – см. Рис. 39.

Тем самым, мы ответили на вопрос *задачи* – была задумана пара (4, 4).

Строго говоря, для исчерпывающего ответа надо рассмотреть все возможные варианты задуманных пар чисел. Однако нетрудно убедиться, что лишь для одного из них – (4, 4) – ровно через семь вопросов и ответов достигается полная информированность.

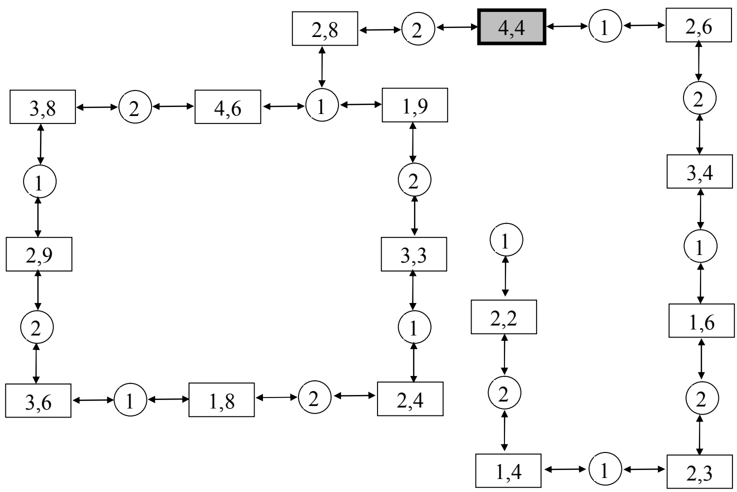


Рис. 38. После первого вопроса и ответов (задумана пара (4, 4))

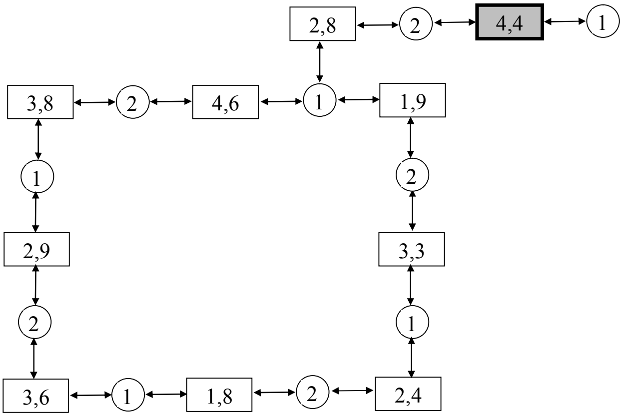


Рис. 39. После 7-го вопроса и ответов (задумана пара (4, 4))

В разделах 2.13.-2.14 рассмотрена структура информированности агентов в рефлексивной игре и показано, как она меняется в результате наблюдения агентами результатов своих действий. Перспективным направлением дальнейших исследований является моделирование изменения информированности в результате сообщений внешних по отношению к множеству агентов субъектов (в том числе с целью осуществления информационного управления), коммуникаций агентов между собой и пр.

Выше было показано, что свойство регулярности структуры информированности при ее трансформации сохраняется. Представляет интерес исследование и других свойств структуры информированности (а также информационного равновесия) и условий сохранения этих свойств при трансформации.

## 2.15. СОГЛАСОВАННОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Настоящий раздел посвящен модели согласованного информационного управления, когда агенты осведомлены о факте осуществления центром управления и, тем не менее, доверяют его сообщениям. Выявлены условия, при которых такое управление существует, доказаны некоторые его свойства.

Выше задача информационного управления исследовалась в предположении, что управляющий орган – центр – может формировать у агентов любую структуру информированности (из заданного класса структур). Наиболее простым случаем выполнения этого предположения является полное доверие агента центру, т. е. принятие всех сообщений центра в качестве истинных (см. обзоры процедур принятия решений на основе сообщаемой информации в [16, 97, 142, 257]). Управление в такой ситуации назовем *несогласованным информационным управлением* – управление осуществляется, однако агент его не осознает, т. е. не осознает тот факт, что центр сообщает ту или иную информацию в собственных интересах.

Ниже описывается модель *согласованного информационного управления*, когда агенты осведомлены о факте осуществления центром управления и, тем не менее, доверяют сообщениям центра [170]. Ясно, что для реализации такого типа информационного управления требуется выполнение достаточно специфических условий (см. ниже).

**Несогласованное информационное управление**. В данном подразделе мы на примере рассмотрим простейшую схему несогласованного информационного управления.

Пример 2.15.1. Пусть имеется агент, целевая функция (функция полезности) которого имеет следующий вид: $f(\theta, x) = \theta x - \frac{x^2}{2}$, где $\theta$ – неопределенный параметр – случайная величина, принимающая каждое значение из множества $\Theta = \{1, 3, 7\}$ с одинаковой вероятностью 1/3; $x \in [0; +\infty)$ – действие, свободно выбираемое агентом. Одна из возможных экономических интерпретаций такова: агент является производителей некоторого товара, рыночная цена $\theta$ на который заранее не известна (является случайной величиной). Затраты агента на производство $x$ единиц товара составляют $x^2 / 2$. Тогда целевая функция $f(\theta, x)$ – это прибыль агента, математическое ожидание которой (обозначим это математическое ожидание через $E_\theta f(\theta, x)$) он стремится максимизировать.

Поскольку функция $f(\theta, x)$ линейна по $\theta$, для ее математического ожидания справедливо следующее соотношение:

(1) $E_{\theta} f(\theta, x) = E\theta \cdot x - \frac{x^2}{2}$,

где через $E\ \theta$ обозначено математическое ожидание случайной величины $\theta$. Находя максимум функции (1), агент может определить свое оптимальное действие: $x^* = E\theta = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{11}{3}$.

Пусть теперь в ситуации присутствует также центр, осуществляющий информационное управление, сообщая множество значений неопределенного параметра (считаем, что центр информирован о значении $\theta$, а агент относится к сообщениям центра с полным доверием). Например, если центр сообщит агенту множество $\{1, 3\}$ (т. е. значение $\theta = 7$ является невозможным, а вероятности значений $\theta = 1$ и $\theta = 3$, пересчитанные по формуле Байеса, равны по 1/2), то агент рассчитает свое оптимальное действие по иному:

$$x^* = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2.$$

Рассматривая последовательно все возможные сообщения центра, можно определить все действия агента, которые он выбирает в результате того или иного информационного управления – см. Табл. 2.

*Табл. 2. Сообщения центра и действия агента в примере* 2.15.1

| **Сообщения центра** | **Действия агента** |
|---|---|
| $\{1\}$ | 1 |
| $\{3\}$ | 3 |
| $\{7\}$ | 7 |
| $\{1, 3\}$ | 2 |
| $\{1, 7\}$ | 4 |
| $\{3, 7\}$ | 5 |
| $\{1, 3, 7\}$ | 11/3 |

Таким образом, центр может, путем надлежащего сообщения, добиться любого действия агента из множества $\{1, 2, 3, 11/3, 4, 5, 7\}$. Ясно, что центру следует выбрать такое сообщение, чтобы соответствующее этому сообщению действие агента было наиболее выгодным для него. ●

**Согласованное информационное управление**. В данном разделе мы рассмотрим менее выгодную для центра ситуацию, когда агент не принимает на веру любые сообщения центра. Ход мыслей такого «недоверчивого» агента примерно таков: «Центр своим сообщением пытается добиться от меня соответствующего образа действия. Но это мое действие является выгодным для центра. Является ли оно также выгодным для меня?»

В этом случае для осуществления информационного управления требуется, чтобы оно учитывало интересы как центра, так и агента. Для формализации этого требования введем в рассмотрение целевую функцию центра $F(\theta, x)$, зависящую от тех же величин $\theta$ (неопределенный параметр – случайная величина с известным распределением) и $x$ (действие агента). Сообщение центра будем обозначать $s$ и считать, что оно принадлежит фиксированному множеству возможных сообщений $S$.

Тогда стратегией центра – управлением – является выбор сообщения в зависимости от известного ему состояния природы, т. е. выбор функции $s(\theta)$. Стратегией же агента является выбор действия $x$ в зависимости от сообщения центра, т. е. выбор функции $x(s)$.

Формализуем порядок взаимодействия центра и агента (множество $\Theta$ и вероятностное распределение на нем считаем общеизвестными).

Шаг 1. Центр сообщает агенту функцию $s(\theta)$: $\Theta \to S$.

Шаг 2. Центр узнает истинное значение $\theta$.

Шаг 3. Центр сообщает значение $s \in S$.

Шаг 4. Агент выбирает действие $x = x(s)$.

Заметим, что сообщения центра интересуют агента лишь постольку, поскольку он может уточнить множество значений неопределенного параметра $\theta$, т. е. агента, получившего на шаге 3 сообщение $s$, интересует лишь множество $\{\theta \in \Theta \mid s(\theta) = s\}$. Поэтому можно считать, не ограничивая общности, что на шаге 1 центр сообщает агенту некоторое разбиение множества $\Theta$. Множество $\Theta$ будем пока считать конечным, тогда разбиение имеет вид $S = \{\Theta_1, \ldots, \Theta_m\}$, где $\Theta_1 \cup \ldots \cup \Theta_m = \Theta$, $\Theta_i \neq \varnothing$, $i \in M \in \{1, \ldots, m\}$, $\Theta_i \cap \Theta_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Множества $\Theta_i$ будем называть *частями* разбиения $S$.

На шаге 3 центр сообщает агенту одно из множеств $\Theta_i \in S$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Если агент, получив сообщение центра $\Theta_i \subset \Theta$, доверяет этому сообщению, то его оптимальное действие максимизирует условное математическое ожидание целевой функции при множестве значений $\theta$, суженном с $\Theta$ до $\Theta_i$:

(2) $X_i^* = \underset{x \in X}{\mathrm{Argmax}}\, E_{\theta \in \Theta_i} f(\theta, x), i = 1, \ldots, m.$

Обозначим множество всех оптимальных действий агента (при каком-либо сообщении центра из разбиения $S$) через $X^*$:

$$X^* = X_1^* \cup \ldots \cup X_m^*.$$

Информационное управление будет согласованным, если для любого значения $\theta \in \Theta$ центру выгодно сообщить агенту ту часть разбиения $S$, которая содержит $\theta$ (при этом агенту выгодно доверять центру). Формально это требование можно записать следующим образом:

(3) $\forall i \in M \;\; \forall \theta \in \Theta_i \;\; \forall x^* \in X_i^* \; \forall x \in X^*$ либо $x \in X_i^*$,

либо $F(\theta, x^*) \geq F(\theta, x)$.

Назовем (3) *условием согласованности*.

Если условие (3) выполнено и агент доверяет центру, то центру выгодно делать только правдивые сообщения. Если условие (3) выполнено и центр делает только правдивые сообщения, то агенту выгодно доверять центру.

Выполнение или невыполнение условия (3) обусловлено разбиением $S$ (поскольку им однозначно определяются количество частей разбиения $m$ и сами эти части $\Theta_i$, а также множества $X_i^*, i = 1, \ldots, m$). Поэтому выполнение условия (3) означает *согласованность* разбиения $S$ и, в целом, *согласованность* информационного управления на основе разбиения $S$.

Замечание. В приведенных выше рассуждениях множество $\Theta$ предполагалось конечным. В частности, в силу этого конечным было разбиение $S$. Однако нетрудно видеть, что рассуждения остаются справедливыми и для случая бесконечного множества $\Theta$. При бесконечном множестве $\Theta$ разбиение $S$ также может (хотя и не обязано) быть бесконечным: $S = \{\Theta_\alpha\}$, $\alpha \in A$, где $A$ – некоторое множество индексов. При этом, однако, необходимо потребовать, чтобы каждая часть $\Theta_\alpha$ разбиения $S$ была измеримой по Борелю, что позволяет использовать математическое ожидание для расчета оптимального действия агента.

Пример 2.15.1 (продолжение). Пусть агент не является уже таким «доверчивым», как ранее, и центру требуется осуществлять согласованное информационное управление. Пусть при этом целевая функция центра имеет следующий вид: $F(\theta, x) = \gamma\theta x - \dfrac{x^2}{2}$, где $x \geq 0$ – действие агента, $\theta$ – неопределенный параметр, принимающий с равными вероятностями (по 1/3) значения из множества $\Theta = \{1, 3, 7\}$, $\gamma > 0$ – фиксированный параметр, характеризующий близость интересов центра и агента.

Одна из возможных содержательных интерпретаций данной ситуации следующая. Центр осведомлен о рыночной ситуации, характеризующейся параметром $\theta$. Узнав значение $\theta$, центр делает сообщение агенту. При этом затраты центр и агент делят поровну, а доход – в отношении $\gamma : 1$.

Исследуем вопрос о том, при каких условиях на параметр $\gamma$ разбиение $S = \{\{1\}, \{3\}, \{7\}\}$, соответствующее сообщению центром точного значения $\theta$, является согласованным.

В данном случае $m = 3$, $\Theta_1 = \{1\}$, $\Theta_2 = \{3\}$, $\Theta_3 = \{7\}$, $X_1^* = \{1\}$, $X_2^* = \{3\}$, $X_3^* = \{7\}$, а условие согласованности (3) записывается в виде следующей системы неравенств:

$$F(1,1) \geq F(1,3) \Leftrightarrow \gamma - \frac{1}{2} \geq 3\gamma - \frac{9}{2};$$

$$F(1,1) \geq F(1,7) \Leftrightarrow \gamma - \frac{1}{2} \geq 7\gamma - \frac{49}{2};$$

$$F(3,3) \geq F(3,1) \Leftrightarrow 9\gamma - \geq 3\gamma - \frac{1}{2};$$

$$F(3,3) \geq F(3,7) \Leftrightarrow 9\gamma - \frac{9}{2} \geq 21\gamma - \frac{49}{2};$$

$$F(7,7) \geq F(7,1) \Leftrightarrow 49\gamma - \frac{49}{2} \geq 7\gamma - \frac{1}{2};$$

$$F(7,7) \geq F(7,3) \Leftrightarrow 49\gamma - \frac{49}{2} \geq 21\gamma - \frac{9}{2}.$$

Решением этой системы является отрезок $\dfrac{5}{7} \leq \gamma \leq \dfrac{5}{3}$. Таким образом, при $\gamma$ из найденного промежутка сообщение центром точного значения неопределенного параметра является согласованным информационным управлением. ●

Далее будем называть *полным разбиением* такое разбиение множества, при котором каждая часть разбиения совпадает с отдельным элементом множества. Из рассмотренного примера видно, что при $\gamma = 1$, когда целевые функции центра и агента совпадают, полное разбиение $\{\{1\}, \{3\}, \{7\}\}$ является согласованным. Этот факт справедлив и в общем случае.

Утверждение 2.15.1. Если целевые функции центра и агента совпадают, то полное разбиение является согласованным.

Доказательство. Легко видеть, что условие согласованности (3) для полного разбиения в случае совпадения целевых функций центра и агента всегда выполняется:

$$\forall \theta \in \Theta \;\; \forall x^* \in X_\theta^* \; \forall x \in X^* \text{ либо } x \in X_\theta^*,$$

$$\text{либо } f(\theta, x^*) \geq f(\theta, x),$$

где $X_\theta^* = \operatorname*{Argmax}_{x \in X} f(\theta, x)$, $X^* = \bigcup_{\theta \in \Theta} X_\theta^*$. •

Полное разбиение является, в некотором смысле, крайним случаем. Другим крайним случаем является *тривиальное разбиение*, где часть ровно одна: $S = \{\Theta\}$. В случае тривиального разбиения $X_1^* = X^*$, $X^* \setminus X_1^* = \varnothing$, поэтому условие (3) всегда выполняется.

Утверждение 2.15.2. Тривиальное разбиение всегда является согласованным.

Утверждение 2.15.2 означает очевидный факт: если центр сообщает агенту все множество $\Theta$ (по сути, это отказ от информационного управления), то агенту ничего другого не остается, как «поверить», т. е. выбрать свое действие на основе заранее известного вероятностного распределения на множестве $\Theta$.

Оптимальное согласованное информационное управление. Как было показано в предыдущем разделе, согласованные информационные управления всегда существуют – по крайней мере, тривиальное (см. утверждение 2.15.2). Если их более одного, то встает вопрос о нахождении оптимального согласованного информационного управления. Для формализации этого понятия требуется ввести критерий оптимальности. Будем считать, что центр максимизирует математическое ожидание гарантированного результата (т. е. математическое ожидание своей целевой функции при наименее благоприятном действии агента). Обозначим через $\sigma(\theta, S)$ часть согласованного разбиения $S$, содержащую $\theta$ (или, что то же самое, сообщение центра при истинном значении неопределенного параметра $\theta$). Далее, обозначим $X^*(\theta, S) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X} E_{\nu \in \sigma(\theta, S)} f(\nu, x)$.

Тогда оптимальным согласованным информационным управлением $S^*$ является решение оптимизационной задачи

$$E_\theta F(\theta, x^*(\theta, S)) \xrightarrow[S]{} \max,$$

где $x^*(\theta, S) \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X^*(\theta, S)} F(\theta, x)$.

В общем случае нахождение оптимального согласованного информационного управления является, по-видимому, сложной задачей, которая может быть конструктивно решена лишь при некоторых дополнительных условиях. Одним из таких условий является достаточно малое количество элементов в множестве $\Theta$, которое позволяет перебрать все возможные разбиения $S$.

Пример 2.15.1 (окончание). При $\Theta = \{1, 3, 7\}$ возможны пять различных разбиений. Для нахождения оптимального согласованного информационного управления следует для каждого из них проверить согласованность и найти математическое ожидание целевой функции центра. Как было показано выше, разбиение $S = \{\{1\}, \{3\}, \{7\}\}$ является согласованным при $\frac{5}{7} \le \gamma \le \frac{5}{3}$. Найдем математическое ожидание целевой функции центра при соответствующем данному разбиению информационном управлении:

$$E_\theta F\left(\theta, x^*(\theta, S)\right) = \frac{1}{3} F(1,1) + \frac{1}{3} F(3,3) + \frac{1}{3} F(7,7) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(9\gamma - \frac{9}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(49\gamma - \frac{49}{2}\right) = \frac{59}{3}\gamma - \frac{59}{6}.$$

Аналогично можно исследовать остальные разбиения (см. Табл. 3; напомним, что рассматриваются значения $\gamma > 0$). Из Табл. 3 видно (с учетом неравенств $9/14 < 5/7 < 1 < 3/2 < 5/3 < 3$ и $51 < 169/3 < 57 < 59$), что

- при $0 < \gamma < 9/14$ и $\gamma > 5/3$ оптимальным является разбиение

$$S^* = \{1, 3, 7\};$$

- при $9/14 \le \gamma < 5/7$ оптимальным является разбиение

$$S^* = \{\{7\}, \{1, 3\}\};$$

- при $5/7 \le \gamma \le 5/3$ оптимальным является разбиение

$$S^* = \{\{1\}, \{3\}, \{7\}\}. \bullet$$

*Табл. 3. Согласованные разбиения*
*и выигрыши центра агента в примере* 2.15.1

| **Разбиение** | **Значения γ, при которых разбиение согласовано** | **Математическое ожидание целевой функции центра (для согласованных разбиений)** |
|---|---|---|
| {{1}, {3}, {7}} | $\frac{5}{7} \le \gamma \le \frac{5}{3}$ | $59\left(\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{6}\right)$ |
| {{1}, {3, 7}} | $1 \le \gamma \le 3$ | $51\left(\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{6}\right)$ |
| {{3}, {1, 7}} | $\varnothing$ | – |
| {{7}, {1, 3}} | $\frac{9}{14} \le \gamma \le \frac{3}{2}$ | $57\left(\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{6}\right)$ |
| {1, 3, 7} | $\gamma > 0$ | $\frac{169}{3}\left(\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{6}\right)$ |

Отметим следующий очевидный факт.

Утверждение 2.15.3. Если целевые функции центра и агента совпадают, то полное разбиение является оптимальным (соответствует оптимальному согласованному информационному управлению).

Доказательство. Выше было показано (см. утверждение 2.15.1), что полное разбиение является согласованным. Далее, очевидно, что математическое ожидание выигрыша агента является максимальным при точном знании им истинного значения неопределенного параметра $\theta$. Но поскольку целевые функции центра и агента совпадают, то и математическое ожидание целевой функции центра достигает в этом случае своего максимального значения. ●

**Согласованное информационное управление несколькими агентами.** До этого мы рассматривали ситуацию, в которой участвовали два персонажа – осуществляющий управление центр и управляемый субъект (агент). Однако во многих случаях объектов управления может быть несколько. Принципиальным (в аспекте информационного управления) отличием от случая одного агента является то, что сообщение центра может быть направлено как всем агентам сразу, так и одному агенту, либо некоторому их подмножеству. Более того, содержанием сообщения центра может быть как значение неопределенного параметра, так и информированность других агентов. В общем случае может быть сформирована достаточно сложная структура информированности.

Исследование согласованности общего случая информационного управления несколькими агентами выходит за рамки данной работы, в которой мы ограничимся рассмотрением случая сообщения одинаковой информации сразу всем агентам.

Итак, пусть имеется $n$ агентов с целевыми функциями $f_i(\theta, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1,\ldots,n$. Вероятностное распределение случайной величины $\theta$ – неопределенного параметра, принимающего значения из множества $\Theta$ – является общим знанием. Каждый агент выбирает свое действие $x_i$, из множества $X^i$.

Наиболее распространенной концепцией решения некооперативной игры является равновесие Нэша – набор действий агентов, от которого ни одному агенту не выгодно отклоняться в одностороннем порядке. При отсутствии информационного управления равновесный вектор действий агентов $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ удовлетворяет системе соотношений

$$x_i^* \in \operatorname*{Argmax}_{x_i \in X^i} E_\theta f_i(\theta, x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*),\ i = 1,\ldots,n.$$

При сообщении центром множества $\Theta' \subset \Theta$ (при условии, что агенты доверяют сообщению) равновесным будет каждый вектор действий, удовлетворяющий системе соотношений

$$x_i^* \in \operatorname*{Argmax}_{x_i \in X^i} E_{\theta \in \Theta'} f_i(\theta, x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*),\ i = 1,\ldots,n.$$

Обозначим множество всех таких равновесных векторов через $NE(\Theta')$ ($NE$ – Nash equilibrium).

Пусть центр осуществляет информационное управление на основе разбиения $S = \{\Theta_\alpha\}$, $\alpha \in$ A. Далее будем считать, что множества равновесий Нэша $NE\{\Theta_\alpha)$ являются непустыми при любых $\alpha \in$ A.

Обозначим, аналогично (2), через $X_\alpha^*$ множество равновесных векторов действий агентов при сообщении центра $\Theta_\alpha$: $X_\alpha^* = NE(\Theta_\alpha)$.

Также аналогично случаю одного агента обозначим множество всех равновесных действий агентов (при каком-либо сообщении центра из разбиения $S$) через $X^*$: $X^* = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha^*$.

Тогда условие согласованности для случая нескольких агентов можно записать, аналогично (3), следующим образом:

(4) $\forall \alpha \in \mathrm{A}\ \ \forall \theta \in \Theta_\alpha\ \ \forall x^* \in X_\alpha^*\ \forall x \in X^*$ либо $x \in X_\alpha^*$, либо

$F(\theta, x^*) \geq F(\theta, x)$

(напомним, что в случае нескольких агентов $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

Утверждение 2.15.2 для случая нескольких агентов справедливо и доказывается аналогично. Утверждение 2.15.1 также остается справедливым, если требование совпадения целевых функций центра и агента заменить требованием совпадения целевых функций центра и каждого из агентов. Ясно, что требование совпадения целевых функций всех агентов является очень сильным; его ослабление является одним из направлений дальнейших исследований.

Существенным отличием случая нескольких агентов является возможность ситуации, когда в результате согласованного информационного управления средний выигрыш агентов уменьшается.

Пример 2.15.2. Пусть имеется центр и два агента. Неопределенный параметр принимает значения из множества $\Theta = \{1, 2\}$: значение $\theta = 1$ с вероятностью 3/5, значение $\theta = 2$ – с вероятностью 2/5. Выигрыши агентов показаны в биматрицах на Рис. 40 (строки обозначают стратегии первого агента, $x_1 \in \{1, 2\}$, столбцы – второго, $x_2 \in \{1, 2\}$).

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (4,4) & (0,0) \\ (0,10) & (6,6) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (4,4) & (0,0) \\ (15,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 40. Биматрицы выигрышей в примере 2.15.2

Выигрыш центра $F(\theta, x_1, x_2)$ задается следующим образом:

$$F(\theta, x_1, x_2) = \begin{cases} 10, & \text{при } \theta = x_1 = x_2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В отсутствии информационного управления (или при тривиальном информационном управлении) агенты стремятся максимизировать математические ожидания своих выигрышей, приведенные на Рис. 41. Это приводит к равновесию $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, при этом

$$E_\theta f_1(\theta,2,1) = E_\theta f_2(\theta,2,1) = 6,$$

а выигрыш центра равен нулю.

$$\begin{pmatrix} (4,4) & (0,0) \\ (6,6) & (4,4) \end{pmatrix}$$

Рис. 41. Биматрица математических ожиданий выигрышей в примере 2.15.2

Исход взаимодействия будет иным, если центр сообщает агентам значение $\theta$. Нетрудно убедиться, что это управление является согласованным:

$$S = \{\{1\},\{2\}\}, \quad X_1^* = \{(1,1)\}, X_2^* = \{(2,2)\};$$
$$F(1,1,1) = 10 > 0 = F(1,2,2),$$
$$F(2,2,2) = 10 > 0 = F(2,1,1).$$

При этом в случае $\theta = 1$ реализуется ситуация $x = (1,1)$ (выигрыши агентов составляют по 4), а в случае $\theta = 2$ – ситуация $x = (2,2)$ (выигрыши агентов составляют по единице). В обоих случаях выигрыш центра составляет 10.

Таким образом, согласованное управление $\{\{1\},\{2\}\}$ является оптимальным, однако выигрыши агентов в результате его осуществления уменьшились. ●

В данном разделе рассмотрена модель согласованного информационного управления, при котором агенты осведомлены о факте осуществления центром управления, но при этом рационально доверять сообщениям центра. Выявлены условия, при которых такое управление существует, доказаны некоторые его свойства. В управлении социально-экономическими системами информационное управление используется совместно с другими типами управления. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является разработка механизмов управления [93], учитывающих согласованность интересов центра и агента (агентов) при его осуществлении.

## 2.16. РЕФЛЕКСИЯ В МЕХАНИЗМАХ ПЛАНИРОВАНИЯ

**Механизмы планирования.** Манипулируемость *процедур принятия решений* может быть обусловлена либо стратегическим *манипулированием* со стороны агентов (искажением ими своих сообщаемых предпочтений [18, 21, 93, 97, 112]), либо манипулированием алгоритмом обработки мнений агентов (так называемая *теория агенды* [74]).

В *механизмах планирования* [93, 112] (принятия центром решений на основании сообщаемой агентами информации) считается, что предпочтения агентов являются для них общим знанием. При этом механизм называется *неманипулируемым*, если каждому агенту, каковы бы ни были его предпочтения, при любой обстановке игры (любых предпочтениях оппонентов) выгодно сообщение достоверной информации о своих предпочтениях.

В настоящем разделе мы обсудим возможность ослабления требования неманипулируемости при условии, что центр имеет возможность осуществлять информационное управление, т. е. формировать у агентов ту или иную систему представлений о типах оппонентов, об их представлениях и т.д.

Рассмотрим организационную систему, состоящую из управляющего органа – центра – и $n$ управляемых субъектов – агентов. Стратегией $i$-го агента является сообщение центру некоторой информации $s_i \in S_i$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множеству агентов. Центр на основании сообщенной ему информации назначает агентам *планы* $x_i = h_i(s) \in X_i \subseteq \Re^1$, где $h$: $S \to X$ – *процедура* (*механизм*) *планирования*, $h_i$: $S \to X_i$, $i \in N$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S = \prod_{i \in N} S_i$ – вектор сообщений всех агентов, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i$ – вектор планов.

*Функция предпочтения* (целевая функция) агента, отражающая интересы агента в задачах планирования: $f_i(x_i, r_i)$: $X_i \times \Re^1 \to \Re^1$, зависит от соответствующей компоненты назначенного центром плана и параметра $r_i \in \Re^1$ – *типа* агента.

Как правило, при исследовании механизмов планирования, то есть в организационных системах с сообщением информации, вводится предположение, что функции предпочтения агентов *однопико-*

*вые* [112] с точками пика $\{r_i\}_{i \in N}$, то есть функция $f_i(x_i, r_i)$ непрерывна, строго монотонно возрастает по $x_i$ до единственной точки максимума $r_i$ и строго монотонно убывает после нее, $i \in N$. Это предположение означает, что предпочтения агента на множестве допустимых планов таковы, что существует единственное наилучшее для него значение плана – точка пика, степень же предпочтительности остальных планов монотонно убывает по мере удаления от точки пика. Поэтому под типом агента будем понимать точку максимума (*идеальную точку*, *точку пика*) его функции предпочтения, то есть наиболее выгодное с его точки зрения значение плана.

**Случай общего знания («классическая» неманипулируемость).** Пусть на момент принятия решений общим знанием для агентов являются: процедура планирования, целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также вектор типов $r = (r_1, r_2, ..., r_n) \in \Re^n$. Центру известны зависимости $f_i(x_i, \cdot)$ и множества $\{S_i\}_{i \in N}$ возможных сообщений агентов, но не известны точные значения типов агентов.

Последовательность функционирования следующая: центр выбирает процедуру планирования $h(s) = (h_1(s), h_2(s), ..., h_n(s))$ и сообщает ее агентам, агенты при известной процедуре планирования одновременно и независимо сообщают центру информацию $\{s_i\}$, на основании которой и формируются планы.

Так как решение, принимаемое центром (назначаемые агентам планы), зависит от сообщаемой агентами информации, последние могут воспользоваться возможностью своего влияния на эти решения, сообщая такую информацию, чтобы получить наиболее выгодные для себя планы. Понятно, что при этом полученная центром информация в общем случае может не быть истинной. Следовательно, возникает *проблема манипулирования*.

Будем считать, что агенты ведут себя некооперативно, выбирая доминантные или равновесные по Нэшу стратегии. Пусть $s^*$ – вектор равновесных по Нэшу стратегий:

(1) $\forall\ i \in N, \forall\ s_i \in S_i \quad f_i(h_i(s_{-i}^*, s_i^*), r_i) \geq f_i(h_i(s_{-i}^*, s_i), r_i)$.

Очевидно, точка равновесия в общем случае зависит от вектора типов всех агентов: $s^* = s^*(r) = (s_1^*(r),\ s_2^*(r), \dots,\ s_n^*(r))$.

Если при любых предпочтениях агентов $r \in \Re^n$ сообщение ими достоверной информации является равновесием Нэша,

(2) $\forall\ i \in N\ \ \forall\ r \in \Re^n\ \ \forall\ s \in \Re^1\ \ f_i(h_i(r), r_i) \geq f_i(h_i(r_{-i}, s), r_i)$,

то такой механизм называется *неманипулируемым* механизмом. Данное свойство далее будем называть *неманипулируемостью*.

Казалось бы, более сильным, чем (2), является требование того, чтобы сообщение каждым агентом достоверной информации было его доминантной стратегией:

(3) $\forall\ i \in N\ \forall\ r_i, s_i \in \Re^1\ \ \forall\ s_{-i} \in \Re^{n-1}\ \ f_i(h_i(s_{-i}, r_i), r_i) \geq f_i(h_i(s_{-i}, s_i), r_i)$.

Однако легко видеть, что определения (2) и (3) эквивалентны [207]. Это означает, что, так как в определениях (2) и (3) неманипулируемости механизмов планирования вектор $r \in \Re^n$ типов агентов является «параметром», то неманипулируемость можно интерпретировать следующим образом: механизм является неманипулируемым, если, каковы бы ни были истинные типы агентов, сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого из них.

**Рефлексивная неманипулируемость.** Откажемся от предположения о том, что вектор типов агентов является общим знанием, и обобщим на этот случай задачу о неманипулируемости механизма планирования [122]. Пусть информированность $i$-го агента описывается деревом $I_i$ с элементами вида $r_{i\sigma} \in \Re^1$, $\sigma \in \Sigma$, причем $r_i$ – истинный тип $i$-го агента – достоверно ему известен, $i \in N$.

В этом случае агенты играют в рефлексивную игру, информационное равновесие которой в данном случае определяется следующими условиями (см. раздел 2.3):

1) структура информированности $I$ имеет конечную сложность;

2) $\forall \lambda, \mu \in \Sigma\ \ I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$;

3) $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$

(4) $$s_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg} \max_{s_i \in \Re^1} f_i(h_i(s_{\sigma i 1}^*, \ldots, s_{\sigma i, i-1}^*, s_i, s_{\sigma i, i+1}^*, \ldots, s_{\sigma i n}^*), r_{\sigma i})\ .$$

В соответствии с (4) равновесное сообщение $i$-го агента (реального) зависит от структуры его информированности $I_i$, то есть

(5) $s_i^* = s_i^*(I_i)$, $\ i \in N$.

В частном случае – если имеет место общее знание – выражение (4) совпадает с определением равновесия Нэша.

Обозначим $s^*(I) = (s_1^*(I_1),\ s_2^*(I_2),\ \ldots,\ s_n^*(I_n))$. Решение $x$, принимаемое в соответствии с механизмом $h(\cdot)$, будет зависеть от всей структуры информированности $I$:

(6) $x = h(s^*(I))$.

Обсудим теперь, что следует понимать под манипулируемостью в случае отсутствия общего знания.

Напомним, что в соответствии с (2) и (3) в условиях общего знания механизм является неманипулируемым, если, каковы бы ни были истинные типы агентов, сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Попробуем обобщить это определение на случай информационного равновесия – потребуем, чтобы какова бы ни была структура информированности реального агента, сообщение достоверной информации являлось бы для него компонентой информационного равновесия (4):

(7) $\forall\ r \in \Re^n,\ \forall\ i \in N,\ \forall\ I_i$

$$r_i \in \operatorname{Arg}\max_{s_i \in \Re^1} f_i(h_i(s_{i1}^*(I_i), \ldots, s_{i,i-1}^*(I_i), s_i, s_{i,i+1}^*(I_i), \ldots, s_{in}^*(I_i)), r_i).$$

Легко видеть, что, если выполнено (3) (механизм является неманипулируемым), то имеет место и (7). В другую сторону: так как множество всевозможных структур информированности включает и структуру, соответствующую общему знанию, то, если выполнено (7), то механизм является неманипулируемым (должно иметь место (3)). Получили, что определения (3) и (7) эквивалентны.

Итак, можно сделать следующий качественный вывод: если в рассматриваемом механизме у каждого агента при любом его типе существует доминантная стратегия (а это – очень сильное требование, и класс удовлетворяющих ему механизмов чрезвычайно узок), то принимаемые им решения не зависят от структуры информированности.

Ослабления требования неманипулируемости можно добиться, введя определение рефлексивной неманипулируемости – существования подструктур информированности $r_{i\sigma} \in \Re^1$, $i \in N$, $\sigma \in \Sigma_+$, таких, что при любых типах реальных агентов сообщение ими достоверной информации является информационным равновесием.

Формально: будем называть механизм $h(\cdot)$ *рефлексивно неманипулируемым*, если существуют *подструктуры информированности* $r_{i\sigma} \in \Re^1$, $\sigma \in \Sigma_+$, реальных агентов ($i \in N$), такие, что, каков бы ни был тип реального агента, сообщение достоверной информации является для него компонентой информационного равновесия:

(9) $\forall\, i \in N \quad \forall\, r_i \in \Re^1$

$$r_i \in \operatorname{Arg}\max_{s_i \in \Re^1} f_i(h_i(s_{i1}^*, \ldots, s_{i,i-1}^*, s_i, s_{i,i+1}^*, \ldots, s_{in}^*), r_i),$$

(10) $\forall\, \sigma \in \Sigma \quad \forall\, j \in N$

$$s_{i\sigma j}^* \in \operatorname{Arg}\max_{s_j \in \Re^1} f_j(h_j(s_{i\sigma j1}^*, \ldots, s_{i\sigma j, j-1}^*, s_j, s_{i\sigma j, j+1}^*, \ldots, s_{i\sigma jn}^*), r_{i\sigma j}).$$

Понятно, что множество рефлексивно неманипулируемых механизмов не уже множества неманипулируемых механизмов (любой неманипулируемый механизм является рефлексивно неманипулируемым), поэтому их характеризация (в том числе – поиск соответствующих подструктур информированности) является актуальной задачей.

Обозначим $E_I$ – множество всевозможных (при всех допустимых структурах информированности) равновесных наборов действий реальных агентов, $E_{-i} = Proj_{-i}\, E_I$, $i \in N$. Определение (9)–(10) можно сформулировать в следующем виде: механизм является рефлексивно неманипулируемым, если для $i$-го агента существует обстановка $\tilde{r}_{-i} \in E_{-i}$, такая, что:

(11) $\forall\, r_i,\ \tilde{r}_i \in \Re^1 \quad f_i(h_i(\tilde{r}_{-i}, r_i), r_i) \geq f_i(h_i(\tilde{r}_{-i}, \tilde{r}_i), r_i),\ i \in N.$

Обозначим множество равновесий Нэша

(12) $E_N = \{r \in \Re^n \mid \forall\, i \in N \quad \forall\, \tilde{r}_i \in \Re^1\ f_i(h_i(r), r_i) \geq f_i(h_i(r_{-i}, \tilde{r}_i), r_i)\}$,

(13) $X_i^0 = Proj_i\, E_N,\ i \in N.$

Далее до конца данного раздела будем предполагать, что структура информированности агентов является конечной регулярной.

Справедливо следующее утверждение – достаточное условие рефлексивной неманипулируемости (необходимым условием является (11)).

Утверждение 2.16.1. Для того чтобы механизм планирования являлся рефлексивно неманипулируемым, достаточно, чтобы для любого $i$-го агента, $i \in N$, существовал набор типов $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n) \in E_N$ такой, что выполнено (11). При этом для построения рефлексивно неманипулируемых механизмов достаточно ограничиться рассмотрением агентов с не более чем вторым рангом рефлексии.

Доказательство. Достаточно сформировать структуру информированности $i$-го агента $I_i$ (отметим, что структуры информированности различных агентов можно строить независимо) такую, что:

(14) $r_{ij\sigma k} = \tilde{r}_k$, $j \neq i$, для любого $\sigma \in \Sigma$.

Это означает, что с точки зрения $i$-го агента все остальные считают, что имеет место общее знание (см. Рис. 42).

Легко видеть, что с точки зрения $i$-го агента сообщение достоверной информации является равновесием игры его фантомных агентов, следовательно, выполнено (10), что с учетом (11) приводит к выполнению (9). •

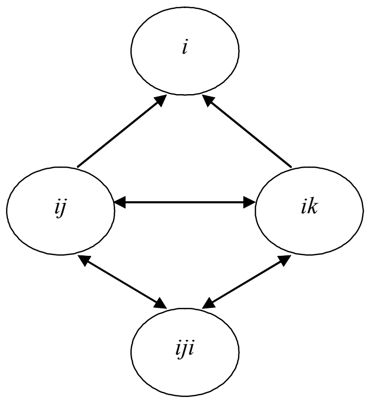


Рис. 42. Граф рефлексивной игры с точки зрения $i$-го агента

Содержательно, представления $i$-го агента о типах оппонентов и их представлениях должны быть следующими. Агент должен быть, во-первых, уверен, что типы оппонентов таковы, что выполнено условие (11), обеспечивающее выгодность сообщения ими достоверной информации. Во-вторых, представления оппонентов с точки зрения рассматриваемого агента должны быть таковы, что сообщение именно данной информации является равновесием их игры (см. условие (10)). Для этого достаточно, чтобы на нижнем уровне структуры информированности имело место субъективное общее знание фантомных агентов.

Отметим конструктивность приведенного доказательства – оно содержит алгоритм построения конкретной структуры информированности (14), обеспечивающей рефлексивную неманипулируемость.

Приведем пример механизма планирования, который является манипулируемым, но при этом рефлексивно неманипулируемым.

Пример 2.16.1. Пусть имеются два агента с неотрицательными типами $r_1$ и $r_2$. (Напомним, что типом агента в данном случае является оптимальный для него план.) Рассмотрим механизм, который в зависимости от сообщений агентов $s_1$ и $s_2$ назначает им планы $x_1$ и $x_2$ соответственно по следующим формулам:

(15) $x_1 = s_1 - s_2 / 2,\quad x_2 = s_2 - s_1 / 2,\quad s_1, s_2 \geq 0.$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} s_1 - \dfrac{s_2}{2} = r_1, \\ s_2 - \dfrac{s_1}{2} = r_2, \end{cases}$$

получаем равновесные по Нэшу стратегии (заявки) агентов:

$$s_1^*(r_1, r_2) = \frac{2}{3}(2\, r_1 + r_2),\; s_2^*(r_1, r_2) = \frac{2}{3}(2\, r_2 + r_1).$$

Легко видеть, что механизм (15) является манипулируемым – при любых типах агентов, не равных одновременно нулю, по крайней мере один из агентов сообщает заявку, не совпадающую с его типом. Однако при $r_1, r_2 \geq 0$ механизм является рефлексивно неманипулируемым. Действительно, достаточно убедить каждого агента в том, что с точки зрения его оппонента общим знанием является равенство нулю обоих типов. Иными словами, достаточно сформировать структуру информированности $r_{i\sigma} = 0,\ i = 1, 2,\ \sigma \in \Sigma_+$. Тогда единственным информационным равновесием является набор

$$s_i^* = r_i,\ \ s_{i\sigma}^* = 0,\ \ i = 1, 2,\ \ \sigma \in \Sigma_+ .$$

Таким образом, в равновесии оба агента сообщают свои истинные типы.

В то же время, при $r_1, r_2 > 0$ механизм (15) не является рефлексивно неманипулируемым, так как какова бы ни была структура информированности (и, в частности, какова бы ни была ее глубина), каждый из агентов будет уверен в том, что сообщение оппонента будет отлично от нуля. •

Ряд прикладных механизмов планирования исследован (с точки зрения стабильности взаимных представлений агентов о типах друг друга, при которых механизм обладает теми же свойствами) в [7, 32, 33, 85, 116 и др.].

# ГЛАВА 3. СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ И УПРАВЛЕНИЕ

В настоящей главе исследуются модели стратегической рефлексии. В разделе 3.1 рассматривается модель стратегической рефлексии в игре двух лиц, что в разделе 3.2 позволяет решить *задачу о максимальном целесообразном ранге стратегической рефлексии* в биматричных играх, а также определить и изучить т.н. *игры рангов*. Раздел 3.3 посвящен обсуждению конечности ранга рефлексии, порождаемой ограниченностью способностей человека по переработке информации. Раздел 3.4 – описанию *метода рефлексивных разбиений*, используемого для решения задач *рефлексивного управления*.

## 3.1. СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ В ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ

Рассмотрим последовательно, в порядке возрастания информированности, рефлексивные модели принятия решений в играх двух лиц.

**Нулевой ранг рефлексии.** Проанализируем задачу принятия агентом решения в случае полного отсутствия информации о состоянии природы (напомним, что предположение о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием, считается выполненным). Представляется разумным, с одной стороны, принцип принятия решений на основе максимального гарантированного результата, в соответствии с которым $i$-ый агент выберет гарантирующую (по состоянию природы и действию оппонента) стратегию

(1) $_1x_i^г = \arg \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{\theta \in \Theta} \min\limits_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(\theta, x_i, x_{-i})$.

С другой стороны, гипотетически принцип (1) принятия решений не является единственно возможным – агент может рассчитывать, что его оппонент выберет не наихудшее действие, а собственную гарантирующую стратегию (отметим, что каждый агент может вычислить гарантирующую стратегию оппонента). Тогда наилучшим ответом будет

(2) $_2x_i^г = \arg \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{\theta \in \Theta} f_i(\theta, x_i, {}_1x_{-i}^г)$.

Но аналогичным образом может рассуждать оппонент рассматриваемого агента. Если рассматриваемый агент допускает такую возможность, тогда его гарантирующей стратегией будет

(3) ${}_3x_i^г = \arg\max_{x_i \in X_i} \min_{\theta \in \Theta} f_i(\theta, x_i, {}_2x_{-i}^г)$,

где ${}_2x_{-i}^г$ вычисляется в соответствии с (2) заменой индекса «$i$» на «-$i$» и наоборот. Цепочку наращивания «ранга рефлексии» (предположений агента о ранге рефлексии оппонента) можно продолжать и далее (см. аналогии в динамических моделях, рассматриваемых в [126]), определив рекуррентно

(4) ${}_kx_i^г = \arg\max_{x_i \in X_i} \min_{\theta \in \Theta} f_i(\theta, x_i, {}_{k-1}x_{-i}^г)$, $k = 2, 3, ...$,

где ${}_1x_i^г$, $i = 1, 2$, определяются (1). Набор действий типа (4) будем называть множеством *рефлексивных гарантирующих стратегий*.

Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 3.1.1. Пусть целевые функции агентов имеют вид:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2 / 2x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2 - x_2^2 / 2(x_1 + \delta),$$

где $\delta > 0$. Относительно допустимых множеств предположим, что $X_1 = X_2 = [\varepsilon; 1]$, $0 < \varepsilon < 1$. Будем считать, что каждая из констант $\varepsilon$ и $\delta$ много меньше единицы. Гарантирующие стратегии агентов приведены в Табл. 4.

Видно, что, во-первых, значения гарантирующих действий увеличиваются с ростом «ранга рефлексии». Во-вторых, различным «рангам рефлексии» агентов соответствуют в общем случае различные гарантирующие действия (отметим, что равновесием[34] Нэша в данном примере является вектор (1; 1)). •

*Табл. 4. Гарантирующие стратегии агентов в примере* 3.1.1

| **k** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **...** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ${}_kx_1^г$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | **...** |
| ${}_kx_2^г$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 4\delta$ | **...** |

[34] В качестве отступления заметим, что, если в рассматриваемом примере целевая функция второго агента имеет вид $f_2(x_1, x_2) = x_2 + x_2^2 / 2x_1$, то у него существует доминантная стратегия (равная единице), и последовательность гарантирующих стратегий первого агента стабилизируется уже на втором члене: ${}_1x_i^г = \varepsilon$, ${}_2x_i^г = 1/2$. Если первый агент может вычислить доминантную стратегию своего оппонента, то представляется рациональным выбор им действия ${}_2x_i^г$.

Вопрос о том, какое действие следует выбирать агенту, остается открытым. Единственно, можно констатировать, что, обладая информацией только о множестве возможных значений состояния природы, $i$-ый агент может выбирать одно из действий ${}_k x_i^{г}$, $i = 1, 2$; $k = 1, 2, ...$, определяемых выражениями (1)-(4).

Доопределить рациональный выбор агента в рассматриваемой модели можно следующим образом. Если агенту неизвестна целевая функция оппонента (что исключено в рамках предположения о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием), то единственным его рациональным действием является выбор (1), то есть классический МГР. В рамках введенных предположений агенту известна целевая функция оппонента, а также известно, что оппоненту известен этот факт и т.д. Поэтому с точки зрения агента нерационально использование классического МГР, и ему следует рассчитывать, как минимум, что оппонент будет использовать МГР, что приведет к выбору ${}_2 x_i^{г}$. Но, опять же, в силу того, что целевые функции являются общим знанием, агент может предположить, что такой ход его рассуждений может быть восстановлен оппонентом, что сделает целесообразным выбор ${}_3 x_i^{г}$ и т.д. до бесконечности. Следовательно, с точки зрения агента остается неопределенность относительно «ранга рефлексии» оппонента[35]. Относительно этого параметра он не имеет никакой информации (если у агента имеются некоторые убеждения по этому поводу, то может реализоваться соответствующее субъективное равновесие), что делает рациональным использование гарантированного результата по «рангу рефлексии» оппонента:

(5) $x'_i = \arg \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{j=1,2,...} \min\limits_{\theta \in \Theta} f_i(\theta, x_i, {}_j x_{-i}^{г})$.

[35] Другими словами, исходная игра может быть заменена на игру, в которой агенты выбирают ранги своей рефлексии. Для новой игры могут быть также построены рефлексивные аналоги и т.д. до бесконечности (см. примеры: «Пенальти» – во введении, «Игра в прятки» и «Снос на мизере» – в разделе 3.2). Одним из возможных способов борьбы с подобной «бесконечностью» является использование гарантированного результата по рангу рефлексии оппонента. Другим возможным способом, эффективным для конечных игр, является определение максимального целесообразного ранга рефлексии агентов – см. раздел 3.2.

Отметим, что, во-первых, $x'_i$ может отличаться от классической гарантирующей стратегии ${}_1x_i^г$, определяемой выражением (1). Во-вторых, при использовании стратегии (5) факт наличия доминантной стратегии оппонента будет учтен агентом (см. сноску в примере 3.1.1).

В Табл. 5 приведены значения целевой функции первого агента в примере 3.1.1 в зависимости от «ранга рефлексии» оппонента и соответствующие действия оппонента. Видно, что при использовании стратегии (5) выигрыш $i$-го агента равен $\varepsilon + \delta$, что превышает выигрыш $\varepsilon$, получаемый при использовании классического МГР.

*Табл. 5. Выигрыши первого агента в примере* 3.1.1

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2f_1(BR_1({}_jx_2^г), {}_jx_2^г)$ | $\varepsilon+\delta$ | $\varepsilon+\delta$ | $\varepsilon+2\delta$ | $\varepsilon+2\delta$ | $\varepsilon+3\delta$ | $\varepsilon+3\delta$ | $\varepsilon+4\delta$ |
| ${}_jx_2^г$ | $\varepsilon+\delta$ | $\varepsilon+\delta$ | $\varepsilon+2\delta$ | $\varepsilon+2\delta$ | $\varepsilon+3\delta$ | $\varepsilon+3\delta$ | $\varepsilon+4\delta$ |

Таким образом, рациональным в рассматриваемой модели можно считать использование агентом стратегии (4) или (5).

**Первый ранг рефлексии.** Предположим теперь, что агент обладает определенной информацией о состоянии природы, которую считает истинной, и больше ему ничего достоверно не известно.

В рамках существующей неопределенности в силу принципа детерминизма у агента, осуществляющего стратегическую рефлексию, имеются две альтернативы – либо предположить, что его оппонент не обладает никакой информацией, либо считать, что последний обладает той же информацией, что и он сам[36].

Если агент не вводит никаких предположений об информированности и принципах поведения оппонента, то он вынужден применять принцип максимального гарантированного результата (МГР) – никакой дополнительной (по сравнению с рассмотренной выше моделью нулевого ранга рефлексии) информации об оппоненте у

[36] Данный принцип (и его обобщения) будет широко использоваться ниже при определении конечных информационных структур – действительно, обладая информацией $I_i$, $i$-ый агент может в случае неопределенности приписывать другим агентам только информированность, согласованную с $I_i$.

агента не добавилось[37] – то есть рассчитывать на наихудший для него выбор второго агента из множества стратегий типа (5). Гарантирующей стратегией будет:

$$(6)\ x_i^{г}(\theta_i) = \arg\max_{x_i \in X_i} \min_{j=1,2,\dots} f_i(\theta_i, x_i, {}_j x_{-i}^{г}).$$

Отметим, что, находясь в информационной ситуации, соответствующей рассматриваемой модели, вычисляя (6), агент рассматривает оппонента как находящегося в информационной ситуации, соответствующей предыдущей модели. Этот общий принцип – обладая некоторой информацией, агент может рассматривать оппонента как имеющего либо тот же, либо на единицу меньший ранг рефлексии – будет использован и в ряде других рефлексивных моделей принятия решений.

Если первый агент считает, что его оппонент обладает той же информацией, что и он сам (аналогично может рассуждать и второй агент – см. предположение $П_1$ в [117]), то он вычисляет *субъективное равновесие* (то есть «равновесие Нэша» для соответствующего субъективного описания игры) $E_N(\theta_1) = \{(x_{11}^*(\theta_1),\ x_{12}^*(\theta_1))\}$ следующего вида:

$$(7)\ \forall\, x_1 \in X_1 \quad f_1(\theta_1,\ x_{11}^*(\theta_1),\ x_{12}^*(\theta_1)) \geq f_1(\theta_1, x_1,\ x_{12}^*(\theta_1)),$$

$$\forall\, x_2 \in X_2 \quad f_2(\theta_1,\ x_{11}^*(\theta_1),\ x_{12}^*(\theta_1)) \geq f_1(\theta_1,\ x_{11}^*(\theta_1), x_2).$$

Содержательно, приведенные системы неравенств отражают вычисление первым агентом «своего» равновесия Нэша и выбор соответствующей координаты этого равновесия. В общем случае агент и его оппонент вычислят разные равновесия – совпадение возможно, если информированность такова, что $x_{ij}^*(\theta_i) = x_{jj}^*(\theta_j)$, $i, j = 1, 2$.

Таким образом, рациональным в модели первого ранга рефлексии можно считать выбор агентом либо рефлексивной гарантирующей стратегии (6), либо субъективного равновесия (7).

[37] Конечно, агент может предполагать, что оппонент обладает некоторой информацией, но, так как эта информация не фигурирует в модели, то рассматривать подобные предположения мы не будем.

Субъективное равновесие (7), определяемое первым агентом, может быть условно изображено в виде графа с двумя вершинами $x_1$ и $x_{12}$, соответствующими первому агенту и его представлениям о втором агенте[38] (см. Рис. 43). Входящие стрелки при этом отражают ту информацию, которую использует каждый из агентов об оппоненте.

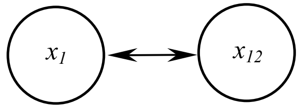


Рис. 43. Субъективное равновесие в модели первого ранга стратегической рефлексии

**Второй ранг рефлексии.** В модели второго ранга рефлексии $i$-ый агент обладает информацией о представлениях $\theta_{ij}$ оппонента о состоянии природы и о собственных представлениях $\theta_{ii}$ о состоянии природы (будем считать, что $\theta_i = \theta_{ii}$ – см. аксиому автоинформированности ниже).

Агент может рассчитывать, что его оппонент выберет гарантирующую (в рамках знания $\theta_{ij}$) стратегию. Тогда наилучшим ответом будет

(8) ${}_2x_i^{г} = \arg\max_{x_i \in X_i} f_i(\theta_i, x_i, x_{-i}^{г}(\theta_{ij}))$,

где $x_{-i}^{г}(\theta_{i,-i})$ определяется (6).

Помимо гарантирующей стратегии (8), первый агент может вычислить *субъективное равновесие*

$$E_N(\theta_1, \theta_{12}) = \{(x_{11}^*(\theta_1, \theta_{12}), x_{12}^*(\theta_1, \theta_{12}))\}$$

следующего вида:

(9) $\forall x_1 \in X_1\ f_1(\theta_1, x_{11}^*(\theta_1,\theta_{12}), x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12})) \geq f_1(\theta_1, x_1, x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12}))$,

$\forall x_2 \in X_2\ f_2(\theta_{12}, x_{121}^*(\theta_1,\theta_{12}), x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12})) \geq f_2(\theta_{12}, x_{121}^*(\theta_1,\theta_{12}), x_2)$,

$\forall x_1 \in X_1\ f_1(\theta_{12}, x_{121}^*(\theta_1,\theta_{12}), x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12})) \geq f_2(\theta_{12}, x_1, x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12}))$.

Как и в предыдущей модели, в общем случае первый агент и его оппонент вычислят разные равновесия.

Таким образом, рациональным в модели второго ранга рефлексии можно считать выбор агентом либо рефлексивной гарантирующей стратегии (8), либо субъективного равновесия (9).

[38] Напомним, что подобные агенты, существующие в представлениях других агентов, называются фантомными агентами.

Отметим, что первые две системы неравенств в (9) отражают равновесие Нэша с точки зрения первого агента, а вторая и третья система неравенств – равновесие Нэша, которое должен определить второй агент с точки зрения первого агента – см. граф на Рис. 44, на котором пунктиром обведена «модель» второго агента, которую использует первый агент при принятии решений.

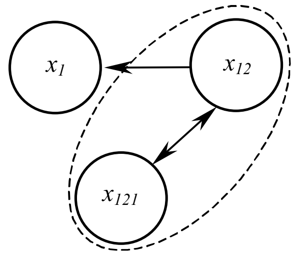


Рис. 44. Субъективное равновесие в модели первого ранга стратегической рефлексии

Проведенный анализ простейших моделей стратегической рефлексии первых нескольких рангов свидетельствует, что в случае нескольких агентов и недостаточной их информированности можно рассматривать процессы принятия ими решений независимо – каждый из них моделирует поведение своих оппонентов, то есть стремится построить собственную замкнутую модель игры (см. обсуждение различий субъективного и объективного описания игры в [34]). В случае общего знания субъективные модели совпадают.

Выше мы рассмотрели рефлексию нулевого, первого и второго рангов. Наращивание рангов рефлексии можно по аналогии производить и дальше. Существенными во всех моделях являются предположения агента о том, какой ранг рефлексии имеет его оппонент, то есть, фактически, ранг рефлексии агента определяется тем, какой ранг рефлексии он приписывает оппоненту.

Никаких разумных рекомендаций, ограничивающих рост ранга собственной рефлексии, априори агенту предложить нельзя. С этой точки зрения можно констатировать, что не существует универсальной концепции равновесия для игр со стратегической рефлексией. Единственным выходом является использование в этом случае либо МГР по рангам рефлексии оппонента, либо субъективного равновесия, в рамках которого каждый агент вводит определенные предположения о ранге рефлексии оппонента и выбирает свое действие, оптимальное в рамках этих предположений.

Поэтому сконцентрируем основное внимание на изучении случаев, когда неограниченного роста ранга рефлексии не происходит. Существуют две причины, по которым ранг рефлексии может оказаться конечным. Во-первых, это – нецелесообразность увеличения ранга рефлексии, свыше некоторого, с точки зрения выигрыша агента (когда дальнейшее увеличение ранга рефлексии заведомо не приводит к увеличению выигрыша). Во-вторых, возможности человека по переработке информации ограничены, и бесконечный ранг рефлексии является не более чем математической абстракцией. Поэтому в последующих разделах настоящей главы приводятся модели, учитывающие обе приведенные причины – в разделе 3.2 на примере биматричных игр определяется максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии, а в разделе 3.3 исследуется роль информационных ограничений.

## 3.2. РЕФЛЕКСИЯ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ И ИГРЫ РАНГОВ

Основная идея, развиваемая в настоящем разделе, заключается в том, что в биматричных играх[39], в которых не существует равновесия Нэша, или в которых при существующем равновесии Нэша агенты выбирают субъективные гарантирующие стратегии (см. предыдущий раздел настоящей работы) выигрыш каждого из агентов зависит как от его ранга рефлексии, так и от ранга рефлексии оппонента. Кроме того, показывается, что неограниченное увеличение ранга стратегической рефлексии не приводит к увеличению выигрыша [115]. Перейдем к формальному описанию.

Рассмотрим биматричную игру[40], в которой выигрыши первого и второго агентов задаются матрицами $\boldsymbol{A} = ||a_{ij}||$ и $\boldsymbol{B} = ||b_{ij}||$ размерности $n \times m$ соответственно. Обозначим[41] $I = \{1, 2, ..., n\}$ – множество действий первого агента (выбирающего строку), $J = \{1, 2, ..., m\}$ – множество действий второго агента (выбирающего столбец).

В рассматриваемой игре гарантирующие стратегии агентов следующие:

---

[39] Напомним, что биматричными называются конечные игры двух лиц.

[40] Так как матричные игры (антагонистические конечные игры двух лиц) являются частным случаем биматричных игр, то все приведенные в настоящем разделе результаты справедливы и для матричных игр.

[41] Будем надеяться, что использование одного и того же (исторически сложившегося) обозначения для информационной структуры и множества действий первого агента не приведет к путанице.

$$i_0 \in \operatorname{Arg} \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij}, \;\; j_0 \in \operatorname{Arg} \max_{j \in J} \min_{i \in I} b_{ij}.$$

Введем следующие предположения. Пусть матрицы выигрышей таковы, что каждое действие каждого агента является наилучшим ответом на некоторое действие оппонента, и пусть, кроме того, наилучший ответ на каждое действие оппонента единственен (если наилучших ответов несколько, то можно ввести правило, доопределяющее выбор агента).[42] Следовательно, при определении наилучших ответов вместо выражений «$i_{\dots} \in \operatorname{Arg} \max_{i \in I} \dots$» и «$j_{\dots} \in \operatorname{Arg} \max_{j \in J} \dots$» можно использовать, соответственно, выражения «$i_{\dots} = \arg \max_{i \in I} \dots$» и «$j_{\dots} = \arg \max_{j \in J} \dots$».

Обозначим $a_0 = \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij}$, $b_0 = \max_{j \in J} \min_{i \in I} b_{ij}$ – максимальные гарантированные результаты (МГР) первого и второго агентов соответственно.

Определим рефлексивную биматричную игру $MG_{kl}$ (matrix game) как биматричную игру с матрицами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, в которой первый и второй агенты имеют ранги рефлексии, равные $k$ и $l$ соответственно, $k, l \in \aleph$, где $\aleph$ – множество натуральных чисел.

Поясним, что будет пониматься под *рангом рефлексии* (точнее – под рангом стратегической рефлексии) *в биматричных играх*. В биматричных (и не только биматричных – см. [25]) играх выбор действий агентами может осуществляться на основании знания рангов рефлексии оппонента. Ранги рефлексии определяются следующим образом. «Агент имеет нулевой ранг рефлексии, если он знает только матрицу платежей. Агент обладает первым рангом рефлексии, если он считает, что его противники имеют нулевой ранг рефлексии, то есть знают только матрицу платежей. Вообще, агент с $k$-ым рангом рефлексии предполагает, что его противники имеют $k$–1-й ранг рефлексии. Он проводит за них необходимые рассуждения по выбору стратегии и выбирает свою стратегию на основе знания

[42] Если отказаться от этих предположений, то все полученные в настоящем разделе результаты останутся в силе, так как вводимые предположения позволяют получить для максимального целесообразного ранга стратегической рефлексии оценку сверху.

матрицы платежей и экстраполяции действий своих противников» [133]. Приведем иллюстративный пример.

Пример 3.2.1 (*Игра в прятки*) [132]. Первый агент прячется в одной из нескольких комнат разной освещенности, а другой агент должен выбрать ту комнату, где будет его искать. Степени освещенности известны обоим агентам (несколько более усложненная игра описана в [221]).

Стратегии агентов следующие. Ищущий при прочих равных условиях предпочитает искать, где светлее (там проще найти). Прячущемуся понятно, что в более темной комнате шансов найти его меньше, чем в освещенной. Возрастание ранга рефлексии означает, что агенту становится понятно, что это понятно и его противнику, и т.д. Представим ранги рефлексии агентов и соответствующие действия по выбору комнат в виде Табл. 6.

*Табл. 6. Ранг рефлексии агентов и соответствующие действия по выбору комнат*

| **Ранг рефлексии агента** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Комната, выбираемая прячущимся** | Самая темная | Любая, кроме самой светлой | Любая, кроме самой темной | Самая светлая | Самая темная |
| **Комната, выбираемая ищущим** | Самая светлая | Самая темная | Любая, кроме самой светлой | Любая, кроме самой темной | Самая светлая |

Можно видеть, что после второго ранга рефлексии исчерпывается все множество допустимых действий, а после третьего ранга рефлексии стратегии выбора комнат начинают повторяться. Этот факт являлся иллюстрацией того, что в игре двух лиц увеличение рангов рефлексии выше определенного объективно не дает ничего нового, хотя субъективное нарастание сложности может продолжаться.

Несоответствие рангов рефлексии успешности деятельности состоит в следующем. Пусть прячущийся имеет 0-й ранг (прячется в самой темной комнате). Если при этом ищущий имеет 1-й ранг, то он всегда выигрывает (ищет в самой темной комнате). Но если ищущий имеет 3-й ранг (ищет в любой комнате, кроме самой темной), то он всегда проигрывает прячущемуся с 0-м рангом, поскольку тот, как мы помним, не затрудняясь рассуждениями о том, что думает противник, прячется именно в этой самой темной комнате, куда ищущий, проведя серию рефлексивных рассуждений, никогда не заглянет.

Таким образом, невозможно однозначно утверждать, что более высокий ранг рефлексии лучше более низкого. Предпочтительность того или иного ранга определяется его взаимодействием с рангом рефлексии противника. •

Так как в биматричных играх предполагается, что каждый агент имеет некое убеждение о ранге рефлексии оппонента [132, 133], то это позволяет использовать понятие субъективной гарантирующей стратегии. Определим *субъективные гарантирующие стратегии* в биматричной игре $MG_{kl}$:

(1) $i_k = \arg\max\limits_{i \in I} a_{ij_{k-1}}$, $j_l = \arg\max\limits_{j \in J} b_{i_{l-1}j}$, $k, l \in \aleph$.

Таким образом, игра $MG_{00}$ совпадает с исходной игрой, а «равновесием» в игре $MG_{kl}$ является $(a_{i_k j_l}; b_{i_k j_l})$, $k, l \in \aleph$. Отметим два любопытных факта. Во-первых, выигрыш любого агента в игре $MG_{kl}$ при $k \geq 1, l \geq 1$ может оказаться меньше максимального гарантированного (см. пример «Снос на мизере» ниже). Во-вторых, приписывание каждым агентом оппоненту ранга рефлексии на единицу меньше его собственного противоречиво, так как в игре $MG_{kl}$ при $k \geq 1, l \geq 1$ это означает, что должно одновременно выполняться

$$l = k - 1 \text{ и } k = l - 1,$$

что, очевидно, невозможно. Следовательно, равновесие в рефлексивной игре является существенно субъективным, и априори агенты не знают, в какую игру они играют (ранги рефлексии обоих агентов не могут быть общим знанием, так как это противоречило бы самому определению ранга рефлексии). Поэтому перспективным направлением будущих исследований представляется изучение информационной рефлексии относительно рангов рефлексии агентов в биматричных играх.

Внутренняя противоречивость стратегической рефлексии в биматричных играх может быть проиллюстрирована следующей схемой – на Рис. 45 приведено субъективное описание игры $MG_{kl}$ в терминах графа рефлексивной игры с точки зрения первого агента, на Рис. 46 – субъективное описание той же игры с точки зрения второго агента.

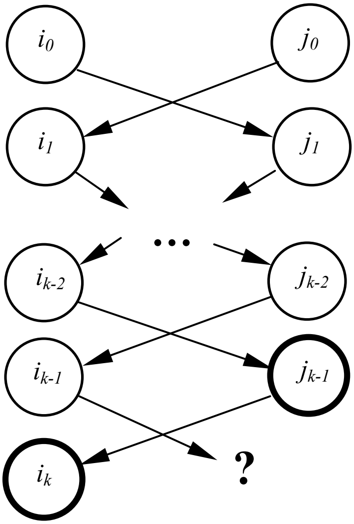


Рис. 45. Субъективное описание игры $MG_{kl}$ с точки зрения первого агента

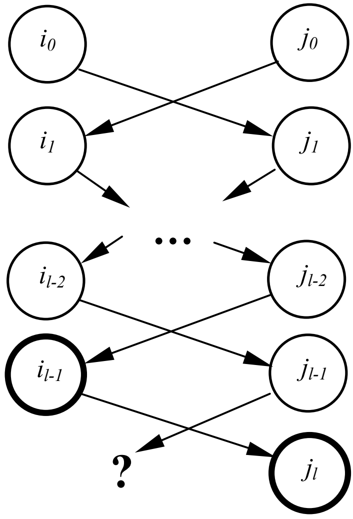


Рис. 46. Субъективное описание игры $MG_{kl}$ с точки зрения второго агента

Как отмечалось выше (см. раздел 2.4), граф рефлексивной игры обладает тем свойством, что число дуг, входящих в каждую его вершину, должно быть на единицу меньше, чем число агентов (то есть в биматричных играх равняться единице). Субъективные равновесные действия выделены жирным шрифтом и приводят к «равновесию» $(i_k, j_l)$. Действия $i_{k-1}$ для первого агента и $j_{l-1}$ для второго не используются в соответствующих субъективных описаниях игры (см. знаки вопроса на Рис. 45 и Рис. 46), то есть каждое из них оказывается внутренне незамкнутым.

Завершив краткое обсуждение внутренней противоречивости определения ранга стратегической рефлексии в биматричных играх, вернемся к исследованию зависимости субъективного равновесия и выигрышей агентов от рангов их рефлексии.

Обозначим $I_K = \bigcup_{k=0,1,\ldots,K} i_k$, $J_L = \bigcup_{l=0,1,\ldots,L} j_l$, $K = 0, 1, 2, \ldots,$ $L = 0, 1, 2, \ldots$ . Под $I_\infty$ и $J_\infty$ будем понимать соответствующие объединения по всем рангам рефлексии от нуля до бесконечности.

Если одному агенту (или обоим агентам) неизвестен ранг рефлексии оппонента, то целесообразно рассмотрение игры $MG_{\infty\infty}$, в которой каждый агент вычисляет гарантированный результат по рангу рефлексии оппонента. Введем гарантирующие стратегии, соответствующие полной неопределенности относительно ранга рефлексии оппонента:

(2) $i_\infty = \arg \max\limits_{i \in I} \min\limits_{j \in J_\infty} a_{ij}$, $j_\infty = \arg \max\limits_{j \in J} \min\limits_{i \in I_\infty} b_{ij}$.

Аналогично можно определить гарантирующие стратегии в рамках информации о том, что ранг рефлексии оппонента не превышает известной величины (то есть первый агент считает, что ранг рефлексии второго не выше $L$, а второй – что ранг рефлексии первого не выше $K$):

(3) $i^L = \arg \max\limits_{i \in I} \min\limits_{l \in J_L} a_{ij_l}$, $j^K = \arg \max\limits_{j \in J} \min\limits_{k \in I_K} b_{i_k j}$ .

Отметим, что в (3), в отличие от (1), стратегия каждого из агентов не зависит от его собственного ранга рефлексии, а определяется информацией о ранге рефлексии оппонента.

Выражения (1)-(3) не исчерпывают всего многообразия возможных ситуаций, так как, например, первый агент может предположить, что второй выберет $j_\infty$, и тогда его наилучшим ответом будет $\arg \max\limits_{i \in I} a_{ij_\infty}$, и т.д. Кроме того, хотя к увеличению ранга рефлексии способны лишь «сильные» агенты, интуитивно понятно, что при росте этого ранга, то есть при удлинении цепочки рассуждений «я думаю, что он думает, что я думаю...» есть опасность «перемудрить». Сильный агент с высоким рангом рефлексии переоценивает противника, предполагая, что у него ранг рефлексии тоже высокий. Но, если ранг соперника на самом деле низкий, это приводит к проигрышу более слабому противнику [134] – см. примеры «Игра в прятки» и «Снос на мизере». Следовательно, необходимо систематическое исследование соотношения выигрышей агентов в зависимости от типа разыгрываемой игры. Приведем результаты этого исследования.

Существенным для нашего рассмотрения является наличие или отсутствие равновесия Нэша, а также выбор агентами (и использование при построении субъективных равновесий) гарантирующих стратегий или действий, равновесных по Нэшу. Таким образом, возможны следующие четыре ситуации.

<u>Вариант 1</u> (равновесие Нэша в чистых стратегиях существует, и агенты ориентируются на равновесные по Нэшу действия).

Обозначим $(i^*; j^*)$ – номера равновесных по Нэшу чистых стратегий. Тогда, если по аналогии с (1) считать, что в рефлексивной игре каждый агент выбирает свой наилучший ответ на выбор оппонентом соответствующей компоненты равновесия, то получим, что

(4) $i_k = \arg\max_{i \in I} a_{ij^*}$, $j_l = \arg\max_{j \in J} b_{i^*j}$, $k, l \in \aleph$.

Из (4) в силу определения равновесия Нэша следует, что $i_k = i^*, j_l = j^*$, $k, l \in \aleph$, то есть в рамках варианта 1 стратегическая рефлексия бессмысленна[43] (за исключением, быть может, случая, когда наилучшие ответы определяются таким образом, что агенты выбирают компоненты различных равновесий Нэша в случае, когда последних несколько).

<u>Вариант 2</u> (равновесие Нэша в чистых стратегиях существует, но агенты выбирают гарантирующие стратегии (1)).

Если гарантирующие стратегии образуют равновесие Нэша (как это имеет место в антагонистических играх с седловой точкой), то попадаем в условия варианта 1. Следовательно, стратегическая рефлексия имеет смысл, только если в рамках варианта 2 равновесие Нэша не совпадает с равновесием в гарантирующих стратегиях $(i_0, j_0)$.

<u>Вариант 3</u> (равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, и агенты ориентируются на равновесные по Нэшу смешанные стратегии[44]).

Если агенты при определении своих наилучших ответов по аналогии с (4) рассчитывают на то, что оппонент выберет равновесные по Нэшу смешанные стратегии, то легко показать, что максимум ожидаемого выигрыша каждого агента будет достигаться при выбо-

[43] Под бессмысленностью стратегической рефлексии в биматричных играх будем понимать случай, когда равновесие в рефлексивной игре с любой комбинацией ненулевых рангов рефлексии агентов совпадает с равновесием в исходной игре.

[44] Напомним, что в биматричных играх равновесие Нэша в смешанных стратегиях всегда существует.

ре им также соответствующей равновесной по Нэшу смешанной стратегии. Следовательно, в рамках варианта 3 любое равновесие совпадает с равновесием Нэша в смешанных стратегиях, то есть стратегическая рефлексия в этом случае бессмысленна.

Вариант 4 (равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, и агенты ориентируются на гарантирующие стратегии (1)).

В четвертом варианте анализ рефлексии, очевидно, имеет смысл.

Таким образом, рассмотрев все четыре возможных варианта поведения агентов, получаем, что обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.2.1. Стратегическая рефлексия в биматричных играх имеет смысл, если агенты используют субъективные гарантирующие стратегии (1), которые не являются равновесными по Нэшу.

Обозначим

(5) $K_{min} = \min \{K \in \aleph \mid I_K = I_\infty\}$,

(6) $L_{min} = \min \{L \in \aleph \mid J_L = J_\infty\}$.

Содержательно, $K_{min}$ и $L_{min}$ – минимальные ранги рефлексии первого и второго агентов, при которых их множества субъективных равновесных действий совпадают с максимально возможными в рассматриваемой игре множествами субъективных гарантирующих стратегий.

В силу определения $\forall K, L \in \aleph \quad I_K \subseteq I_{K+1},\ J_L \subseteq J_{L+1}$. Значит $\forall K \geq K_{min}\ \ I_K = I_\infty$, $\forall L \geq L_{min}\ \ J_L = J_\infty$.

Если ранг рефлексии первого и второго агентов не превышает $K$ и $L$ соответственно, то множества субъективных гарантирующих стратегий первого и второго агентов с точки зрения оппонента равны $I_{L-1}$ и $J_{K-1}$ соответственно. Значит, увеличение рангов рефлексии может приводить к расширению множества субъективных гарантирующих стратегий, если

(7) $L - 1 < K_{min}$,

(8) $K - 1 < L_{min}$.

Отметим, что с рассматриваемой точки зрения *максимальный целесообразный ранг рефлексии*[45] первого агента зависит от свойств

[45] Под максимальным целесообразным рангом рефлексии агента будем понимать такое его значение, что увеличение ранга рефлексии выше данного не приводит к появлению новых субъективных (с точки зрения данного агента) равновесий.

субъективных гарантирующих стратегий второго агента (см. (8)), и наоборот.

С другой стороны, агенту не имеет смысла увеличивать ранг своей рефлексии, если он уже «исчерпал» собственное множество возможных субъективных равновесных действий. С этой точки зрения увеличение рангов рефлексии может приводить к расширению множества субъективных гарантирующих стратегий, если

(9) $K < K_{min}$,

(10) $L < L_{min}$.

Объединяя (8) и (9), а также (7) и (8), получаем, что первому агенту не имеет смысла увеличивать свой ранг рефлексии выше

(11) $K_{max} = \min \{K_{min}, L_{min} + 1\}$,

а второму агенту не имеет смысла увеличивать свой ранг рефлексии выше

(12) $L_{max} = \min \{L_{min}, K_{min} + 1\}$.

Обозначим

(13) $R_{max} = \max \{K_{max}, L_{max}\}$.

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.2.2. Использование агентами в биматричной игре рангов стратегической рефлексии выше, чем (11) и (12), не имеет смысла[46].

Утверждение 3.2.2 дает возможность в каждом конкретном случае (для конкретной разыгрываемой игры) каждому агенту (и исследователю операций) вычислить максимальные целесообразные ранги стратегической рефлексии обоих агентов.

Так как величины (11)-(13) зависят от игры (матриц выигрышей), то получим оценки зависимости этих величин от размерности матриц выигрышей (очевидно, что $|I_\infty| \le |I| = n$, $|J_\infty| \le |J| = m$, а для игр размерности два справедлива более точная оценка – см. утверждение 3.2.3). Для этого введем в рассмотрение граф наилучших ответов.

*Графом наилучших ответов* $G = (V, E)$ назовем конечный двудольный ориентированный граф, в котором множество вершин $V = I \cup J$, а дуги проведены от каждой вершины (соответствующей

[46] То есть для любого ранга рефлексии, превышающего указанные оценки, найдется ранг рефлексии, удовлетворяющий указанным оценкам и приводящий к тому же субъективному равновесию.

действию одного из агентов) к наилучшему на нее ответу оппонента. Опишем свойства введенного графа:

1. Из каждой вершины множества $I$ выходит дуга в вершину множества $J$ (у второго агента есть наилучший ответ на любое действие первого агента), из каждой вершины множества $J$ выходит дуга в вершину множества $I$ (у первого агента есть наилучший ответ на любое действие второго агента).

2. В каждую вершину множества $V$ входит ровно одна дуга (так как каждое действие каждого агента является наилучшим ответом на какое-либо действие оппонента).

3. Если любой путь дважды прошел через одну и ту же вершину, то по определению наилучших ответов его часть является контуром, и в дальнейшем новых вершин в этом пути не появится.

4. Максимальное число попарно различных действий первого агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине $i_0$, равно $\min(n; m + 1)$.

5. Максимальное число попарно различных действий второго агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине $i_0$, равно $\min(n; m)$.

6. Максимальное число попарно различных действий первого агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине $j_0$, равно $\min(n; m)$.

7. Максимальное число попарно различных действий второго агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине $j_0$, равно $\min(n + 1; m)$.

Выявленные свойства графа наилучших ответов позволяют получить оценки сверху целесообразных рангов стратегической рефлексии в биматричных играх.

<u>Утверждение 3.2.3.</u> В биматричных играх $2 \times 2$, в которых не существует равновесия Нэша, $I_\infty = I$, $J_\infty = J$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную биматричную игру $2 \times 2$, в которой не существует равновесия Нэша. Пусть $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{y_1, y_2\}$. Вычислим гарантирующие стратегии $i_0$ и $j_0$. Положим для определенности $x_1 = i_0$, $y_1 = j_0$.

Возможны два взаимоисключающих варианта: $j_1 = y_1$ и $j_1 = y_2$.

Если $j_1 = y_1$, то $i_1 = i_2 = x_2$ (иначе $(x_1, y_1)$ – равновесие Нэша). Тогда $j_2 = j_3 = y_2$ (иначе $(x_2, y_1)$ – равновесие Нэша). Следовательно,

$i_3 = i_4 = x_1$ (иначе $(x_2, y_2)$ – равновесие Нэша). То есть в первом случае $I_\infty = I$, $J_\infty = J$.

Если $j_1 = y_2$, то $i_2 = x_2$ (иначе $(x_1, y_2)$ – равновесие Нэша). Тогда $j_3 = y_1$ (иначе $(x_2, y_2)$ – равновесие Нэша). Следовательно, $i_4 = x_1$ (иначе $(x_2, y_1)$ – равновесие Нэша). То есть во втором случае также $I_\infty = I$, $J_\infty = J$. •

Качественно, утверждение 3.2.3 означает, что в биматричной игре $2 \times 2$, в которой не существует равновесия Нэша, любой исход может быть реализован как субъективное равновесие.

Перспективным направлением дальнейших прикладных исследований можно считать анализ субъективных равновесий в базовых *ординарных играх двух лиц* $2 \times 2$ (напомним, что существуют 78 структурно различных ординарных игр, то есть игр, в которых оба агента, каждый из которых имеет два допустимых действия, может строго упорядочить собственные выигрыши от лучшего к худшему [191, 249]).

Утверждение 3.2.3 наводит на мысль, что, быть может, во всех биматричных играх, в которых не существует равновесия Нэша, выполнено $I_\infty = I$, $J_\infty = J$. Контрпримером служит приведенный на Рис. 47 граф наилучших ответов в игре $4 \times 4$, в котором вершины $i_0$ и $j_0$ затенены.

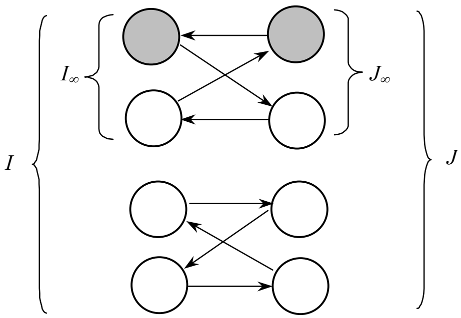


Рис. 47. Пример графа наилучших ответов
в биматричной игре $4 \times 4$, в которой $I_\infty \subset I$, $J_\infty \subset J$

Имея грубые оценки сверху ($|I_\infty| \leq n$, $|J_\infty| \leq m$) «размеров» множеств $I_\infty$ и $J_\infty$, исследуем, как быстро (при каких минимальных рангах стратегической рефлексии) эти множества «покрываются» соответствующими субъективными равновесиями.

Третье свойство графа наилучших ответов означает, что в биматричной игре целесообразное увеличение ранга стратегической рефлексии, начиная со второго шага, обязательно изменяет множество стратегий, которые должны быть субъективными гарантирующими при рангах рефлексии меньших или равных данному.

Так как в биматричных играх множества допустимых действий конечны, то конечны множества $I_\infty$ и $J_\infty$, следовательно, в силу свойств 4-7 графа наилучших ответов конечны и величины $L_{min}$ и $K_{min}$, то есть **в биматричных играх неограниченное увеличение ранга рефлексии заведомо нецелесообразно**. Опять же в силу конечности допустимых множеств, величины (11) и (12), определяющие максимальные целесообразные ранги рефлексии, могут быть легко рассчитаны для любой конкретной биматричной игры. Но свойства графа наилучших ответов позволяют получить конкретные оценки сверху максимальных целесообразных рангов рефлексии.

В биматричной игре $n \times m$ гарантированные оценки[47] величин (11)-(13), очевидно, будут зависеть от размерности матриц выигрышей, то есть $K_{min} = K_{min}(n)$, $L_{min} = L_{min}(m)$. Следовательно,

(14) $K_{max}(n, m) = \min \{K_{min}(n), L_{min}(m) + 1\}$,

(15) $L_{max}(n, m) = \min \{L_{min}(m), K_{min}(n) + 1\}$.

Выражение (13) примет при этом вид:

(16) $R_{max}(n, m) = \max \{K_{max}(n, m), L_{max}(n, m)\}$.

Из свойств 4-7 графа наилучших ответов и выражений (14)-(16) следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.2.4. В биматричных играх $n \times m$ максимальные целесообразные ранги стратегической рефлексии первого и второго агентов удовлетворяют следующим неравенствам

(17) $K_{max}(n, m) \le \min \{n, m + 1\}$,

(18) $L_{max}(n, m) \le \min \{m, n + 1\}$,

(19) $R_{max}(n, m) \le \max \{\min \{n, m + 1\}, \min \{m, n + 1\}\}$.

Следствие 1. В биматричной игре $n \times n$, $n \ge 2$, максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии любого агента[48]

$$R_{max}(n, n) \le n.$$

[47] Под гарантированной оценкой будем понимать оценку сверху, то есть максимально возможную для данного класса игр соответствующую величину.

[48] Очевидно, что в игре, в которой один из агентов имеет единственное допустимое действие, рефлексия бессмысленна.

Для случая двух допустимых действий (в силу его распространенности в прикладных моделях) сформулируем отдельное следствие.

Следствие 2. В биматричной игре $2 \times 2$ максимальный целесообразный ранг рефлексии не превосходит двух.

Еще раз отметим, что оценки (17)-(19) являются оценками сверху – существование нескольких наилучших ответов на одно и то же действие, наличие в исходной игре равновесия Нэша или доминируемых стратегий может привести только к тому, что максимальный целесообразный ранг рефлексии уменьшится.

Рекламную версию утверждения 3.2.4 можно сформулировать следующим образом: **в биматричной игре максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии превышает минимальное число допустимых стратегий агентов не более чем на единицу**.

Приведем примеры, иллюстрирующие полученные теоретические результаты анализа стратегической рефлексии в биматричных играх (см. также пример 3.2.1 выше).

Пример 3.2.2 (*Дилемма заключенного*) [243]. Рассмотрим хрестоматийную биматричную игру (“Prisoners’ Dilemma”): у каждого из двух заключенных-сообщников есть два действия: «Н» – «не сознаваться в совершении преступления» и «С» – «сознаться в совершении преступления». Если сознаются оба агента, то они получают наказание – их выигрыш есть вектор (1; 1). Если первый сознается, а второй нет, то первый выходит на свободу, а второй получает значительное наказание – вектор выигрышей (исход) – (6; 0). Симметричным образом обстоит дело, если сознается второй агент и не сознается первый. И, наконец, если не сознаются оба, то оба получают небольшое наказание, каждый получая выигрыш равный 5, то есть меньший, чем если бы он вышел на свободу. Матрица выигрышей приведена на Рис. 48 (отметим, что действие «С» у обоих агентов доминирует действие «Н»).

| Действия | **Н** | **С** |
|---|---|---|
| **Н** | (5; 5) | (0; 6) |
| **С** | (6; 0) | (1; 1) |

Рис. 48. Матрица выигрышей в игре «Дилемма заключенного»

Единственным равновесием Нэша в рассматриваемой игре является («С»; «С»), которое состоит из гарантирующих стратегий агентов и дает им соответственно выигрыши $a_0 = 1$ и $b_0 = 1$. Следовательно, $i_0 = i_1 = i_2 = \dots i_\infty =$ «С», $j_0 = j_1 = j_2 = \dots j_\infty =$ «С», и рассмотрение рефлексии в данной игре бессмысленно (по крайней мере, ни одно из определений (1)-(3) не дает «нового» равновесия, то есть отличного от равновесия Нэша, в том числе, не позволяет обосновать устойчивости Парето-эффективного исхода («Н»; «Н»), что является одной из тестовых проблем теории игр). •

Пример 3.2.3 (*Семейный спор*) [243]. Рассмотрим вторую хрестоматийную биматричную игру ("Battle of Sexes"), которую разыгрывают муж и жена. Муж предпочитает пойти на футбол («Ф»), а жена – в театр («Т»), но каждый из них предпочитает провести время с партнером, нежели в одиночестве. Матрица выигрышей приведена на Рис. 49.

| Действия | **Ф** | **Т** |
|---|---|---|
| **Ф** | (3; 1) | (0; 0) |
| **Т** | (0; 0) | (1; 3) |

Рис. 49. Матрица выигрышей в игре «Семейный спор»

В рассматриваемой игре существуют два равновесия Нэша в чистых стратегиях – («Ф»; «Ф») и («Т»; «Т»). С точки зрения рефлексии каждому агенту выгодно повторять выбор оппонента, однако, так как выбор любого допустимого действия является гарантирующей стратегией, выделить определенный исход в соответствующей рефлексивной игре не представляется возможным.

Помимо двух равновесий Нэша в чистых стратегиях, в данной игре существует одно равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Пусть $p \in [0; 1]$ – вероятность выбора мужем похода на футбол, $q \in [0; 1]$ – вероятность выбора женой похода в театр. Тогда равновесием будет $p = q = 3/4$, то есть равновесие в смешанных стратегиях имеет вид: (3/4, 1/4) и (1/4, 3/4), обеспечивая агентам ожидаемые выигрыши (3/4; 3/4).

Если муж считает, что ему известна смешанная стратегия жены, то он может выбирать $p_1 = \arg \max\limits_{p \in [0;1]} [3\, p / 4 + 3\, (1 - p) / 4]$. Видно, что ожидаемый выигрыш мужа не зависит от его смешанной стратегии и равен 3/4. Аналогичный вывод можно сделать и для стратегии $q_1$ жены, а также для всех других рефлексивных смешанных стратегий обоих агентов. Другими словами, любым рефлексивным равновесием в смешанных стратегиях будет равновесие Нэша в смешанных стратегиях, следовательно, в этом случае рассмотрение рефлексии бессмысленно. •

Пример 3.2.4 (*Снос на мизере*). Данный пример является частным случаем примера «Игра в прятки» и заключается в следующем. Пусть во время партии в преферанс один из партнеров играет мизер. Будем считать его агентом номер один. Всех остальных участвующих в игре будем считать агентом номер два.

Предположим, что у первого агента есть два действия: «С» – стандартный снос, и «Н» – нестандартный снос. У его оппонента (второго агента, ловящего мизер) тоже есть два действия: «С» – ловить стандартный снос и «Н» – ловить нестандартный снос. Если первый агент делает стандартный снос, а второй ловит нестандартный, то выигрывает первый агент – вектор выигрышей имеет вид (5; 0). Выигрыши (5; 1) получаются в ситуации, когда первый агент делает нестандартный снос, а второй ловит стандартный (стандартный снос ловить проще, чем нестандартный). Будем считать, что нестандартный снос поймать сложнее, чем стандартный, поэтому ситуациям («С»; «С») и («Н»; «Н») соответствуют выигрыши (2, 3) и (3, 2). Таким образом, матрица выигрышей имеет вид, приведенный на Рис. 50.

| Действия | **Н** | **С** |
|---|---|---|
| **Н** | (3; 2) | (5; 1) |
| **С** | (5; 0) | (2; 3) |

Рис. 50. Матрица выигрышей в игре «Снос на мизере»

В рассматриваемом примере равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, а гарантирующие стратегии следующие: $i_0$ = «Н», $j_0$ = «С». В соответствии с выражением (1) получаем:

$i_1$ = «Н», $j_1$ = «Н»,

$i_2$ = «С», $j_2$ = «Н»,

$i_3$ = «С», $j_3$ = «С»,

$i_4$ = «Н», $j_4$ = «Н»,

…

Видно, что четвертый уровень одинаковых рангов рефлексии повторяет первый, и дальше субъективные гарантирующие стратегии будут периодически повторяться. Кроме того, $I_K = I$ при $K = 2$, а $J_L = J$ при $L = 1$, то есть первые два ранга рефлексии исчерпывают множества допустимых действий агентов, а первые три ранга исчерпывают все комбинации чистых стратегий. То есть $I_\infty = I$, $J_\infty = J$ и $i_\infty = i_0, j_\infty = j_0$.

Первому агенту выгодны следующие игры (то есть следующие комбинации рангов рефлексии): $MG_{00}$, $MG_{03}$, $MG_{10}$, $MG_{13}$, $MG_{21}$, $MG_{22}$, $MG_{32}$. При этом он в пяти случаях из семи имеет ранг рефлексии, не меньший, чем у оппонента.

Второму агенту выгодны следующие игры: $MG_{01}$, $MG_{02}$, $MG_{11}$, $MG_{12}$, $MG_{23}$, $MG_{33}$. При этом он во всех шести случаях имеет ранг рефлексии, не меньший, чем у оппонента.

Как отмечалось выше, выигрыш агента может оказаться меньше его МГР. Так, МГР первого агента в рассматриваемой игре равен трем, второго – единице. В играх $MG_{20}$, $MG_{23}$ и $MG_{33}$ первый агент получает выигрыш, равный двум, что строго меньше его МГР $a_0 = 3$. В играх $MG_{22}$, $MG_{31}$ и $MG_{32}$, второй агент получает нулевой выигрыш, что строго меньше его МГР $b_0 = 1$.

Вычислим для рассматриваемой игры равновесие в смешанных стратегиях. Обозначая $p$ – вероятность нестандартного сноса первым агентом, $q$ – вероятность ловли нестандартного сноса вторым агентом, получаем: $p = 3/4$, $q = 3/5$. То есть равновесие в смешанных стратегиях имеет вид: (3/4, 1,4) и (3/5, 2/5), что обеспечивает агентам ожидаемые выигрыши (19/5; 3/2). Если первый агент считает, что ему известна смешанная стратегия второго, то он может выбирать $p_1 = \arg \max\limits_{p \in [0;1]} [p\,(9/5 + 2) + (1 - p)\,(3 + 4/5)]$. Видно, что ожидаемый выигрыш первого агента не зависит от его смешанной стратегии и равен 19/5. Аналогичный вывод можно сделать и для стратегии $q_1$ второго агента, а также для всех других рефлексивных смешанных стратегий обоих агентов. Другими словами, любым рефлексивным равновесием в смешанных стратегиях будет равновесие Нэша в смешанных стратегиях, следовательно, в этом случае рассмотрение рефлексии бессмысленно. •

Еще раз напомним, что в реальных играх двух лиц (в том числе – описываемых биматричными играми) тип разыгрываемой игры (ранги рефлексии обоих оппонентов *k* и *l*) неизвестен достоверно ни одному из агентов. Поэтому процесс принятия ими решений стоит рассматривать скорее не как игру, а как рефлексивное принятие решений, которое состоит из двух этапов – принятие предположения о значении ранга рефлексии оппонента и выбор соответствующего этому рангу собственного наилучшего ответа. С этой точки зрения полученные в настоящем разделе результаты связывают мощности множеств стратегий агентов с максимальными рангами рефлексии, которые имеет смысл рассматривать.

Рассматривая стратегическую рефлексию агентов в биматричных играх, можно условно считать, что агенты переходят от выбора своих действий (строки и столбца биматрицы выигрышей) к выбору своих рангов рефлексии. Соответствующая игра называется игрой рангов [40].

**Игра рангов**. Введем следующие предположения. Пусть матрицы выигрышей таковы, что у каждого агента существует единственный наилучший ответ на любое действие оппонента:

$$(20)\quad \forall\ j \in J\ \ \left| Arg\max_{i\in I} a_{ij} \right| = 1,\ \forall\ i \in I\ \ \left| Arg\max_{j\in J} b_{ij} \right| = 1$$

(здесь и далее через $|M|$ обозначается количество элементов множества $M$).

Пусть, кроме того, максимальный гарантированный результат каждого агента достигается ровно на одном действии:

$$(21)\quad \left| Arg\max_{i\in I}\min_{j\in J} a_{ij} \right| = \left| Arg\max_{j\in J}\min_{i\in I} b_{ij} \right| = 1 \cdot$$

Условия (20) и (21), обеспечивающие однозначное соответствие между рангом рефлексии агента и его действием, далее будем считать выполненными.

Как было сказано выше, каждый агент может выбрать конечный ранг свой рефлексии. Это приводит к выбору соответствующего действия: обладая нулевым рангом, первый агент выбирает гарантирующую стратегию – действие $i_0 = \arg\max_{i\in I}\min_{j\in J} a_{ij}$, а обладая рангом $k \geq 1$ – действие $i_k = \arg\max_{i\in I} a_{ij_{k-1}}$. Аналогично для действий второго агента: $j_0 = \arg\max_{j\in J}\min_{i\in I} b_{ij}$ – при нулевом ранге; $j_k = \arg\max_{j\in J} b_{i_{k-1}j}$ – при ранге $k \geq 1$.

Из утверждения 3.2.4 следует, что множество допустимых действий по выбору ранга конечно. Поэтому мы можем перейти из исходной игры к **игре рангов** стратегической рефлексии, в которой стратегией агента является выбор ранга стратегической рефлексии (см. Табл. 7).

*Табл. 7. Ранги рефлексии и действия агентов*

| Ранг $k$ | 0 | 1 | … | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| Действие первого агента | $i_0$ | $i_1$ | … | $i_R$ |
| Действие второго агента | $j_0$ | $j_1$ | … | $j_R$ |

Верхняя оценка количества возможных попарно-различных пар стратегий составляет $|I| \times |J| = m \times n$. Тогда исходную биматричную игру можно преобразовать в биматричную игру $R \times R$.

Ясно, что некоторые строки и столбцы этой новой матрицы могут совпадать (это означает, что выбор агентами разных рангов приводит к одному и тому же действию в исходной игре). Отождествив совпадающие строки и столбцы, мы получаем матрицу новой игры, которую будем называть *игрой выбора ранга стратегической рефлексии*, или для краткости *игрой рангов*.

В силу того, что $i_k \in I$, $j_k \in J$, все действия агентов в игре рангов соответствуют действиям в исходной игре. Следовательно, справедливым является следующее утверждение.

Утверждение 3.2.5. Матрица выигрышей в игре рангов является подматрицей матрицы исходной биматричной игры.

Утверждение 3.2.5 наводит на мысль о том, что при переходе к игре рангов равновесия могут исчезать (т. е. отсутствовать в матрице игры рангов). Действительно, приведем пример биматричной игры (пример 3.2.5): $\begin{pmatrix} (2,3) & (0,0) & (3,2) \\ (0,0) & (4,4) & (0,1) \\ (3,2) & (1,0) & (2,3) \end{pmatrix}$.

Чтобы построить матрицу игры рангов, проанализируем выбор агентов при том или ином ранге рефлексии – см. Табл. 8.

*Табл. 8. Ранги рефлексии и действия агентов в примере* 3.2.5

| Ранг $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Действие первого агента | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | … |
| Действие второго агента | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | … |

Таким образом, матрица игры рангов выглядит следующим образом: $\begin{pmatrix} (2, 3) & (3, 2) \\ (3, 2) & (2, 3) \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что равновесная пара выигрышей исходной игры (4, 4) исчезла при переходе к игре рангов. •

Возникает вопрос: могут ли при переходе к игре рангов появляться новые равновесия (которых не было в исходной игре)? Оказывается, что это невозможно.

Утверждение 3.2.6. Для произвольной биматричной игры переход к игре рангов не приводит к появлению новых равновесий.

Доказательство. Пусть, как и ранее, $I$ – множество действий первого агента, $J$ – множество действий второго агента. Пусть, далее, $I' \subseteq I$ и $J' \subseteq J$ – множества действий первого и второго агентов соответственно в игре рангов.

Рассмотрим пару действий $(i_u, j_v)$, $i_u \in I'$, $j_v \in J'$, являющуюся равновесием игры рангов.

Покажем сначала, что наилучшим ответом второго игрока на действие первого $i_u$ в исходной игре является $j_v$. Действительно, наилучший ответ на множестве $J$ входит в $J'$ (по правилу построения игры рангов), поэтому наилучший ответ на множестве $J'$ такой же, как наилучший ответ на множестве $J$. Но, по определению равновесия, наилучший ответ на множестве $J'$ – это как раз $j_v$.

Аналогично, наилучшим ответом первого игрока на стратегию второго $j_v$ в исходной игре является $i_u$. Поэтому пара действий $(i_u, j_v)$ является равновесием исходной игры.

В силу произвольности выбора равновесной пары получаем, что любое равновесие игры рангов является равновесием исходной игры, т. е. новых равновесий не появится. •

Итак, при переходе к игре рангов новые равновесия не появляются (утверждение 3.2.6), а существующие могут исчезать (пример 3.2.5). Относительно количества равновесий в игре рангов справедливо следующее утверждение (которое существенно использует условия (20) и (21)).

Утверждение 3.2.7. Если выполнены условия (20) и (21), то в игре рангов существует не более двух равновесий.

Доказательство. Пусть в игре рангов существует три различных равновесия: $(i_u, j_v)$, $(i_{u'}, j_{v'})$ и $(i_{u''}, j_{v''})$. По утверждению 3.2.6 они являются равновесиями и в исходной игре. Тогда в силу (20) $i_u \neq i_{u'} \neq i_{u''}$. Без ограничения общности предположим, что $u = \max\ \{u;\ u';\ u''\}$. Поскольку в равновесии действие агента является наилучшим ответом на действие оппонента, справедливы соотношения: $i_u = i_{v+1} = i_{u+2} = i_{v+3} = i_{u+4} = \dots$ ; $j_v = j_{u+1} = j_{v+2} = \dots$ Аналогичные соотношения верны для $i_{u'}$, $i_{u''}$. Следовательно, $i_{u+1} = i_{u'}$, $i_{u+1} = i_{u''}$. Но тогда $i_{u'} = i_{u''}$. Полученное противоречие доказывает утверждение 3.2.7. •

Следует отметить, что в некоторых случаях любой исход игры рангов дает обоим игрокам лучший результат, чем равновесие. Приведем пример такой биматричной игры (пример 3.2.6): $\begin{pmatrix} (6,10) & (0,0) & (10,6) \\ (0,0) & (5,5) & (0,1) \\ (10,6) & (1,0) & (6,10) \end{pmatrix}$. Равновесие приводит к паре выигрышей (5, 5), что хуже (для обоих агентов) любого из исходов игры рангов, в которой удалены дублирующиеся стратегии: $\begin{pmatrix} (6,10) & (10,6) \\ (10,6) & (6,10) \end{pmatrix}$. •

## 3.3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ РАНГА РЕФЛЕКСИИ

На всем протяжении настоящей работы исследуется нормативный аспект[49] рефлексивного взаимодействия – каким должен быть ранг рефлексии агента (максимальный целесообразный ранг его рефлексии) для того, чтобы его выигрыш в рефлексивной игре был максимален. Другими словами, максимальным целесообразным является такое значение ранга рефлексии, превышение которого не увеличивает выигрыш, и целью исследования является получение соответствующих ограничений исходя только из теоретико-игровой модели.

Во многих случаях оказывается, что с точки зрения нормативной модели принятия решений агенту следует неограниченно увеличивать ранг стратегической рефлексии. С другой стороны, понятно, что существуют *информационные ограничения*, то есть возможности любого реального агента по переработке информации ограничены («когнитивные затраты» могут учитываться в модели в явном виде – см., например, [181]), поэтому бесконечная рефлексия является не чем иным, как математической абстракцией. Поэтому в настоящем разделе на качественном уровне (все приводимые утверждения являются нестрогими, так как лежащие в основе их вывода «аксиомы» являются предположениями, обоснованность которых может показаться спорной) рассматривается взаимосвязь между информационными ограничениями и рангом рефлексии.

В качестве информационного ограничения возьмем общепринятое в психологии *число Миллера* – 7±2 [5, 239], отражающее максимальное число объектов (признаков, альтернатив и т.д.), которыми человек может одновременно оперировать.

Как отмечалось в предыдущем разделе, процесс принятия решений рефлексирующими агентами стоит рассматривать, скорее, не как игру, а как рефлексивное принятие решений, которое состоит из двух этапов – принятия предположений о возможных значениях ранга рефлексии оппонента и выбора соответствующих наилучших ответов.

Рассмотрим процесс принятия решений $i$-ым агентом, точнее – элементарный акт анализа им игровой ситуации. Он может рассуж-

[49] Частные модели, рассматриваемые в рамках дескриптивного аспекта, приведены в четвертой главе настоящей работы.

дать следующим образом. «Предположим, что я намереваюсь выбрать действие $x_i \in X_i$, а оппонент (под оппонентом будем понимать множество всех агентов[50], кроме $i$-го) – действие $x_{-i} \in X_{-i}$ (нулевой ранг рефлексии). Тогда, если этот факт отражен оппонентом (первый ранг рефлексии), то он может выбрать $BR_{-i}(x_i)$, а я – $BR_i(x_{-i})$. Если и этот факт отражен оппонентом (второй ранг рефлексии), то появляются возможности выбора соответственно $BR_{-i}(BR_i(x_{-i}))$ и $BR_i(BR_{-i}(x_i))$». Данная цепочка построения графа наилучших ответов может продолжаться и далее (до тех пор, пока не исчерпается все множество допустимых действий – см. разделы 2.6 и 3.2, или пока в цепочке не перестанут появляться новые действия – см. раздел 3.2), если не учитывать информационных ограничений. Если $w$ – ранг рефлексии, то число действий (число реальных и фантомных агентов), которые необходимо принимать во внимание агенту (при произвольных $x_i \in X_i$ и $x_{-i} \in X_{-i}$), равно $2\,(w + 1)$, а число связей между ними – $(w + 1)!$ (при этом предполагается, что агент считает оппонента примерно таким же рациональным, каким и себя).

Если учесть информационные ограничения, то получим, что, должно выполняться либо $2\,(w + 1) \leq 7\pm2$, либо $(w + 1)! \leq 7\pm2$. Решение первого неравенства в целых положительных числах дает $w \in \{0; 1; 2; 3\}$, второго – $w \in \{0; 1; 2\}$. При числе Миллера равном 7 получаем, что **максимальный (в силу информационных ограничений) ранг стратегической рефлексии равен двум.**

Альтернативным объяснением конечности информационной структуры (и, следовательно, ранга стратегической рефлексии) является ограниченность количества информации, содержащейся в любом сообщении конечной длины. Действительно, иерархия представлений – информационная структура – формируется в результате получения агентами некоторой информации. Если эта информация ограничена, то информационная структура не может быть бесконечной. Установление соответствия между получаемой агентами ин-

[50] В настоящем разделе предполагается, что в многоэлементной системе каждый агент рассматривает всех оппонентов в качестве одного агента. Если отказаться от этого предположения и считать, что каждый агент анализирует возможное поведение каждого из своих оппонентов, то оценки максимального ранга стратегической рефлексии лишь уменьшатся (ему придется рассматривать $n$ реальных агентов и $n!$ связей между ними, что превышает число Миллера уже в системе с четырьмя агентами и на рефлексию «не остается места»).

формацией и формирующейся при этом информационной структурой является перспективной задачей будущих исследований.

Рассмотрев в разделах 3.1-3.3 подходы к описанию стратегической рефлексии в играх двух лиц, перейдем к общему случаю – методу рефлексивных разбиений, позволяющему описывать стратегическую рефлексию любого конечного числа взаимодействующих агентов (концепция рефлексивной структуры – см. следующий раздел), а также ставить и решать задачу рефлексивного управления – целенаправленного формирования требуемых рефлексивных структур.

## 3.4. РЕФЛЕКСИВНЫЕ СТРУКТУРЫ И РЕФЛЕКСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

**Рефлексивные разбиения.** В рамках гипотезы индикаторного поведения (см. раздел 1.3 и [90, 123]) неявно предполагается, что агент, выбирая свои действия в соответствии с процедурой (1.3.2), не задумывается о том, что и другие агенты действуют так же. Если бы он об этом задумался (осуществил рефлексию), то ему следовало бы искать, принимая решения в момент времени $t$, наилучший ответ на прогнозируемые им в рамках выражения (1.3.2) действия других агентов. Т. е. положение цели определялось бы уже не выражением (1.3.1), а следующим образом:

(1) $w_i( x_{-i}^t ) = \arg \max\limits_{y \in \Re^1} F_i(y,\ x_{-i}^t ),$

где $x_{-i}^t$ определяется выражением (1.3.1). При этом можно полагать, что рефлексирующий агент первого ранга считает всех остальных нерефлексирующими, что соответствует существующей в теории принятия решений (см. разделы 3.1 и 3.2) традиции считать, что агент, имеющий некоторый ранг стратегической рефлексии, считает всех остальных имеющими ранг на единицу меньше его собственного. Другие возможные предположения о представлениях агентов о рангах рефлексии оппонентов обсуждаются ниже (например, можно считать, что интеллектуальные агенты одного ранга рефлексии разыгрывают равновесие Нэша [258] и т. д.).

Аналогично можно рассматривать агентов и более высоких рангов рефлексии (в англоязычной литературе почти как синонимы термина «ранг рефлексии $k$» используются термины «step $k$ player», «level $k$ player», «$k$-level player», «smart $k$-player» [235, 258], см. также обзор [109]). Для этого определим $\aleph = \{N_0, \ldots, N_m\}$ – разбиение множества агентов $N$, где $N_i$ – множество агентов $i$-го ранга рефлексии, $i = \overline{0, m}$, $m$ – *максимальный ранг рефлексии*, $n_i = |N_i|$, $i \in N$, $\sum_{i=0}^{m} n_i = n$. Разбиение $\aleph$ называют *рефлексивным разбиением* [64].

Будем пока считать, что агент некоторого ранга рефлексии $k$ достоверно знает множества (или долю – см. ниже) агентов всех более низких рангов $k'$ (где $k' < k - 1$) и считает всех агентов своего и бóльших рангов ($k'' \geq k$) имеющими ранг на единицу меньше себя (т. е. ранг $k - 1$). Этим отражается предположение, что агент не допускает существования агентов, имеющих такой же или более высокий ранг рефлексии, чем он сам. При этом агент может неправильно оценивать множества агентов $k - 1$-го, $k$-го и более высоких рангов рефлексии.

Пусть задан вектор $x^0$ *«начальных» действий* агентов. Рассмотрим следующую динамическую модель рефлексивного принятия ими решений, параллельно помня при этом, что соответствующие выражения для одношаговой «игровой» модели могут быть получены как частный случай, в котором решения принимаются однократно при $\gamma_i^1 \equiv 1$, $i \in N$.

**Нулевой ранг рефлексии.** Будем считать, что агенты с нулевым рангом рефлексии (принадлежащие множеству $N_0$) выбирают свои действия, считая, что действия остальных агентов будут такими же, что и в предыдущем периоде. Тогда из (1.3.1) следует, что

(2) $x_i^t = x_i^{t-1} + \gamma_i^t\ [w_i(x_{-i}^{t-1}) - x_i^{t-1}]$, $i \in N_0$, $t = 1, 2, \ldots$ .

Если рефлексирующих агентов нет ($N_0 = N$), то в итоге все агенты пронаблюдают *реализованную траекторию* $(x^0, \ldots, x^t, \ldots)$ векторов действий агентов, определяемых (2).

**Первый ранг рефлексии.** Агент $j$, обладающий первым рангом рефлексии ($j \in N_1$), считает всех остальных агентов обладающими нулевым рангом рефлексии и в соответствии с (2) «предсказывает» их выбор. Поэтому его собственный выбор $x1_j^t$ будет ориентирован на наилучший ответ на ту обстановку, которая с его точки зрения должна сложиться:

(3) $x1_j^t = x1_j^{t-1} + \gamma_j^t\ [w_j(x_{-j}^t) - x1_j^{t-1}], j \in N_1$.

Для агента $j \in N_1$ *прогнозируемой* является *траектория* $(x^0, \ldots, (x1_j^t, x_{-j}^t), \ldots)$, а на самом деле реализуется траектория $(x^0, \ldots, (x1_{j \in N_1}^t, x_{i \in N_0}^t), \ldots)$. Т. е. реализованная траектория может не совпадать с траекториями, прогнозируемыми как агентами нулевого, так и первого рангов рефлексии. О возможном несовпадении прогнозируемой и реализованной траекторий (и последствиях такого несовпадения) речь пойдет ниже.

В качестве отступления отметим, что всюду в настоящей работе считается, что агенты любого ранга рефлексии достаточно «интеллектуальны» – они выбирают действия, стремясь максимизировать свои целевые функции. Можно допустить наличие и менее интеллектуальных агентов – *агентов-имитаторов* (условно обладающих минус первым рангом рефлексии), действия которых определяются известной функцией от текущих или прошлых действий других агентов (примеры: выбор действия, равного среднему арифметическому действий остальных агентов; или агентов, связанных с данным; или некоторого другого фиксированного агента). Наверное, подобные модели могут адекватно описывать такое явление, как диффузия инноваций и др.

**Второй ранг рефлексии.** Будем считать, что каждый агент $j$, обладающий вторым рангом рефлексии ($j \in N_2$), знает достоверно множество $N_0$ и считает всех агентов из множества $N_1 \cup N_2 \setminus \{j\}$ обладающими первым рангом рефлексии (отметим, что в общем случае, когда имеются несколько агентов второго ранга рефлексии, данный агент ошибочно приписывает им первый ранг). В силу этого он может «прогнозировать» поведение всех своих оппонентов. Поэтому его выбор будет наилучшим ответом на ту обстановку, которая с его точки зрения должна сложиться:

(4) $x2_j^t = x2_j^{t-1} + \gamma_j^t\ [w_j(x_{i \in N_0}^t, x1_{l \in N_1 \cup N_2 \setminus \{j\}}^t) - x2_j^{t-1}], j \in N_2$.

Для агента $j \in N_2$ *прогнозируемой* является *траектория* $(x^0, \ldots, (x2_j^t, x1_{l \in N_1 \cup N_2 \setminus \{j\}}^t, x_{i \in N_0}^t), \ldots)$, а на самом деле реализуется траектория $(x^0, \ldots, (x2_{j \in N_2}^t, x1_{l \in N_1}^t, x_{l \in N_0}^t), \ldots)$.

***k*-й ранг рефлексии** ($k \le m$). Поведение агентов $k$-го ранга рефлексии описывается аналогично рассмотренным выше трем случаям (нулевого, первого и второго рангов рефлексии) с учетом следующей *рефлексивной структуры* агентов. Обозначим через $\aleph_{jk}$ – *субъективное рефлексивное разбиение* – представления агента $j$, обладающего $k$-м рангом рефлексии, о разбиении всех агентов на ранги рефлексии:

$$(5)\ \aleph_{jk} = (\underbrace{N_0, N_1, \ldots, N_{k-2}, N_{k-1} \cup N_k \cup \ldots \cup N_m \setminus \{j\}}_{k}, \{j\}, \underbrace{\varnothing, \ldots, \varnothing}_{m-k-1}), j \in N_k\quad .$$

Агент $k$-го ранга будет выбирать действия в соответствии с процедурой

$$(6)\ xk_j^t = xk_j^{t-1} + \gamma_j^t\ [w_j(x_{l\in N_0}^t,\ x1_{l\in N_1}^t, \ldots,\ x[k-1]_{l\in N_{k-1}\cup N_k\cup\ldots\cup N_m/\{j\}}^t) - $$
$$- xk_j^{t-1}], j \in N_k.$$

В «статическом» случае агент $k$-го ранга выберет действие

$$(7)\ xk_j^*(\aleph_{jk}) = \arg\max_{y\in\Re^1} F_j(y,\ x_{l\in N_0}^1,\ x1_{l\in N_1}^1, \ldots,$$
$$\ldots,\ x[k-1]_{l\in N_{k-1}\cup N_k\cup\ldots\cup N_m/\{j\}}^1), j \in N_k.$$

Итак, ***рефлексивная структура*** определяется совокупностью субъективных рефлексивных разбиений всех агентов. Если предположить, что представления агентов о рангах рефлексии друг друга описываются выражением (5), то рефлексивная структура однозначно задается рефлексивным разбиением $\aleph$. Отметим, что рефлексивная структура (5), введенная в рамках рассмотрения стратегической рефлексии, в некотором смысле аналогична структуре информированности, используемой в моделях информационной рефлексии – см. раздел 2.2.

Вектор действий агентов

$$(7)\ x^*(\aleph) = \{\, xk_j^*(\aleph_{jk})\}_{\ j\in N_k,\, k=\overline{0,m}}$$

называют *рефлексивным равновесием* игры $\Gamma_\aleph = \{N, F_i(\cdot)_{i\in N}, \aleph\}$ [64, 109]. То есть, ***рефлексивное равновесие*** – совокупность действий агентов, являющихся наилучшими ответами на предполагаемые в рамках существующей рефлексивной структуры действия оппонентов. В силу введенных выше предположений о существовании и единственности наилучших ответов рефлексивное равновесие всегда существует. Отметим, что рефлексивное равновесие достаточно экзотично в том смысле, что в нем действия агентов в общем случае не являются наилучшими ответами на действия, выбираемые оппонентами.

Целенаправленно изменяя рефлексивное разбиение, можно менять действия агентов, т. е. осуществлять ***рефлексивное управление***.

Вспомним, что при определении рефлексивного равновесия были введены следующие предположения:

– вектор $x^0$ начальных действий агентов фиксирован и является общим знанием;

– агент ранга $k$ имеет правильные представления о рангах рефлексии всех агентов, имеющих ранг, меньший его собственного;

– агент ранга $k$ считает всех агентов своего и более высоких рангов имеющими ранг $k - 1$.

Можно определять представления агентов о рангах рефлексии оппонентов по-другому (см. ниже); при этом соответствующим образом изменятся выражения для наилучшего ответа, текущего положения цели и рефлексивного равновесия (7), однако общая схема построения последнего сохранится.

Приведенная в настоящем подразделе общая модель рефлексивного коллективного поведения вряд ли допускает получение в ее рамках каких-либо столь же общих аналитических выводов. Тем не менее, она может служить базисом для создания частных аналитических или общих имитационных моделей (например, в соответствии с классификацией, приведенной в [104]), позволяющих описывать и прогнозировать групповое поведение (людей, мобильных роботов, программных агентов) в разнообразных ситуациях – см., например, рефлексивные имитационные модели эвакуации, рефлексивные модели транспортных потоков и примеры из других прикладных областей в разделе 4.26.

**Классификации моделей стратегической рефлексии**. Обозначим через $n_{ijl}$ представления агента $i$, обладающего $j$-м рангом рефлексии, о ранге рефлексии $l$-го агента. Для случая однородных агентов обозначим через $q_{ijk}$ представления $i$-го агента $j$-го ранга рефлексии о доле агентов, имеющих ранг $k$, $q_k = n_k / n$ – «истинная» доля агентов $k$-го ранга.

Общий **постулат**, принимаемый практически во всех моделях рефлексивного коллективного поведения: агент некоторого ранга рефлексии «не знает» о существовании других агентов его ранга или более высоких рангов, т. е. $\forall\ k > j\ q_{ijk} = 0$, $q_{ijj} = 1 / n$.

Основания системы классификаций моделей стратегической рефлексии [64].

1) Множество возможных действий агента (конечно или «бесконечно» – например, отрезок $\Re^1$).

2) Принцип выбора действий агентами нулевого ранга рефлексии:

– фиксированные (априори заданные) действия, например фокальная точка;

– наилучший ответ на некоторые фиксированные (априори заданные) действия (например, результаты прошлого периода);

– случайные в соответствии с заданным распределением (как правило, равномерным).

3) Агенты одинаковые (однородные, т. е. различаются только рангами рефлексии) или различные (отличаются еще и целевыми функциями).

4) Распределение (объективное) агентов по рангам рефлексии:

– произвольное фиксированное;

– случайное (в соответствии с вероятностным распределением Пуассона $q_k = e^{\tau}\,\tau^k / k!$, где $\tau > 0$ – параметр распределения Пуассона).

5) Информированность агента $k$-го ранга относительно общего числа (множества) агентов:

– знает множество $N$ достоверно и считает, что эта информация является общим знанием;

– имеет свои представления относительно общего числа (множества) агентов.

Отметим, что практически все известные на сегодняшний день модели рефлексивного коллективного поведения используют первое предположение.

6) Информированность агента $k$-го ранга относительно агентов более низких рангов (от 0 до $k - 1$ включительно):

– знает достоверно (или с некоторой погрешностью – см. в [260] модель для $m \leq 2$);

– предполагает, что эти агенты распределены по рангам рефлексии от 0 до $k - 1$ включительно в соответствии с некоторым нормированным ($\forall\ k < j\ q_{ijk} = \dfrac{n_j}{\sum_{l=0}^{j-1} n_l}(n-1)$) вероятностным распределением – как правило, распределением Пуассона) – см., например, [194];

– считает что все (!) остальные агенты имеют ранг $k - 1$ – см., например, модели $k$-level reasoning [245, 258], а также развитие и дальнейшее экспериментальное исследование этих моделей в [204, 205].

7) Информированность агента $k$-го ранга относительно других агентов своего и более высоких рангов:

– считает их всех принадлежащих нулевому рангу;

– считает их всех принадлежащих $k - 1$-му рангу;

– предполагает, что эти агенты распределены по рангам рефлексии от 0 до $k - 1$ включительно в соответствии с некоторым вероятностным распределением (как правило – распределением Пуассона);

– знает ранги их рефлексии (отметим, что при этом введенный выше «постулат» не выполнен) и при выборе своего действия устраняет неопределенность относительно их поведения, рассчитывая на выбор ими наихудших для него действий.

Как отмечалось выше, при любых значениях признаков данной системы классификаций рефлексивное равновесие строится по общей схеме, приведенной выше.

Все известные на сегодняшний день зарубежные и отечественные модели стратегической рефлексии укладываются в рамки предложенной системы их классификаций. Приведем краткий обзор этих исследований.

**Краткий обзор теоретических исследований**. За рубежом в середине 90-х г. XX века появились работы по моделям стратегической рефлексии – так называемые *k-уровневые модели* (level *k* models) [205, 245, 260]. Затем в 2004 году возникло их обобщение – *модель когнитивных иерархий* (Cognitive Hierarchies Model – CHM) [194].

В обзоре [269] выделены четыре основных подхода к построению и исследованию моделей стратегической рефлексии в рамках теории игр и экспериментальной экономики (ниже указаны основополагающие работы, ссылки на их последователей можно найти в обзоре [269]):

– $k$-уровневый [204];
– равновесий квантового наилучшего ответа [237].
– квантовый $k$-уровневый [259];
– когнитивных иерархий [194].

Рассмотрим эти четыре подхода. Во всех моделях, во-первых, все агенты одинаковые (имеют одинаковые целевые функции и множества допустимых действий) и отличаются только своими рангами рефлексии. Во-вторых, агент $k$-го ранга не знает о существовании (не допускает существования) других агентов того же или более высоких рангов рефлексии. В-третьих, агенты нулевого ранга выбирают свои действия случайным образом (в соответствии с равномерным распределением на множестве своих допустимых действий). В ряде экспериментальных работ (см., например, [199, 214, 245]) учитывается структура взаимодействия агентов – кто из агентов о чьих действиях имеет информацию.

***k*-уровневые модели.** Поставим в соответствие каждому агенту $i \in N$ ранг его рефлексии – число $k_i \in \{0; 1; 2; \ldots\}$. Агент $k$-го ранга считает всех (!) остальных агентов имеющими ранг $k - 1$ и выбирает свой наилучший ответ на их действия. Если его наилучший ответ не единствен, то он выбирает равновероятно любой из них.

Одним из вариантов $k$-уровневой модели является так называемая *$L_k$-модель*, в которой предполагается, что существуют только агенты нулевого, первого и второго рангов, и что каждый агент ранга $k > 0$ характеризуется вероятностью $\varepsilon_k$ «ошибиться» и выбрать неоптимальное действие – равновероятно любое из не принадлежащих соответствующему наилучшему ответу на действия агентов $k -$ 1-го уровня [269]. Таким образом, $L_k$-модель описывается четырьмя параметрами (на сегодняшний день подробно исследованы только двухуровневые модели этого класса) – долями $q_1$ и $q_2$ агентов первого и второго рангов рефлексии и их «ошибками» $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$.

**Равновесие квантового наилучшего ответа.** Для случая конечных множеств допустимых действий агентов *квантовый наилучший ответ* (QBR – Quantal Best Responce) [201, 237] $QBR_i(p_{-i}; \lambda)$ $i$-го агента определяют как его смешанную стратегию с вероятностями $p_i(x_i) = \dfrac{\exp(\lambda\, F_i(x_i, p_{-i}(\cdot)))}{\sum_{y_i} \exp(\lambda\, F_i(y_i, p_{-i}(\cdot)))}$, где параметр $\lambda$ отражает чувствительность агентов к изменениям их целевых функций. Используя концепцию квантового наилучшего ответа, можно определить *квантовое равновесие* [237] (QRE) как профиль смешанных стратегий $p^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$, таких, что $\forall\, i \in N \quad p_i^* = QBR_i(p_{-i}^*(\cdot), \lambda)$. В [237] доказано, что для любой игры в нормальной форме для любого неотрицательного λ квантовое равновесие существует.

**Квантовые *k*-уровневые модели** ($QL_k$) являются «пересечением» QRE и $L_k$ моделей [259] (причем в отличие от $L_k$-моделей каждый агент считает, что агенты более низких уровней иерархии «ошибок» не делают) и описываются, соответственно, пятью параметрами – $q_1$, $q_2$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ и $\lambda$.

**CHM-модели.** Агент выбирает наилучший ответ, зависящий от распределения всех агентов более низких рангов рефлексии по этим рангам. Если предполагается, что распределение агентов по рангам рефлексии описывается распределением Пуассона с параметром $\tau$, то Poisson-CHM описывается единственным параметром $\tau$.

В [269] перечисленные четыре класса моделей сравниваются на основании экспериментальных данных авторов соответствующих моделей. Делается вывод о неадекватности предположений о целесообразности использовании распределений пуассоновского типа для описания рангов рефлексии агентов, а также статистически обосновывается сравнительно более высокая эффективность $QL_k$-модели.

**Краткий обзор экспериментальных исследований**. Типовая схема организации экспериментального исследования следующая: берется некоторая игра, как правило, достаточно простая, для которой выбирается теоретическая модель, описывающая предполагаемое поведение участников; затем проводится серия розыгрышей – участниками обычно являются либо сами исследователи, либо студенты или аспиранты; после чего полученные экспериментальные результаты обрабатываются с использованием статистических методов с целью идентификации параметров модели (см. обзор [206]).

Почти все исследователи признают, что существенным является тип аудитории, среди которой проводится эксперимент: так, например, студенты, изучавшие теорию игр, демонстрируют в среднем более высокий ранг рефлексии [183, 198, 200] (сравнение результатов игры «конкурс красоты» для различных групп агентов можно найти в [197]).

*Игра «конкурс красоты»*. Игра «конкурс красоты» (beauty contest game) является одним из хрестоматийных примеров, иллюстрирующих и модель когнитивных иерархий [194] (современный обзор зарубежных экспериментальных исследований по СНМ можно найти в [193]), и другие модели стратегической рефлексии [242, 245, 269].

Пусть каждый из агентов (которых конечное число $n$) выбирает число от 0 до 100. Обозначим через $x_i \in \{0, \ldots, 100\}$ действие $i$-го агента. Победитель – агент, выбравший число, наиболее близкое к заданной доле $\alpha \in (0; 1]$ от среднего действия всех агентов $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, – получает приз, остальные агенты не получают ничего. Если «победителей» несколько, то приз делится между ними поровну.

Если $\alpha = 1$ и агентов больше двух, то любой вектор одинаковых действий агентов является равновесием Нэша. Ситуация усложняется, если $\alpha < 1$, при этом единственное равновесие Нэша – выбор всеми агентами нулевых действий.

В моделях когнитивных иерархий предлагаются следующие рассуждения для определения «равновесного» исхода [194]. Пусть действия агентов нулевого ранга распределены равномерно и $\alpha < 1$. Тогда их среднее действие равно 50. Или можно предположить, что агенты нулевого ранга выберут действие 50 как фокальную точку [254]. Или в случае повторяющейся игры можно считать, что агенты нулевого ранга выберут свои действия на основе наблюдаемых действий агентов в прошлом периоде. Наилучшим ответом (см. (1)) агентов первого ранга рефлексии будет действие 50 $\alpha$, агентов второго ранга – 50 $\alpha^2$, третьего – 50 $\alpha^3$ и т. д. Результаты различных экспериментов, подтверждающих наличие этих характерных точек, можно найти в [193, 194, 197], анализ и сравнение различных моделей, а также исследование их соответствия экспериментальным данным – в [269].

*Игра «*11-20*»*. В игре «11-20» участвуют два агента, которые одновременно и независимо выбирают число от 11 до 20. Каждый агент получает сумму денег, равную названному им числу, кроме того, если некоторый агент назвал число, на единицу меньшее выбора оппонента, то первый получает дополнительно 20 единиц [183].

Разумно считать действием агентов нулевого ранга выбор числа 20. Наилучшим ответом на такой выбор, т. е. действием игроков первого ранга, будет 19, второго – 18 и т. д.

Условия игры (выплаты в зависимости от комбинаций действий агентов) можно модифицировать тем или иным образом или строить по аналогии похожие игры (например, «91-100») [183]

*Другие «экспериментальные» игры*:

– «сороконожка» (centipede game) с игроками нулевого, первого и второго рангов [190, 236];

– «вход на рынок» (market entry game) [195, 264].

Наиболее часто в CHM используется распределение Пуассона, в том числе по следующим причинам: оно достаточно простое (с ним легко производить вычисления), доля соответствующих агентов быстро убывает (когнитивные ограничения) с ростом ранга (причем $q_k / q_{k-1}$ убывает как $1 / k$) и, наконец, это распределение хорошо соответствует экспериментальным данным – см. [194], где доказано, что при $\tau \to +\infty$ вектор действий агентов в Poisson-CHM сходится к равновесию Нэша, получающемуся последовательным исключением слабо доминируемых действий (в общем случае – при непуассоновском распределении – этот результат не имеет места).

В дискретном распределении Пуассона $q_k = e^{\tau} \tau^k / k!$ параметр $\tau$ является и средним, и дисперсией, кроме того $\dfrac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \dfrac{\tau}{k-1}$. Поэтому его «среднее» экспериментальное значение может интерпретироваться как «средний ранг» рефлексии агентов. Большинство экспериментов свидетельствуют, что это значение лежит от 1 до 2, обычно – около 1,5 (см. в [269, 194] результаты экспериментов в игре «конкурс красоты»).

В [183] для игры «11-20» (для 108 участников) получено следующее распределение агентов по рангам рефлексии:

| **Ранг»** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Действие** | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| **Доля агентов (%)** | 6 | 12 | 30 | 32 | 6 | 1 | 6 | 3 | 0 | 4 |

В [262] описаны результаты экспериментов, в соответствии с которыми от 40 % до 60 % агентов имеют ненулевой ранг рефлексии (выбирают действия, отличные и от действий агентов нулевого ранга, и от равновесия Нэша). В [196] приводится и обсуждается следующая сводка распределений агентов по рангам рефлексии:

| **Ранг** | **Доля агентов** [260] | **Доля агентов** [203] | **Доля агентов** [204] |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,25 | 0,42 | 0,21 |
| 1 | 0,12 | 0,44 | 0,21 |
| 2 | 0,12 | 0,11 | 0,27 |
| 3 | 0,12 | 0,03 | 0,19 |
| 4 | 0,12 | 0,01 | 0,09 |
| 5 | 0,12 | 0 | 0,03 |
| 6 | 0,12 | 0 | 0,01 |
| 7 и выше | 0 | 0 | 0 |

Стоит подчеркнуть, что делаемые на основании экспериментов выводы о наличии (и доле) агентов пятого, шестого и других более высоких «рангов» рефлексии представляются сомнительными (противоречащими здравому смыслу). В целом, получаемые в результате экспериментов распределения агентов по рангам рефлексии различны и, наверное, сильно зависят как от самой игры, так и условий проведения эксперимента, состава участников и т. д.

**Задача рефлексивного управления** [64]. Рассмотрим рефлексивное разбиение в качестве управляемого параметра. Можно сформулировать *задачу управляемости*: пусть задано множество $\mathfrak{I}$ допустимых рефлексивных разбиений; требуется найти множество $X(\mathfrak{I}) = \bigcup\limits_{\aleph \in \mathfrak{I}} x^*(\aleph)$ векторов действий агентов, которые могут быть реализованы в результате *рефлексивного управления* – выбора рефлексивного разбиения $\aleph$. Обратной является задача поиска «минимального» в том или ином смысле множества допустимых рефлексивных разбиений, позволяющего реализовать заданный вектор действий агентов как рефлексивное равновесие.

Рассмотрим теперь собственно задачу управления. Пусть предпочтения управляющего органа – *центра* – описываются его действительнозначной целевой функцией $F_0(Q(x^*))$, заданной на множестве *агрегированных ситуаций игры* ($Q$: $\Re^n \to \Re^1$), т. е. $F_0(\cdot)$: $\Re^1 \to \Re^1$. Тогда, воспользовавшись выражением (12), *эффективность рефлексивного разбиения* $\aleph$ можно определить как $K(\aleph) = F_0(Q(x^*(\aleph)))$.

Следовательно, формально *задачу рефлексивного управления* (в терминах рефлексивных разбиений) можно сформулировать в виде [64]:

(8) $K(\aleph) \to \max\limits_{\aleph \in \Im}$ .

Обозначим через $K_m$ максимальное значение критерия эффективности в задаче (8) при фиксированном максимальном ранге рефлексии $m$. По аналогии с тем, как это делалось для моделей стратегической рефлексии в разделах 2.6 и 3.2, можно сформулировать задачу о *максимальном целесообразном ранге рефлексии* – таком, больше которого центру (с точки зрения задачи управляемости или/и эффективности рефлексивного управления) использовать не имеет смысла:

$$m^* = \min \{m \mid m \in \operatorname{Arg} \max_{w=0,1,2,\dots} K_w\}.$$

Обсудим согласованность субъективных рефлексивных разбиений агентов. Предположим, что каждый агент наблюдает только агрегированную ситуацию игры. Как отмечалось выше при рассмотрении общей модели рефлексивного коллективного поведения, прогнозируемые агентами траектории могут отличаться от реализованной. Это может служить для агентов основанием для того, чтобы усомниться в правильности своих субъективных рефлексивных разбиений. Если агенты наблюдают (помимо собственных действий) только агрегированную ситуацию игры, то по аналогии с условием стабильности информационного управления (см. раздел 2.7) можно ввести *условие стабильности рефлексивного разбиения* – потребовать, чтобы агрегированная ситуация для реализованной траектории для всех агентов совпадала с прогнозируемыми ими агрегированными ситуациями. Отметим, что стабильность рефлексивного разбиения тесно связана с обучением в играх [212] – наблюдая поведение оппонентов, отличное от прогнозируемого, агенты могут менять свои представления о рангах рефлексии оппонентов или могут переходить на более высокие уровни рефлексии – см. частные эксперименты в [235] (наиболее ярко эти эффекты проявляются в динамических играх – см. dynamic level-k games в [223]).

При фиксированном рефлексивном разбиении $\aleph \in \Im$ реализуется вектор действий, определяемый выражением (7). Соответственно реализуется агрегированная ситуация $Q(x^*(\aleph))$.

С точки зрения $j$-го агента, обладающего $k$-м рангом рефлексии, реализуется вектор

$$\tilde{x}_{jk}(\aleph_{jk}) = (x_{l \in N_0},\ x1_{l \in N_1},\ x2_{l \in N_2},\ \ldots,\ x[k-1]_{l \in N_{k-1} \cup N_k \cup \ldots \cup N_m \setminus \{j\}},$$

$$xk_j),\ j \in N_k,\ k = \overline{0, m}.$$

Условие стабильности рефлексивного разбиения $\aleph \in \Im$ примет вид

$$Q(\tilde{x}_{jk}(\aleph_{jk})) = Q(x^*(\aleph)),\ j \in N_k,\ k = \overline{0, m}.$$

Задачу рефлексивного управления $(\aleph)$ можно ставить на множестве стабильных рефлексивных управлений (если таковое не пусто). Содержательно это будет означать, что центр формирует такое оптимальное разбиение агентов по рангам рефлексии, что ни один из агентов на основании наблюдения агрегированных результатов «игры» не имеет оснований усомниться в справедливости своих представлений о рангах рефлексии оппонентов.

В заключение настоящего раздела кратко обсудим, каким образом центр может управлять разбиением агентов по рангам рефлексии. На сегодняшний день в литературе описаны два возможных подхода. Первый подход предполагает, что агенты безусловно верят центру и воспринимают сообщаемую им информацию как истинную, независимо от своих первоначальных представлений. Тогда центр, последовательно сообщая ту или иную информацию различным группам агентов, может формировать различные (но не любые! – см. раздел 2.12) структуры информированности и, соответственно, рефлексивные структуры. Второй подход заключается в том, что агенты не просто заменяют свои представления теми, которые сообщает центр, а сообщения центра лишь снижают для агентов неопределенность – сокращают множество возможных с их точки зрения «миров» (см. разделы 2.13.-2.14). В целом, разработка моделей формирования рефлексивных структур под влиянием поступающей к агентам информации представляется чрезвычайно перспективным направлением будущих исследований.

Метод рефлексивных разбиений множества рациональных агентов на подмножества агентов, обладающих различными рангами стратегической рефлексии, позволяет:

- с точки зрения теории принятия решений – расширить класс моделей коллективного поведения интеллектуальных агентов, осуществляющих совместную деятельность в условиях неполной информированности и отсутствия общего знания;
- с дескриптивной точки зрения – расширить множество ситуаций, которые в рамках модели могут быть «объяснены» как рефлексивные равновесия – устойчивые исходы взаимодействия агентов; соответственно, в рамках задач рефлексивного управления – расширить область управляемости;
- с нормативной точки зрения – ставить и решать задачи рефлексивного группового управления.

Современный уровень исследований моделей стратегической рефлексии таков, что пока не существует универсального «аппарата» поиска аналитических решений для широких классов задач рефлексивного управления – все успехи ограничены набором частных и достаточно простых моделей (см. раздел 4.27). Видятся два направления возможных будущих прорывов. Первое – экспериментальные исследования принятия агентами решений и поиск общих закономерностей на основе анализа результатов экспериментов. Второе направление (теоретическое) – разработка языка описания рефлексивных моделей, позволяющего достаточно просто и единообразно ставить и решать различные задачи рефлексивного управления.

Задачи рефлексивного управления, поиска максимального целесообразного ранга рефлексии и др. можно и нужно ставить и решать в рамках и других (отличных от рассмотренных выше) модификаций предложенной модели рефлексивного коллективного поведения, что представляется перспективным направлением будущих исследований. В первую очередь, это – задачи *активного прогноза* (см. [117] и раздел 4.23), в рамках которого агенты по информации центра о будущем состоянии системы «восстанавливают» текущее состояние (осуществляя информационную рефлексию) и принципы принятия оппонентами решений (осуществляя стратегическую рефлексию), а потом на основании этой новой информации принимают решения. Здесь введение рефлексивных разбиений выглядит очень многообещающим.

Почти все авторы, исследующие модели стратегической рефлексии в коллективах агентов, сходятся во мнении, что перспективной областью прикладного использования этих моделей являются *мультиагентные системы*. С одной стороны, так как эти системы искусственные, то наделение различных агентов теми или иными рангами рефлексии не представляет проблемы (в отличие от рефлексивного управления коллективами людей – см. краткое описание методов информационных воздействий выше) и может производиться на этапе проектирования мультиагентной системы. Задача «управления» при этом заключается в выборе оптимальной доли рефлексирующих агентов с учетом того, что повышение их «интеллектуальности» требует затрат на наделение этих агентов соответствующими вычислительными, коммуникационными и другими ресурсами [110]. С другой стороны, анализ литературы по мультиагентным системам свидетельствует, что использование искусственных автономных агентов, наделенных способностью к рефлексии, не получило еще массового распространения (исключение составляют модели эвакуации, а также некоторые другие частные модели группового поведения – см. раздел 4.26).

# ГЛАВА 4. ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО И РЕФЛЕКСИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ниже (в разделах 4.1-4.4) рассматривается ряд прикладных моделей рефлексивных игр (скрытое управление, информационное управление через средства массовой информации, а также рефлексия в психологии и художественных произведениях), которые иллюстрируют приведенные выше общие модели принятия решений и игрового взаимодействия в условиях различной информированности. Объединяет эти модели то, что в них в большинстве случаев имеются два агента[51], ранг рефлексии которых в рамках принципа доверия (в соответствии с которым у реципиента информационного сообщения не возникает сомнений в истинности полученных сведений) равен нулю, единице или двойке. Многочисленные ссылки позволят заинтересованному читателю получить подробную информацию о возможностях использования рассматриваемого подхода в различных прикладных задачах.

Разделы 4.5-4.26 посвящены прикладным моделям информационного или/и рефлексивного управления в экономических (разделы 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.11, 4.16, 4.18, 4.21, 4.22, 4.26.3, 4.26.7), социальных (разделы 4.13, 4.14, 4.19, 4.20, 4.23-4.25), организационных (разделы 4.10, 4.12, 4.15, 4.17, 4.26.5, 4.26.6) системах, в военном деле (разделы 4.5, 4.26.1, 4.26.2, 4.26.4) и других областях.

Следует признать, что ограниченный объем книги не позволил привести многие достаточно хорошо исследованные на сегодняшний день приложения рефлексии в управлении; так вне рассмотрения остались модели рефлексии в:

– управлении репутацией и нормами деятельности (т. е. в институциональном управлении) [47];

– механизмах планирования (распределения ресурса, экспертизы и др.), для которых анализировались условия стабильности взаимных представлений агентов [14, 32, 85, 116];

– пороговом коллективном поведении [12-14],

[51] Несмотря на то, что во многих моделях один из агентов выступает в качестве центра (осуществляет информационное управление), информационное равновесие все равно имеет место – хотя бы как субъективное равновесие управляемого агента.

а также значительное количество моделей информационного управления мнениями, репутацией и доверием членов социальных сетей [39] и др.

## 4.1. СКРЫТОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В настоящее время существует значительное число работ [8, 23, 24, 30, 37, 43, 52, 57, 70, 73, 94, 130, 136, 174, 175 и др.], посвященных так называемому *скрытому управлению* людьми (и, соответственно, противодействию этому управлению), под которым понимается замаскированное управляющее воздействие, не вызывающее возражений у управляемого субъекта. Частным случаем скрытого управления является манипулирование – «скрытое управление человеком против его воли, приносящее инициатору определенные преимущества» [175, с. 4]. Анализ существующих работ в этой области (основные выводы из этого анализа выделены ниже жирным шрифтом и используются в качестве предположений при построении модели) позволяет предложить рассматриваемую в настоящем разделе формальную *модель скрытого управления*, описываемого в терминах рефлексивных игр как разновидность рефлексивного управления.

Прежде всего, отметим, что, во-первых, предметом воздействия при скрытом управлении является информация, используемая управляемым субъектом при принятии решений. Следовательно, в терминах системы классификаций, предложенной в [117], **скрытое управление является информационным управлением**.

Во-вторых, необходимо подчеркнуть, что в подавляющем большинстве известных ситуаций, в которых имеет место скрытое управление, **взаимодействуют только два субъекта** (быть может, коллективных). Значит, в первом приближении достаточно выделить управляющего субъекта, которого условно назовем *активным агентом*, и управляемого субъекта, которого условно назовем *пассивным агентом*.

В-третьих, считается, что **активный агент адекватно информирован о пассивном агенте**, из чего вытекает, что он имеет возможность правильно прогнозировать поведение последнего в рамках любой информационной ситуации. Более того, во-первых, считается, что **активному агенту известно истинное значение неопределенного параметра**, а, во-вторых, **пассивный агент в** большинстве случаев **считает, что активный агент адекватно информирован о нем** (то, что пассивный агент 2-субъективно (то есть со своей точки зрения) адекватно информирован об активном агенте, следует из утверждения 2.2.3).

Если активный агент имеет возможность изменять (воздействовать, модифицировать и т.д.) структуру информированности пассивного агента, то целью осуществляемого активным агентом рефлексивного управления является навязывание пассивному агенту такой информационной структуры, что принимаемое в ее рамках решение наиболее благоприятно для активного агента. То есть **критерием эффективности информационного воздействия (скрытого управления) является значение выигрыша, полученного активным агентом**.

Таким образом, скрытое управление может быть представлено в терминах рефлексивной игры следующим образом. Пусть имеются два агента (активный и пассивный), известны их целевые функции и множества допустимых действий. Структура информированности такова, что активный агент адекватно информирован о пассивном агенте, ему известно истинное значение неопределенного параметра, а пассивный агент, если не оговорено особо, считает, что активный агент адекватно информирован о нем.

Предположим, что задано множество допустимых структур информированности пассивного агента. *Задача синтеза оптимального* (с точки зрения активного агента) *информационного воздействия* (точнее – воздействия на информированность) заключается в нахождении такой допустимой информационной структуры пассивного агента (напомним, что тем самым в соответствии с введенными предположениями информационная структура активного агента фиксирована), что соответствующее ей информационное равновесие наиболее выгодно активному агенту (обеспечивает максимальное значение его целевой функции).

Чрезвычайно важным и значительно упрощающим модель является тот факт, что во всех известных нам моделях скрытого управления **ранг рефлексии не превышает двух** (то есть максимальная длина существенной последовательности индексов, описывающей элемент информационной структуры, не превышает трех).

Решение сформулированной в терминах рефлексивной игры задачи скрытого управления позволяет определить с нормативной точки зрения ту структуру информированности, которую активный агент должен навязать пассивному агенту. Но **за рамками рассматриваемых ниже формальных моделей остается *технология скрытого управления***, понимаемая как совокупность методов, операций, приемов, этапов и т.д., последовательное осуществление которых обеспечивает решение поставленной задачи [41, 101]. Прикладные технологии информационного управления изучаются и применяются в социальной психологии, нейро-лингвистическом программировании, психотерапии и т.д. [23, 24, 30, 37, 43, 48, 52, 87, 88, 91, 127, 130, 136, 162, 175 и др.]. Исследования роли рефлексии и информации в управлении экономическими системами можно найти в [75, 100].

Другими словами, в рамках рефлексивной теоретико-игровой модели можно рекомендовать активному агенту сформировать у пассивного агента определенную информационную структуру, но ничего нельзя сказать о том, *как* ему это сделать. С другой стороны, описываемое в упомянутых выше работах по скрытому управлению многообразие способов воздействия касается именно технологии формирования активным агентом информационной структуры пассивного агента при известных целях воздействия. Следовательно, формальные модели позволяют получить ответ на вопрос – *что* следует делать активному агенту в рамках информационного управления, а социальная психология и другие гуманитарные науки [48, 60, 88, 162, 177, 251] накапливают и обобщают эмпирический материал об эффективных способах достижения цели.

Число возможных реальных ситуаций, в которых может быть использовано информационное управление, настолько велико, а сами ситуации настолько разнородны (несколько упрощает ситуацию тот факт, что в известных работах **пассивный агент не подвергает сомнению сообщаемую активным агентом информацию**, то есть проблема доверия [117] практически не рассматривается), что на сегодняшний день не найдено универсальных рецептов и **технология скрытого управления является искусством**. Превращение ее в науку (путем систематизации, разработки нормативных моделей самого *процесса воздействия*, их исследования, идентификации и т.д.) является перспективной и актуальной задачей, но выходит за рамки настоящего исследования. Поэтому остановимся более подробно на анализе нормативных моделей, для которых изучим задачи синтеза оптимальных информационных воздействий.

Из того, что активный агент (следуя терминологии теории иерархических игр, будем его условно обозначать номером «1») имеет достоверную информацию о неопределенном параметре, следует, что $\theta_1 = \theta$. Из того, что он адекватно информирован о пассивном агенте (которого будем условно обозначать номером «2»), следует, что $I_{12} = I_2$. Из того, что пассивный агент считает активного адекватно информированным о нем, следует, что $I_{212} = I_2$. Из того, что ранг рефлексии не превышает двух, следует, что активный агент имеет возможность влиять на $\theta_2$, $\theta_{21}$, $\theta_{212}$ и всевозможные их комбинации.

Итак, гипотетически имеем семь вариантов:

- ранг рефлексии пассивного агента равен нулю, информационное воздействие направлено на $\theta_2$ (условно назовем эту задачу *задачей А*);
- ранг рефлексии равен единице, информационное воздействие направлено на $\theta_{21}$ (условно назовем эту задачу *задачей Б*);
- ранг рефлексии равен двум, информационное воздействие направлено на $\theta_{212}$ (условно назовем эту задачу *задачей В*);
- ранг рефлексии равен единице, информационное воздействие направлено на $\theta_2$ и $\theta_{21}$ (условно назовем эту задачу *задачей АБ*);
- ранг рефлексии равен двум, информационное воздействие направлено на $\theta_2$ и $\theta_{212}$ (условно назовем эту задачу *задачей АВ*);
- ранг рефлексии равен двум, информационное воздействие направлено на $\theta_{21}$ и $\theta_{212}$ (условно назовем эту задачу *задачей БВ*);
- ранг рефлексии равен двум, информационное воздействие направлено на $\theta_2$, $\theta_{21}$ и $\theta_{212}$ (условно назовем эту задачу *задачей АБВ*).

Рассмотрим перечисленные варианты, считая без ограничения общности, что множества возможных информированностей пассивного агента – допустимых значений $\theta_2$, $\theta_{21}$ и $\theta_{212}$ – равны $\Theta$ и не зависят от ранга рефлексии. В качестве содержательных иллюстраций будем приводить ссылки на номера *стратагем* – стратегий, применяемых в политике и военном искусстве – в соответствии с их описанием в [30][52] (обзор современных подходов к использованию рефлексивного управления в военном деле приведен в [152]).

<u>Задача А.</u> В данной задаче будем считать, что целевая функция $f_2(\cdot)$ пассивного агента не зависит от действий активного агента, или в ней фигурирует некоторое фиксированное действие активного агента – см. Рис. 51[53], на котором изображены существенные компоненты информационной структуры.

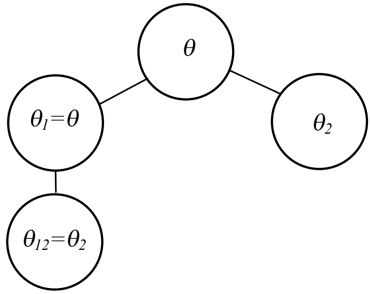


Рис. 51. «Информационная структура» в задаче А

Так как воздействие направлено на $\theta_2$, то в соответствии с классификацией, введенной в [117], задача А является задачей информационного регулирования и рефлексивное управление в ней отсутствует (в остальных шести задачах оно присутствует).

Рассматриваемая рефлексивная игра является иерархической игрой типа $\Gamma_1$ [34, 36, 41, 61] (игрой Штакельберга), в которой активный агент, делая первый ход, вынужден предсказывать ответную реакцию пассивного агента. Обозначим $X_2(\theta_2) = \operatorname{Arg} \max\limits_{x_2 \in X_2} f_2(\theta_2, x_2)$ – множество действий пассивного агента (множество «наилучших ответов»), доставляющих максимум его целевой функции при информированности $\theta_2 \in \Theta$. В рамках существующей информационной структуры это множество может быть вычислено активным агентом. Следовательно, его целью является выбор такого «сообщения» $\theta_2^* \in \Theta$, которое обеспечивало бы выбор пассивным агентом действия из наиболее выгодного для активного агента множества наилучших ответов. Если в качестве критерия сравнения множеств наи-

[52] Отметим, что в большинстве «классических» стратагем (а их всего 36) информационное управление отсутствует (см. стратагемы №№ 2, 4, 5, 9, 11, 12, 15-26, 28-31, 33, 35, 36), и они могут рассматриваться как изложение проверенных временем и широко распространенных технологий (см. определение выше) скрытого или институционального (см., например, стратагемы №№ 2, 4, 5 и др.) управления (то есть управления условиями деятельности активного и/или пассивного агентов).

[53] Напомним, что слева отражается информированность первого (активного) агента – $\theta_1$, $\theta_{12}$, $\theta_{121}$ и т.д., а справа – информированность второго (пассивного) агента – $\theta_2$, $\theta_{21}$, $\theta_{212}$ и т.д.

лучших ответов использовать гарантированное значение целевой функции активного агента, то решение задачи А имеет вид:

$$\theta_2^*(\theta) = \arg \max_{w \in \Theta} \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2(w)} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

В рассматриваемой задаче граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на Рис. 52 (стрелка от $x_1$ к $x_2$ отсутствует, так как целевая функция пассивного агента не зависит в рассматриваемой модели от действий активного агента).

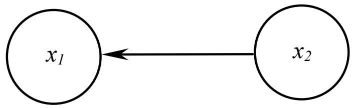


Рис. 52. Граф рефлексивной игры в задаче А

Задача А возникает в стратагемах № 7 («извлечь нечто из ничего» – стратегия моделирования реальности, которой нет на самом деле) и № 32 («стратагема открытых городских ворот» – представить ложное настоящим, а настоящее ложным).

Задачи Б и АБ. Данная задача отражает наиболее распространенный в скрытом управлении случай – воздействие на $\theta_{21}$. В этой ситуации пассивный агент обладает собственными представлениями $\theta_2$ о состоянии природы, которые достоверно известны активному агенту. Информационная структура приведена на Рис. 53.

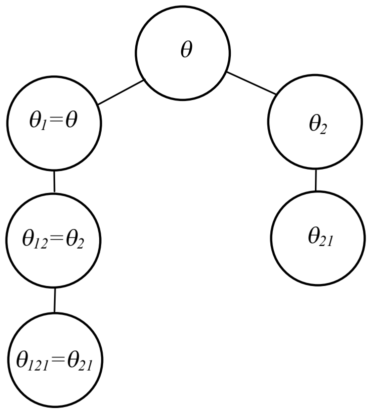


Рис. 53. «Информационная структура» в задачах Б и АБ

Активный агент может вычислить субъективное равновесие пассивного агента:

$$X_2(\theta_2,\ \theta_{21}) = \{x_2 \in X_2,\ x_{21} \in X_1 \mid$$
$$\forall\ y_2 \in X_2\ \ f_2(\theta_2, x_{21}, x_2) \geq f_2(\theta_2, x_{21}, y_2),$$
$$\forall\ y_1 \in X_1\ \ f_1(\theta_{21}, x_{21}, x_2,\ \theta_{21}) \geq f_1(\theta_{21}, y_1, x_{21})\}.$$

Отметим, что в силу $I_{212} = I_2$ выполнено $x_{212} = x_2$, то есть при определении своего субъективного равновесия пассивный агент считает, что его равновесное действие $x_2$ может быть «вычислено» активным агентом.

При фиксированном (и известном достоверно обоим агентам) значении $\theta_2$ задача рефлексивного управления заключается в нахождении активным агентом такого значения $\theta_{21}$, при котором выбираемое пассивным агентом из множества $X_2(\theta_2,\ \theta_{21})$ действие максимизировало бы целевую функцию активного агента:

$$\theta_{21}^{*}(\theta) = \arg\max_{w\in\Omega}\ \max_{x_1\in X_1}\ \min_{x_2\in \mathrm{Proj}_2(X_2(\theta_2, w))} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

Если активный агент имеет возможность в задаче Б влиять и на $\theta_2$, то получаем задачу АБ, в которой максимизация целевой функции активного агента должна вестись и по параметру $\theta_2$, то есть решение задачи АБ имеет вид:

$$(\theta_{2}^{*}(\theta),\ \theta_{21}^{*}(\theta)) = \arg\max_{u,w\in\Omega}\ \max_{x_1\in X_1}\ \min_{x_2\in \mathrm{Proj}_2(X_2(u, w))} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

В рассматриваемой задаче граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на Рис. 54.

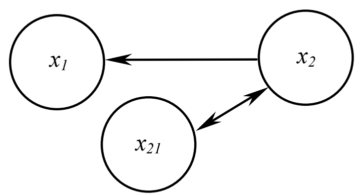

Рис. 54. Граф рефлексивной игры в задачах Б и АБ

Задача Б возникает в следующих стратагемах (напомним, что ссылки на номера стратагем приводятся в соответствии с их описанием в [30]):

- №1 – «обмануть императора, чтобы он переплыл море» – открыто проводятся действия, маскирующие действительную цель, в результате чего противнику навязывается шаблон восприятия;

- №3 – «убить чужим ножом» – противник уничтожается или ослабляется чужими руками;

- №6 – «на востоке поднимать шум, на западе наступать» – скрывается истинное направление агрессии, нанесения удара;

- №8 – «для вида чинить мостики, втайне выступать в Чень-цань» – убеждение врага в том, что он правильно оценивает твои планы, и достижение победы нестандартным маневром;

- №10 – «скрывать за улыбкой кинжал» – сокрытие за внешними дружескими проявлениями враждебности, неприязни, агрессивных планов;

- №14 – «позаимствовать труп, чтобы вернуть душу» – использование для решения новых проблем известных ранее способов, идей, средств, лидеров;

- №27 – «делать безумные жесты, не теряя равновесия» – заставить противника недооценить твои возможности, способности, интеллект, осведомленность.

Подробное содержательное описание и примеры практического использования упомянутых стратагем можно найти в [30, 91, 175].

Отметим, что стратагема № 3 (см. [30]) является, пожалуй, единственной, в которой в конфликте явным образом участвуют (помимо активного и пассивного агента) *третьи лица*. Другими словами, в этом случае активный агент стремится использовать для достижения своих целей третьих лиц, убедив их, что они действуют в собственных интересах и сформировав соответствующее убеждение у пассивного агента, то есть воздействие направлено на $\theta_{23}$ или $\theta_{31}$, $\theta_{32}$ и т.д.

Задача Б отражает, наверное, наиболее распространенный тип скрытого управления, в котором активный агент навязывает определенный шаблон действий пассивному агенту за счет формирования у последнего требуемых представлений о шаблоне поведении активного агента. При этом манипуляция оказывается эффективной только в случае, если факт ее наличия не осознается пассивным агентом (см. предположения о структуре информированности выше).

Рассмотрим иллюстративный пример. В [162, с. 235] описан психологический эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США говядину. «Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника. …По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше… Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной» информацией … приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме». В данном примере имеет место задача АБ: части клиентов сообщалась информация $\theta_i$ о состоянии природы, другим агентам помимо этого сообщалась информация $\theta_{ij}$, которой якобы владеют остальные агенты.

Использование термина «*шаблон*» при содержательных интерпретациях задачи Б представляется очень удачным, так как соответствует используемым в *ситуационном управлении* [59, 135] типовым связям между ситуациями и действиями (управлениями), наиболее эффективными в этих ситуациях.

Первой возможной интерпретацией является следующая: активный агент убеждает пассивного, что первый использует некоторый шаблон. Пассивный агент в ответ также использует некоторый шаблон. Получается «равновесие в шаблонах». Далее активный агент ведет себя нестандартно (вне своего шаблона). Если пассивный агент остается в рамках своего шаблона, то активный агент может получить определенный выигрыш. Аналогичный эффект имеет место в случае, когда у пассивного агента уже сформирован какой-то собственный шаблон, известный активному агенту.

Отметим, что неэффективность шаблонной деятельности пассивного агента во многих случаях является кажущейся, так как применяемый им шаблон может оказаться эффективным «в среднем», то есть как *унифицированная реакция* на поведение разных оппонентов в регулярно меняющихся внешних условиях (в формальных терминах шаблоны могут быть описаны как наилучшие ответы агентов на действия оппонентов).

<u>Задача В.</u> Данная задача отражает достаточно редко встречающийся в скрытом управлении случай – воздействие на $\theta_{212}$. В этой ситуации пассивный агент обладает собственными представлениями

$\theta_2$ о состоянии природы и информированности о состоянии природы активного агента $\theta_{21}$, которые достоверно известны активному агенту. Отметим, что при этом пассивный агент *не* считает активного агента адекватно информированным о нем, иначе имело бы место $I_{212} = I_2$ и воздействие на $\theta_{212}$ было бы бессмысленно. Информационная структура приведена на Рис. 55.

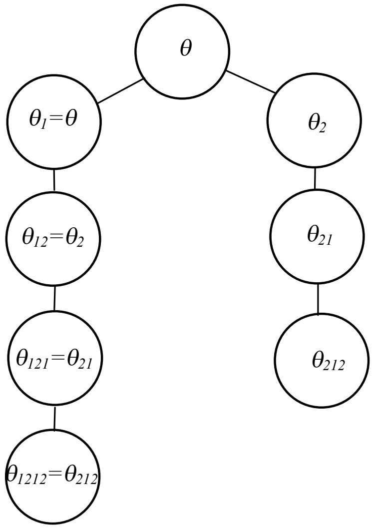


Рис. 55. «Информационная структура» в задачах В, АВ, БВ и АБВ

Активный агент может вычислить субъективное равновесие пассивного агента:

$$X_2(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}) = \{x_2 \in X_2, x_{21} \in X_1, x_{212} \in X_2 \mid$$
$$\forall\, y_2 \in X_2\ f_2(\theta_2, x_{21}, x_2) \geq f_2(\theta_2, x_{21}, y_2),$$
$$\forall\, y_1 \in X_1\ f_1(\theta_{21}, x_{21}, x_{212}) \geq f_1(\theta_{21}, y_1, x_{212}),$$
$$\forall\, y_2 \in X_2\ f_2(\theta_{212}, x_{21}, x_{212}) \geq f_2(\theta_{212}, x_{21}, y_2)\}.$$

При фиксированных (и известных достоверно обоим агентам) значениях $\theta_2$ и $\theta_{21}$ задача рефлексивного управления заключается в нахождении активным агентом такого значения $\theta_{212}$, при котором выбираемое пассивным агентом из множества $X_2(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212})$ действие максимизировало бы целевую функцию активного агента:

$$\theta^*_{212}(\theta) = \arg \max_{w \in \Theta} \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in \mathrm{Proj}_2(X_2(\theta_2, \theta_{21}, w))} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

Если активный агент имеет возможность в задаче В влиять и на $\theta_2$ и/или $\theta_{21}$, то получаем задачу АВ, БВ или АБВ в которой максимизация целевой функции активного агента должна вестись и по параметру $\theta_2$, то есть решение задачи АБВ имеет вид:

$$(\theta_2^*(\theta),\ \theta_{21}^*(\theta),\ \theta_{212}^*(\theta)) = \arg \max_{u,w,h\in\Theta} \max_{x_1\in X_1} \min_{x_2\in \mathrm{Proj}_2(X_2(u,w,h))} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

В рассматриваемой задаче граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на Рис. 56.

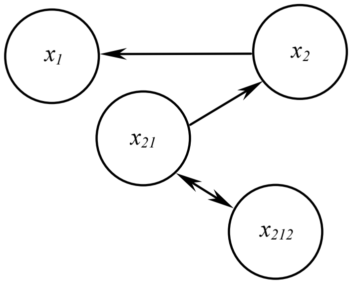


Рис. 56. Граф рефлексивной игры в задачах В, АВ, БВ и АБВ

Задача В возникает в стратагемах № 13 («бить по траве, чтобы вспугнуть змею» – произвести демонстративное действие, которое может спровоцировать проявление врагом истинных намерений) и № 34 («стратагема самострела» – демонстрация наличия противоречий в собственном лагере). Подробное содержательное описание и примеры практического использования упомянутых стратагем можно найти в [30, 91, 175].

Таким образом, **базовыми из семи перечисленных выше задач скрытого управления являются отличающиеся на единицу по рангу рефлексии задачи А, АБ и АБВ**. Приведенные результаты позволяют в каждом конкретном случае ставить и решать эти задачи.

## 4.2. СМИ И ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Опишем в терминах структур информированности информационное управление (скрытое управление, манипуляции и т.д.), осуществляемое средствами массовой информации (СМИ), на примере рекламы и предвыборных технологий (данный тип информационного воздействия может рассматриваться как разновидность скрытого управления, однако, в силу массового распространения первого на практике ему посвящается отдельный раздел).

Предположим, что имеется агент – объект информационного воздействия. Цель воздействия – сформировать у агента определенное отношение к конкретному объекту или субъекту.

В случае рекламы агентом является потребитель, а объектом – товар или услуга [148, 158]. Требуется, чтобы потребитель приобрел данный товар или услугу.

В случае предвыборных технологий агентом является избиратель, а субъектом – кандидат. Требуется, чтобы избиратель проголосовал за данного кандидата.

Рассмотрим $i$-го агента. Всех остальных агентов объединим в одного, для обозначения которого будем использовать индекс $j$. Пусть $\theta \in \Theta$ – объективная характеристика объекта, неизвестная достоверно ни одному из агентов. В качестве характеристик могут выступать потребительские свойства товаров, качества кандидатов и т.д.

Обозначим $\theta_i \in \Theta$ – представления $i$-го агента об объекте, $\theta_{ij} \in \Theta$ – его представления о представлениях об объекте $j$-го агента, и т.д.

Предположим для простоты, во-первых, что множество возможных действий каждого агента состоит из двух действий: $X_i = X_j = \{a; r\}$, где действие $a$ (accept) соответствует приобретению товара или услуги, голосованию за рассматриваемого кандидата и т.д., а действие $r$ (reject) – отказу от приобретения товара или услуги, голосованию за других кандидатов и т.д. Во-вторых, предположим, что множество $\Theta$ состоит из двух элементов, характеризующих качества объекта – g (good) и b (bad), то есть $\Theta = \{g; b\}$.

Рассмотрим последовательно (в порядке усложнения) ряд моделей поведения агента.

<u>Модель 0 (рефлексия отсутствует).</u> Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множества $\Theta$ свойств объекта во множество $X_i$ действий агента, то есть $B_i$: $\Theta \to X_i$. Примером такого отображения может служить следующее: $B_i(g) = a$, $B_i(b) = r$, то есть, если агент считает, что товар (кандидат) хороший, то он его приобретает (отдает за него свой голос), и отвергает в противном случае.

В рассматриваемой модели информационное управление является информационным регулированием [36, 117] и заключается в формировании у агента представлений об объекте, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$. Напомним, что в настоящей работе технологии информационного управления (то есть способы формирования требуемых представлений) не рассматриваются – см. их описание в [10, 23, 24, 37, 43, 91, 130, 136, 148, 175], а также обзоры в [154, 161].

<u>Модель 1 (первый ранг рефлексии).</u> Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Theta \ni \theta_i$ свойств объекта и $\Theta \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов – во множество $X_i$ его действий, то есть $B_i$: $\Theta \times \Theta \to X_i$. Примерами такого отображения могут служить следующие:

$$B_i(g, g) = a,\ B_i(g, b) = a,\ B_i(b, g) = r,\ B_i(b, b) = r,$$

и

$$B_i(g, g) = a,\ B_i(g, b) = r,\ B_i(b, g) = a,\ B_i(b, b) = r.$$

В первом случае агент ориентируется на собственное мнение, во втором – на мнение других агентов («общественное мнение»).

В рассматриваемой модели информационное управление является и информационным регулированием, и рефлексивным управлением, и заключается в формировании у агента представлений об объекте и о представлениях других агентов, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо в первом случае сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$, $\theta_{ij}$ – любое, а во втором случае – $\theta_{ij} = g$, $\theta_i$ – любое.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении посредством СМИ не всегда воздействие направлено на формирование непосредственно $\theta_{ij}$ – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно – у агента формируются представления о поведении (выбираемых действиях) других агентов, по которым данный агент может восстановить их представления. Примерами косвенного формирования представлений $\theta_{ij}$ могут служить рекламные лозунги «Новое поколение выбирает Pepsi», «В то время, когда все настоящие мужики …», обращение к мнению авторитетных людей и т.д.;

информация о том, что по опросам общественного мнения значительное число избирателей собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Модель 2 (второй ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Theta \ni \theta_i$ свойств объекта, $\Theta \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов, и $\Theta \ni \theta_{iji}$ – представлений агента о представлениях других агентов о его собственных представлениях – во множество $X_i$ его действий, то есть $B_i$: $\Theta \times \Theta \times \Theta \to X_i$. Примером такого отображения, в котором проявляются отличные от нулевой и первой моделей свойства, может служить следующее:

$$\forall\, \theta \in \Theta \;\; B_i(\theta, \theta, g) = a, B_i(\theta, \theta, b) = r.$$

В данном случае агент следует своей «социальной роли» и производит выбор, которого от него ожидают другие агенты (данная модель качественно близка к «этическим» моделям, описываемым в разделе 4.3.4).

В рассматриваемой модели информационное управление является рефлексивным управлением и заключается в формировании у агента представлений о представлениях других агентов о его собственных представлениях, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_{iji} = g$.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении воздействие не всегда направлено на формирование непосредственно $\theta_{iji}$ – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно – у агента формируются представления о том, что другие агенты ожидают от него определенных действий. В данном случае речь идет о так называемом социальном влиянии, многочисленные примеры которого можно найти в учебниках по социальной психологии [48, 88, 177]. Примерами косвенного формирования представлений $\theta_{iji}$ могут служить лозунги «Ты записался добровольцем?», «А ты купил (сделал) …?», «В Вашем положении (при Вашем статусе) …?» и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения большинство представителей социальной группы, к которой принадлежит (или с которой идентифицирует себя) агент, собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Таким образом, мы рассмотрели простейшие модели информационного управления посредством СМИ, сформулированные в терминах рефлексивных моделей принятия решений и структур информированности. Во всех этих моделях ранг рефлексии не превышал двух[54]. Представить себе реальные ситуации, в которых информационное воздействие направлено на более глубокие компоненты структуры информированности, затруднительно. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является изучение формальных моделей информационного управления (и технологий этого управления) агентами, осуществляющими коллективное принятия решений в условиях взаимосвязанной информированности.

Формальная модель информационного влияния СМИ на примере рекламы товара рассмотрена в разделе 4.19.

## 4.3. РЕФЛЕКСИЯ В ПСИХОЛОГИИ

В настоящем разделе в терминах рефлексивных игр описываются некоторые явления и процессы, являющиеся предметом исследований в психологии – психология шахматного творчества; трансакционный анализ; окно Джохари; модель этического выбора. Авторы не претендуют на новые результаты в области психологии, а лишь преследуют цель проиллюстрировать возможность и целесообразность использования аппарата рефлексивных игр в гуманитарных областях.

### 4.3.1. Психология шахматного творчества

Хрестоматийным примером рефлексивного анализа является шахматная игра [50]. Можно выделить два аспекта рассмотрения взаимодействия агентов. Во-первых, при выборе хода каждый из шахматистов анализирует дерево игры – возможные варианты сво-

[54] Исключением является, наверное, очень редко встречающаяся на практике ситуация, когда информационное воздействие направлено на формирование сразу всей информационной структуры, например путем навязывания «общего знания» – «Голосуй сердцем!», «… – наш выбор!» и т.д.

его хода, ответа противника (соперника), ответа на ответ и т.д. [2]. Во-вторых, при оценке той или иной позиции или совокупности позиций, соответствующей тому или иному дереву игры, шахматист при анализе возможных ответов противника вынужден смотреть на позицию «его глазами», предсказывать представления противника о его собственной оценке и т.д. (см. описание стратегической и информационной рефлексии выше). В настоящем разделе мы не будем рассматривать рефлексивные аспекты повторяющихся игр, а сконцентрируем основное внимание на рефлексивном анализе агентами позиций.

Рассмотрим следующую модель. Пусть $\theta$ – объективная (сложившаяся на шахматной доске) позиция, $\theta_1$ – оценка этой позиции (ее видение) первым агентом (пусть для определенности это будет агент, играющий белыми фигурами), $\theta_2$ – оценка этой позиции (ее видение) вторым агентом (агентом, играющим черными фигурами), $\theta_{12}$ – представления первого агента об оценке позиции вторым и т.д.

Проанализируем, основываясь на [68], какие компоненты информационной структуры присутствуют в оценках позиции и влиянии на оценку этой позиции противником (это влияние названо в упомянутой работе психологическим влиянием). Для этого перечислим основные факторы психологического влияния[55]:

- ходы на шахматной доске;
- поведение противника;
- темп игры (скорость принятия решений противником);
- мнение относительно класса игры противника;
- информация агента о мнении противника относительно класса игры обоих шахматистов;
- турнирное положение соперников и др.

Ярким примером влияния поведения является следующий [68, с. 137]: «Играя с Фишером, Таль попал под сильную атаку, и его положение стало критическим. В этот момент юный Фишер записал намеченный ход (сильнейший в данной позиции) и чуть ли не подсунул бланк сопернику. М. Таль рассказывал: «Просит визу, подумал я. Но как реагировать? Нахмуриться – нельзя, улыбнуться – может расшифровать. И я сделал единственное: встал и спокойно начал прогуливаться по сцене». Р. Фишера поразило невозмутимое и

[55] Отметим, что использование тех или иных факторов психологического влияния является не содержанием, а, скорее, технологией информационного управления.

уверенное поведение противника. Он засомневался, начал сомневаться в правильности намеченного плана. А затем сделал другой, более слабый ход, вскоре допустил еще один серьезный промах и в результате проиграл партию[56]».

Таким образом, естественно, в информационную структуру входят компоненты $\theta_i$, $i = 1, 2$, поскольку они отражают собственные представления шахматистов о позиции. Большинство шахматной литературы посвящено, фактически, проблемам «правильной» оценки позиций и обучения шахматистов этим оценкам. Из перечисленных выше факторов психологического влияния воздействию на $\theta_i$ соответствуют: ходы на шахматной доске, мнение относительно класса игры противника и турнирное положение соперников.

Значительно меньшее внимание (см. ссылки в [66-68]) уделялось компонентам $\theta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, влияние на которые может осуществляться поведением противника и темпом игры.

И, наконец, чрезвычайно редко принимаются во внимание компоненты $\theta_{ijk}$, $i, j, k = 1, 2$, соответствующие второму рангу рефлексии – например, информация агента о мнении противника относительно класса игры обоих шахматистов.

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что при описании шахматной игры[57] в терминах информационного управления (рефлексивной игры) в большинстве случаев имеет место следующее:

1. Число агентов равно двум.
2. Ранг рефлексии не превышает двух (максимальное число существенных индексов равно трем).
3. Большинство ситуаций рефлексивного управления в шахматах описывается задачей Б (см. выше), в которой ранг рефлексии равен единице.

В заключение отметим, что существует множество работ, в которых технология рефлексивного управления в шахматах (правда, авторы, наверное, не всегда осознают, что описывают процесс и результат информационного управления) описывается ярко, образно

[56] В данном примере в качестве активного агента выступали сначала Фишер, а затем Таль, причем, если бы Фишер не инициировал информационное воздействие, то, может быть, партия развивалась бы по-другому.

[57] Отметим, что при описании шахматной игры, в отличие от скрытого управления, трудно выделить активного и пассивного агента, так как в общем случае распределение ролей априори неизвестно и зависит от личностных качеств шахматистов.

и захватывающе (см. [66-68] и ссылки в этих работах). С другой стороны, как справедливо признают и шахматисты, и психологи, и математики шахматы являются очень удобным «полигоном» для построения и верификации моделей конфликтного взаимодействия. Поэтому представляется перспективным систематическое исследование формальных моделей рефлексивных эффектов в шахматной игре.

### 4.3.2. Трансакционный анализ

Основателем *трансакционного анализа* является Э. Берн – известный американский психотерапевт и теоретик психоаналитического направления [8]. Суть предложенного им метода заключается в том, что человек в социальной группе в каждый момент времени обнаруживает одно из состояний своего «Я» – *Родителя*, *Взрослого* или *Ребенка*. Агент, находящийся в одном из трех перечисленных состояний (*ситуаций*), создает трансакционный *стимул* к другому агенту, который в ответ осуществляет трансакционную *реакцию*, которая в свою очередь становится стимулом, и т.д.

Пара «стимул-реакция» образуют *трансакцию*. Если источник стимула и получатель реакции, а также получатель стимула и источник реакции совпадают, то такая трансакция называется *дополнительной*, если нет – то *пересекающейся*. Игрой Э. Берн называет «серию следующих друг за другом скрытых дополнительных трансакций с четко определенным предсказуемым исходом» [8, с. 37].

В игре могут участвовать несколько агентов (быть может, коллективных), но, тем не менее, **трансакция всегда имеет место между двумя агентами**.

Опишем произвольную трансакцию в терминах рефлексивной игры. Любая трансакция между двумя агентами (инициатора условно будем называть первым агентом) может быть представлена в виде $(a \to b)$, $(c \to d)$, где $a, b, c, d \in \Theta$ = {Родитель, Взрослый, Ребенок} – ситуации, соответственно источника стимула, получателя стимула, источника реакции и получателя реакции. Можно считать, что трансакции соответствует одна из двух конечных информационных структур, приведенных на Рис. 57 и Рис. 58[58], где $\theta_1 = a$ ($\theta_{121} = a$), $\theta_{12} = b$, $\theta_2 = c$ ($\theta_{212} = c$), $\theta_{21} = d$.

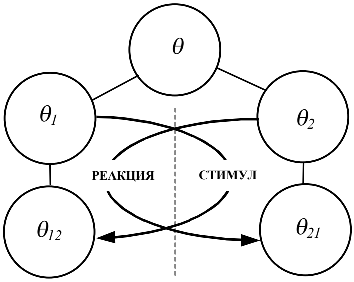


Рис. 57. Информационная структура трансакции

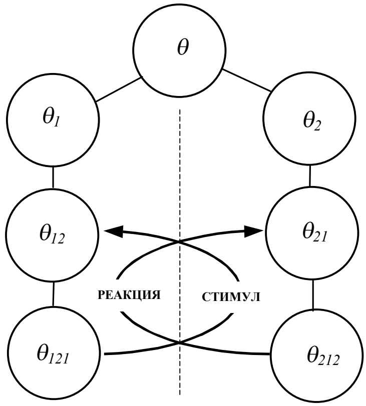


Рис. 58. Информационная структура трансакции

Таким образом, трансакция может быть записана в виде ($\theta_1 \to \theta_{12}$), ($\theta_2 \to \theta_{21}$) или ($\theta_{121} \to \theta_{12}$), ($\theta_{212} \to \theta_{21}$).

Граф рефлексивной игры в данном случае включает шесть вершин (два реальных агента и четыре фантомных). Специфика информационного равновесия для трансакционного анализа заключается в том, что, принимая решения (то есть, занимая позиции Родителя, Взрослого или Ребенка) первый и второй агент обладают различной информацией – первый агент, производя выбор, моделирует желаемую для него ситуацию, а второй агент – констатирует – фиксирует распределение ролей, зная выбор первого.

Приведем пример. Пусть трансакция описывается структурной диаграммой, приведенной на Рис. 59.

В рассматриваемом примере первый агент «обращается» ко второму с позиции Ребенка (то есть предлагает ему рассматривать себя как ребенка: $\theta_{121}$ = «Ребенок»), считая последнего Родителем ($\theta_{12}$ = «Родитель»). Второй агент «отвечает» первому как Взрослый Взрослому (то есть предлагает ему рассматривать себя как Взросло-

[58] Различие заключается в том, рассматривает ли себя инициатор трансакции независимо ($a = \theta_1$), или ориентируется на имеющиеся у него представления оппонента о нем ($a = \theta_{121}$).

го: $\theta_{212}$ = «Взрослый», считая его также Взрослым: $\theta_{21}$ = «Взрослый»).

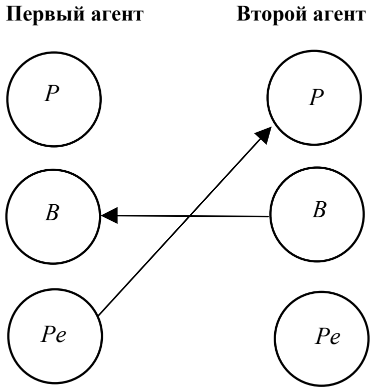


Рис. 59. Пример пересекающейся трансакции

В заключение отметим, что в трансакционном анализе максимальный ранг рефлексии агентов равен двум.

### 4.3.3. Окно Джохари

Одним из широко распространенных в социальной психологии методов изучения потенциальной изменчивости личностных характеристик в социальной среде связан с применением *окна Джохари* (см. Рис. 60), названного так по именам создания метода – Джозефа Лафта и Гарри Ингама [231, 232].

| **Другие**<br>**Я** | Что другие знают обо мне | Чего другие не знают обо мне |
|---|---|---|
| Что я знаю о себе | **I** | **II** |
| Чего я не знаю о себе | **III** | **IV** |

Рис. 60. Окно Джохари

Этот метод позволяет представить агента в двух измерениях – «Я» и «другие» и используется в процессе обучения работников, чья деятельность требует от них понимания того, как и почему окружающие имеют о них мнение, отличное от их собственного.

Окно I (см. Рис. 60) называется *открытой областью* и соответствует информации, которая известна и агенту и другим о нем.

Окно II называется *скрываемой областью* и соответствует информации об агенте, которая известна ему, но неизвестна другим.

Окно III называется *скрытой областью* и соответствует информации об агенте, которая известна другим, но неизвестна ему.

Область IV называется *слепой областью* и соответствует информации об агенте, которая неизвестна никому (ни ему, ни другим).

В рамках рассматриваемых в настоящей работе рефлексивных игр обозначим $\theta$ – объективная информация об агенте, $\theta_1$ – его субъективная информация о себе, $\theta_2$ – информация о нем других агентов. Без ограничений общности можно считать, что все информационные компоненты – $\theta$, $\theta_1$ *и* $\theta_2$ – являются подмножествами некоторого универсального множества $\Theta$.

Тогда открытой области (окно I на Рис. 60) соответствует информация $\theta_1 \cap \theta_2$, скрываемой области (окно II) – информация $\theta_1 \cap (\theta \setminus \theta_2)$, скрытой области (окно III) – информация $\theta_2 \cap (\theta \setminus \theta_1)$, слепой области (окно IV) – информация $(\theta \setminus \theta_1) \cap (\theta \setminus \theta_2)$. Легко видеть, что объединение всех четырех областей дает универсальное множество $\theta$.

В данном случае описание ведется с некоторой внешней (объективной) точки зрения, то есть неявно предполагается, что $\theta_1 \subseteq \theta$, $\theta_2 \subseteq \theta$. При этом ранг рефлексии равен нулю. Если отказаться от объективности и рассматривать ситуацию с точки зрения некоторого агента (например, того, для которого строится окно Джохари), то ранг рефлексии будет равен единице. Если агентов всего два («я» и «другие»), то ранг рефлексии будет не больше двух. Более того, возможно построение окон Джохари, существующих в представлениях фантомных агентов ($\tau$-агентов, где $|\tau| \geq 2$), то есть информационная структура для рефлексивной игры двух агентов может рассматриваться как совокупность $\tau$-субъективных окон Джохари.

### 4.3.4. Модель этического выбора

Как отмечалось выше, в данной работе нас в первую очередь интересует не столько авторефлексия, сколько рефлексия второго рода, связанная с представлениями субъекта о представлениях других участников ситуации. В экономических моделях, где субъект рассматривается как рациональный индивид (букв. «неделимый»), авторефлексия не дает ничего нового: «Я знаю, что я знаю, что я знаю... что…» не дает новой информации по сравнению с «Я знаю, что…». Этому обстоятельству соответствует аксиома автоинформированности (см. раздел 2.2).

Однако по иному обстоит дело в психологии, которая рассматривает человека как некоторую сложную целостность.

В.А. Лефевром [79, 82, 228-229] и другими исследователями [69, 149, 150, 176] изучается рефлексивная модель принятия решений человеком, подчиняющегося системе культурных и этических норм. В частности, в работе [229] описывается модель игрового взаимодействия двух агентов, выбор которых из двух возможных альтернатив (действием является вероятность выбора первой альтернативы) осуществляется с учетом двух аспектов: утилитарного и этического (см. также введение). Утилитарный аспект соответствует максимизации собственного выигрыша, в то время как итоговый выбор учитывает этическую «нагруженность» альтернатив. Опишем, следуя упомянутой работе, *модель этического выбора* в терминах развиваемой в настоящей работе концепции информационного равновесия.

В описываемой ситуации для каждого из двух агентов (обозначим их номерами 1 и 2) можно выделить утилитарный аспект их выбора в виде «агентов» $1_и$ и $2_и$ соответственно. Тогда процесс итогового выбора осуществляется следующим образом (см. Рис. 61).

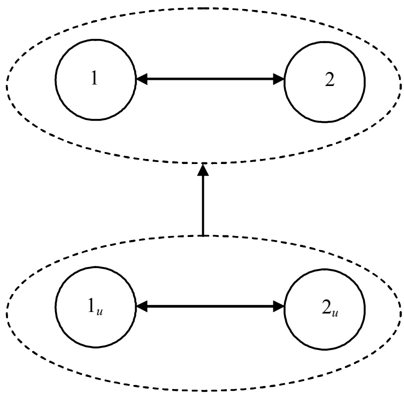


Рис. 61. Модель этического выбора

Сначала «агенты» $1_и$ и $2_и$ «разыгрывают» между собой игру с общим знанием и находят свои равновесные стратегии $x_{1_и}^*$ и $x_{2_и}^*$ (интерпретируемые как вероятности выбора первой альтернативы). Затем агенты 1 и 2, для которых пара ($x_{1_и}^*$, $x_{2_и}^*$) является общим знанием, разыгрывают еще одну игру для итогового выбора. При этом они ищут вектор действий, удовлетворяющий системе соотношений

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 \in BR_1(x_2, x_{1_и}^*, x_{2_и}^*), \\ x_2 \in BR_2(x_1, x_{1_и}^*, x_{1_и}^*). \end{cases}$$

Решением системы (1) являются числа $x_1^*$ и $x_2^*$, которые интерпретируются как вероятности итогового выбора первой альтернативы.

## 4.4. РЕФЛЕКСИЯ В ХУДОЖЕСТВЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Как отмечалось выше, граф рефлексивной игры может быть построен и без конкретизации целевых функций агентов; при этом он отражает качественное соотношение информированностей рефлексирующих агентов. Приведем примеры из художественных произведений.

Если научная литература содержит субъективное описание объективной реальности и характеризуется стремлением к максимальной объективизации, то художественной литературе свойственна рефлексия хотя бы с той точки зрения, что любое художественное произведение описывает рефлексивную реальность, то есть, является результатом рефлексии автора.

Кроме того, сюжеты многих художественных произведений построены на несовпадении объективной реальности и/или рефлексивных реальностей героев. Поясним последнее утверждение.

Если отвлечься от тривиальной «рефлексии» типа «У попа жила собака…», то в любом художественном произведении имеется набор персонажей – людей, играющих те ли иные роли[59] (ситуационные, коммуникативные, социальные и т.д.), которые обусловлены обстановкой и с которыми взаимодействует персонаж.

При этом один и тот же герой художественного произведения может выступать в различных ролях (ему при этом соответствуют различные фантомные агенты) – восприятие им самого себя может отличаться от восприятия его другими героями.

В основе многих сюжетов лежит смена ролей или обмен ролями, юмор (а иногда и трагедия) заключается в несоответствии между ролями одного и того же героя (см. также несоответствие шаблону в разделе 4.1).

Опишем формально возможные варианты взаимной информированности двух субъектов – «*Героя*» и «*Окружения*», которых будем обозначаться соответственно символами «Г» и «О».

Обозначим: Г – нерефлексивные представления героя об объективной реальности (в которую входят все, включая его самого и его окружение); О – нерефлексивные представления окружения об объективной реальности. Герой и окружение являются реальными агентами, в то время как следующие агенты являются фантомными: ГГ – представления героя о себе; ГО – представления героя об окружении; ГОГ – представления героя о представлениях окружения о нем; ОО – представления окружения о себе; ОГ – представления окружения о герое; ОГО – представления окружения о представлениях героя об окружении[60].

Конечные (ранг рефлексии равен двум) информационные структуры героя и его окружения приведены на Рис. 62, на котором компоненты информированности героя или о герое выделены жирными линиями.

Обсудим содержание вершин графа, приведенного на Рис. 62. С точки зрения героя вершина ГГ соответствует авторефлексии (осознание собственной «роли»), вершина ГО – роли окружения, ГОГ –

[59] Отдельным, но выходящим за рамки настоящего исследования, вопросом, традиционно поднимаемым в рассуждениях об актерском мастерстве, является следующий – насколько глубоко актеру следует вживаться в роль? Однозначного ответа на него нет даже среди профессионалов – часть маститых актеров считает, что должна происходить полная внутренняя идентификация актера и персонажа, часть – что всегда необходимо контролировать различие между собой и персонажем.

[60] Содержательные интерпретации компонентов ГГО, ГГГ, ГОО, ООО, ООГ, ОГГ затруднительны.

той роли, которой соответствует (или, с нормативной точки зрения, должен соответствовать) герой с точки зрения окружения. Аналогично описываются вершины с точки зрения окружения.

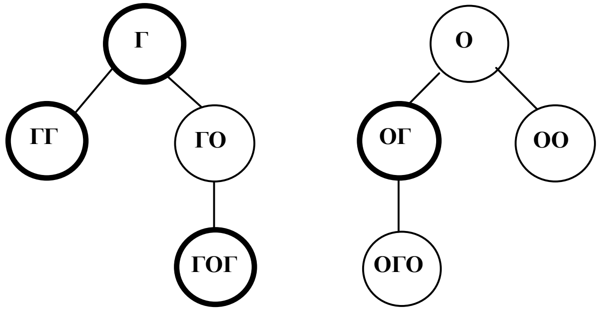


Рис. 62. Информационные структуры героя и его окружения

Как отмечалось выше, в основе многих сюжетов, например «комедии положений» и др., лежит несоответствие (конфликт) между ролями одного и того же субъекта (быть может, коллективного). Рассматриваемая информационная структура (см. Рис. 62) позволяет перечислить возможные конфликты[61].

Прежде всего, следует различать *внутренние* (осознаваемые субъектом в рамках его информированности, то есть возникающие между компонентами его собственной структуры информированности) и *внешние* (между компонентами структур информированности субъекта и окружения) *конфликты*. Всего между четырьмя затененными на Рис. 62 компонентами информированности возможны шесть типов конфликтов. Перечислим их и приведем примеры[62].

Возможны <u>три типа внутренних конфликтов</u>:

1. *Несовпадение Г и ГГ* – внутренний конфликт между героем и его представлениями о себе. Примерами являются: практически все произведения Ф.М. Достоевского, которого можно по праву считать непревзойденным знатоком и мастером использования эффектов авторефлексии; «Детство, отрочество, юность» Л.Н. Толстого; все произведения, принадлежащие такому жанру как «исповедь», вклю-

---

[61] Во многих художественных произведениях присутствуют одновременно конфликты нескольких типов.

[62] Авторы признательны проф. Е.В. Жаринову за ценные замечания и помощь в подборе примеров рефлексивных конфликтов в литературных произведениях.

чая бл. Августина, А. Мюссе, Ж.-Ж. Руссо, Л.Н. Толстого, Н.А. Бердяева и др.

2. *Несовпадение Г и ГОГ* – внутренний конфликт между героем и его представлениями о его роли с точки зрения окружения. Примерами являются: «Герой нашего времени» М.Ю. Лермонтова (Печорин); «Подросток» Ф.М. Достоевского, «Отец Горио» О. Бальзака (Ростиньяк) и др.

3. *Несовпадение ГГ и ГОГ* – внутренний конфликт между ценностями окружения и героя с точки зрения последнего. Примерами являются: «Преступление и наказание», «Записки из подполья», «Агент», «Бесы» Ф.М. Достоевского; «Княжна Мэри» М.Ю. Лермонтова; «Леди Макбет Мценского уезда» Н.С. Лескова; «Утраченные иллюзии» О. Бальзака; а также большинство маргинальной литературы – де Сад, Г. Миллер, В. Ерофеев и др.

Кроме того, возможны три типа внешних конфликтов:

4. *Несовпадение Г и ОГ* – внешний конфликт между героем и представлениями (требованиями) окружения о нем. Примерами являются: «Горе от ума» А.С. Грибоедова (Чацкий), «Собор Парижской Богоматери» В. Гюго; многие произведения классической литературы русского и зарубежного реализма: Л.Н. Толстой (например, «Три смерти», «Смерть Ивана Ильича» и др.), И.С. Тургенев, М.Е. Салтыков-Щедрин, Ж.–Б. Мольер, П. Корнель, Ж. Расин и др.

5. *Несовпадение ГГ и ОГ* – внешний конфликт между представлениями героя о себе и представлениями о нем с точки зрения окружения. Примерами являются: «Евгений Онегин» А.С. Пушкина; «Герой нашего времени» М.Ю. Лермонтова (Грушницкий, Печорин); «Рудин» И.С. Тургенева, «Бельтов» А.И. Герцена и др.

6. *Несовпадение ОГ и ГОГ* – внешний конфликт между представлениями окружения о герое и тем как эти представления видятся самому герою. Примерами являются: «Ревизор» Н.В. Гоголя, (Хлестаков); «Маленькие трагедии» А.С. Пушкина; «Гобсек» О. Бальзака и др.

Перечисленные шесть типов конфликтов типичны для классической литературы. В современной массовой литературе дело, в основном, обстоит несколько проще – подавляющее большинство сюжетов можно отнести к одному из следующих типов – «Детектив», «Шпионские страсти», «Любовный треугольник (или многоугольник)». Приведем примеры соответствующих графов рефлексивной игры.

Пример 4.4.1 («Детектив»). Пусть имеются следователь и преступник. Обозначим их, соответственно 1 и 2. Тогда этапу процесса раскрытия преступления соответствует граф рефлексивной игры $2 \leftarrow 1 \leftrightarrow 12$ (компонент 12 соответствует тому, что преступник пытается убедить следователя в собственной невиновности), а факту раскрытия преступления – переход к графу $1 \leftrightarrow 2$.

Возможны и более сложные случаи информированности. Так, например, Смердяков и Иван Федорович (роман «Братья Карамазовы» Ф.М. Достоевского) по-разному информированы относительно убийства своего отца и отношения к этому друг друга. С точки зрения Смердякова ситуация (граф рефлексивной игры) выглядит следующим образом: «Смердяков» ← «Иван Федорович, желающий смерти отца» ↔ «Смердяков-убийца», а с точки зрения Ивана Федоровича: «Иван Федорович» ← «Смердяков-невиновный» ↔ «Иван Федорович, не желающий смерти отца».

Аналогичная по сложности ситуация имеет место в романе «Преступление и наказание». Раскольников не знает, что следователю известно, что он убийца. Обозначая их, соответственно, 1 и 2, получим, что с точки зрения Раскольникова имеет место $1 \leftarrow 12 \leftrightarrow 121$, в то время как полный граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на Рис. 63.

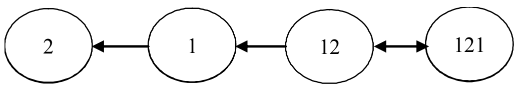


Рис. 63. Граф рефлексивной игры в сюжете «Детектив»

Пример 4.4.2 («Шпионские страсти-1»). Пусть в ситуации участвуют два государства ($A$ и $B$) и агент, который, будучи высокопоставленным чиновником государства $A$ является одновременно осведомителем государства $B$, о чем государству $A$ неизвестно. Граф рефлексивной игры описанной ситуации[63] изображен на Рис. 64. Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – государство $A$; 2 – государство $B$; 3 – агент; 12 – государ-

[63] Легко видеть, что аналогичная информированность имеет место и в сюжете «Любовный треугольник».

ство $B$, которое воспринимает агента как чиновника, верного государству $A$; 13 – агент – чиновник, верный государству $A$.

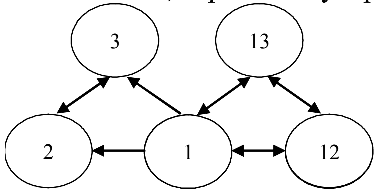


Рис. 64. Граф рефлексивной игры
в сюжете «Шпионские страсти-1»

Неопределенным параметром здесь будет представление о том, кем на самом деле является чиновник, т. е. $\Theta = \{в, ш\}$ (верный и шпион). Эти представления отражены на графе Рис. 65 штриховкой: *в* – горизонтальная, *ш* – диагональная.

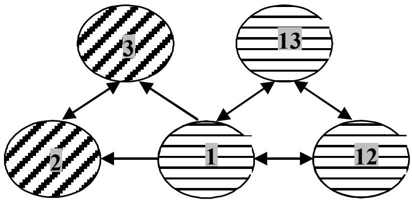


Рис. 65. Граф рефлексивной игры в сюжете
«Шпионские страсти-1» с учетом неопределенности

Посмотрим, можно ли получить данную структуру представлений с помощью механизма простых сообщений (см. раздел 2.12). Из графа видно, что в базисе структуры информированности нет агентов из одного мира, оканчивающихся на один индекс. Это хороший признак, т.к. при простом механизме структуры информированности таких агентов совпадают. Проверим выполнение условия утверждения 2.12.9: $\theta_{21} = \theta_1 = в = \theta_{12}$; $\theta_{31} = \theta_1 = в = \theta_{13}$; $\theta_{23} = \theta_3 = ш = \theta_2 = \theta_{32}$ (здесь в каждой цепочке равенств нас интересует равенство крайних выражений). Тогда по этому утверждению получаем положительный ответ на наш вопрос. Например, подойдет такая последовательность сообщений: $s_1 = \{1, 2, 3\}[в]$, $s_2 = \{2, 3\}[ш]$, где $s_2$ можно интерпретировать как вербовку государством $B$ чиновника государства $A$. •

Рассмотрим несколько усложненную версию предыдущего сюжета.

Пример 4.4.3 («Шпионские страсти-2»). Ситуация похожа на описанную в примере 4.4.2, различие в том, что агент на самом деле работает на государство $A$, а государству $B$ передает лишь соответствующим образом обработанные сведения. Граф рефлексивной игры для этой, более сложной, ситуации изображен на Рис. 66.

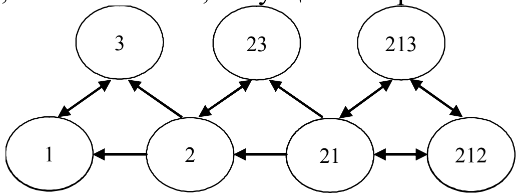


Рис. 66. Граф рефлексивной игры
в сюжете «Шпионские страсти-2»

Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – государство $A$; 2 – государство $B$; 3 – агент; 21 – государство $A$, которое ошибочно полагает, что агент – его чиновник, не входивший ни в какие контакты с $B$; 23 – агент, работающий в пользу государства $B$; 212 – государство $B$, которое не входило ни в какие контакты с агентом – чиновником государства $A$; 213 – агент – чиновник, верный государству $A$ и не входивший ни в какие контакты с государством $B$. Теперь $\Theta = \{в, ш, д\}$ (верный, шпион и двойной агент). Также обозначим на графе Рис. 67 представления участников игры штриховкой: *в* – горизонтальная, *ш* – диагональная, *д* – вертикальная.

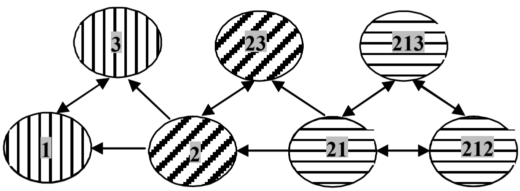


Рис. 67. Граф рефлексивной игры в сюжете
«Шпионские страсти-2» с учетом неопределенности

Но, увы, сразу видно, что уже такую чуть усложненную ситуацию нельзя создать с помощью механизма простых сообщений. Дело в том, что в базисе структуры информированности есть агенты из одного мира и оканчивающиеся на один индекс. Это $I_{12} = I_2 \neq I_{212}$

(агенты 12 и 212 из одного мира). Или же можно сослаться на утверждение 2.12.9, т.к., например, $\theta_{12} = \theta_2 = ш \neq в = \theta_{212}$. •

Отметим, что во всех рассмотренных выше в настоящем разделе примерах ранг рефлексии (который на единицу меньше длины максимальной последовательности индексов) не превышает двух. Более высокие ранги рефлексии в художественных произведениях встречаются чрезвычайно редко, однако их можно найти, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 4.4.4. В фильме «Император и убийца» (1999, режиссер – Чен Кайге) описывается ситуация, основными участниками которой являются два человека – китайский император и убийца. Убийцу посылают к императору под видом посла соседнего государства. Император, между тем, осведомлен о том, что посол на самом деле является убийцей. Однако убийца знает о том, что император знает, что он собирается убить его.

Граф рефлексивной игры для этой ситуации изображен на Рис. 68.

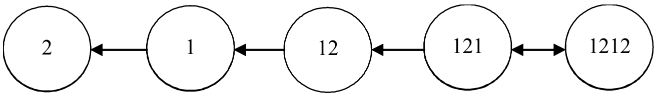


Рис. 68. Граф рефлексивной игры в фильме «Император и убийца»

Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – император; 2 – убийца; 12 – убийца, который считает императора неосведомленным; 121 – император, который считает пришедшего к нему человека послом соседнего государства; 1212 – посол сопредельного государства.

Роль жены императора в интриге фильма читатель может увидеть из графа рефлексивной игры, приведенного на Рис. 69, в котором она обозначена номером 3. •

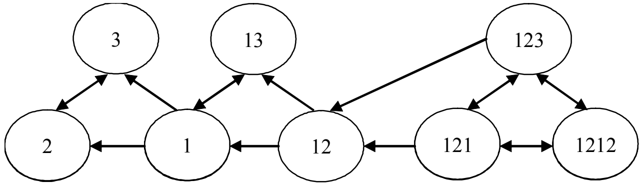


Рис. 69. Роль жены императора в фильме «Император и убийца»

В заключение настоящего раздела отметим, что в последнее время наличие нескольких рефлексивных (виртуальных, быть может, вложенных друг в друга) реальностей лежит в основе сюжетов многих художественных фильмов – «Матрица», «13-ый этаж», «Ванильное небо», «Авалон», «Шоу Трумэна» и др. Используя предложенный в настоящей работе подход, читатель без труда построит соответствующие графы рефлексивной игры.

Таким образом, язык графов рефлексивной игры является удобным средством единообразного описания эффектов рефлексии в художественных произведениях.

Подводя итог рассмотрению прикладных моделей рефлексивных игр, можно сделать вывод, что построение и анализ формальных моделей позволяют систематически и унифицированно (с единых методологических позиций) формулировать и решать задачи анализа и синтеза эффективных информационных воздействий в самых разных ситуациях коллективной деятельности. Недостатком такого подхода на сегодняшний день является его нормативный характер, то есть отсутствие возможности разработки эффективных технологий информационного управления, которые на сегодняшний день остаются искусством. Применение для этих целей математических моделей представляется перспективной задачей будущих[64] исследований.

## 4.5. РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ ПОИСКА

В настоящем разделе рассматривается взаимодействие двух игроков, являющихся подвижными точками в ограниченном с одной стороны «коридоре» (т. е. в области, представляющей собой полуполосу), – уклоняющегося (например, подводная лодка) и ищущего (например, вертолет или противолодочный корабль). Уклоняющийся игрок выбирает точку, где он «прячется», ищущий игрок выбирает свою скорость. Каждый из них имеет свои представления о таком параметре, как минимальное расстояние между ними, при котором происходит обнаружение. Кроме того, каждый из игроков имеет

[64] Нужно честно признать, что в силу отсутствия систематических и полных результатов экспериментальных (а не ретроспективных!) исследований вряд ли можно ожидать существенного прогресса в этой области в ближайшее время.

определенные представления о представлениях оппонента, представлениях о представлениях и т.д. Оказывается, что максимальный целесообразный ранг рефлексии ищущего игрока равен трем, а уклоняющегося – двум. При этом у уклоняющегося, в зависимости от структуры информированности, имеются лишь две равновесные стратегии – «стоять на месте, пытаясь отсрочить момент обнаружения» и «пытаться прорваться как можно раньше».

**Игра поиска в условиях общего знания.** Поиск активно уклоняющегося объекта является типичным примером конфликтного взаимодействия, который может быть исследован методами теории игр. Простейшие игровые задачи поиска были исследованы в конце 60-х годов XX в. (в частности, в монографии [3]). Общей теории игр поиска на данный момент не существует; ряд частных результатов изложен в работе [128]; см. также обзор в монографии [58].

Рассмотрим *игру поиска*, в которой участвуют два игрока, управляющие точечными объектами: ищущим объектом 1 и уклоняющимся объектом 2 (в дальнейшем будем отождествлять игроков и управляемые ими объекты). Поисковой областью, где перемещаются объекты, является прямоугольник евклидовой плоскости $\{(x, y) \mid 0 \le x \le D, 0 \le y \le 2\,L)\}$, $D, L > 0$. Ищущий объект начинает движение из точки $(D, L)$ и движется по отрезку $y = L$ с выбранной им скоростью $\alpha$, $0 \le \alpha \le A$, $A > 0$. Он обнаруживает объект 2 в некоторый момент, если расстояние между объектами в этот момент сократилось до величины $l = \theta - k\,\alpha$, $k > 0$. Содержательно величина $l$ интерпретируется как «зоркость» ищущего (которая уменьшается с ростом его скорости) – расстояние, на котором он может обнаружить уклоняющегося. Уклоняющийся объект может выбрать точку в прямоугольнике для своего местоположения. Ясно, что это должна быть точка на отрезке $y = 0$ либо на отрезке $y = L$. Поэтому можно считать, что выбор объекта 2 определяется одним числом $\delta$, $0 \le \delta \le D$, – абсциссой точки, где он «прячется».

Ищущий объект стремится обнаружить уклоняющегося, причем за как можно меньшее время. Если обнаружение не происходит, то для ищущего более выгодно, чтобы уклоняющийся находился от него на как можно меньшем расстоянии (это расстояние характеризуется выбором $\delta$).

С учетом вышесказанного целевую функцию ищущего зададим следующим образом:

$$(1)\, f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D-\delta}{\alpha}, & \theta \geq L + k\alpha, \\ -\frac{D}{\alpha} - c(\delta), & \theta < L + k\alpha, \end{cases}$$

где $M > 0$ – «премия» за обнаружение (которое происходит, если $l \geq L$), а $c(\delta)$ – возрастающая функция, для которой $c(0) = 0$, характеризующая потери игрока 1 в случае, если обнаружение не происходит. Игра является антагонистической, так что интересы игрока 1 строго противоположны интересам игрока 2.

Таким образом, игра полностью характеризуется целевой функцией $f(\alpha, \delta)$, положительными параметрами $D$, $L$, $A$, $M$, $k$, $\theta$ и функцией $c(\delta)$, которые будем считать общим знанием для первого и второго игроков.

Для нахождения седловой точки игры (1) найдем $\max\limits_{\alpha} \min\limits_{\delta} f(\alpha, \delta)$. Имеем:

$$\min_{\delta} f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D}{\alpha}, & \theta \geq L + k\alpha, \\ -\frac{D}{\alpha} - c(D), & \theta < L + k\alpha, \end{cases}$$

$$\max_{\alpha} \min_{\delta} f(\alpha, \delta) = \max\{M - \tfrac{D}{\alpha^0}, -\tfrac{D}{A} - c(D)\},$$

где $\alpha^0 = (\theta - L)/k$ – скорость, при которой $l = L$, т. е. обнаружение происходит наиболее «экономным» образом.

Далее будем считать выполненными следующие условия:

$$(2)\ \alpha^0 \leq A,\ M - \tfrac{D}{\alpha^0} \geq -\tfrac{D}{A}.$$

Первое из условий (2) означает, что скорость $\alpha^0$ является возможной для объекта 1; второе условие означает, что обнаружение дает объекту 1 достаточно существенную прибавку к выигрышу. Отметим, что первое условие является техническим, оно упрощает дальнейшие выкладки. Второе же является принципиальным, обеспечивая существование равновесия в игре (1).

При выполнении условий (2) имеем:

$$\max_{\alpha} \min_{\delta} f(\alpha, \delta) = M - \tfrac{D}{\alpha^0} = f(\alpha^0, 0).$$

Аналогично:

$$\max_{\alpha} f(\alpha, \delta) = \max\{M - \tfrac{D-\delta}{\alpha^0}, -\tfrac{D}{A} - c(\delta)\}.$$

В силу (2) справедлива цепочка неравенств

$$M - \tfrac{D-\delta}{\alpha^0} \geq M - \tfrac{D}{\alpha^0} \geq -\tfrac{D}{A} \geq -\tfrac{D}{A} - c(\delta),$$

Поэтому $\max\limits_{\alpha} f(\alpha, \delta) = M - \dfrac{D-\delta}{\alpha^0}$ и

$$\min_{\delta} \max_{\alpha} f(\alpha, \delta) = M - \frac{D}{\alpha^0} = f(\alpha^0, 0).$$

Таким образом, у игры (1) при условии (2) существует единственная точка равновесия $(\alpha^0, 0)$.

**Информационная рефлексия.** В этом подразделе мы рассмотрим возможность информационной рефлексии в игре поиска (1). Будем считать, что функция $f(\alpha, \delta)$ и параметры $D$, $L$, $A$, $M$, $k$ являются общим знанием, а относительно параметра $\theta$ у игроков 1 и 2 существуют точечные регулярные структуры информированности $I_1 = (\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \dots)$ и $I_2 = (\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \dots)$ соответственно (подробнее о понятиях «регулярности» и «точечности» см. главу 2). Будем также считать, что общим знанием является выполнение условий (2), которые можно переписать в виде следующего двойного неравенства:

(3) $L + \frac{k}{MD^{-1} + A^{-1}} \le \theta \le L + kA.$

Что касается функции $c(\delta)$, то достаточно, чтобы общим знанием было ее возрастание и тот факт, что $c(0) = 0$.

Рассмотрим принятие решений игроками в порядке возрастания ранга их рефлексии, начиная со второго ранга.

*а*) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftrightarrow 121$, что соответствует второму рангу рефлексии. Тогда 12-игрок (игрок 2 в представлении игрока 1) выбирает действие $\delta_{12} = 0$. Наилучшим ответом на это со стороны игрока 1 является выбор скорости

(4) $\alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}.$

*б*) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом $2 \leftarrow 21 \leftrightarrow 212$, что соответствует второму рангу рефлексии. Тогда 21-игрок выбирает скорость $\alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k}$. Действие игрока 2 зависит от того, состоится ли, с его точки зрения, обнаружение. Если оно состоится, т. е. выполнено условие $\theta_2 - k\alpha_{21}^0 \ge L,$ что равносильно $\theta_2 \ge \theta_{21}$, то лучшим ответом является выбор $\delta_2 = 0$. В противном случае, т. е. при $\theta_2 < \theta_{21}$, наилучший выбор $\delta_2 = D$ (индекс «2» поставлен для обозначения того, что это действие реального игрока 2).

*в*) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftarrow 121 \leftrightarrow 1212$, что соответствует третьему рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с результатом *б*), возможны два случая: $\theta_{12} \geq \theta_{121}$, $\delta_{12} = 0$ и $\theta_{12} < \theta_{121}$, $\delta_{12} = D$. В первом случае наилучшим ответом является $\alpha_1^0$, определяемое соотношением (4), во втором – любое $\alpha_1 \in [0, \alpha_1^0]$.

В результате получаем:

$$(5)\ \alpha_1 \begin{cases} = \alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}, & \theta_{12} \geq \theta_{121}, \\ \in [0, \alpha_1^0], & \theta_{12} < \theta_{121}. \end{cases}$$

*г*) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом $2 \leftarrow 21 \leftarrow 212 \leftrightarrow 2121$, что соответствует третьему рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с предыдущими рассмотрениями, имеем:

$$\alpha_{2121} = \alpha_{2121}^0,\ \delta_{212} = 0,\ \alpha_{21} = \alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k},$$

$$(6)\ \delta_2 = \begin{cases} 0, & \theta_2 \geq \theta_{21}, \\ D, & \theta_2 < \theta_{21}. \end{cases}$$

Результат аналогичен *б*).

*д*) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftarrow 121 \leftarrow 1212 \leftrightarrow 12121$, что соответствует четвертому рангу рефлексии. Тогда, аналогично *в*), возможны два случая: $\theta_{12} \geq \theta_{121}$, $\delta_{12} = 0$, $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}$ и $\theta_{12} < \theta_{121}$, $\delta_{12} = D$, $\alpha_1 \in [0, \alpha_1^0]$.

*е*) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом $2 \leftarrow 21 \leftarrow 212 \leftarrow 2121 \leftrightarrow 21212$, что соответствует четвертому рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с результатом *в*), возможны два случая: $\theta_{212} \geq \theta_{2121}$, $\delta_{212} = 0$, $\alpha_{21} = \alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k}$ и $\theta_{212} < \theta_{2121}$, $\delta_{212} = D$, $\alpha_{21} \in [0, \alpha_{21}^0]$. В первом случае наилучший ответ определяется (6).

Второй случай несколько сложнее для анализа, поскольку игрок 2 может ожидать от игрока 1 любого действия из отрезка $[0, \alpha_{21}^0]$. Здесь мы имеем дело с интервальной неопределенностью, наиболее распространенным способом устранения которой является нахождение максимального гарантированного результата. В данном случае, как нетрудно видеть,

$$\max_{\alpha \in [0, \alpha_{21}^0]} f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D-\delta}{\alpha_{21}^0}, & \theta_2 \geq \theta_{21}, \\ -\frac{D}{\alpha_{21}^0} - c(\delta), & \theta_2 < \theta_{21}. \end{cases}$$

Поэтому гарантирующее действие $\delta_2 = \arg\min_{\delta} \max_{\alpha \in [0, \alpha_{21}^0]} f(\alpha, \delta)$ будет определяться теми же соотношениями (6).

Видно, что с увеличением ранга рефлексии игроков множество их субъективно равновесных действий не увеличивается по сравнению со вторым рангом для игрока 2 и третьим рангом для игрока 1. Ранги 3 для игрока 1 и 2 для игрока 2 будут *максимальными целесообразными* рангами рефлексии. Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 4.5.1. Максимальные целесообразные ранги рефлексии в рефлексивной игре поиска (1) равны 3 для ищущего игрока и 2 для уклоняющегося игрока.

Доказательство проведем по индукции. Базис индукции: если ранг игрока 1 равен 3, то его действие определяется соотношениями (5); если ранг игрока 2 равен 2 или 3, то его действие определяется соотношениями (6). Эти случаи рассмотрены выше.

Рассмотрим теперь принятие решений игроком 1 с $n$-м рангом рефлексии, $n \geq 4$. Ранг 12-игрока равен $n - 1$, и его действие по предположению определяется соотношениями (6). Соответственно, наилучший ответ игрока 1, как было показано в *в*), определяется соотношениями (5). Теми же соотношениями (5) определяется наилучший ответ игрока 1 с третьим рангом рефлексии, откуда вытекает первая часть утверждения (об игроке 1).

Если же принимает решение игрок 2 с рангом $n$, то, по предположению, действие 21-игрока с рангом $n - 1$ определяется соотношениями (5). Наилучший ответ игрока 2 на эти действия определяется, как было показано в *е*), соотношениями (6). Теми же соотношениями (6) определяется наилучший ответ игрока 2 со вторым или третьим рангом рефлексии, откуда вытекает вторая часть утверждения (об игроке 2). •

Содержательно утверждение 4.5.1 означает, что игрок 2 либо занимает положение как можно дальше от игрока 1, выбирая $\delta_2 = 0$ (если считает, что его обнаружат), либо пытается сразу осуществить «прорыв», выбирая $\delta_2 = D$. Стратегия $0 < \delta_2 < D$ не является равновесной ни при каких структурах информированности.

Равновесные стратегии игрока 1 либо $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}$ (если $\delta_{12} = 0$), либо любая из отрезка $[0, \alpha_1^0]$ (если $\delta_{12} = D$).

Возможности информационного управления вторым игроком на этом исчерпываются, и оба равновесия достижимы в рамках ранга 2. Если центр может воздействовать на представления игрока 1 о своих возможностях (которые отражает параметр $\theta$), все определяется тем, переоценивает ли их игрок 1. Если не переоценивает, то обнаружение состоится, если переоценивает – не состоится.

Предположим, что по результатам игры игроки наблюдают факт обнаружения (либо необнаружения), а также – в случае обнаружения – выбор игрока 2 (т. е. $\delta_2$).Тогда информационное равновесие будет стабильным в случае $\theta_2 \geq \theta_{21}$, $\theta_1 \leq \theta$. Содержательно это означает:

1) игрок 2 считает, что игрок 1 не переоценивает свои возможности;

2) так оно на самом деле и есть (хотя и не обязательно игрок 2 оценивает возможности игрока 1 адекватно).

**Некоторые обобщения.** Обсудим качественно возможные обобщения полученных результатов на случай более сложных поисковых ситуаций. Во многих случаях поиск так или иначе сводится к «прочесыванию» поискового множества. Даже если уклоняющийся игрок может перемещаться в процессе игры (а не только в ее начале выбирать свое местоположение), при соответствующих условиях на скорости игроков и параметры поискового множества обнаружение возможно в результате планомерного «прочесывания» (поисковые задачи второго типа по классификации, предложенной в [172]). Стратегии (траектории) «прочесывания» (а также уклонения) на ряде поисковых множеств были предложены в работах [165, 167, 173 и др.]. Отметим, что построение этих траекторий опирается на свойства переменных информационных множеств, характеризующих информированность ищущего игрока о местоположении уклоняющегося (см. [166]).

При применении ищущим игроком этих стратегий у уклоняющегося игрока имеются, по сути, те же две альтернативы, что и в рассмотренном выше случае – либо «скрываться», либо «прорываться». Увеличение ранга рефлексии не приводит к появлению «промежуточных» равновесных стратегий.

## 4.6. ПРОИЗВОДИТЕЛЬ И ПОСРЕДНИК

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида продукции, и центр, выступающий в роли посредника между агентом и рынком. Предполагается, что посредник точно знает рыночную цену, а производитель – нет. Производитель и посредник заранее оговаривают пропорцию, в которой они будут делить доход, затем посредник сообщает производителю информацию (не обязательно достоверную) о рыночной цене, и, наконец, производитель выбирает объем производства. Выбор посредником сообщения о рыночной цене может трактоваться как информационное управление. Стабильным будет такое информационное управление, при котором реальный доход производителя равен тому доходу, на который он и рассчитывал, исходя из сообщения посредника. Оказывается, что, выбирая надлежащим образом информационное управление, посредник обеспечивает себе максимум дохода независимо от пропорции дележа (иными словами, посредник может соглашаться на любую долю, свой выигрыш он получит в любом случае). Интересно, что при этом в некоторых случаях производитель получает б*о*льшую прибыль, чем получил бы, если бы посредник сообщал истинное значение цены.

Рассмотрим ситуацию, в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида продукции, и центр, являющийся посредником. Они взаимодействуют следующим образом:

1) оговариваются доли $\lambda$ и $(1 - \lambda)$, в соответствии с которыми доход делится между производителем и посредником соответственно, $\lambda \in (0; 1)$;

2) посредник сообщает производителю оценку $\tilde{\theta}$ рыночной цены $\theta$;

3) производитель производит некоторый объем продукта $y \geq 0$ и передает его посреднику;

4) посредник реализует его по рыночной цене и передает производителю оговоренную долю дохода $\lambda\, \theta\, y$, а себе забирает $(1 - \lambda)\, \theta\, y$.

Предполагается, что посредник в точности знает рыночную цену, а производитель, напротив, не обладает никакой априорной информацией о ней.

Производитель характеризуется функцией издержек $c(y)$, которая связывает объем продукции и затраты на его производство (будем считать, что ограничения на мощность отсутствуют, то есть может производиться любой объем продукции).

В описанной ситуации ключевую роль играют три параметра – доля $\lambda$, цена $\theta$ и объем продукции $y$. О доле участники договариваются заранее, цену сообщает посредник, объем продукции выбирает производитель.

Теперь рассмотрим вопрос о том, как будут вести себя участники ситуации после того, как они договорились о долях $\lambda$ и $(1 - \lambda)$. Производитель, стремясь максимизировать свою прибыль, выбирает объем производства $y^*$ в зависимости от своей функции издержек, причитающейся ему доли дохода и сообщаемой посредником рыночной цены. Предположим, что производитель изначально доверяет посреднику, причем у производителя нет возможности проверить, насколько сообщение посредника соответствует действительности. В этом случае посредник может сообщить значение $\tilde{\theta}$, не совпадающее, вообще говоря, с истинным значением рыночной цены $\theta$. Выбор посредником сообщения $\tilde{\theta}$ можно трактовать как осуществление информационного управления.

Наконец, предположим, что посредник стремится проводить стабильное информационное управление, то есть обеспечивать производителю тот доход, который он ожидает получить, исходя из значения $\tilde{\theta}$.

В рамках описанных выше предположений целевые функции посредника и производителя выглядят, соответственно, следующим образом: $f_0(y, \tilde{\theta}) = \theta\, y - \tilde{\theta}\, \lambda\, y$, $f(y, \tilde{\theta}) = \tilde{\theta}\, \lambda\, y - c(y)$. Подчеркнем, что эти целевые функции записаны с учетом стабилизации, то есть перераспределения доходов центром (в качестве центра здесь выступает посредник), с целью добиться стабильности равновесия игры (см. раздел 2.7).

Наложим на функцию издержек ограничения таким образом, чтобы прибыль производителя (равная разности дохода и издержек) принимала максимальное значение ровно в одной точке $y^* = y^*(\tilde{\theta}) > 0$. Для этого достаточно потребовать, чтобы она была дважды дифференцируемой, и выполнялись условия:

$$c(0) = c'(0) = 0, \quad c'(y) > 0, \quad c''(y) > 0 \quad \text{при} \quad y > 0,$$

$$c'(y) \to \infty \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Потребуем также выполнения следующего свойства: функция $(y\, c'(y))'$ является непрерывной, возрастающей и стремится к бесконечности при $y \to \infty$.

При этих условиях справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.6.1.

**1)** Выбирая оптимальное для себя значение $\tilde{\theta}$, посредник может обеспечить максимальное значение своей целевой функции независимо от значения $\lambda$.

**2)** Существует $\lambda^* = \lambda^*(\theta)$ такое, что

a) если $\lambda = \lambda^*$, то оптимальным для посредника является сообщение истинного значения цены (то есть $\tilde{\theta} = \theta$),

b) если $\lambda < \lambda^*$ $(\lambda > \lambda^*)$, то производитель получает б*о*льшую (меньшую) прибыль по сравнению с той, которую он получил бы при $\tilde{\theta} = \theta$ (то есть в случае сообщения посредником истинного значения цены).

**3)** Для степенных функций издержек $c(y) = ky^{\alpha}$ $(k > 0,\ \alpha > 1)$, и только для них, вышеупомянутое значение $\lambda^*$ является константой (не зависит от цены $\theta$): $\lambda^* = 1/\alpha$.

Доказательство. Получив от посредника сообщение $\tilde{\theta}$, производитель максимизирует свою целевую функцию, выбирая объем производства $\tilde{y} = \arg\max\limits_{y \in A} f(y, \tilde{\theta})$ из условия $c'(\tilde{y}) = \tilde{\theta}\,\lambda$. Подставим $\tilde{y}$ в целевую функцию посредника и, с учетом соотношения $\dfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{\theta}} = \dfrac{\lambda}{c''(\tilde{y})}$, приравняем нулю ее производную. После преобразований получаем уравнение

(1) $c'(\tilde{y}) + \tilde{y}\, c''(\tilde{y}) = \theta.$

Это уравнение имеет единственное решение $\tilde{y}$ (подчеркнем, что объем производства $\tilde{y}$ зависит только от реальной цены на рынке $\theta$), которому соответствует оптимальное для посредника сообщение

(2) $\tilde{\theta} = \dfrac{c'(\tilde{y})}{\lambda}$.

При этом функция полезности посредника

$$f_0(\tilde{y}, \tilde{\theta}) = \tilde{y}\,(\theta - c'(\tilde{y})),$$

очевидно, не зависит от доли $\lambda$. Пункт 1 утверждения 4.6.1 доказан. Заметим, что при этом прибыль производителя также не зависит от $\lambda$:

(3) $f(\tilde{y}, \tilde{\theta}) = \tilde{y}\, c'(\tilde{y}) - c(\tilde{y})$.

Определим долю $\lambda^*$ следующим образом:

(4) $\lambda^* = \dfrac{c'(\tilde{y})}{\theta}$.

Сопоставляя (2) и (4), видим, что при $\lambda = \lambda^*$ оптимальным для посредника является сообщение $\tilde{\theta} = \theta$ .

Пусть теперь $\lambda < \lambda^*$. Тогда для оптимального сообщения посредника имеем (из (2) и (4)):

(5) $\tilde{\theta} = \dfrac{\lambda^*}{\lambda}\theta > \theta$.

Если бы посредник сообщил $\theta$, то производитель выбрал бы $y^*$, решив уравнение

(6) $c'(y^*) = \theta\,\lambda$

и получил бы прибыль

(7) $f(y^*, \tilde{\theta}) = y^* c'(y^*) - c(y^*)$.

Сопоставляя (2), (5) и (6), получаем (с учетом возрастания $c'(y)$), что $\tilde{y} > y^*$. Далее, нетрудно убедиться, что функция $y\, c'(y) - c(y)$ возрастает. Поэтому сравнение (3) и (7) показывает, что при сообщении $\theta$ прибыль производителя меньше, чем при сообщении $\tilde{\theta}$ .

Аналогично доказывается, что при $\lambda > \lambda^*$ имеет место обратное – прибыль производителя при сообщении $\theta$ больше, чем при сообщении $\tilde{\theta}$ . Пункт 2 утверждения 4.6.1 доказан.

Проверим, при каком условии на функцию издержек $c(y)$ правая часть (4) не зависит от $\theta$. Из (1) видно, что для этого необходимо совместное выполнение соотношений

$$\frac{c'(y)}{\theta} = k_1, \quad \frac{y c''(y)}{\theta} = 1 - k_1 \quad (k_1 \text{ – константа}).$$

Деля второе из них на первое, получаем дифференциальное уравнение

(8) $y\, c''(y) - k_2\, c'(y) = 0$,

где $k_2 = (1 - k_1)/k_1$ – произвольная константа. Решая уравнение (8), получаем (с учетом условий на функцию $c(y)$): $c(y) = ky^{\alpha}$, где $k > 0$, $\alpha > 1$. Нетрудно убедиться (воспользовавшись соотношениями (1) и (4)), что при этом $\lambda^* = 1/\alpha$. •

## 4.7. «ПРИНЦИП ДЕФИЦИТА»

В настоящем разделе рассматривается модель, объясняющая случай кажущейся нерациональности поведения экономических агентов, описанный в [162]. Агентов (клиентов компании, занимающейся оптовыми поставками говядины) разделили на три категории. После этого каждой категории сообщили «свою» информацию. В результате действия агентов различных типов (т. е. попавших в разные категории) оказались различными. Оказывается, что действия агентов можно объяснить, если предположить, что различные информационные воздействия формируют у агентов различные структуры информированности.

Книга американского психолога Р. Чалдини [162] посвящена описанию и классификации стереотипов поведения, которым зачастую следуют люди, принимая те или иные решения. Эти стереотипы представляют собой некие «программы», которые «включаются» при определенных обстоятельствах и предопределяют действия человека, в том числе и явно иррациональные действия. Р. Чалдини выделяет шесть «фундаментальных психологических принципов, которые лежат в основе человеческого поведения»: принцип последовательности, принцип взаимного обмена, принцип социального доказательства, принцип авторитета, принцип благорасположения, принцип дефицита (с. 13 – здесь и далее до конца раздела 4.7 будем ссылаться на работу [162], указывая лишь страницу). Остановимся на последнем из этих принципов.

Суть принципа дефицита состоит в следующем: «ценность чего-либо позитивного в наших глазах существенно увеличивается, если оно становится недоступным» (с. 222). В частности, это относится к дефицитной информации, причем «эксклюзивная информация является более убедительной (с. 235). В качестве одного из подтверждений этого тезиса приводится следующий эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США говядину.

«Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника.

… По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше… Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной» информацией…приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме. Очевидно, сообщение о том, что информация о дефиците сама является дефицитной, сделала данную информацию особенно убедительной» (с. 235–236).

Не подвергая сомнению справедливость выводов Р. Чалдини, попробуем взглянуть на ситуацию несколько по-иному и объяснить действия клиентов компании, исходя из теоретико-игровой модели.

Итак, пусть имеется $n$ клиентов компании – далее будем называть их агентами – принимающих решение об объемах закупки говядины. Будем считать, что число агентов $n$ достаточно велико, все агенты идентичны и конкурируют по Курно при линейной зависимости цены от предложения. Это означает, что целевые функции агентов выглядят следующим образом:

$$f_i(x_1,\dots,x_n) = (Q - \sum_{j \in N} x_j)\, x_i - c x_i,$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, \dots, n\}$, $c \geq 0$. Содержательно, $x_i$ – объем продаж агента за рассматриваемый период времени, $(Q - \sum_{j \in N} x_j)$ – цена, которая при этом устанавливается на рынке, $c$ – оптовая цена, по которой агенты закупают товар. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж, а второе слагаемое – как затраты на закупку товара.

Дифференцируя целевые функции, приравнивая производные к нулю и решая получившуюся систему, можно найти равновесные действия агентов в условиях общего знания:

(1) $x_i = \dfrac{Q-c}{n+1}, \quad i \in N$

(по предположению все агенты идентичны, поэтому их равновесные действия одинаковы). Такова ситуация в отсутствии информационного воздействия. Агенты первого типа, которым было сделано предложение в стандартной форме, закупили товар в объеме (1), рассчитывая реализовать его в данный период времени.

Рассмотрим теперь поведение агентов второго типа, которым было сообщено, что поставки будут сокращены. Можно предположить, что они считали этот факт общим знанием (см. предположение $П_1$ в разделе 2.12). В таком случае для них рациональным действием было закупить в два раза больше товара, чтобы иметь возможность реализовать его в следующий период времени в том же равновесном количестве (1) (и одновременно заниматься поисками других поставщиков).

Наконец, рассмотрим поведение агентов третьего типа, которым было сообщено, что поставки будут сокращены и эта информация доступна лишь некоторому числу агентов. Для таких агентов, возможно, рационально предположить следующее. Существуют два типа агентов – неинформированные и информированные (инсайдеры), к которым агенты третьего типа относят себя. Неинформированные агенты в данном периоде будут реализовывать товар в объеме (1), а в следующем, не имея товара, прекратят участие в игре. Таким образом, число игроков в следующем периоде (равное числу инсайдеров) сократится с $n$ до некоторого числа $k\,n$, $k < 1$, где $k$ – доля инсайдеров. Тогда в следующем периоде равновесным будет действие

(2) $x_i' = \dfrac{Q-c}{kn+1}$.

Сравнивая (1) и (2) легко видеть, что при больших $n$ имеет место соотношение

$$\frac{x_i'}{x_i} = \frac{n+1}{kn+1} \approx \frac{1}{k}\,.$$

Поэтому агенты третьего типа закупали товар в объеме $(x_i + x_i')$, т. е. в $1/k + 1$ раз больше, чем агенты первого типа. Если доля инсайдеров составляет, с точки зрения агентов третьего типа, пятую часть от общего числа агентов (т. е. $k = 1/5$ и этот факт субъективно является общим знанием), то получаем: $x_i + x_i' = 6x_i$.

В этом случае рациональным для агентов третьего типа является закупка в 6 раз большего объема товара, чем для агентов первого типа. Таким образом, при сделанных предположениях мы получаем именно тот результат, который описан в книге [162].

## 4.8. СОВМЕСТНОЕ ПРОИЗВОДСТВО

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой агенты производят однородную продукцию, реализуемую на внешнем рынке. Затем суммарный доход распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями. Каждый агент стремится максимизировать прибыль (доход минус затраты), а центр заинтересован в максимизации суммарной прибыли агентов. Неопределенным параметром в данном случае является рыночная цена продукции. Рассмотрены различные способы формирования структуры информированности игры – информационное регулирование, активный прогноз, рефлексивное управление. Оказывается, что в данном случае эффективность этих трех способов одинакова: формирование центром более сложных структур информированности агентов не дает увеличения эффективности по сравнению с информационным регулированием и активным прогнозом. При этом интересно, что выигрыш каждого из агентов будет меньше ожидаемого, но больше того выигрыша, который он получил бы в случае сообщения центром истинной цены.

Рассмотрим многоэлементную двухуровневую систему, состоящую из центра и $n$ агентов. Стратегией каждого агента является выбор действия, стратегией центра – выбор сообщений агентам.

Обозначим $x_i \in X_i = \Re^1_+$ – действие $i$-го агента, $i \in N$, $N = \{1, 2 \dots, n\}$ – множество агентов, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X' = \prod_{i \in N} X_i$ – вектор действий агентов, $x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$ – обстановка игры для $i$-го агента.

Интересы и предпочтения участников системы – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция $i$-го агента $f_i(x, r_i)$ представляет собой разность между доходом $h_i(x)$ от совместной деятельности и затратами $c_i(x, r_i)$, где $r_i$ – параметр эффективности (тип) агента, то есть $f_i(x, r_i) = h_i(x) - c_i(x, r_i)$, $i \in N$.

Выберем следующий вид функций дохода и затрат:

(1) $h_i(x) = \lambda_i \, \theta X, \; i \in N,$

(2) $c_i(x, r_i) = \dfrac{x_i^2}{2(r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} x_j)}, \; i \in N,$

где $X = \sum_{i \in N} x_i$, $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1$. Для случая, когда в знаменателе выражения (2) стоит знак «–», предполагается, что $\sum_{j \neq i} x_j < \dfrac{r_i}{\beta_i}$.

Содержательно набор агентов может интерпретироваться как некоторая фирма, подразделения которой (агенты) производят однородную продукцию, реализуемую на рынке по цене $\theta$. Суммарный доход $\theta X$ распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями $\{\lambda_i\}$. Затраты агента возрастают по его действиям, а эффективность деятельности (знаменатель выражения (2)) определяется типом агента. Взаимодействие агентов моделируется зависимостью затрат (эффективности деятельности) каждого из них от действий всех (других) агентов. Знак «+» в знаменателе выражения (2) соответствует эффективному взаимодействию агентов (убыванию затрат на масштаб) – чем бóльшие действия выбирают другие агенты, тем меньше затраты (выше эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать снижению удельных постоянных издержек, обмену опытом, технологиями и т.д. Знак «–» в знаменателе выражения (2) соответствует неэффективному взаимодействию агентов (возрастанию затрат на масштаб) – чем бóльшие действия выбирают другие агенты, тем больше затраты (ниже эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать нехватке основных фондов, ограничениям на побочные показатели (например, загрязнение окружающей среды) и т.д. Коэффициенты $\{\beta_i \geq 0\}$ отражают степень взаимозависимости агентов.

Пусть рыночная цена $\theta$ известна всем участникам системы. Тогда, дифференцируя целевые функции агентов, приравнивая производные нулю и складывая получившиеся при этом выражения

$$x_i = \lambda_i\, \theta\, (r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} x_j\ ),\ i \in N,$$

получим следующую зависимость суммарных действий от параметра $\theta$:

$$X(\theta) = \frac{\sum_{i \in N} \frac{\lambda_i \theta\, r_i}{1 \pm \lambda_i \theta \beta_i}}{1 \mp \sum_{i \in N} \frac{\lambda_i \theta \beta_i}{1 \pm \lambda_i \theta \beta_i}}.$$

Пусть $n = 2$, $\lambda_i = \beta_i = ½$, $i = 1, 2$, тогда суммарное действие и равновесные по Нэшу действия агентов равны, соответственно:

(3) $X(\theta) = 2\ \theta\, R \,/\, (4 \mp \theta)$,

(4) $x^*_i(\theta) = \dfrac{2\theta}{16 - \theta^2}\ (4\, r_i \pm\ \theta\, r_{-i}),\quad i = 1, 2.$

Зависимости суммарного действия $X(\theta)$ от цены $\theta$ приведены на Рис. 70 и Рис. 71 соответственно (знак «+» или «–» соответствуют знаку в знаменателе выражения (2)). В случае «–» предполагается, что $\theta < 4$ (при $\theta \geq 4$ равновесия Нэша не существует).

Из выражения (3) можно выразить зависимость параметра $\theta$ от суммарных действий $X$:

(5) $\theta = \Theta(X) = \dfrac{4X}{2R \pm X}$.

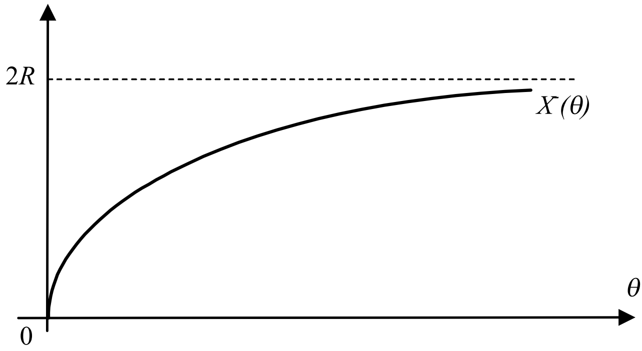


Рис. 70. Зависимость суммарного действия от цены

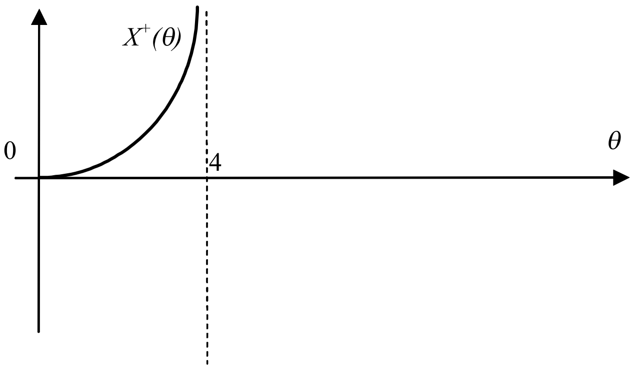


Рис. 71. Зависимость суммарного действия от цены

Введем в моделируемой системе управление. Примем следующий порядок функционирования системы. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно – управлении и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников системы. Центр, обладая правом первого хода, выбирает значения управляющих переменных и сообщает их агентам, после чего агенты при известном управлении принимают решения о выбираемых действиях.

Институциональному управлению соответствует, например, введение центром квот – ограничений на максимальные значения действий, за нарушение которых на агентов могут быть наложены значительные штрафы.

Мотивационному управлению соответствует изменение параметров $\{\lambda_i\}$, которые могут интерпретироваться как внутренние (внутрифирменные, трансфертные и т.д.) цены. Примеры подобного управления приведены в [93, 112] как для задач планирования (когда центр назначает цены на основании сообщений агентов о неизвестных ему эффективностях их деятельности), так и для задач стимулирования (когда доход агента рассматривается как вознаграждение, получаемое от центра).

Информационному управлению соответствует целенаправленное изменение центром информации, используемой агентами при принятии решений. Действительно, величины (3)–(5) могут быть вычислены и центром, и агентами на основании имеющейся у них априори информации. При этом оценка состояния природы – рыночная цена $\theta$ – входит в них параметрически, следовательно, в зависимости от информированности участника системы, вычисляемые им значения параметров (3)-(5) могут различаться.

Пусть рыночная цена неизвестна агентам или известна неточно. **Информационное регулирование** в рассматриваемой модели заключается в сообщении центром агентам оценки $\theta_0 \in \Theta$ состояния природы (то есть центр использует однородную стратегию). В силу принципа доверия (который, как отмечалось выше, заключается в том, что агенты полностью доверяют сообщенной центром информации и используют ее при принятии своих решений) агенты выберут действия $\{x^*_i(\theta_0)\}$, определяемые (4), что приведет к суммарному действию $X(\theta_0)$, определяемому (3).

Пусть $\Phi(x, \theta)$ – целевая функция центра, $\theta_0$ – его информация о состоянии природы (будем считать, что информация верна). Тогда задача информационного регулирования заключается в максимизации сообщением $\theta^* \in \Theta$ гарантированного значения целевой функции центра на множестве равновесных при данном сообщении состояний агентов:

(6) $\Phi(x^*(\theta^*), \theta_0) \to \max\limits_{\theta^* \in \Omega}$.

**Активный прогноз** в рассматриваемой модели заключается в сообщении центром агентам информации о будущих значениях результатов их деятельности – например, о суммарном действии.

Пусть $X^* \in \Re^1_+$ – сообщение центра. Тогда, воспользовавшись (5), агенты могут однозначно восстановить значение состояния природы, на которое должен бы был ориентироваться центр, рассчитывая на сообщенное им суммарное действие.

Задача активного прогнозирования заключается в максимизации сообщением $X^*$ значения целевой функции центра на множестве равновесных при данном сообщении состояний агентов:

$$(7)\ \Phi(x^*(\Theta(X^*)),\ \theta_0) \to \max_{X^* \in \Re^1_+}.$$

При известных зависимостях (3)–(5) задачи (6) и (7) являются стандартными задачами оптимизации.

Отметим, что в данном примере эффективности активного прогноза и информационного регулирования одинаковы, так как оценка состояния природы восстанавливается по результату деятельности однозначно.

Рассмотрим случай, когда затраты каждого агента возрастают по действиям других агентов (этому соответствует знак «минус» в знаменателе функции затрат (2)).

Пусть центру достоверно известно, что внешняя цена $\theta_0$ равна единице, агенты знают лишь, что $\theta \in \Theta = [0; 3]$. Будем считать, что целевая функция центра определяется суммарным доходом $1 \cdot X$ за вычетом суммарных затрат агентов.

Тогда задача (6) имеет вид:

$$(8)\ X(\theta) - c_1(x^*(\theta), r_1) - c_2(x^*(\theta), r_2) \to \max_{\theta \in [0;3]},$$

где $X(\theta)$ и $x^*(\theta)$ определяются соответственно выражениями (3) и (4). Предполагая, что агенты одинаковы ($r_1 = r_2 = 1$) и подставляя (3) и (4) в (8), получим, что целевая функция центра следующим образом зависит от его сообщения:

$$(9)\ \Phi(x^*(\theta),\ \theta) = \frac{\theta(4-\theta)}{4+\theta}.$$

Максимум выражения (9) на отрезке [0; 3] достигается в точке $\theta^* = 4\,(\sqrt{2}\ - 1)$. Следовательно, решение задачи информационного регулирования – сообщение центром агентам оценки $\theta^*$. Отметим, что эта оценка отличается от «истинной» оценки $\theta_0 = 1$, то есть центру выгодно искажать информацию.

Небезынтересно рассмотреть вопрос о том, каковы будут выигрыши агентов в случае единичной истинной цены и сообщения центра $\theta^* = 4\,(\sqrt{2}\ - 1)$. Нетрудно убедиться, что выигрыш каждого из них будет меньше ожидаемого, но больше того выигрыша, который он получил бы в случае сообщения центром истинной цены. Вывод несколько парадоксальный – агентам выгодно, чтобы от них скрыли истинное значение цены! Объясняется это тем, что равновесие Нэша не является в данном случае Парето-оптимальным, и центр своим сообщением «сдвигает» точку информационного равновесия к Парето-оптимуму.

Рассмотрим теперь задачу активного прогнозирования (7). Ее решение заключается в вычислении на основании информации о $\theta^*$ по выражению (5) величины $X(\theta^*)$ и сообщение ее агентам в качестве прогноза $X_0$ их суммарных действий. Легко подсчитать, что сообщение центром $X_0 = 2\,(2 - \sqrt{2}\,)$ побуждает агентов восстановить оценку $\theta^*$ состояния природы и выбрать требуемые для центра действия.

Если бы центру было невыгодно искажать информацию, то это значило бы, что именно сообщение агентам истинного состояния природы побуждает их прийти в наиболее выгодное для центра состояние. Другими словами, совпадение $\theta^*$ и $\theta_0$ является частным случаем и может рассматриваться как «случайное».

Отметим, что целевая функция центра при единичной истинной цене имеет вид

$$\Phi(x, 1) = x_1 + x_2 - \frac{x_1^2}{2 - x_2} - \frac{x_2^2}{2 - x_1}.$$

Максимум этой функции на множестве $0 \le x_1 < 2$, $0 \le x_2 < 2$ достигается в точках $x_1 = x_2 = 2 - \sqrt{2}$, которые и достигаются при помощи описанных информационных воздействий – информационного регулирования и приводящего к тому же результату активного прогноза (для того, чтобы в этом убедиться, достаточно найти максимум целевой функции центра по всем парам $(x_1, x_2)$). Поэтому это управление, состоящее в формировании структуры информированности единичной глубины, является оптимальным на множестве всех структур информированности. Это означает, в частности, что формирование центром более сложных структур информированности агентов (т. е. осуществление рефлексивного управления) не дает увеличения эффективности по сравнению с информационным регулированием и активным прогнозом.

## 4.9. КОНКУРЕНЦИЯ НА РЫНКЕ

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой цена на продукцию агентов зависит от суммарного объема производства. В качестве неопределенного параметра выступают характеристики агентов (их эффективности). Рассмотрена задача активного прогнозирования, когда центр, стремясь минимизировать рыночную цену, сообщает агентам суммарный объем производства (т. е. сумму их действий). Оказывается, что при некоторых предположениях сообщение точного прогноза минимизирует цену.

Если в разделе 4.8 рынок был ненасыщен и подразделения рассматриваемой фирмы могли продавать на рынке любое количество продукции по фиксированной цене, которая являлась неопределенным параметром (состоянием природы), то в данной модели предполагается, что спрос задан экзогенно в виде $X(\lambda)$, где $X$ – суммарный выпуск (суммарное действие агентов), а $\lambda$ – рыночная цена. Если $X(\cdot)$ – строго монотонно убывающая непрерывная функция, то существует обратная ей функция $\lambda(X)$, отражающая зависимость рыночной цены от предложения, которая также строго монотонно убывает и непрерывна.

Предположим, что агентам объективно не известны эффективности (параметры функций затрат) друг друга. Однако для каждого $i \in N$ $i$-й агент знает свой тип $r_i$, имеет представления о типах оппонентов $r_{ij}$, $j \in N$, и считает известный ему набор типов общим знанием. Иными словами, информационная структура игры задается соотношениями $r_{i\sigma j} = r_{ij}$, $i, j \in N$, $\sigma \in \Sigma$.

Целевая функция $j$-го агента с точки зрения $i$-го агента есть:

$$(1)\ f_j(x, r_{ij}) = \lambda(X)\, x_j - \frac{x_j^2}{2r_{ij}},\ i, j \in N,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X'$ – вектор действий агентов, имеющих сепарабельные затраты $c_j(x) = x^2 / 2\, r_j$, $j \in N$.

Каждый агент считает, что играет в игру с общим знанием. Из условий равновесия получаем действия агентов:

$$(2)\ x^*_{ij} = \frac{r_{ij}\lambda(X)}{1-\lambda'(X)r_{ij}},\quad i, j \in N.$$

Далее рассмотрим два варианта конкретизации функции $\lambda(X)$.

Пусть $\lambda(X) = \lambda_0 - \gamma X$, $\lambda_0, \gamma > 0$. Тогда если подставить $\lambda(X)$ в (2), получаем:

(3) $x^*_{ij} = \dfrac{r_{ij}\lambda_0}{(1+\gamma r_{ij})(1+\gamma\alpha_{\text{i}})}$, $i, j \in N$,

где

(4) $\alpha_i = \sum\limits_{j\in N} \dfrac{r_{ij}}{1+\gamma r_{ij}}$, $i \in N$.

Исследуем информационное равновесие для случая двух агентов ($n = 2$) при условии, что центр осуществляет активный прогноз. Пусть при этом $r_1 = r_2 = \lambda_0 = \gamma = 1$.

Из (3) получаем, что суммарное действие в зависимости от предположений агентов о типе партнера равно

(5) $X(r_{12}, r_{21}) = \dfrac{2+\alpha_1+\alpha_2}{2(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}$,

где $\alpha_1 = ½ + r_{12} / (1+r_{12})$, $\alpha_2 = ½ + r_{21} / (1 + r_{21})$.

Пусть задача центра заключается в обеспечении суммарного действия равного $X$. Рассмотрим, какой прогноз $X_0$ решает эту задачу.

С точки зрения первого агента, которому сообщен прогноз $X_0$, целевые функции выглядят следующим образом:

$$f_1(x_1, x_2) = (1 - x_1 - x_2)\, x_1 - \frac{x_1^2}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2) = (1 - x_1 - x_2)\, x_2 - \frac{x_2^2}{2r_2},$$

где параметр $r_2$ ему неизвестен. Для нахождения равновесия Нэша первый агент приравнивает к нулю производные этих функций, что приводит (с учетом прогноза) к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 1 - x_2 - 3x_1 = 0, \\ 1 - x_1 - \left(\dfrac{1}{r_2} + 2\right) y_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = X_0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{1 - X_0}{2}, \quad x_2 = \frac{3X_0 - 1}{2}, \quad r_2 = \frac{3X_0 - 1}{3 - 5X_0}.$$

Заметим, что по смыслу ситуации эти три значения должны быть положительны. Это накладывает естественное ограничение на возможные сообщения центра: $\frac{1}{3} < X_0 < \frac{3}{5}$.

В итоге получаем, что равновесная стратегия первого агента такова: $x_1^* = \frac{1 - X_0}{2}$. Рассуждая аналогично с точки зрения второго агента, получаем его равновесную стратегию: $x_2^* = \frac{1 - X_0}{2}$.

Таким образом, сообщая прогноз $X_0$, центр добивается суммарного действия $X = x_1^* + x_2^* = 1 - X_0$. Очевидно, единственным точным прогнозом центра в описываемой ситуации является $X_0 = ½$.

Пусть теперь зависимость цены от суммарного действия двух агентов задается соотношением $\lambda(X) = 1/X$. Тогда целевые функции агентов имеют вид

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1 + x_2} - \frac{x_1^2}{2}, \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1 + x_2} - \frac{x_2^2}{2r_2}.$$

Дифференцируя эти функции по соответствующим переменным и приравнивая производные к нулю, найдем равновесные стратегии агентов:

$$x_1^* = \frac{\sqrt[4]{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \sqrt{r_1}, \quad x_2^* = \frac{\sqrt[4]{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \sqrt{r_2}.$$

Предположим, что $r_1 = r_2 = 1$, и каждому агенту известен свой тип, но неизвестен тип другого агента, то есть первому агенту неизвестно значение $r_2$, а второму – значение $r_1$.

Будем считать, что центр стремится минимизировать цену, сообщая агентам ее прогноз. Выясним, какой прогноз является оптимальным (то есть минимизирующим реальное значение цены).

Если центр сообщает прогноз цены $\lambda$, то первый агент может определить тип второго агента $\tilde{r}_2$ из уравнения

$$\frac{1}{\lambda} = x_1^* + x_2^* = \sqrt[4]{r_1 \tilde{r}_2} = \sqrt[4]{\tilde{r}_2}.$$

Имеем: $\tilde{r}_2 = \frac{1}{\lambda^4}$, откуда $x_1^* = \frac{\sqrt[4]{\tilde{r}_2}}{1 + \sqrt{\tilde{r}_2}} = \frac{1/\lambda}{1 + 1/\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$.

Повторяя эти же рассуждения для второго агента, получаем его равновесную стратегию: $x_2^* = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$.

Таким образом, при сообщении центром прогноза цены $\lambda$ истинное значение цены $\Lambda$ окажется следующим:

$$\Lambda(\lambda) = \frac{1}{x_1^* + x_2^*} = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}.$$

Легко видеть, что минимум функции $\Lambda(\lambda)$ достигается в точке $\lambda = 1$. Это значение и будет оптимальным. При этом $\Lambda(1) = 1$, то есть оптимальный прогноз центра является точным прогнозом, а агенты получают именно те выигрыши, на которые рассчитывали при выборе стратегии.

## 4.10. АККОРДНАЯ ОПЛАТА ТРУДА

В настоящем разделе рассматривается модель, которая отражает ситуацию, в которой вознаграждение коллектива агентов за работу имеет следующий вид: каждый агент получает фиксированное вознаграждение, если агрегированный результат деятельности агентов (например, сумма их действий) превышает заданный норматив; вознаграждение равно нулю, если норматив не выполнен.

Агенты имеют иерархию представлений о нормативе. Помимо общего знания рассматриваются следующие варианты:

– представления агентов о нормативе попарно различны; тогда либо никто из агентов не работает, либо один агент выполняет весь объем работ;

– если структура информированности имеет глубину два, и каждый из агентов субъективно считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием, то множество возможных равновесных ситуаций максимально и совпадает со множеством индивидуально рациональных действий;

– если структура информированности имеет глубину два, и на ее нижнем уровне имеет место симметричное общее знание, то и в этом случае множество информационных равновесий является максимально возможным.

Полученные результаты полностью подтверждают интуитивно правдоподобный качественный вывод: в коллективе работников совместная работа возможна (является равновесием) лишь в том случае, когда имеется общее знание о том, какой объем работ необходимо выполнить для получения вознаграждения. Кроме того, незначительное изменение информационной структуры приводит к существенному изменению информационного равновесия.

Интересно, что в рассматриваемой ниже модели возможно следующее стабильное информационное равновесие: каждый агент считает, что именно за счет его усилий выполнен весь объем работ и это всем известно (и даже является общим знанием).

Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и $n$ агентов, осуществляющих совместную деятельность.

Стратегией $i$-го агента является выбор действия $y_i \in X_i = \Re^1_+$, $i \in N$, стратегией центра – выбор системы стимулирования, определяющей размер вознаграждения каждого агента в зависимости от результата их совместной деятельности. Предположим, что технология взаимодействия агентов такова, что для достижения требуемого результата необходимо, чтобы сумма их действий была не меньше заданной величины $\theta \in \Theta$. В этом случае $i$-й агент получает от центра фиксированное вознаграждение $\sigma_i$, $i \in N$, в случае же $\sum_{i \in N} y_i < \theta$ вознаграждение каждого агента равно нулю.

Реализация действия $y_i \geq 0$ требует от $i$-го агента затрат $c_i(y, r_i)$, где $r_i > 0$ – его тип (параметр, описывающий индивидуальные характеристики), $i \in N$.

Относительно функций затрат агентов предположим, что $c_i(y, r_i)$ – непрерывная возрастающая по $y_i$ и убывающая по $r_i$ функция, причем

$$\forall\ y_{-i} \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j\ ,\ \forall\ r_i > 0 \quad c_i(0, y_{-i}, r_i) = 0,\ i \in N.$$

Описанную модель взаимодействия будем далее называть игрой «Аккордная оплата труда».

Определим множество индивидуально рациональных действий агентов:

$$IR = \{y \in X' = \prod_{i \in N} X_i \mid \forall\ i \in N\ \sigma_i \geq c_i(r_i)\}.$$

Если затраты агентов сепарабельны, то есть затраты $c_i(y_i, r_i)$ каждого агента зависят только от его собственных действий и не зависят от действий других агентов, получаем, что $IR = \prod_{i \in N} [0; y_i^+]$, где

$$y_i^+ = \max \{y_i \geq 0 \mid c_i(y_i, r_i) \leq \sigma_i\},\ i \in N.$$

Обозначим

$$Y(\theta) = \{y \in X' \mid \sum_{i \in N} y_i = \theta\},\ \ Y^*(\theta) = \mathrm{Arg} \min_{y \in Y(\theta)} \sum_{i \in N} c_i(y, r_i).$$

Рассмотрим последовательно различные варианты информированности агентов о значении параметра $\theta \in \Theta$. Как мы увидим, даже небольшое усложнение структуры информированности может существенно изменить множество информационных равновесий рассматриваемой рефлексивной игры.

Вариант I. Предположим, что значение $\theta \in \Theta$ является общим знанием. Тогда равновесием игры агентов является параметрическое равновесие Нэша, принадлежащее множеству

(1) $E_N(\theta) = IR \cap Y(\theta)$.

Определим также множество эффективных по Парето действий агентов:

(2) $Par(\theta) = IR \cap Y^*(\theta)$.

Так как $\forall\ \theta \in \Theta\ \ Y^*(\theta) \subseteq Y(\theta)$, то из (1) и (2) следует, что множество эффективных по Парето действий является одним из равновесий Нэша. Но множество равновесий Нэша может оказаться шире – в частности, при $\theta \geq \max_{i \in N} y_i^+$ оно всегда содержит вектор нулевых действий.

Пусть функции затрат агентов являются функциями затрат типа Кобба–Дугласа: $c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i)$, где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, удовлетворяющая равенству $\varphi(0) = 0$.

Тогда (см., например [112]) эффективной по Парето является единственная точка: $y^*(\theta) = \{ y_i^*(\theta)\}$, где $y_i^*(\theta) = \theta\, r_i / \sum_{j \in N} r_j$, $i \in N$.

Вычислим $y_i^+ = r_i\, \varphi^{-1}(\sigma_i / r_i)$, $i \in N$, тогда при

(7) $\sigma_i \geq r_i\, \varphi(\theta / \sum_{j \in N} r_j)$, $i \in N$,

множество Парето не пусто.

Множества равновесий Нэша в игре $n = 2$ агентов для двух значений $\theta$: $\theta_2 > \theta_1$ приведены на Рис. 72 (точка (0; 0) является равновесием Нэша в обоих случаях).

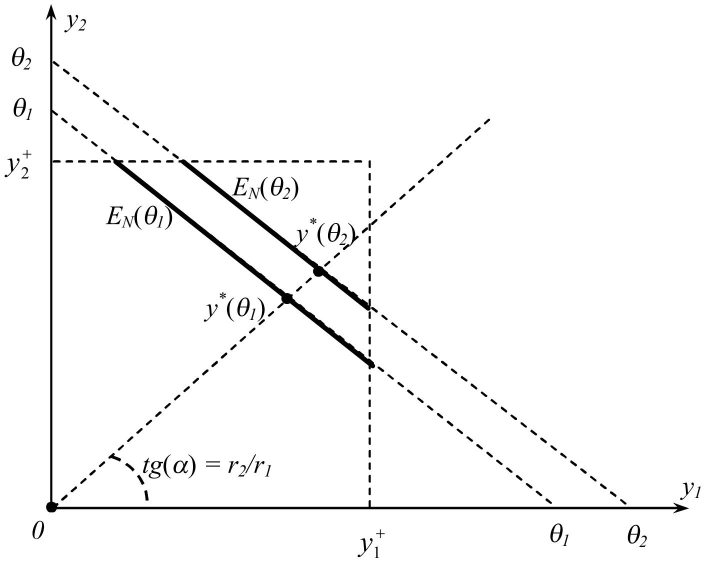


Рис. 72. Параметрическое равновесие Нэша игры агентов

Итак, мы рассмотрели простейший вариант информированности агентов, соответствующий ситуации, когда значение параметра $\theta \in \Theta$ является общим знанием. Рассмотрим следующий (в порядке возрастания сложности структуры информированности агентов) вариант информированности, в рамках которого общим знанием являются индивидуальные представления $\{\theta_i\}$ агентов о значении параметра $\theta \in \Theta$.

Вариант II. Предположим, что представления агентов о неопределенном параметре попарно различны, но при этом являются общим знанием. Иными словами, имеет место асимметричное общее знание.

Не ограничивая общности, занумеруем агентов таким образом, чтобы их представления возрастали: $\theta_1 < \ldots < \theta_n$. Структура возможных равновесий в этой ситуации описывается следующим утверждением.

Утверждение 4.10.1. В игре «Аккордная оплата труда», для которой $\theta_i \neq \theta_j$ при $i \neq j$, равновесными (в зависимости от соотношения между параметрами) могут быть следующие $n + 1$ исходов: $\{y^* \mid y_i^* = 0,\ i \in N\}$; $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \in N,\ i \neq k\}$, $k \in N$. Содержательно это означает следующее: либо никто не работает, либо работает один $k$-й агент, выбирая действие $\theta_k$.

Доказательство. Пусть вектор действий $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ является равновесием (очевидно, при этом $y_i^* \leq y_i^+$ для любого $i \in N$). Пусть существует такое $k \in N$, что $y_k^* > 0$. Покажем, что в этом случае $\sum_{i \in N} y_i^* = \theta_k$.

Действительно, если $\sum_{i \in N} y_i^* < \theta_k$, то $k$-й агент не рассчитывает на получение вознаграждения и, следовательно, может увеличить свой (субъективно ожидаемый) выигрыш с отрицательного до нулевого, выбрав нулевое действие. Если же $\sum_{i \in N} y_i^* > \theta_k$, то $k$-й агент рассчитывает на получение вознаграждения, однако он может увеличить свой выигрыш, выбрав вместо $y_k^*$ действие $\max\,\{0, \theta_k - \sum_{i \in N \setminus \{k\}} y_i^*\} < y_k^*$. Таким образом, при $\sum_{i \in N} y_i^* \neq \theta_k$ $k$-й агент может увеличить свой выигрыш, что противоречит равновесности вектора $y^*$.

Мы показали, что, если $y_k^* > 0$, то $\sum_{i \in N} y_i^* = \theta_k$. Но в силу условия $\theta_i \neq \theta_j$, $i \neq j$, это равенство может выполняться лишь для одного $k \in N$. Поэтому если $y_k^* > 0$, то $y_i^* = 0$ для всех $i \neq k$. При этом, очевидно, $y_k^* = \theta_k$. •

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких соотношениях между параметрами $\theta_i$, $y_i^+$, $i \in N$, реализуется каждое из равновесий, перечисленных в формулировке утверждения 4.10.1.

Вектор $(0, \ldots, 0)$ является равновесным в случае, когда никакой $i$-й агент не может собственными усилиями выполнить достаточную (с его точки зрения) для получения вознаграждения работу (либо это усилие составляет в точности $y_i^+$, так что выигрыш $i$-го агента остается нулевым). Это условие формально записывается следующим образом: $y_i^+ \le \theta_i$ для любого $i$.

Вектор $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \ne k\}$ является равновесным, если $\theta_k \le y_k^+$, а все агенты с номерами $i > k$, считая, что вознаграждения не будет, являются недостаточно эффективными, чтобы собственными усилиями компенсировать величину $\theta_i - \theta_k$. Формально: $\theta_k + y_i^+ \le \theta_i$ для любого $i > k$.

Возможные равновесия в игре двух агентов изображены на Рис. 73. Заметим, что, в отличие от варианта I, существует область, в которой равновесие отсутствует.

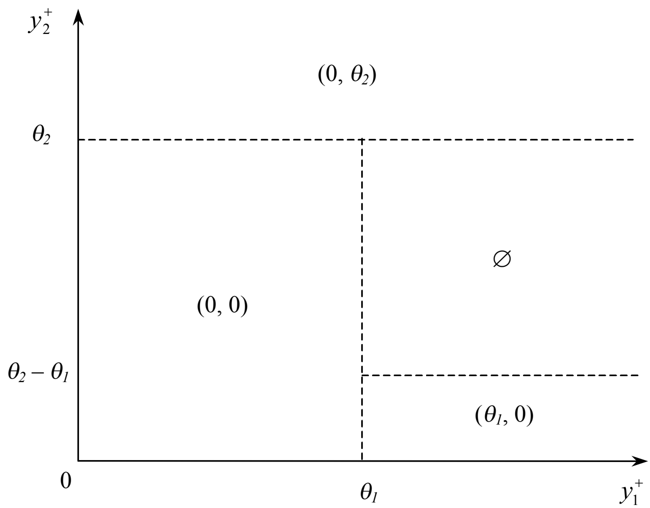


Рис. 73. Равновесия в игре двух агентов
(область, где равновесия нет, обозначена символом «∅»)

Рассмотрим теперь общий случай, когда представления агентов могут и совпадать: $\theta_1 \le \ldots \le \theta_n$. В этом случае может появиться целая область равновесий, аналогично варианту I. Пусть, например, выполняются соотношения $\theta_m = \theta_{m+1} = \ldots = \theta_{m+p}$, $\theta_i \ne \theta_m$ при

$i \notin \{m, \ldots, m+p\}$. Тогда при выполнении условий $\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* \ge \theta_m$ и $\theta_m + y_i^+ \le \theta_l$, $i > m$, равновесным является любой вектор $y^*$, для которого

$$\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* = \theta_m, \;\; y_k^* \le y_k^+, \;\; k \in \{m, \ldots, m+p\};$$

$$y_i^* = 0, \;\; i \notin \{m, \ldots, m+p\}.$$

Содержательно это означает, что в равновесии всю работу выполняют агенты, которые одинаково представляют себе необходимый для получения вознаграждения объем работы.

Вариант III. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину 2, но каждый агент считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием. В этом случае множество возможных равновесных ситуаций становится максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.10.2. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два (при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием), что вектор $y^*$ является единственным равновесием.

Доказательство. Достаточно для каждого $i \in N$ положить

$$\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0; \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0 \end{cases}$$

(здесь $\varepsilon$ – произвольное положительное число) и выбрать любые $\theta_{ij} > \sum_{i \in N} y_i^+$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда $i$-й агент ожидает от оппонентов нулевых действий, а его собственным субъективно равновесным действием является $y_i^*$. •

Замечание 1. Построенное в доказательстве утверждения 4.10.2 равновесие является (объективно) Парето-эффективным, если сумма $\sum_{i \in N} y_i^*$ равна истинному значению неопределенного параметра $\theta$.

Замечание 2. Действие $y_i^* = y_i^+$ является равновесным, если $\theta_i = y_i^+$. Однако при этом равновесным будет и действие $y_i^* = 0$ – в обоих случаях субъективно ожидаемый *i*-м агентом выигрыш равен нулю.

Вариант IV. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину два, и на нижнем уровне имеется симметричное общее знание. Иными словами, каждый фантомный агент считает: неопределенный параметр равен $\theta$, и это общее знание.

Оказывается, что и в этом случае множество равновесных ситуаций является максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.10.3. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два с симметричным общим знанием на нижнем уровне, что вектор $y^*$ является единственным равновесием.

Доказательство. Возьмем любое значение $\theta > \sum_{i \in N} y_i^+$ и будем считать, что это значение является общим знанием среди фантомных агентов. Тогда единственным равновесием в игре фантомных агентов является выбор каждым из них нулевого действия.

Далее, для каждого $i \in N$ положим

$$\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0, \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon$ – произвольное положительное число. Тогда, как нетрудно видеть, наилучшим ответом *i*-го агента на ожидаемые им нулевые действия оппонентов является выбор действия $y_i^*$. •

Замечания 1 и 2, сделанные при анализе варианта III, можно повторить дословно и для варианта IV.

Таким образом, мы исследовали структуру информационных равновесий игры «Аккордная оплата труда» при различных вариантах информированности агентов. Полученные результаты полностью подтверждают интуитивно правдоподобный качественный вывод: в коллективе работников совместная работа возможна (является равновесной) лишь в том случае, когда имеется общее знание о том, какой объем работ необходимо выполнить для получения вознаграждения.

Рассмотрим теперь вопрос о стабильности информационного равновесия. Анализ проведем для варианта II, когда имеет место асимметричное общее знание. Будем считать, что в результате игры общим знанием среди агентов становится факт выплаты или невыплаты вознаграждения.

Равновесие (0, …, 0), очевидно, стабильно в любом случае: никто не работает, не ожидает получить вознаграждение и не получает его.

Равновесие вида $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0, i \in N, i \neq k\}, k \in N$, в случае $\theta_1 < \ldots < \theta_n$ возможно, как было показано выше, при $\theta_k \leq y_k^+$, $\theta_k + y_i^+ \leq \theta_i$ для любого $i > k$. Тогда $i$-агенты с номерами $i \leq k$ ожидают выплаты вознаграждения, а с номерами $i > k$ – не ожидают. Поэтому единственная возможность стабильности – условие $k = n$. Таким образом, получаем условие стабильности

(8) $\theta_n \leq y_n^+$.

Аналогично при $\theta_1 \leq \ldots \leq \theta_{m-1} < \theta_m = \ldots = \theta_n$ стабильным является любой набор $\{y^* \mid \sum_{k=m}^{n} y_k^* = \theta_m,\quad y_k^* \leq y_k^+,\quad k \in \{m, \ldots, n\};\quad y_i^* = 0,$ $i \notin \{m, \ldots, m+p\}\}$.

В соответствии с утверждением 4.10.2, центр может при помощи информационного управления (в частности, путем формирования структуры, при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием) добиться от агентов любого набора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$. Оказывается, что существует и стабильное информационное управление, обеспечивающее этот результат. Покажем это для $y_i^* > 0$.

Пусть задан набор $y^* \in \prod_{i \in N} (0; y_i^+)$, $\sum_{i \in N} y_i^* \geq \theta$. Положим для каждого $i \in N$ $\theta_i = y_i^*$ и для каждого $j \in N \setminus \{i\}$ возьмем любые $\theta_{ij}$ такие, что $\theta_{ij} < \theta_i$. Тогда для $i$-агента субъективно выполнено условие стабильности (8) и $y_i^*$ – его единственное равновесное действие. При этом

1) работа будет выполнена, и агенты получат вознаграждение;

2) получение вознаграждения будет ожидаемым исходом для всех реальных и фантомных агентов.

Содержательно, ситуация при этом возникает следующая: каждый агент считает, что именно он выполнил всю работу и что это – общее знание.

## 4.11. ПРОДАВЕЦ И ПОКУПАТЕЛЬ

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой продавец и покупатель, имеющие иерархию взаимных представлений о ценности продаваемого товара, должны прийти к соглашению о цене, по которой произойдет сделка купли-продажи.

Необходимым условием заключения сделки оказывается следующее: с точки зрения обоих участников субъективные цены всех реальных и фантомных продавцов не превышают субъективных цен каждого из реальных и фантомных покупателей.

Наиболее простой структурой информированности, которую следует сформировать у покупателя и продавца для того, чтобы сделка произошла по требуемой для центра цене, является следующая – они должны быть уверены, что для всех их фантомных агентов (покупателя с точки зрения продавца, продавца с точки зрения покупателя и т.д.) ценность товара в точности равна цене, требуемой для центра.

Пусть продавец и покупатель (которых будем обозначать $s$ – «seller» и $b$ – «buyer» соответственно) должны придти к компромиссу относительно стоимости некоторого товара, услуги, работ по договору и т.д.

Обозначим: $\theta_b$ – представления покупателя о ценности для него товара (максимальную цену, которую он готов за него заплатить); $\theta_s$ – представления продавца о ценности для него товара (минимальную цену, за которую он готов продать товар); $\theta_{bs}$ – представления покупателя о представлениях продавца, $\theta_{sb}$ – представления продавца о представлениях покупателя; $\theta_{sbs}$ – представления продавца о том, что о его представлениях думает покупатель, и т.д. Будем считать, что

$\theta_\tau \in \Re^1_+$, где $\tau$ – произвольная конечная последовательность индексов (в том числе, пустая) из множества участников сделки $\{s; b\}$. Напомним, что множество всевозможных конечных последовательностей индексов обозначается $\underset{\cdot}{\Sigma}$, а объединение $\underset{\cdot}{\Sigma}$ с пустой последовательностью обозначается $\Sigma$.

Рассмотрим, какими свойствами должны обладать взаимные представления покупателя и продавца для того, чтобы сделка была возможна. Из условия того, что сделка может произойти, только если ценность товара для покупателя не ниже, чем для продавца, получаем следующую систему неравенств:

(1) $\forall\ \tau \in \Sigma \quad \theta_{\tau b} \geq \theta_\tau, \quad \theta_{\tau s} \leq \theta_\tau$.

Из (1) следует, что субъективный размер области компромисса может быть представлен в виде:

(2) $\Delta_\tau = \theta_{\tau b} - \theta_{\tau s}, \quad \tau \in \Sigma$,

причем $\forall\ \tau \in \Sigma\ \ \Delta_\tau \geq 0$.

Обсудим теперь возможные механизмы компромисса. При заданных субъективных представлениях и, следовательно, заданной области компромисса, которая не пуста в силу (1) и (2), возможны различные процедуры дележа «прибыли» $\Delta$ (определения точки компромисса).

Первый вариант (дележ прибыли) заключается в задании отображения $\pi = (\pi_s, \pi_b)$: $\Re_+^2 \to \Re_+^2$, удовлетворяющего для всех $\theta_b \geq \theta_s$ следующим свойствам:

$$\pi_s(\theta_s, \theta_b) + \pi_b(\theta_s, \theta_b) = \Delta,$$

$$\frac{\partial \pi_s(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} \leq 0, \quad \frac{\partial \pi_s(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \pi_b(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} \leq 0, \quad \frac{\partial \pi_b(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0,$$

содержательные интерпретации которых очевидны. Примером является инвариантный относительно аддитивного сдвига представлений механизм компромисса

$$\pi_s = \alpha\, (\theta_b - \theta_s),\ \pi_b = (1 - \alpha)\, (\theta_b - \theta_s),$$

где $\alpha \in [0; 1]$. Как отмечалось выше, аксиоматическая характеризация различных механизмов компромисса является перспективной задачей, выходящей, однако, за рамки настоящего исследования.

Второй вариант (непосредственное определение точки компромисса) заключается в задании отображения $\pi$: $\Re_+^2 \to \Re_+^1$, удовлетворяющего для всех $\theta_b \geq \theta_s$ следующим свойствам:

$$\theta_s \leq \pi(\theta_s,\ \theta_b) \leq \theta_b, \quad \frac{\partial \pi(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} \geq 0, \quad \frac{\partial \pi(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0,$$

содержательные интерпретации которых также очевидны. Примером является инвариантный относительно аддитивного сдвига представлений механизм компромисса $\pi = \alpha\ \theta_b + (1 - \alpha)\ \theta_s$, где $\alpha \in [0; 1]$.

Ясно, что эти два варианта механизмов эквивалентны, поэтому в дальнейшем для определенности будем иметь в виду второй вариант.

Рефлексивную игру продавца и покупателя формализуем следующим образом. Допустимым действием каждого из игроков – продавца и покупателя – является сообщение (одновременно с оппонентом и независимо от него) «своей» цены – $x_s$ и $x_b$ соответственно. На основании сообщений игроков сделка либо не совершается (при $x_s > x_b$), либо совершается по цене $\pi(x_s, x_b)$ (при $x_s \leq x_b$). Функции выигрыша в этой игре имеют следующий вид:

$$f_s(\theta_s, x_s, x_b) = \begin{cases} \pi(x_s, x_b) - \theta_s, & x_s \leq x_b, \\ -\varepsilon_1, & x_s > x_b, \end{cases}$$

$$f_b(\theta_b, x_s, x_b) = \begin{cases} \theta_b - \pi(x_s, x_b), & x_s \leq x_b, \\ -\varepsilon_2, & x_s > x_b, \end{cases}$$

где $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ – произвольные положительные числа (затраты на подачу заявки в случае, если сделка не состоится). Кроме того, будем считать, что каждый из агентов может вообще отказаться от переговоров; при этом сделка не совершается и агент, не подавший заявку, получает нулевой выигрыш.

Опишем теперь информированность участников игры. Будем считать, что допустимые действия и целевые функции являются общим знанием с точностью до величин $\theta_s$ и $\theta_b$. Пусть, далее, продавец и покупатель обладают точечной структурой информированности конечной сложности следующего вида: $I_s = (\theta_s, \theta_{sb}, \theta_{sbs}, \ldots)$, $I_b = (\theta_b, \theta_{bs}, \theta_{bsb}, \ldots)$ – напомним, что в силу аксиомы автоинформированности индексы $s$ и $b$ чередуются.

Рассмотрим вопрос о том, каковы возможные информационные равновесия в описанной рефлексивной игре. Для определенности будем сначала вести рассуждения для одного из агентов – продавца.

Для того чтобы определить равновесное действие продавца $x_s^*$, необходимо определить равновесные действия всех фантомных агентов, существующих в его представлении. Таким образом, для нахождения $x_s^*$ необходимо найти все $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$. Справедливо следующее утверждение.

<u>Лемма 4.11.1.</u> Набор действий $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$, является (с точки зрения продавца) информационным равновесием (и продавец не откажется от переговоров), если и только если $x_{s\tau}^* \equiv x_s^*$ для любого $\tau \in \Sigma$ и $\theta_s' \le x_s^* \le \theta_s''$ где $\theta_s' = \max_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau s}$, $\theta_s'' = \min_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau b}$.

<u>Доказательство</u>. ( $\Rightarrow$ ) Пусть $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$, – информационное равновесие. Рассмотрим произвольное непустое $\tau$ и равновесное действие $x_{s\tau sb}^*$. По определению информационного равновесия действие $x_{s\tau s}^*$ максимизирует по $x_{s\tau s}$ функцию $f_s(\theta_{s\tau s}, x_{s\tau s}, x_{s\tau sb}^*)$. Иначе говоря, $s\tau s$-агент (продавец) ожидает от $s\tau sb$-агента (покупателя) действие $x_{s\tau sb}^*$. Далее, соотношение $\theta_{s\tau s} > x_{s\tau sb}^*$ означает, что $s\tau s$-агент (продавец) ожидает от оппонента заявки, меньшей его субъективной цены; следовательно, субъективно оптимальным для него будет отказ от переговоров и сделка не состоится, что противоречит предположению. Значит, $\theta_{s\tau s} \le x_{s\tau sb}^*$ (субъективная цена продавца не превосходит заявленной цены покупателя). Но тогда, очевидно, $x_{s\tau s}^* = x_{s\tau sb}^*$ – для продавца оптимально назвать цену, совпадающую с ценой покупателя.

Аналогично показывается, что, если $x_{s\tau bs}^*$ – равновесное действие, то $\theta_{s\tau b} \ge x_{s\tau bs}^*$ и $x_{s\tau b}^* = x_{s\tau bs}^*$.

Таким образом, для произвольного $\tau$ справедливы соотношения $x_{s\tau}^* = x_s^*$, $\theta_{s\tau s} \le x_s^* \le \theta_{s\tau b}$. Поскольку структура информированности имеет конечную сложность, попарно различных элементов $\theta_{s\tau}$ конечное число. Поэтому из последнего неравенства следует, что $\theta_s' \le x_s^* \le \theta_s''$.

($\Leftarrow$) Пусть число $x_s^*$ таково, что $\theta_s' \le x_s^* \le \theta_s''$. Тогда для любого $\tau \in \Sigma$ имеем $\theta_{s\tau} \le x_s^* \le \theta_{s\tau b}$, $\theta_{s\tau s} \le x_s^* \le \theta_{s\tau}$. Поэтому набор действий $x_{s\tau}^* = x_s^*, \tau \in \Sigma$, является (с точки зрения продавца) информационным равновесием и продавец не откажется от переговоров (заметим, что соотношения (1) выполнены). •

Аналогичный факт, как нетрудно проверить, справедлив и для покупателя. Объединяя эти два факта, получаем следующее утверждение.

<u>Утверждение 4.11.1.</u> Набор действий $x_\sigma^*$, $\sigma \in \Sigma_+$, является информационным равновесием (и сделка будет совершена), если и только если для любого $\tau \in \Sigma$ справедливы соотношения

$$x_{s\tau}^* = x_s^*,\ x_{b\tau}^* = x_b^* \text{ и } \theta_s' \le x_s^* \le \theta_s'',\ \theta_b' \le x_b^* \le \theta_b'',$$

где $\theta_s' = \max_{\tau\in\Sigma} \theta_{s\tau s}$, $\theta_s'' = \min_{\tau\in\Sigma} \theta_{s\tau b}$, $\theta_b' = \max_{\tau\in\Sigma} \theta_{b\tau s}$, $\theta_b'' = \min_{\tau\in\Sigma} \theta_{b\tau b}$.

Утверждение 4.11.1, в частности, показывает, каким образом следует сформировать структуру информированности игры в случае, когда управляющий орган (центр), во-первых, имеет возможность формировать любую структуру и, во-вторых, стремится обойтись наиболее простой.

Пусть, например, центр стремится обеспечить заключение сделки по цене, где $\theta_s \le \theta^* \le \theta_b$, т. е. сделать $\theta^*$ единственной равновесной ценой. Тогда достаточно сформировать у агентов структуры информированности следующего вида: $I_s = (\theta_s, \theta^*, \theta^*, \theta^*, \ldots)$, $I_b = (\theta_b, \theta^*, \theta^*, \theta^*, \ldots)$. Нетрудно видеть, что при этом $\theta_s' = \theta_s'' = \theta_b' = \theta_b'' = \theta^*$. Поэтому, согласно утверждению, единственным информационным равновесием будет то, для которого $x_s^* = x_b^* = \theta^*$. Заметим, что это информационное равновесие является стабильным – сделка будет заключена именно по той цене, на которую рассчитывали агенты, делая свои заявки.

Сделаем следующее важное замечание (см. также введение к настоящей работе): мы исходим из предположения о том, что центр может сформировать у агентов *любую* структуру информированности. В рамках этого предположения нас интересует следующий вопрос: *какой* должна быть эта структура. Вопрос о том, *как* центру надлежит ее формировать, выходит за рамки настоящей работы и требует особого рассмотрения с привлечением данных психологии, социологии и пр.

Рассмотрим следующий пример: пусть субъективная цена продавца составляет 20, покупателя – 50, и центр стремится обеспечить совершение сделки по цене 40. Тогда ему следует сообщить продавцу следующее: «Покупатель считает: субъективные цены покупателя и продавца равны 40, и это – общее знание», а покупателю – следующее: «Продавец считает: субъективные цены продавца и покупателя равны 40, и это – общее знание». Тем самым, формируются следующие структуры информированности агентов: $I_s = (20, 40, 40, 40, \ldots)$, $I_b = (50, 40, 40, 40, \ldots)$. Оба агента подадут заявки 40, и сделка состоится.

## 4.12. ЗАКАЗЧИК И ИСПОЛНИТЕЛЬ

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой неопределенным для заказчика параметром является известная исполнителю эффективность его работы. В этом случае, варьируя представления заказчика об эффективности работы исполнителя (то есть в рамках структуры информированности глубины два), любую стоимость договора (из определенного промежутка) можно сделать стабильным информационным равновесием.

Настоящая модель наиболее тесно связана с рассмотренными, например, в [85] нерефлексивными теоретико-игровыми моделями определения параметров договора на основании анализа оптимального действия исполнителя, т. е. действия, максимизирующего разность между доходом заказчика и затратами исполнителя.

Предположим, что заказчик имеет целевую функцию

$$\Phi(y, \sigma) = H(y) - \sigma(y),$$

представляющую собой разность между его доходом $H(y)$ от деятельности (действия) $y \in A = \Re^1_+$ исполнителя и стимулированием, выплачиваемым исполнителю.

Относительно целевой функции исполнителя предположим, что она имеет вид:

$$f(y, \sigma, \theta) = \sigma(y) - c(y, \theta),$$

то есть определяется разностью между стоимостью договора и затратами $c(y, \theta)$, зависящими от действия исполнителя $y \in A$ и скалярного параметра $\theta \in \Theta \subseteq \Re_+^1$, причем $\forall\ \theta \in \Theta \quad c(0, \theta) = 0$ и $\forall\ y \in A\ c(y, \theta)$ является невозрастающей функцией $\theta \in \Theta$. Другими словами, содержательно параметр $\theta$ может интерпретироваться как квалификация (эффективность деятельности) исполнителя.

Таким образом, в настоящей модели присутствует единственный неопределенный параметр – эффективность деятельности исполнителя $\theta \in \Theta$, значение которого достоверно известно исполнителю, но неизвестно заказчику.

Если бы значение $\theta$ было общим знанием, то оптимальным было бы следующее действие исполнителя (см., например, [85]):

(1) $y^*(\theta) = \arg \max\limits_{y \in A} [H(y) - c(y, \theta)]$.

Например, если $H(y) = y$, $c(y, \theta) = y^2 / 2\ \theta$, то $y^*(\theta) = \theta$.

Если истинное значение эффективности исполнителя, которое ему самому достоверно известно, неизвестно заказчику, то заказчик вынужден использовать ту или иную процедуру устранения неопределенности. Перечислим некоторые возможные варианты.

Во-первых, заказчик может использовать принцип максимального гарантированного результата:

$$y^г = \arg \max_{y \in A} [H(y) - \max_{\theta \in \Omega} c(y, \theta)],$$

рассчитывая на прибыль $\max\limits_{y \in A} [H(y) - \max\limits_{\theta \in \Omega} c(y, \theta)]$.

Во-вторых, заказчик может использовать те или иные механизмы с сообщением информации исполнителем относительно эффективности его деятельности [93, 112, 233], или/и предлагать последнему соответствующее меню договоров.

Третий вариант поведения заказчика заключается в том, чтобы либо сделать конкретные предположения о свойствах функции затрат исполнителя и подставить их в выражение (1), либо осуществлять информационную рефлексию по поводу значений параметра $\theta \in \Theta$. Рассмотрим последний случай более подробно.

Информационная структура рассматриваемой рефлексивной игры имеет вид $I_s = (\theta_s, \theta_{sb}, \theta_{sbs}, \ldots)$, $I_b = (\theta_b, \theta_{bs}, \theta_{bsb}, \ldots)$, однако не все компоненты являются независимыми. Дело в том, что истинное значение параметра $\theta$ достоверно известно исполнителю ($\theta_s = \theta$), и это является общим знанием. Поэтому для любого $\tau \in \Sigma$ выполнено равенство $\theta_{\tau s} = \theta_\tau$.

Так как модель с общим знанием рассматривалась выше (см. выражение (1)), граф рефлексивной игры для этого случая имеет вид: $B \leftrightarrow S$), то рассмотрим несколько более сложную модель, для которой граф иерархической рефлексивной игры имеет вид $S \leftarrow B \leftrightarrow BS$. Если «первый ход» делает заказчик, он предлагает исполнителю договор стоимостью $c(y^*(\theta_b), \theta_b)$. В соответствии с выражением (1), в данной модели заказчик соглашается в случае, если выполнено

(2) $\theta_b \le \theta$.

При этом заказчик получает прибыль $u_b^0 = H(y^*(\theta_b)) - c(y^*(\theta_b), \theta_b)$, а прибыль исполнителя равна

(3) $u_s^0 = c(y^*(\theta_b), \theta_b) - c(y^*(\theta_b), \theta)$,

где значение $y^*(\cdot)$ определяются выражением (1).

Если же $\theta_b > \theta$, то взаимодействие между данными заказчиком и исполнителем невозможно, так как последний (в силу условия его индивидуальной рациональности) откажется заключать договор, стоимость которого не компенсирует затрат.

Итак, в рассматриваемой модели можно, варьируя $\theta_b \le \theta$, любую точку $\theta_b$ сделать информационным равновесием. Заметим, что и здесь, как и в модели купли-продажи, информационное равновесие является стабильным – заказчик ожидает от исполнителя принятия договора, что и будет реализовано.

Рассмотрение более сложных структур информированности является в данной модели неоправданным – оно не дает ничего нового по сравнению с соотношениями (1) – (3). Это связано с тем, что исполнитель является по существу пассивным участником ситуации – он может лишь принять или отвергнуть тот единственный контракт, который «навязывает» ему делающий первый ход заказчик. При этом величины $\theta_{sb}$, $\theta_{sbs}$ и т. д. не играют роли.

С другой стороны, заказчик также знает об этой «пассивности» исполнителя, поэтому при определении договора он учитывает лишь $\theta_b$, но не величины, соответствующие более высокому рангу рефлексии – $\theta_{bs}$, $\theta_{bsb}$ и т.д.

## 4.13. КОРРУПЦИЯ

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой каждый из чиновников имеет субъективные представления о силе штрафов, накладываемых в случае обнаружения факта взяточничества и зависящих от «среднего уровня коррумпированности» (см. также модели коррупции и соответствующие обзоры в [14, 32]). Оказывается, что, если чиновники наблюдают средний уровень коррумпированности, то этот средний уровень в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о типах друг друга. При этом не важно, являются ли сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений чиновников друг о друге, и любое стабильное информационное управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

Рассмотрим следующую теоретико-игровую модель коррупции. Пусть имеются $n$ агентов – чиновников, дополнительный доход каждого из которых пропорционален сумме полученных им взяток $x_i \geq 0$, предложение которых будем считать неограниченным, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$. Пусть каждый из $n$ агентов характеризуется своим типом $r_i > 0$, $i \in N$, и тип агента достоверно ему известен, но не известен остальным агентам. Содержательно тип агента может интерпретироваться как субъективное восприятие им «силы» штрафов.

За коррупционную деятельность ($x_i \geq 0$), вне зависимости от ее размера, на агента может быть наложен штраф $\chi_i(x, r_i)$, зависящий от действий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re_+^n$ всех агентов и типа данного агента.

Таким образом, целевая функция $i$-го агента имеет вид:

(1) $f_i(x, r_i) = x_i - \chi_i(x, r_i), \quad i \in N.$

Относительно функции штрафов предположим, что она имеет вид

(2) $\chi_i(x, r_i) = \varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i).$

Содержательно предположение (2) означает, что штраф, накладываемый на $i$-го агента, зависит от его действия и от агрегированной обстановки $Q_i(x_{-i})$ (которая может интерпретироваться как «общий уровень коррумпированности остальных чиновников» с точки зрения $i$-го агента).

Предположим, что число агентов и общий вид целевых функций являются общим знанием, а относительно параметра $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Re^n_+$ каждый из агентов имеет иерархию представлений: $r_{ij}$ – представление $i$-го агента о типе $j$-го агента, $r_{ijk}$ – представление $i$-го агента о представлениях $j$-го агента о типе $k$-го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Предположим также, что агенты наблюдают общий уровень коррумпированности. Поэтому стабильность информационного равновесия будет иметь место при любых представлениях о типах реальных или фантомных оппонентов, таких, что соответствующее информационное равновесие приводит к одному и тому же значению агрегата $Q_i(\cdot)$ для любого $i \in N$.

Тогда, как нетрудно видеть, для целевых функций агентов (1), (2) выполнены условия утверждения 2.8.1. Поэтому для любого числа агентов и любой структуры информированности все стабильные равновесия в рассматриваемой игре являются истинными (частный пример игры трех агентов рассмотрен в разделе 2.8). Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 4.13.1. Пусть набор действий $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие в игре (1), (2). Тогда это истинное равновесие.

Следствие. Уровень коррумпированности в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о типах друг друга. При этом не важно, являются ли сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений. Поэтому любое стабильное информационное управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

Предположим, что

$$\varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i) = x_i\,(Q_i(x_{-i}) + x_i) / r_i,\ Q_i(x_{-i}) = \sum_{j \neq i} x_j\,,\ i \in N,$$

и все типы одинаковы: $r_1 = \ldots = r_n = r$.

Тогда, как нетрудно убедиться, равновесные действия агентов таковы: $x_i = \frac{r}{n+1}$, $i \in N$, а общий уровень коррумпированности составляет $\sum_{i \in N} x_i = \frac{nr}{n+1}$. Изменить последнюю величину можно, лишь повлияв непосредственно на типы агентов.

## 4.14. БИПОЛЯРНЫЙ ВЫБОР

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой агенты осуществляют выбор между двумя альтернативами, которые для общности называются позитивным и негативным полюсами (см. также раздел 4.3.4). Например: кандидат на выборах (голосовать «за» или «против»), продукт или услуга (покупать или нет), этический выбор (поступить «хорошо» или «плохо») и пр.

Пусть имеются агенты трех типов: первые безусловно выбирают положительный полюс, вторые – выбирают положительный или отрицательный полюс в зависимости от того, как с их точки зрения поведут себя остальные агенты, третьи безусловно выбирают отрицательный полюс.

Предположим теперь, что центр имеет возможность повлиять на ситуацию и стремится увеличить вероятность позитивного выбора в «популяции» в целом. Для этого центр может повлиять на агентов второй и третьей группы (агенты первой группы и так производят требуемый выбор). Во-первых, центр может повлиять на третью группу, затратив некий ресурс (например, финансовый) и переведя некоторую долю ее членов во вторую. Во-вторых, центр может повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов о доле агентов третьего типа. В последнем случае влияние состоит в формировании у второй группы следующего представления: «определенная доля членов третьей группы перешла во вторую». Формирование такого представления также требует определенных затрат.

Иными словами, центр может изменить либо реальную, либо «фантомную», воображаемую, долю агентов третьего типа. При этом совокупный ресурс (бюджет), которым располагает центр, фиксирован. Задача центра состоит в следующем: распределить фиксированный ресурс на реализацию информационных воздействий таким образом, чтобы доля агентов, осуществивших позитивный выбор, была максимальной.

Оказывается, что если ресурса у центра «не очень много», то оптимальным управлением является, в зависимости от соотношения между параметрами, вложить весь этот ресурс либо в реальное, либо в «воображаемое» (происходящее в сознании агентов второго типа) изменение доли агентов третьего типа. Перейдем к описанию соответствующей модели.

Рассмотрим ситуацию, когда агенты из бесконечно большой «популяции» осуществляют выбор между двумя альтернативами, которые будем для общности называть позитивным и негативным полюсами. Это может быть кандидат на выборах (голосовать «за» или «против»), продукт или услуга (покупать или нет), этический выбор (поступить «хорошо» или «плохо») и пр.

В силу бесконечности числа агентов будем считать, что при решении задачи управления всей «популяцией» выбор каждого конкретного агента не играет роли, а важна доля агентов, выбирающих позитивный полюс. Иначе это можно сформулировать следующим образом: действием «агрегированного» агента является вероятность $x$ выбора им позитивного полюса.

Примем следующие предположения.

1. Существует $n$ различных типов агентов.

2. Доля агентов $i$-го типа составляет $\alpha_i$, $0 \le \alpha_i \le 1$.

3. Действие агента $i$-го типа задается *функцией реакции на ожидание* $\pi(p)$, $\pi: [0, 1] \to [0, 1]$, где $p$ – ожидаемая агентами вероятность выбора позитивного полюса произвольным агентом из «популяции». Иными словами, если агент ожидает, что доля выбравших позитивный полюс составляет $p$, то его действие $x_i$ определяется следующим образом: $x_i = \pi_i(p)$.

4. Пункты 1–3 являются общим знанием среди агентов.

Пусть $x_i \in [0, 1]$ – действие агента $i$-го типа. Тогда доля выбравших позитивный полюс составляет $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ .

Определим *равновесие биполярного выбора* как набор действий $x_i$, удовлетворяющих системе соотношений

(1) $x_i = \pi_i(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j)$, $i = 1, \ldots, n$.

В качестве отступления заметим, что соотношения (1) являются одной из возможностей описания биполярного выбора. Другие возможные подходы обсуждаются, например, в работах В.А. Лефевра [76 и др.], Т.А. Таран [149, 150] и др. В этих работах предполагается, что принимающий решение агент осуществляет *рефлексию первого рода* [101], т. е. занимает позицию наблюдателя по отношению к своему поведению, своим мыслям и чувствам. Иными словами, в нем существует несколько соотнесенных друг с другом уровней, а итоговое решение определяется как влиянием внешней среды, так и состоянием этих уровней. В данной же работе агент понимается как индивид, т. е. «неделимый», и осуществляет *рефлексию второго рода* – относительно принятия решений оппонентами.

Вернемся к обсуждению равновесия биполярного выбора. Заметим, что выражения (1) задают отображение единичного гиперкуба $[0, 1]^n$ на себя:

(2) $(x_1,\ldots, x_n) \to (\pi_1(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j),\ldots, \pi_n(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j))$.

Если функции $\pi_i(\cdot)$ непрерывны (что представляется довольно естественным предположением), то и отображение (2) непрерывно. Тогда по теореме о неподвижной точке у системы (1) имеется хотя бы одно решение.

Приведем пример. Пусть существуют агенты трех типов ($n = 3$), действия которых определяются следующими функциями:

$$\pi_1(p) \equiv 1,\ \ \pi_2(p) = p,\ \ \pi_3(p) \equiv 0.$$

Содержательно: агенты первого типа независимо ни от чего выбирают позитивный полюс, агенты третьего типа – негативный. Что касается агентов второго типа, то они колеблются, и их действия совпадают с ожидаемым действием «популяции» в целом.

Система (1) в данном случае сводится к соотношениям $x_1 = 1$, $x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, $x_3 = 0$, откуда (здесь и далее полагаем, что $0 < \alpha_i <1$, $i = 1, 2, 3$) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$, $x_3 = 0$.

При этом

(3) $p = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$.

Предположим теперь, что некий управляющий орган – центр – имеет возможность повлиять на ситуацию и стремится увеличить вероятность позитивного выбора в «популяции» в целом (т. е. величину $p$). Для этого центр может повлиять на агентов второй либо третьей группы (агенты первой группы и так выбирают $x_1 = 1$). Пусть центр может повлиять на третью группу, переведя долю $y$ ее членов во вторую и затратив некий ресурс (например, финансовый) в объеме $C_2y$. Центр может также повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов об $\alpha_3$ (независимо от фактического значения этого параметра). Именно, влияние состоит в формировании у второй группы следующего представления: «доля $x$ членов третьей группы перешли во вторую». Затраты на формирование такого представления составляют $C_1x$.

Иными словами, центр может изменить либо реальную, либо «фантомную», воображаемую долю агентов третьего типа. При этом совокупный ресурс (бюджет), которым располагает центр, составляет $C$.

Задача центра состоит в следующем: распределить ресурс $C$ (т. е. выбрать доли $x$ и $y$) таким образом, чтобы вероятность $p$ была максимальной. Формально оптимизационная задача центра ставится следующим образом (см. (3)):

(4) $p(x, y) = \alpha_1 + (\alpha_2 + y\,\alpha_3)\ \dfrac{\alpha_1}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)} \to \max$

при ограничениях

(5) $C_1x + C_2y \le C, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$

Легко видеть, что задача (4) сводится к максимизации функции

$$\varphi(x, y) = \frac{\alpha_2 + y\alpha_3}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)}\,.$$

Функция $\varphi(x, y)$ возрастает по обоим аргументам $x$ и $y$, поэтому первое из ограничений (5) обращается в равенство. Поэтому задача свелась к нахождению максимума функции

$$\psi(x) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3(C - C_1x)/C_2}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)} = \frac{1}{C_1C_2}\ \frac{\alpha_2C_2/C_1 + \alpha_3C/C_1 - x\alpha_3}{1-\alpha_2 - x\alpha_3}\,.$$

Нетрудно видеть, что функция $\psi(x)$ является монотонно возрастающей (соответственно, монотонно убывающей или константой), если выражение

(6) $\frac{\alpha_2 \tilde{N}_2}{\tilde{N}_1} + \frac{\alpha_3 \tilde{N}}{\tilde{N}_1} - (1 - \alpha_2)$

положительно (соответственно, отрицательно или равно нулю).

Введем обозначения: $k_1 = \frac{C_1}{C}$, $k_2 = \frac{C_2}{C}$. Тогда условие положительности выражения (6) запишется в виде

(7) $\alpha_3 > k_1 - \alpha_2 (k_1 + k_2)$.

Далее будем предполагать, что $C_1 > C$ и $C_2 > C$. Содержательно это означает, что у центра не так много ресурсов, чтобы всех агентов третьего типа «превратить» в агентов второго типа. При этом оптимальным будет такой выбор центра, когда весь ресурс вкладывается в увеличение либо реальной, либо воображаемой (при выполнении (7)) доли агентов второго типа.

Зависимость оптимального выбора центра от параметров ($\alpha_2$, $\alpha_3$) изображена на Рис. 74.

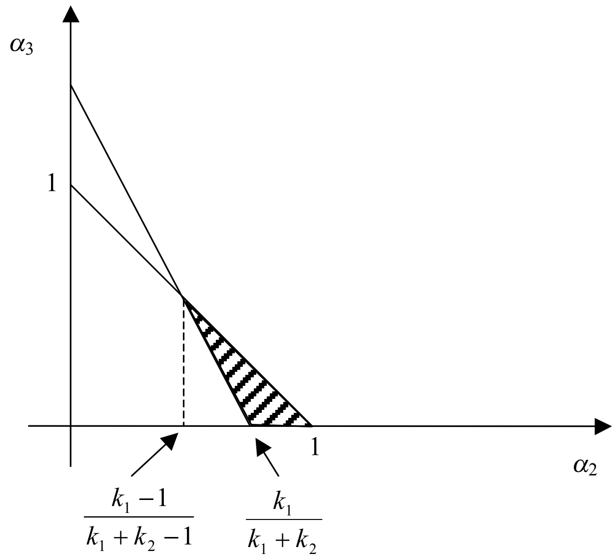


Рис. 74. Оптимальный выбор центра

На Рис. 74 заштрихована область, где выполнено условие (7), т. е. оптимально для центра весь ресурс направить на изменение представлений:

(8) $x = \frac{C}{C_1}$, $y = 0$.

Решение (8) отвечает ситуации, когда доля $\alpha_2$ агентов второго типа достаточно велика. Из Рис. 74 видно, что если $\alpha_2 > \frac{k_1}{k_1 + k_2}$, то решение (8) всегда оптимально. Если же

(9) $\frac{k_1 - 1}{k_1 + k_2 - 1} < \alpha_2 < \frac{k_1}{k_1 + k_2}$,

то решение (8) оптимально при достаточно больших $\alpha_3$. Содержательно последний случай означает следующее: при некотором диапазоне значений параметра $\alpha_2$ (т. е. при выполнении (9)) оптимально влиять на представления, когда они слишком пессимистичны (т. е. когда $\alpha_3$ достаточно велико и, следовательно, велика вероятность $p$ выбора негативного полюса).

В заключение отметим, что рассмотрен простейший случай информационного управления в условиях биполярного выбора. Дальнейшее развитие модели (увеличение числа типов агентов, усложнение структуры информированности, усложнение функций реакции на ожидание) и ее сопоставление с наблюдаемыми результатами действий экономических (покупатели) и политических (избиратели) агентов представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

## 4.15. АКТИВНАЯ ЭКСПЕРТИЗА

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой описывается ситуация принятия решений коллективом экспертов, каждый из которых имеет собственные представления о том, каким должен быть результат экспертизы, и стремится соответствующим образом на него повлиять. Проблема манипулирования информацией со стороны агентов является традиционной в теории выбора, задача же манипулирования результатами экспертизы со стороны центра – организатора экспертизы рассматривается редко [120, 142].

Пусть центр имеет возможность сформировать у экспертов представления о мнениях оппонентов. Тогда оказывается, что достаточно широкий диапазон коллективных решений может быть реализован как информационное равновесие (а иногда и единогласное решение) рефлексивной игры экспертов. Перейдем к описанию модели.

Рассмотрим пример рефлексивного управления агентами со стороны центра в модели активной экспертизы. Сначала приведем описание модели и известные результаты исследования [16, 19, 93, 112, 142] *механизмов экспертизы* – получения и обработки информации от экспертов – специалистов в предметных областях.

Пусть имеются $n$ экспертов (далее – агентов), оценивающих какой-либо объект по скалярной шкале (объектом может быть кандидат на пост руководителя, вариант финансирования, эффективность проекта и т.д.). Каждый агент сообщает оценку $s_i \in [d; D]$, $i \in N$, где $d$ – минимальная, а $D$ – максимальная оценка. Итоговая оценка – *коллективное решение* $x = \pi(s)$ – является функцией оценок, сообщенных агентами, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$. Обозначим $r_i \in [d; D]$ – субъективное мнение $i$-го агента, то есть его истинное представление об оцениваемом объекте. Предположим, что процедура $\pi(s)$ формирования итоговой оценки является строго возрастающей по всем переменным непрерывной функцией, удовлетворяющей *условию единогласия*: $\forall\ a \in [d, D]\ \ \pi(a, a, ... , a) = a$.

Обычно предполагается, что агенты сообщают свои истинные мнения $\{r_i\}_{i \in N}$. При этом если каждый из агентов немного ошибается (несознательно и в зависимости от своей квалификации), то, например, средняя оценка $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$ достаточно объективно и точно оценивает объект. Однако если агенты заинтересованы в результатах экспертизы, то они не обязательно будут сообщать свое истинное мнение, то есть механизм $\pi(\cdot)$ может быть подвержен манипулированию.

Формализуем интересы агента. Предположим, что каждый агент, будучи специалистом в своей области, заинтересован в том, чтобы результат экспертизы $x$ был максимально близок к его мнению $r_i$.

Приведем пример манипулирования. Пусть $n = 3$, $d = 0$, $D = 1$, $r_1 = 0{,}4$, $r_2 = 0{,}5$, $r_3 = 0{,}6$ (агенты упорядочены по возрастанию точек пика), и центр использует следующий механизм обработки оценок:

$x = \pi(s) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} s_i$. Если $s_i \equiv r_i,\ i = \overline{1,3}$, то есть если все агенты сообщают правду, то $x = 0{,}5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным представлением второго агента, и он полностью удовлетворен коллективным решением. Остальные же агенты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0{,}5$, а $r_3 > 0{,}5$. Легко вычислить $s^* = (0;\ 0{,}5;\ 1)$ – равновесие Нэша при данном векторе типов.

Определим следующие числа: $w_1 = \pi(d, D, D) = \pi(0, 1, 1) = 2/3$; $w_2 = \pi(d, d, D) = \pi(0, 0, 1) = {}^1/_3$ (отметим, что $\pi(0, 0, 0) = 0$ и $\pi(1, 1, 1) = 1$). При этом $w_2 \le r_2 \le w_1$ $(1/3 \le 1/2 \le 2/3)$ – на отрезке $[w_2; w_1]$ второй агент является «диктатором с ограниченными полномочиями» (его полномочия ограничены границами отрезка). Построим теперь для рассматриваемого примера механизм, в котором всем агентам выгодно сообщить достоверную информацию, и коллективное решение в котором будет то же, что и в механизме $\pi(\cdot)$.

Организатор экспертизы – центр – может попросить агентов сообщить истинные значения $r = \{r_i\}_{i \in N}$ и использовать их следующим образом (эквивалентный прямой механизм): упорядочить агентов в порядке возрастания сообщенных точек пика; если существует число $q \in \overline{2, n}$, такое, что $w_{q-1} \ge r_{q-1}$; $w_q \le r_q$ (легко показать, что существует единственный агент с таким номером $q$), то $x^* = \min(w_{q-1}; r_q)$. В нашем примере $q = 2$ и $1/2 = \min(2/3; 1/2)$.

При этом, очевидно, $s_i^* = d,\ i < q,\ s_i^* = D,\ i > q$. Итак, по сообщению $r$ центр, воспользовавшись числами $w_1$ и $w_2$, восстановил равновесие Нэша $s^*$.

Можно проверить, что в построенном прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для агентов, причем итоговая оценка та же, что и в исходном механизме.

Опишем, следуя [112], общий случай (произвольного числа агентов). Пусть все $r_i$ различны и упорядочены в порядке возрастания, то есть $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ и $s^*$ – равновесие Нэша ($x^* = \pi(s^*)$). По аналогии с рассмотренным выше примером можно показать, что если $x^* > r_i$, то $s_i^* = d$, если $x^* < r_i$, то $s_i^* = D$. Если же $d < s_i^* < D$, то $x^* = r_i$. При этом если $x^* = r_q$, то $\forall j < q \quad s_j^* = d,\ \ \forall j > q \quad s_j^* = D$, а сама величина $s_q^*$ определяется из условия

$$\pi\left(\underbrace{d,d,\ldots,d}_{q-1},\, s_q^*,\, \underbrace{D,D,\ldots,D}_{n-q}\right) = r_q\,.$$

Таким образом, для определения ситуации равновесия достаточно найти номер $q$. Для этого введем $n-1$ число:

$$w_i = \pi\left(\underbrace{d\,,d\,,\,\ldots,\,d}_{i}\,,\ \underbrace{D\,,D\,,\,\ldots,D}_{n-i}\right),\ i = \overline{1,n}\,.$$

Видно, что $w_0 = D > w_1 > w_2 > \ldots > w_n = d$, и если $w_i \le r_i \le w_{i-1}$, то $x^* = r_i$, то есть $i$-ый агент является диктатором на отрезке $[w_i; w_{i-1}]$. Легко показать, что существует единственный агент $q$, для которого выполнено $w_{q-1} \ge r_{q-1}$, $w_q \le r_q$.

Определив таким образом $q$, можно найти итоговую оценку в равновесии: $x^* = \min\,(w_{q-1}; r_q)$. Сообщение достоверной информации $(\tilde{r}_i \equiv r_i)_{i \in N}$ при этом является доминантной стратегией [112].

Отказавшись от предположения о том, что вектор типов агентов является общим знанием, получаем, что к стабильному информационному равновесию приводят следующие представления реальных и фантомных агентов:

$$r_{\sigma q(r)} \in [\min\,\{w_{q(r)-1}; r_{q(r)}\}; r_{q(r)}],\quad \sigma \in \Sigma,$$
$$r_{\sigma i} \le \min\,\{w_{q(r)-1}; r_{q(r)}\},\quad \sigma \in \Sigma,\quad i < q(r),$$
$$r_{\sigma i} \ge \min\,\{w_{q(r)-1}; r_{q(r)}\},\quad \sigma \in \Sigma,\quad i > q(r).$$

Рассмотрим пример. Пусть $n = 3$, $r_1 = 0{,}4$, $r_2 = 0{,}5$, $r_3 = 0{,}6$, и центр использует следующий механизм обработки оценок: $x = \pi(s) = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{n} s_i$. Если $s_i \equiv r_i,\ i = \overline{1,3}$, то есть если все эксперты сообщают правду, то $x = 0{,}5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным представлением второго эксперта, и он удовлетворен результатом полностью. Остальные же эксперты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0{,}5$, а $r_3 > 0{,}5$. Следовательно, они попытаются сообщить другие $s_1$ и $s_3$. Пусть они сообщают $s_1^* = 0,\ s_2^* = 0{,}5,\ s_3^* = 1$. Тогда $x^* = \pi(s_1^*, s_2^*, s_3^*) = 0{,}5$. Итоговая оценка не изменилась, но «новый» вектор сообщений является уже равновесием Нэша, то есть в рассматриваемом примере $w_0 = 1$, $w_1 = 2/3$, $w_2 = 1/3$, $w_3 = 0$, следовательно, $q = 2$ и

$$r_2 = 1/2 = \min\,(2/3; 1/2).$$

Таким образом, к стабильному информационному равновесию приводят следующие представления реальных и фантомных агентов: $r_{\sigma 2} = 1/2$, $r_{\sigma 1} \le 1/2$, $r_{\sigma 3} \ge 1/2$, $\sigma \in \Sigma$.

Выше мы фактически доказали, что для любого механизма экспертизы $\pi(\cdot)$ можно построить эквивалентный прямой механизм, в котором сообщение достоверной информации является равновесием Нэша. Этот результат позволяет говорить, что если центр заинтересован в получении достоверной информации от агентов, то он может этого добиться, используя неманипулируемый прямой механизм. Однако интересы центра могут быть другими.

Предположим, например, что центр заинтересован в том, чтобы результат экспертизы был как можно ближе к значению $x_0 \in [d; D]$. Пусть центру известны мнения агентов $\{r_i \in [d; D]\}_{i \in N}$, но никому из них не известны достоверно мнения остальных. Информационное управление в данной ситуации заключается в формировании у агентов таких структур информированности (представлений о представлениях оппонентов), чтобы сообщаемая ими как субъективное информационное равновесие информация приводила бы к принятию наиболее выгодного для центра (наиболее близкого к $x_0$) решения.

Обозначим $x_{0i}(a_i, r_i)$ – решение уравнения

(1) $\pi(a_i, \ldots, a_i, \mathrm{x}_0, a_i, \ldots, a_i) = r_i$,

в котором $x_0$ стоит на $i$-м месте, $i \in N$.

Содержательно, условие (1) – наилучший ответ $i$-го агента на единогласное сообщение остальными агентами величины $a_i$.

В силу монотонности и непрерывности механизма $\pi(\cdot)$ при фиксированном типе $r_i$ $i$-го агента $x_{0i}(a_i, r_i)$ – непрерывная убывающая функция $a_i$. Потребуем, чтобы $x_0 \in [d; D]$, тогда $\forall\, a_i \in \Re^1$, $\forall\, r_i \in [d; D]$

(2) $x_0 \in [d_i(r_i); D_i(r_i)], \quad i \in N$,

где

(3) $d_i(r_i) = \max\,\{d; x_{0i}(D, r_i)\}$, $D_i(r_i) = \min\,\{D; x_{0i}(d, r_i)\}, \quad i \in N$.

Утверждение 4.15.1. Если тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат $x_0$, для которого выполнено

(4) $x_0 \in [\max\limits_{i \in N} d_i(r_i); \min\limits_{i \in N} D_i(r_i)]$

может быть реализован как единогласное коллективное решение.

Доказательство. В силу описанной выше структуры равновесия Нэша в механизме активной экспертизы множество информационных равновесий есть $[d; D]^n$.

Рассмотрим следующую структуру информированности $i$-го агента: $r_{ij} = a_i$, $j \neq i$, $r_{ijk} = a_i$, $k \in N$, то есть все оппоненты с точки зрения $i$-го агента имеют одинаковые точки пика, равные $a_i$ (см. выражение (1)), считают, что он сам имеет такую же точку пика, и считают этот факт общим знанием.

Таким образом, $i$-й агент ожидает от всех оппонентов сообщения $a_i$ как информационного равновесия их игры (отметим, что при этом центру не нужно строить сложные и глубокие структуры информированности и вычислять для них информационные равновесия). Его наилучшим ответом (в силу определения (1) величины $a_i$) является сообщение $x_{0i}(a_i, r_i)$, диапазон возможных значений которого определяется выражениями (2)–(3). Получили, что $X_i(r_i) = [d_i(r_i); D_i(r_i)]$, $i \in N$.

Так как требуется единогласное принятие решения, то следует вычислить пересечение множеств (2)–(3) по все агентам, что дает выражение (4).

Итак, все агенты сообщают $x_0$, и в силу условия единогласия это решение принимается (сторонним наблюдателям невозможно придраться к «демократичности» механизма принятия решений и результатам его использования). •

Применим утверждение 4.15.1 к линейному анонимному (напомним, что *анонимным* называется механизм принятия решений, симметричный относительно перестановок агентов [97]) механизму экспертизы $\pi(s) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} s_i$, $s_i, r_i \in [0; 1]$, $i \in N$ [108]. Вычисляем $a_i = \frac{n\, r_i - x_0}{n-1}$, $i \in N$. Получаем из условия $a_i \in [0; 1]$ (или из (2)-(4)) границы диапазона единогласно реализуемых коллективных решений:

(5) $\max\,\{0; n\,(\max_{i \in N} r_i - 1) + 1\} \leq x_0 \leq \min\,\{1; n \min_{i \in N} r_i\}$.

Интересно отметить, что из (5) следует ограничение

$$\max_{i \in N} r_i - \min_{i \in N} r_i \leq 1 - \frac{1}{n}$$

на разброс мнений экспертов, при котором существует хотя бы один результат $x_0$, реализуемый за счет рефлексивного управления как единогласно принятое коллективное решение.

С другой стороны, из (5) следует, что $x_0 \in [0; 1]$, если

$$\max_{i \in N} r_i \le 1 - \frac{1}{n}, \;\; \min_{i \in N} r_i \ge \frac{1}{n}.$$

Последнее условие свидетельствует, что в линейном анонимном механизме экспертизы достаточным условием единогласной реализации любого коллективного мнения в результате рефлексивного управления является следующее: не должно существовать экспертов как с очень низкими оценками, так и с очень высокими оценками.

Откажемся теперь от требования единогласного принятия коллективного решения. Введем два вектора:

$$d(r) = (d_1(r_1), d_2(r_2), \ldots, d_n(r_n)), \quad D(r) = (D_1(r_1), D_2(r_2), \ldots, D_n(r_n)).$$

Утверждение 4.15.2. Если тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат $x_0$, для которого выполнено

(6) $x_0 \in [\pi(d(r)); \pi(D(r))]$.

может быть реализован как коллективное решение.

Доказательство. Утверждение 4.15.2 отличается от утверждения 4.15.1 тем, что в нем, с одной стороны, отсутствует одинаковость равновесных сообщений агентов, с другой стороны – расширяется ограничение на реализуемое как информационное равновесие коллективное решение (условие (4) заменено условием (6)).

Фиксируем вектор $r \in [d; D]^n$ точек пика агентов. В соответствии со структурой равновесия, описанной выше, каждый агент в равновесии сообщает либо минимальную заявку (ноль), либо максимальную (единицу), либо свой истинный тип (если данный агент является диктатором). Так как у каждого агента можно сформировать произвольные представления о типах остальных агентов и их представлениях и т.д., то каждого из них можно убедить в том, что множество возможных обстановок игры составляет $[d; D]^{n-1}$.

Для этого достаточно сформировать, например, следующую структуру информированности глубины три: $ij$-ый агент должен быть диктатором и этот факт должен быть общим знанием для *ijk*-агентов.

В ходе доказательства утверждения 4.15.1 установлено, что $X_i(r_i) = [d_i(r_i); D_i(r_i)]$, $i \in N$. В силу того, что информационные структуры агентов формируются независимо, получаем, что вектор минимальных равновесных заявок есть $d(r)$, максимальных – $D(r)$. Из монотонности и непрерывности процедуры $\pi(\cdot)$ принятия решений следует (6). •

Применим утверждение 4.15.2 к линейному анонимному механизму экспертизы $\pi(s) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} s_i$, $s_i, r_i \in [0; 1]$, $i \in N$. Вычислим, какое сообщение $s_i$ $i$-го агента является для него субъективно оптимальным при обстановке $s_{-i}$ (обозначим $S_{-i} = \sum_{j \neq i} s_j \in [0; n–1]$):

(7) $s_i(r_i, S_{-i}) = n\, r_i - S_{-i}$, $i \in N$.

Следовательно, $X_i(r_i) = [\max \{0; 1 - n\,(1 - r_i)\}; \min \{1; n\, r_i\}]$, $i \in N$. Подставляя с учетом (7) левые и правые границы множеств $X_i(r_i)$ в линейный анонимный механизм планирования, получаем:

(8) $x_0 \in [\sum_{i \in N} \frac{1}{n} \max \{0; 1 - n\,(1 - r_i)\}; \sum_{i \in N} \frac{1}{n} \min \{1; n\, r_i\}]$.

Из утверждений 4.15.1 и 4.15.2 (см. их доказательства, содержащие описание вида минимальной структуры информированности, реализующей заданное коллективное решение) можно сделать следующий вывод.

Следствие. При решении задач рефлексивного управления в механизмах активной экспертизы достаточно ограничиться вторым рангом рефлексии экспертов.

Рассмотрим приведенный выше числовой пример с тремя агентами, имеющими точки пика: $r_1 = 0{,}4$, $r_2 = 0{,}5$, $r_3 = 0{,}6$. Пусть $x_0 = 0{,}8$. Если все агенты сообщают правду, то в непрямом механизме $x = 0{,}5$; в соответствующем прямом (неманипулируемом) механизме будет принято то же решение. Иными словами, центру хотелось бы, чтобы каждый из агентов сообщил бо́льшую оценку, приблизив тем самым итоговое решение к 0,8.

Условие (5) в рассматриваемом примере выполнено. Вычислим следующие величины:

$$0{,}8 + 2\, a_1 = 3 \times 0{,}4 \to a_1 = 0{,}2,$$
$$0{,}8 + 2\, a_2 = 3 \times 0{,}5 \to a_2 = 0{,}35,$$
$$0{,}8 + 2\, a_3 = 3 \times 0{,}6 \to a_3 = 0{,}5.$$

Центр формирует у первого агента убеждение, что типы остальных агентов равны 0,2, они считают, что его тип также равен 0,2 и с их точки зрения этот факт – общее знание. Аналогичные «убеждения» – соответственно 0,35 и 0,5 – формируются у второго и третьего агентов.

Наилучшим ответом первого агента (приводящим к тому, что коллективное решение совпадает с его точкой пика) на сообщение 0,2 остальными агентами является сообщение 0,8. Это же сообщение (в силу определения $a_i$) является наилучшим ответом всех остальных агентов (второго и третьего). Итак, все сообщают 0,8, и это решение единогласно принимается.

В рассматриваемом числовом примере условие (8) выполнено для любого $x_0 \in [0; 1]$, то есть $n\,(\max\limits_{i \in N} r_i - 1) + 1 \le 0$ и $n \min\limits_{i \in N} r_i \ge 1$.

Рассмотрим другой пример: пусть $n = 2$, $r_1 = 0{,}2$, $r_2 = 0{,}7$. Тогда из (5) получаем, что существует единственное $x_0$, равное 0,4, которое реализуемо как единогласное коллективное решение. В то же время, множество реализуемых в соответствии с утверждением 4.15.2 коллективных решений составляет отрезок [0,2; 0,7].

Совпадение границ этого отрезка с типами агентов случайно: например, при $r_1 = 0{,}1$, $r_2 = 0{,}5$ единогласно реализуемы коллективные решения из отрезка [0; 0,2], а в рамках утверждения 4.15.2 – из отрезка [0; 0,6].

В заключение рассмотрения рефлексивного управления в механизмах активной экспертизы отметим, что результаты утверждений 4.15.1 и 4.15.2 были получены в предположении, что тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам. Более реалистичным является предположение, что каждый из участников (центр и эксперты) имеет свои представления о диапазонах типов оппонентов, то есть управленческие возможности центра ограничены. Анализ множества коллективных решений, которые могут быть реализованы в этом случае как информационные равновесия, представляется перспективной задачей будущих исследований.

## 4.16. ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО: ИНФОРМАЦИОННАЯ РЕФЛЕКСИЯ

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой агенты выбирают объемы производства. Рыночная цена на продукцию убывает с ростом суммарного объема производства и зависит от спроса. Если неопределенным параметром является спрос и относительно него каждый из агентов имеет собственную иерархию представлений, то информационное равновесие существенным образом зависит от взаимных представлений агентов. Если неопределенным параметром являются затраты агентов, то оказывается, что, наблюдая выбираемые действия, агенты могут в динамике прийти к истинному информационному равновесию.

Рассмотрим организационную систему, в которой участвуют $n$ агентов с целевыми функциями следующего вида:

(1) $$f_i(r_i, x) = (Q - \alpha \sum_{j \in N} x_j)\, x_i - \frac{x_i^2}{2r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N$, $\alpha > 0$.

Содержательно, $x_i$ – объем выпуска продукции $i$-ым агентом, $Q$ – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж, а второе слагаемое – как затраты на производство. Параметр $r_i$ (тип $i$-го агента) характеризует эффективность (квалификацию) его деятельности.

Наилучший ответ $i$-го агента имеет следующий вид:

(2) $$BR_i(x_{-i}, r_i) = (Q - \alpha \sum_{j \neq i} x_j) / (2\,\alpha + 1 / r_i), \quad i \in N.$$

Предположим, что каждый агент наблюдает цену $(Q - \alpha \sum_{j \neq i} x_j)$. Тогда выполнены условия утверждения 2.8.1, поэтому в рассматриваемой модели ложных равновесий не возникает, т. е. возможно только истинное стабильное информационное равновесие. Приведем иллюстративный численный пример.

Пусть $n = 2$, $\alpha = 1$, $Q = 5$, $r_1 = r_2 = 1$. Вычисляем параметрическое равновесие Нэша:

(3) $x_1(r_1, r_2) = \dfrac{[1 - \dfrac{2r_2 + 1}{r_2}]\,Q}{1 - \dfrac{(2r_1 + 1)(2r_2 + 1)}{r_1\, r_2}}$,

(4) $x_2(r_1, r_2) = \dfrac{[1 - \dfrac{2r_1 + 1}{r_1}]\,Q}{1 - \dfrac{(2r_1 + 1)(2r_2 + 1)}{r_1\, r_2}}$.

Из выражений (3) и (4) можно найти типы агентов, при которых наблюдаемый вектор действий $(x_1, x_2)$ будет стабильным информационным равновесием:

(5) $r_1(x_1, x_2) = 1 / [(Q - x_2) / x_1 - 2]$,

(6) $r_2(x_1, x_2) = 1 / [(Q - x_1) / x_2 - 2]$.

Рассмотрим модель динамики представлений агентов о типах друг друга. Пусть каждый из них независимо выбирает действие, подставляя в (3) или (4) свой тип и свои представления о типах оппонента. Затем, после наблюдения выбора оппонента, каждый агент вычисляет в соответствии с (5) или (6) новую оценку типа оппонента и в соответствии с гипотезой индикаторного поведения корректирует свои представления. Затем выбор повторяется и т.д.

На Рис. 75, Рис. 76 и Рис. 77 приведены графики динамики представлений агентов.

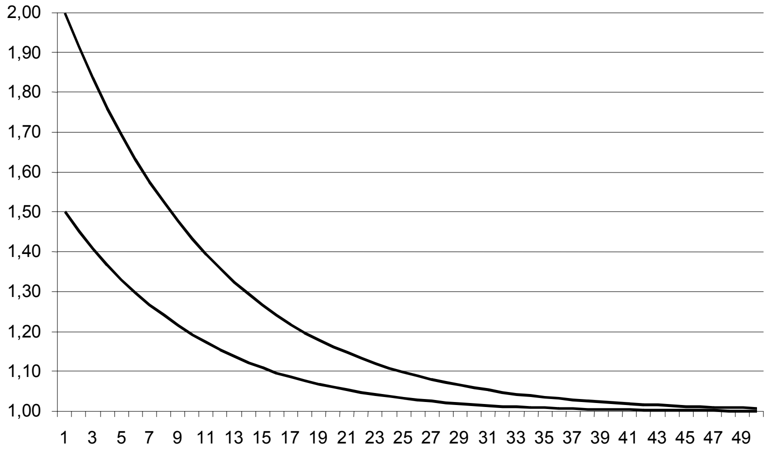


Рис. 75. Оба агента первоначально переоценивают друг друга ($r_{12} = 2$, $r_{21} = 1,5$)

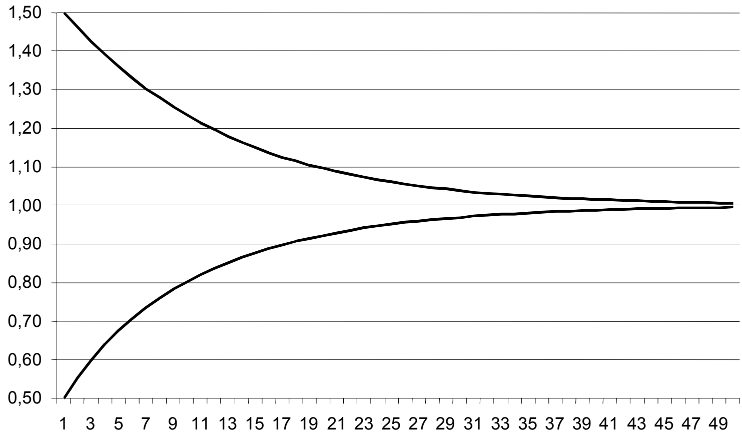


Рис. 76. Первый агент первоначально переоценивает второго, а второй – недооценивает первого ($r_{12}$ = 1,5, $r_{21}$ = 0,5)

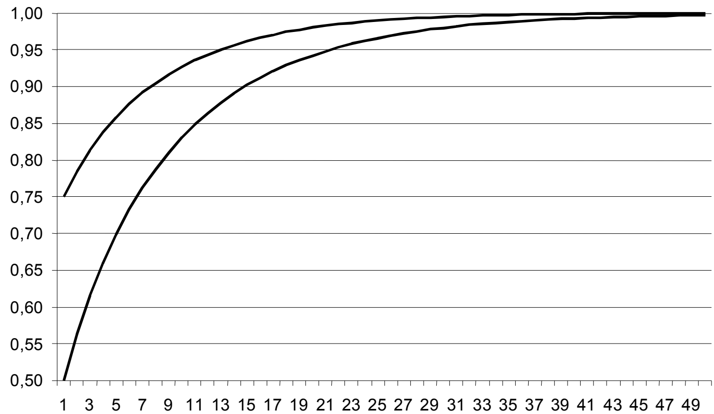


Рис. 77. Оба агента первоначально недооценивают друг друга ($r_{12}$ = 0.75, $r_{21}$ = 0.5)

Видно, что представления каждого агента о типах оппонента монотонно сходятся к соответствующему истинному значению (1; 1), а действия агентов стремятся к истинному информационному равновесию – параметрическому равновесию Нэша со значениями параметров, равными истинным типам агентов.

## 4.17. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой описывается ситуация распределения центром ограниченного ресурса между агентами на основании заявок последних. В силу активности агентов, они способны к искажению информации, и в равновесии часть агентов (так называемые *диктаторы* [97, 112]) получают оптимальное для себя количество ресурса, а остальные агенты – меньше оптимального.

Предположим, что агенты имеют иерархию представлений о том, кому из них какое количество ресурса необходимо. Оказывается, что во многих механизмах распределения ресурса стабильные неадекватные представления могут существовать только относительно агентов, не входящих в число диктаторов. При этом, однако, вектор распределяемых ресурсов оказывается таким же, как и в случае полного знания. Перейдем к описанию модели.

В рассмотренных выше моделях исследовалась стабильность информационного равновесия, которое является обобщением равновесия Нэша. В ряде моделей оказывается, что существует более сильное равновесие – *равновесие в доминантных стратегиях* (РДС), определяемое как вектор абсолютно оптимальных (то есть не зависящих от обстановки и вектора типов остальных агентов) действий агентов [41, 243].

Утверждение 4.17.1. РДС является стабильным информационным равновесием.

Справедливость утверждения 4.17.1 вытекает из определений РДС и информационного равновесия. Из него следует, что в системах, в которых существует РДС, задача исследования информационного равновесия отчасти вырождается. Однако это не значит, что вырождается задача исследования стабильности равновесия – как показывают рассматриваемые ниже модели механизмов распределения ресурса и активной экспертизы, выбор агентами доминантных стратегий может производиться в рамках широкого диапазона их взаимных представлений друг о друге.

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ агентов, имеющих целевые функции $f_i(x_i, r_i)$, где $x_i \geq 0$ – количество выделяемого $i$-му агенту ресурса, $r_i \geq 0$ – его тип – оптимальное для него количество ресурса, то есть будем считать, что $f_i(x_i, \cdot)$ – однопиковая функция с *точкой пика* $r_i$, $i \in N$.

Будем считать, что каждый агент достоверно знает свою точку пика (свой тип), тогда как центр не имеет об этих точках никакой информации.

Задачей центра является распределение ресурса $R$ на основании заявок $s_i \in [0; R]$, $i \in N$, агентов (то есть действиями агентов в рассматриваемой модели являются выбираемые ими сообщения центру). Принцип принятия решений центром: $x_i = \pi_i(s)$, $i \in N$, где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, называется *механизмом* (*процедурой*) *планирования*.

Относительно свойств процедуры планирования, следуя [18, 93, 112], предположим:

1) $\pi_i(s)$ непрерывна и строго монотонно возрастает по $s_i$, $i \in N$;

2) $\pi_i(0, s_{-i}) = 0 \quad \forall\ s_{-i} \in [0; R]^{n-1}, \quad i \in N$;

3) механизм распределения ресурса анонимен, то есть произвольная перестановка номеров агентов приводит к соответствующей перестановке количеств получаемых ими ресурсов.

В [18, 93, 112] доказано, что в случае, когда типы агентов являются общим знанием, во-первых, ситуация равновесия Нэша $s^*(r)$ игры агентов имеет (для механизмов, удовлетворяющих свойствам 1 и 2) следующую структуру: $\forall\ i \in N$, $\forall\ r \in \Re^n$

(1) $\pi_i(s^*(r)) < r_i \Rightarrow s_i^*(r) = R$,

(2) $s_i^*(r) < R \Rightarrow \pi_i(s^*(r)) < r_i$,

и, во-вторых, все механизмы распределения ресурса, удовлетворяющие свойствам 1–3, эквивалентны (то есть приводят к тем же равновесиям) механизму пропорционального распределения: агенты получают ресурс в количестве

$$\text{(3)}\quad \pi_i(s) = \begin{cases} s_i, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j \le R \\ \min\left\{ s_i,\ R\, s_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} s_j \right\}, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j > R \end{cases},$$

Последнее утверждение позволяет сконцентрировать внимание на механизме (3).

В [93, 112] изложен алгоритм поиска равновесия Нэша игры агентов, основывающийся на *процедуре последовательного распределения ресурса*[65]. Ее идея заключается в следующем:

0. Агенты упорядочиваются по возрастанию точек пика. Множество диктаторов (т. е. агентов, получающих оптимальное для себя количество ресурса) является пустым.

1. Весь ресурс распределяется между агентами поровну.

2. Если $r_1 < R / n$, то первый агент включается во множество диктаторов, и всем агентам выделяется ресурс в количестве $r_1$ (если $r_1 < R / n$, то множество *диктаторов*[66] пусто и все агенты в равновесии сообщают одинаковые заявки и получают одинаковое количество ресурса, на этом алгоритм останавливается).

3. Положив $r_i := r_i - r_1$, $i := i - 1$, $R := R - n\, r_1$, повторяем шаг 2 (число повторений второго шага, очевидно, не превосходит числа агентов).

В результате применения процедуры последовательного распределения ресурса определяется множество $D(r) \subseteq N$ диктаторов, получающих ресурс в оптимальном для себя объеме (определяемом точками пика). Остальные агенты (не диктаторы) получают в силу анонимности механизма распределения ресурса одинаковое его количество:

$$x_0(r) = (R - \sum_{j \in D(r)} r_j\,) \,/\, (n - |D(r)|).$$

Откажемся теперь от предположения о том, что типы агентов являются общим знанием, и исследуем информационные равновесия и их стабильность. Будем считать, что функцией наблюдения каждого агента является вектор действий оппонентов (см. раздел 2.9). Тогда, согласно результатам разделов 2.7-2.9, возможны лишь истинные информационные равновесия. При этом, однако, представления о типах оппонентов могут быть как адекватными, так и не адекватными.

---

[65] Отметим, во-первых, что процедура последовательного распределения ресурса является прямым механизмом – использует непосредственно информацию о точках пика агентов. Во-вторых, данная процедура является греманипулируемой, т. е. каждому агенту выгодно сообщать центру достоверную информацию о своей точке пика при условии, что центр обязуется использовать процедуру последовательного распределения.

[66] Напомим, что диктатором называется агент, получающий абсолютно оптимальный для себя план ($x_i = r_i$).

Рассмотрим следующие варианты:

Случай 1. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что $D(r) = N$. Такое возможно, если $\sum_{j \in N} r_j \le R$. Тогда истинные типы агентов являются общим знанием.

Случай 2. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что $D(r) = \varnothing$. Такое возможно, если

(4) $\min_{i \in N} \{r_i\} > R / n$.

Тогда наилучший ответ каждого агента не зависит от его субъективных представлений, удовлетворяющих (4), и любая комбинация таких представлений агентов будет образовывать истинное равновесие.

Больший интерес представляет промежуточный случай, когда существуют как агенты-диктаторы, так и агенты-недиктаторы.

Случай 3. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что $D(r) \ne \varnothing$, $D(r) \ne N$. Тогда, с учетом наблюдаемости выбираемых действий, агент-диктатор по определению в равновесии получает ресурс, в точности равный его типу. Следовательно, относительно их типов ни у кого из агентов стабильных неадекватных представлений быть не может (см. случай 1):

(5) $r_{\sigma i} = r_i$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in D(r)$.

Относительно же типов агентов из множества $N \setminus D(r)$ стабильные неадекватные представления могут существовать:

(6) $r_{\sigma i} \ge \min_{j \in N \setminus D(r)} r_j$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N \setminus D(r)$.

Приведем пример. Пусть $n = 3$, $R = 1$, $r_1 = 0{,}2$, $r_2 = 0{,}3$, $r_3 = 0{,}6$. Тогда $s_1^* = 0{,}4$, $s_2^* = 0{,}6$, $s_3^* = 1$, $x_1^* = r_1 = 0{,}2$, $x_2^* = r_2 = 0{,}6$, $x_3^* = 0{,}5$. Из (5) и (6) получаем, что имеет место:

$$\forall\ \sigma \in \Sigma\ \ r_{\sigma 1} = r_1,\ r_{\sigma 2} = r_2,\ r_{\sigma 3} \ge 0{,}5.$$

Таким образом, в монотонных анонимных механизмах распределения ресурса стабильные неадекватные представления могут существовать только относительно типов агентов, не входящих в число диктаторов. При этом, однако, вектор распределяемых ресурсов оказывается таким же, как и в случае полного знания.

## 4.18. СТРАХОВАНИЕ

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой страхователи имеют иерархию взаимных представлений о вероятностях наступления страховых случаев и сообщают страховщику желательные размеры своих страховых взносов.

Оказывается, что информационным равновесием является любой набор заявок, обладающий следующим свойством: с точки зрения любого агента (как реального, так и фантомного) сумма заявок (реальных) страхователей равна ожидаемым суммарным потерям от страховых случаев, а каждая из заявок не превосходит ожидаемого страхового возмещения. При этом все равновесные действия реальных страхователей достигаются в рамках их субъективного общего знания друг о друге. Перейдем к описанию модели.

В формальных моделях управления риском, в том числе – страхования (актуарная математика), как правило, не учитываются свойства активности страхователей и страховщиков, проявляющиеся в рефлексии, способности искажать информацию и т.д. Исключение составляют работы [17, 20], рассматривающие модели взаимного и смешанного страхования, в которых страховщик использует информацию, сообщаемую страхователями, для определения параметров страховых контрактов, и предлагается «механизм скидок», в котором каждому страхователю выгодно сообщение достоверной информации. В настоящем разделе рассматриваются модели взаимного страхования, в которых агенты – участники системы взаимного страхования – имеют иерархию представлений о вероятностях наступления страховых случаев для каждого из них.

Рассмотрим объединение из $n$ страхователей (которое в модели взаимного страхования будем считать страховщиком) – агентов, имеющих целевые функции (определяемые ожидаемыми полезностями)

(1) $Ef_i = g_i - r_i + p_i\,[h_i - Q_i],\ i \in N,$

где $g_i$ отражает детерминированную прибыль от хозяйственной деятельности $i$-го страхователя; $r_i$ – страховой взнос; $h_i$ – страховое возмещение; $p_i$ – вероятность наступления страхового случая (будем считать, что страховые случаи у различных агентов – независимые события); $Q_i$ – потери при наступлении страхового случая, $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество страхователей. Для простоты ограничимся описанием взаимодействия страхователей в течение одного промежутка времени, на протяжении которого однократно производится сбор взносов и компенсация ущербов.

В соответствии с (1) предполагается, что все страхователи одинаково относятся к риску, но в общем случае различаются вероятностями наступления страхового случая и соответствующими потерями. Известно (см. [17, 20] и др.), что перераспределение риска взаимовыгодно только для агентов, отличающихся отношением к риску. Поэтому, с одной стороны, можно считать, что все страхователи нейтральны к риску, а с другой стороны, что основными эффектами, требующими исследования в рассматриваемой модели взаимного страхования, являются рефлексия страхователей и неполная их информированность – так как все страхователи одинаково относятся к риску, то при условии, что все они обладают полной информацией друг о друге, допустимо произвольное его перераспределение между ними; если же информированность неполная или отсутствует общее знание, то возможно нарушение требования сбалансированности взносов и ожидаемых выплат.

В условиях полной информированности суммарный страховой взнос равен $R = \sum_{i \in N} r_i$ , а ожидаемое страховое возмещение равно $H = \sum_{i \in N} p_i h_i$ . Так как рассматривается взаимное (некоммерческое) страхование, то в силу принципа эквивалентности [17] должно иметь место $R = H$, то есть

(2) $\sum_{i \in N} r_i = \sum_{i \in N} p_i h_i$ .

Отметим, что условие (2) отражает равенство суммарного страхового взноса математическому ожиданию выплат, т. е. задачи о разорении фонда взаимного страхования не рассматриваются.

Если осуществляется полное возмещение ущерба (предположение о неполном возмещении ущерба, т. е. априорная фиксация предполагаемого уровня страхового возмещения, не изменит качественно основных результатов анализа механизмов взаимного страхования) при наступлении страхового случая ($h_i = Q_i$, $i \in N$, $H = \sum_{i \in N} p_i Q_i$ ), то в условиях полной информированности можно было бы использовать следующий механизм взаимного страхования:

(3) $r_i = p_i\, Q_i, \quad i \in N$,

в рамках которого страховой взнос каждого страхователя в точности равен его ожидаемому ущербу (страховая сумма совпадает с потерями, а страховой тариф, равный нетто-ставке, определяется соответствующей вероятностью наступления страхового случая).

Однако, если индивидуальные параметры страхователей известны только им самим (и не наблюдаются другими страхователями), то использование механизма (3) невозможно. Поэтому рассмотрим две альтернативы. Первая – сообщение страхователями информации о вероятностях наступления страховых случаев [17]. Вторая – анализ механизма взаимного страхования, удовлетворяющего системе взаимных представлений агентов о существенных параметрах.

**Механизмы с сообщением информации.** Если оценки $\{s_i\}$ вероятностей наступления страховых случаев могут сообщаться страхователями друг другу, то все страхователи будут стремиться занизить вероятности наступления страхового случая, следовательно, одним из равновесий будет сообщение минимальных оценок. Поэтому рассмотрим несколько альтернативных механизмов взаимного страхования.

Обозначим $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – вектор сообщений агентов. Пусть в страховом договоре оговаривается, что страховой взнос каждого страхователя определятся сообщенными оценками вероятностей наступления страхового случая, то есть $r_i(s_i) = s_i\, Q_i$, а после наступления страховых случаев возмещение осуществляется пропорционально собранному страховому фонду $R(s) = \sum_{i \in N} r_i(s)$, то есть

(4) $h_i(s) = \alpha(s)\, Q_i,\ i \in N,$

где $\alpha(s)$ – единая доля страхового возмещения (отношение страхового возмещения $h_i(s)$ к страховой сумме $Q_i$), определяемая исходя из соотношения между страховым фондом $R(s)$ и необходимым объемом страхового возмещения $H$. Выбор зависимости $\alpha(\cdot)$ является стратегией управления.

Подставляя (4) в (1), получаем, что условие выгодности участия во взаимном страховании для $i$-го страхователя можно записать в виде:

(5) $s_i \le \alpha(s)\, p_i, \quad i \in N.$

Если используется следующая стратегия управления:

(6) $\alpha(s) = \min \{R(s) / H; 1\},$

то получаем, что балансовое условие (2) выполнено всегда, а из (5) следует, что сообщение страхователя не превышает истинного значения вероятности наступления страхового случая: $s_i \le \alpha(s)\, p_i$, $i \in N$.

Подставляя (4) и (6) в (1) и вычисляя производную по $s_i$, получим, что механизм (6) является манипулируемым, то есть сообщение достоверной информации невыгодно страхователям. Содержательно, каждый из страхователей стремится занизить вероятность наступления страхового случая, так как данное занижение сильнее уменьшает размер страхового взноса, чем долю страхового возмещения.

Альтернативой для (5) является использование следующего механизма взаимного страхования. Пусть страхователи заключают договор, в котором оговаривается, что в начале рассматриваемого периода они должны сообщить оценки вероятностей наступления страхового случая (страховые взносы в начале периода не собираются!), а затем в конце рассматриваемого периода (когда реализовались страховые случаи) они полностью компенсируют «пострадавшим» ущерб, а размер взноса каждого из страхователей определяется на основании сообщенных в начале периода оценок. Ожидаемое возмещение при этом равно $H = \sum_{i \in N} p_i Q_i$ , следовательно, сумма взносов должна равняться $H$, то есть

(7) $\sum_{i \in N} r_i(s) = H,$

где зависимости $r_i(\cdot)$ являются механизмом управления. Ожидаемое значение целевой функции страхователя имеет вид:

(8) $Ef_i = g_i - r_i(s), \quad i \in N,$

а условие выгодности участия во взаимном страховании:

(9) $r_i(s) \le p_i\, Q_i, \quad i \in N.$

Если выбрать следующий механизм управления, при котором взнос каждого страхователя пропорционален сообщенному им ожидаемому ущербу:

(10) $r_i(s) = \dfrac{s_i Q_i}{\sum_{i \in N} s_i Q_i}\, H, \quad i \in N,$

то максимум (8) достигается при минимальных сообщениях, то есть механизм (10) также является манипулируемым.

Анализ условий (9)-(10) подсказывает, что для того чтобы уменьшить искажение информации, следует выбрать такой механизм управления, в котором размер страхового взноса убывал бы с ростом заявки страхователя. Примером может служить механизм

$$(11)\ r_i(s) = \frac{1/s_i}{\sum_{i \in N}(1/s_i)}\ H, \quad i \in N.$$

Подставляя (11) в (8), получаем, что механизм (11) не побуждает страхователей занижать заявки, но он и не обеспечивает сообщения достоверной информации.

Таким образом, каждый из механизмов (10) и (11) обладает своими преимуществами: механизм (10) сбалансирован и обеспечивает выполнение условия (7), но при его использовании страхователи занижают заявки; а механизм (11) побуждает страхователей завышать заявки, но не обеспечивает «сбалансированности» в смысле (7). Для того чтобы построить механизм, который одновременно обладал бы всеми этими привлекательными свойствами, наверное, следует пытаться добиться рационального баланса между возрастанием и убыванием целевой функции страхователя по его сообщению. Однако для взаимного страхования такой баланс невозможен по следующим причинам. Взаимное страхование, в силу своей некоммерческой направленности, является с точки зрения страхователей «игрой с нулевой суммой» (из условия (2) следует, что суммарные взносы должны быть равны ожидаемому суммарному возмещению), поэтому занижение страхового взноса одним из страхователей приводит к тому, что это занижение компенсируется всеми страхователями (в том числе и исказившим информацию, но в меньшей пропорции – см. (10) или (11)). Поэтому для «борьбы» с искажением информации необходимо привлечение дополнительных ресурсов, зависимость объема которых от сообщений страхователей должна побуждать их к сообщению достоверной информации. Примером таких ресурсов могут служить ресурсы третьих (по отношению к рассматриваемым выше участникам страхового контракта) лиц, используемые в смешанном страховании.

**Рефлексивная модель**. Рассмотрим ситуацию, когда координирующий орган (центр) обладает некоторой информацией о потерях от страховых случаев $\{\tilde{Q}_i\}$ и вероятностях их наступления $\{\tilde{p}_i\}$, причем величины $\{\tilde{Q}_i\}$ и $\{\tilde{p}_i\}$ являются общим знанием (при этом не обязательно $\tilde{Q}_i = Q_i$ и $\tilde{p}_i = p_i$). Каждый страхователь сообщает центру свой взнос $s_i$ либо отказывается от страхования. Если все страхователи сообщают свои взносы, центр проверяет, выполняется ли соотношение

(12) $\sum_{i\in N} s_i \geq H = \sum_{i\in N} \tilde{p}_i \tilde{Q}_i$ .

Если (12) выполнено, заключается договор о взаимном страховании. Если хотя бы один страхователь отказался либо неравенство (12) не выполнено, договор не заключается.

В описанной ситуации целевая функция $i$-го страхователя имеет следующий вид:

$$f_i(p_i, s_i, ..., s_n) = \begin{cases} p_i \tilde{Q}_i - s_i, & \sum_{i\in N} s_i \geq H, \\ -\varepsilon_i \quad , & \sum_{i\in N} s_i < H, \end{cases}$$

где $\varepsilon_i$ – произвольная положительная константа (организационные затраты в случае, если договор о страховании не будет заключен). Будем также считать, что в случае отказа страхователя от участия он получает нулевой выигрыш.

Информация участников игры описывается их представлениями о параметрах $p_i$ – вероятностях наступления страховых случаев. Обозначим за $p_{ij}$ – представления $i$-го агента (страхователя) о значении $p_j$; $p_{ijk}$ – представления $i$-го агента о представлениях $j$-го агента о значении $p_k$, и т. д., $i, j, k \in N$. В совокупности эти представления образуют структуру информированности.

Информационные равновесия в этой рефлексивной игре страхователей описываются следующим утверждением (напомним, что за $\Sigma$ обозначено множество всевозможных конечных последовательностей индексов из $N$, в том числе пустая последовательность).

<u>Утверждение 4.18.1.</u> Пусть страхователи обладают структурой информированности конечной сложности. Набор действий $s^*_{\sigma i}$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием (и договор о взаимном страховании будет заключен), если и только если условия

$$\sum_{j\in N} s^*_j = H, \; \forall\; i \in N \;\; s^*_i \leq p_i \tilde{Q}_i$$

являются общим знанием. Последнее означает по определению, что для любого $\sigma \in \Sigma$ выполнено

(13) $\forall\, i \in N \ \sum_{j \in N} s^*_{\sigma ij} = H, \quad s^*_{\sigma i} \le p_{\sigma i} \widetilde{Q}_i$.

<u>Доказательство</u>. Пусть набор действий $s^*_{\sigma i}$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием (и договор о взаимном страховании будет заключен). Зафиксируем произвольные значения $\sigma \in \Sigma$ и $i \in N$. Действие $s^*_{\sigma i}$ максимизирует по $s_{\sigma i}$ целевую функцию $\sigma i$-агента $f_i(p_{\sigma i}, s^*_{\sigma i1}, ..., s^*_{\sigma i,i-1}, s_{\sigma i}, s^*_{\sigma i,i+1}, ..., s^*_{\sigma i1})$. Поэтому он выбрал минимальное действие, при котором выполняется условие $\sum_{j \in N} s^*_{\sigma ij} \ge H$; очевидно, при этом неравенство обращается в равенство. Целевая функция должна принимать неотрицательное значение (иначе $\sigma i$-агенту лучше было бы отказаться от участия в договоре), откуда получаем условие $p_{\sigma i} \widetilde{Q}_i - s^*_{\sigma i} \ge 0$.

Далее, пусть для любого $\sigma \in \Sigma$ выполнено (13). Тогда каждое действие $s^*_{\sigma i}$ максимизирует целевую функцию $\sigma i$-агента $f_i(p_{\sigma i}, s^*_{\sigma i1}, ..., s^*_{\sigma i,i-1}, s_{\sigma i}, s^*_{\sigma i,i+1}, ..., s^*_{\sigma i1})$. Поэтому набор действий $s^*_{\sigma i}$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием. •

Отметим, что если хотя бы один реальный или фантомный (существующий в чьих-то представлениях) агент откажется от участия, то договор не будет заключен. При этом отказ всех агентов формально также будет равновесием – отсюда необходимость оговорки в скобках в формулировке утверждения 4.18.1.

**Ранги рефлексии страхователей и равновесия**. Рассмотрим вопрос о том, насколько сложными должны быть субъективные представления страхователя, чтобы были достижимы все возможные информационные равновесия, то есть рассмотрим задачу о нахождении максимального целесообразного ранга рефлексии. Следующее утверждение показывает, что в данном случае этот ранг равен единице.

<u>Утверждение 4.18.2.</u> Все возможные действия $i$-го реального агента, $i \in N$, в рефлексивной игре страхователей достигаются в рамках его субъективного общего знания о наборе $(p_1, \ldots, p_n)$, т. е. в рамках структуры информированности, для которой

$$\forall \sigma \in \Sigma \ \forall j \in N \ p_{i\sigma j} = p_{ij}.$$

Доказательство. Для действия, состоящего в неучастии агента, утверждение очевидно (достаточно объявить в качестве общего знания $p_{ij} = 0$ для всех $j \in N$).

Далее будем рассматривать ситуацию с точки зрения $i$-го агента, $i \in N$. Пусть его действие $s_i^*$ субъективно является равновесным в некотором равновесии $s_{i\sigma j}^*$, $\sigma \in \Sigma$, $j \in N$. Тогда, согласно утверждению 4.18.1, для всех $j \in N$ выполняются соотношения

$$\sum_{j \in N} s_{ij}^* = H, \quad 0 \leq s_{ij}^* \leq \tilde{Q}_j .$$

Положим $p_{i\sigma j} = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$, $j \in N$ (т. е. сформируем структуру информированности, при которой с точки зрения $i$-го агента имеет место общее знание). Тогда, как нетрудно видеть, для набора действий $w_{i\sigma j}^* = s_{ij}^*$ субъективно (с точки зрения $i$-го агента) выполнено условие (13). Поэтому набор $w_{i\sigma j}^*$, $\sigma \in \Sigma$, $i, j \in N$, субъективно является информационным равновесием, причем действие $i$-го агента в этом равновесии совпадает с его действием в исходном равновесии $s_{i\sigma j}^*$. •

Таким образом, в настоящем разделе рассмотрена модель взаимного страхования с информационной рефлексией страхователей. Описано множество информационных равновесий, в которых может состояться договор о страховании. Показано, что все равновесные действия страхователя достигаются в условиях субъективного общего знания страхователей друг о друге.

## 4.19. РЕКЛАМА ТОВАРА

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой агент принимает решение о приобретении товара не только в зависимости от собственных предпочтений, но и от того, какая часть других агентов, с его точки зрения, собирается приобрести товар или ожидает от него приобретения данного товара (см. также раздел 4.2). Оказывается, что большинство реальных рекламных кампаний могут быть описаны в рамках модели информационного управления с первым или вторым рангом рефлексии агентов.

Предположим, что имеется два типа агентов: агенты первого типа склонны приобретать товар независимо от его рекламы, агенты второго типа в отсутствии рекламы приобретать товар не склонны. Обозначим $\theta \in [0; 1]$ – долю агентов первого типа.

Агенты второго типа, доля которых есть $1 - \theta$, подвержены влиянию рекламы, но не осознают этого. Социальное влияние [48] отразим следующим образом: будем считать, что агенты второго типа с вероятностью $p(\theta)$ выбирают действие $a$ и с вероятностью $1 - p(\theta)$ выбирают действие $r$. Зависимость $p(\cdot)$ – вероятности выбора – от доли агентов, склонных приобретать товар, отражает нежелание агентов быть «белыми воронами».

Если истинная доля $\theta$ агентов первого типа является общим знанием, то агенты ожидают, что именно $\theta$ агентов приобретут товар, а фактически наблюдают, что товар приобрели

(1) $x(\theta) = \theta + (1 - \theta)\, p(\theta)$

агентов (напомним, что мы предположили, что влияние рекламы не осознается агентами). Так как $\forall\ \theta \in [0; 1]\ \ \theta \leq x(\theta)$, то косвенное социальное влияние оказывается самоподтверждающим – «Смотрите, оказывается, склонны приобретать товар больше людей, чем мы считали!».

Проанализируем теперь асимметричную информированность. Так как агенты первого типа выбирают свои действия независимо, то можно считать их адекватно информированными как о параметре $\theta$, так и о представлениях агентов второго типа.

Рассмотрим модель информационного регулирования, в которой центр, проводящий рекламную акцию, формирует у агентов второго типа представления $\theta_2$ о значении параметра $\theta$.

Сделав маленькое отступление, обсудим свойства функции $p(\theta)$. Будем считать, что $p(\cdot)$ – неубывающая на [0; 1] функция, такая, что $p(0) = \varepsilon$, $p(1) = 1 - \gamma$ , где $\varepsilon$ и $\delta$ – константы, принадлежащие единичному отрезку, такие, что $\varepsilon \leq 1 - \delta$. Содержательно $\varepsilon$ соответствует тому, что некоторые агенты второго типа «ошибаются» и, даже если считают, что все остальные агенты имеют второй тип, то приобретают товар. Константа $\delta$ характеризует в некотором смысле подверженность агентов влиянию – у агента второго типа имеется шанс быть самостоятельным и, даже если он считает, что все остальные агенты приобретут товар, отказаться от покупки. Частный случай

$\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ соответствует независимым агентам второго типа, отказывающимся от приобретения товара.

Так как агенты не подозревают о наличии манипуляции со стороны центра (см. принцип доверия выше и в [117]), то они ожидают увидеть, что $\theta_2$ агентов приобретут товар. Фактически же его приобретут

(2) $x(\theta, \theta_2) = \theta + (1 - \theta)\, p(\theta_2)$.

Если доход центра пропорционален доле агентов, приобретающих товар, а затраты на рекламу $c(\theta, \theta_2)$ являются неубывающей функцией $\theta_2$, то целевая функция центра (разность между доходом и затратами) в отсутствии рекламы равна (1), а в ее присутствии:

(3) $\Phi(\theta, \theta_2) = x(\theta, \theta_2) - c(\theta, \theta_2)$.

Следовательно, эффективность информационного регулирования можно определить как разность между (3) и (1), а задачу информационного регулирования записать в виде:

(4) $\Phi(\theta, \theta_2) - x(\theta) \to \max\limits_{\theta_2}$.

Обсудим теперь ограничения задачи (4). Первое ограничение: $\theta_2 \in [0; 1]$, точнее: $\theta_2 \geq \theta$.

Рассмотрим пример: пусть $p(\theta) = \sqrt{\theta}$, $c(\theta, \theta_2) = (\theta_2 - \theta) / 2\sqrt{r}$, где $r > 0$ – размерная константа. Тогда задача (4) имеет вид:

(5) $(1 - \theta)\,(\sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta}\,) - (\theta_2 - \theta) / 2\sqrt{r} \to \max\limits_{\theta_2 \in [\theta; 1]}$.

Решение задачи (5) имеет вид: $\theta_2(\theta) = \max\,\{\theta;\, r\,(1 - \theta)^2\}$, т. е. при $\theta \geq \dfrac{(2r+1) - \sqrt{4r+1}}{2r}$ информационное регулирование для центра не имеет смысла (затраты на рекламу не окупаются, так как достаточная доля агентов приобретает товар в отсутствие рекламы).

Наложим теперь дополнительно к $\theta_2 \in [\theta; 1]$ требование стабильности информационного регулирования, а именно, в предположении наблюдаемости доли агентов, приобретающих товар, будем считать, что агенты второго типа должны наблюдать значение доли агентов, приобретающих товар, не меньшее, чем им сообщил центр, то есть условие стабильности имеет вид: $x(\theta, \theta_2) \geq \theta_2$. Подставляя (2), получим:

(6) $\theta + (1 - \theta)\, p(\theta_2) \geq \theta_2$.

Следовательно, оптимальным стабильным решением задачи информационного регулирования будет решение задачи максимизации (4) при ограничении (6).

В заключение настоящего раздела отметим, что в рассматриваемом примере любое информационное регулирование будет стабильным в смысле (6). Если же понимать под стабильностью полное совпадение ожидаемых и наблюдаемых агентами результатов (то есть потребовать выполнение (6) как равенства), то единственным стабильным информационным регулированием будет сообщение центра, что все агенты являются агентами первого типа, то есть $\theta_2 = 1$ (что чаще всего и имеет место в рекламе).

## 4.20. ПРЕДВЫБОРНАЯ БОРЬБА

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой информационное управление заключается в убеждении избирателей, поддерживающих определенных кандидатов, что их кандидаты не будут избраны и следует поддержать других кандидатов. Оказывается, что получающееся в итоге такого управления информационное равновесие может быть стабильным, и более того – истинным.

Рассмотрим пример рефлексивного управления в предвыборной борьбе. Пусть имеются три кандидата – $a$, $b$ и $c$, и выборы проводятся по принципу простого большинства (кандидату для победы достаточно получить поддержку половины избирателей плюс один голос). Если ни один из кандидатов не набрал большинства голосов, то состоится следующий тур с другими кандидатами, которых обозначим $d$. Допустим, что имеются три группы избирателей, доли которых составляют $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). Предпочтения групп избирателей, являющиеся общим знанием, приведены в Табл. 9.

*Табл. 9. Предпочтения групп избирателей*

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $d$ |

Вычислим для каждого попарного сравнения кандидатов число (долю) избирателей, считающих, что один кандидат лучше другого: $S_{ab} = \alpha_1 + \alpha_3$, $S_{ac} = \alpha_1$, $S_{ba} = \alpha_2$, $S_{bc} = \alpha_1 + \alpha_2$, $S_{ca} = \alpha_2 + \alpha_3$, $S_{cb} = \alpha_3$.

Рассмотрим игру избирателей, в которой множество стратегий каждого из них есть $A = \{a, b, c\}$. Предполагая, что вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$ является общим знанием, получаем, что множество равновесий Нэша составляют шесть векторов:

$$(a, a, a) \to a, \quad (b, b, b) \to b, \quad (c, c, c) \to c,$$
$$(a, b, a) \to a, \quad (a, c, c) \to c, \quad (b, b, c) \to b.$$

Рассмотрим теперь рефлексивную игру, считая, что активные действия по навязыванию структуры информированности второму и третьему агенту предпринимает первый агент, цель которого – «избрать» кандидата $a$. Пусть структура информированности соответствует графу рефлексивной игры, приведенному на Рис. 78.

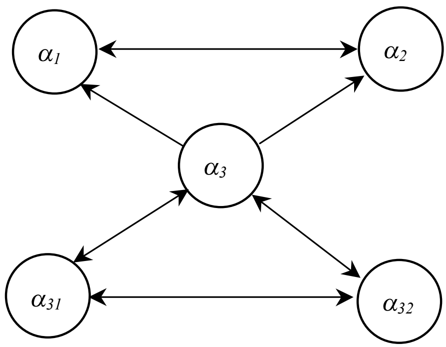


Рис. 78. Граф рефлексивной игры «Выборы»

Цель первой группы – во-первых, убедить третью группу, что наиболее предпочтительный с ее точки зрения кандидат $c$ «не пройдет» (и это якобы является общим знанием), и следует поддержать кандидата $a$. Для этого достаточно выполнения соотношений

$$\alpha_{32} + \alpha_3 < 1/2, \ \alpha_{31} + \alpha_3 > 1/2, \ \alpha_{31} + \alpha_3 + \alpha_{32} = 1.$$

Во-вторых, первой группе следует убедить вторую, что будет избран кандидат $a$ и от ее действий ничего не зависит (поддерживать кандидата $a$ вторая группа будет в последнюю очередь). Для этого достаточно, чтобы она была адекватно информирована о представлениях третьей группы (см. Рис. 78).

Так как от второй группы исход выборов не зависит, то можно считать, что она проголосует за наиболее предпочтительного с ее точки зрения кандидата $b$, то есть информационным равновесием будет вектор $(a, b, a)$. Этот вектор является стабильным информационным равновесием. Более того, так как $(a, b, a)$ – одно из равновесий Нэша в условиях полного знания (см. выше), то это – истинное равновесие (хотя представления третей группы могут быть ложными).

## 4.21. КОНКУРС

В настоящем разделе рассматривается модель, в которой, влияя на представления участников конкурса о параметрах оппонентов, центр – организатор конкурса – может влиять на его результаты. Однако стабильным это информационное управление будет лишь в том случае, когда действия агентов совпадают с их действиями в условиях общего знания.

Рассмотрим, следуя [112], следующий конкурсный механизм (аукцион). Пусть центр обладает $R_0$ единицами ресурса. Размер возможной заявки от каждого из агентов фиксирован и равен $x_0$ (для простоты будем считать, что $k = R_0 / x_0$ – целое число, меньшее числа $n$ агентов, участвующих в конкурсе – так называемая *гипотеза дефицитности*). Агенты сообщают центру цену $\{y_i\}$, по которой они готовы приобрести ресурс, затем центр упорядочивает агентов по убыванию предложенных цен и продает ресурс по заявленным ценам – сначала агенту, предложившему максимальную цену, затем – следующему за ним и т.д., пока не закончится весь ресурс.

Обозначим $x_i$ – количество ресурса, получаемого $i$-м агентом, $i \in N$. Пусть $\varphi_i(x_i, r_i)$ – доход $i$-го агента от использования ресурса (возрастающая по $x_i$ гладкая вогнутая функция, удовлетворяющая условию $\varphi_i(0, r_i) = 0$), где $r_i$ – тип агента, характеризующий эффективность использования им ресурса, т. е. $\varphi_i(\cdot)$ возрастает по $r_i$, $i \in N$. Из условия индивидуальной рациональности (неотрицательности целевой функции[67] $f_i(y, x_i, r_i) = \varphi_i(x_i, r_i) - y_i\, x_0$) получаем максималь-

[67] Отказываясь от участия в аукционе, агент всегда может обеспечить себе нулевое значение целевой функции.

ную цену $p_i(r_i) = \varphi_i(x_0, r_i) / x_0$, которую готов заплатить $i$-й агент за получение «порции» $x_0$ ресурса, $i \in N$.

Упорядочим агентов по убыванию типов[68]: $r_1 \ge r_2 \ge \dots \ge r_n$. В силу введенных предположений упорядочение агентов по максимальным ценам будет такое же: $p_1 \ge p_2 \ge \dots \ge p_n$.

В условиях полной информированности равновесными будут следующие сообщения (так называемое аукционное решение):

$$y_i^*(r) = p_{k+1} + \delta, \quad i = \overline{1, k}, \quad y_i^*(r) = 0, \quad i = \overline{k+1, n},$$

где $\delta$ – сколь угодно маленькая строго положительная константа, то есть первые $k$ агентов – победители аукциона – приобретут ресурс почти по цене первого проигравшего, а все проигравшие откажутся от участия в аукционе.

Эффективность аукциона с точки зрения агентов, определяемая отношением суммарного полученного ими эффекта к количеству распределенного ресурса, равна:

(1) $K(r, R_0) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_0, r_i) \,/\, R_0.$

Эффективность аукциона с точки зрения центра, определяемая отношением полученной им суммы к количеству распределенного ресурса, равна:

(2) $K_0(r, R_0) = p_{k+1} + \delta.$

и не возрастает с ростом числа агентов.

В качестве отступления сравним эффективность аукциона с эффективностью *механизма внутренних цен* для случая $\varphi_i(x_i, r_i) = 2\sqrt{r_i x_i}$:

(3) $\lambda(s) = \sqrt{\dfrac{\sum_{i \in N} s_i}{R_0}}$,

(4) $x_i(s) = \dfrac{s_i}{\sum_{j \in N} s_j} R_0, j \in N,$

в рамках которого центр устанавливает внутреннюю цену (3) за единицу ресурса, а целевые функции агентов имеют вид:

---

[68] Будем считать, что если типы двух агентов совпадают, то существует правило, по которому они упорядочиваются.

(5) $f_i(x_i, r_i) = \varphi_i(x_i, r_i) - \lambda\, x_i, \quad i \in N$.

Для данного конкретного вида целевых функций агентов эффективности (1) и (2) примут вид:

(6) $K(r, R_0) = 2\ \sum_{i=1}^{k} \sqrt{r_i} \Big/ \sqrt{kR_0}$ ,

(7) $K_0(r, R_0) = 2\ \sqrt{\dfrac{(k+1)r_{k+1}}{R_0}}$ ,

где $R = \sum_{i \in N} r_i$ .

По аналогии с (6) и (7) вычислим эффективности механизма внутренних цен:

(8) $K(r, R_0) = \sqrt{\dfrac{R}{R_0}}$ ,

(9) $K_0(r, R_0) = \sqrt{\dfrac{R}{R_0}}$ .

Сравнивая (6) с (8) и (7) с (9), получаем, что с точки зрения агентов эффективность конкурсного механизма выше по сравнению с эффективностью механизма внутренних цен, если:

(10) $\sum_{i \in N} r_i \le 4\ (k + 1)\ r_{k+1}$,

а с точки зрения центра, если:

(11) $\sum_{i=1}^{k} \sqrt{r_i / k} \ \ge \ \sqrt{\sum_{i \in N} r_i}\ / 2$.

Вернемся к анализу аукционного механизма. Построенное аукционное решение будет реализовано, только если истинные значения типов всех агентов являются общим знанием. Рассмотрим, что произойдет в случае, когда агенты не имеют достоверной информации о типах друг друга.

Анализ информационного равновесия для рассматриваемой модели аукциона приведен в [117], поэтому сконцентрируем внимание на стабильности информационного равновесия. Исходом аукциона (при заданных $R_0$ и $k$) является множество победителей аукциона и цена $p_{k+1}$, по которой центр будет продавать агентам ресурс (см. выше). Следовательно, при заданном множестве $Q \subseteq N$ победителей и цене $p$ стабильным будет любая совокупность представлений, во-первых, приводящая к тому, что агенты из множества $Q$ являются первыми в упорядочении представлений о типах по убыванию, и, во-вторых, такая, что представления всех (реальных и фантомных) агентов о типе агента, занявшего ($k$+1)-е место в этом упорядочении, равны $p$.

Нетрудно видеть, что все охарактеризованные информационные равновесия являются истинными: каковы бы ни были взаимные представления агентов, победители назначают цену $p$, а остальные отказываются от участия в конкурсе.

## 4.22. ЯВНЫЕ И СКРЫТЫЕ КОАЛИЦИИ В РЕФЛЕКСИВНЫХ ИГРАХ

В настоящем разделе рассмотрена модель рыночной олигополии, в которой участники рынка могут заключать союз – явный или неявный (тайный) [35]. При наличии союза (коалиции) все его участники преследуют цель максимизации суммарного выигрыша, в то время как остальные участники рынка максимизируют свои собственные выигрыши. Для моделирования взаимодействия в случае неявного союза применена концепция информационного равновесия рефлексивной игры.

Олигополия – это такая рыночная структура, при которой доминирует небольшое число продавцов, а вход в отрасль новых производителей ограничен высокими барьерами. Олигополия возникает в том случае, если число фирм в отрасли настолько мало, что каждая из них при формировании своей экономической политики вынуждена принимать во внимание реакцию со стороны конкурентов. Подобно тому, как шахматист должен учитывать возможные ходы противника, олигополист должен быть готов к различным (нередко альтернативным) вариантам развития ситуации на рынке в результате различного поведения конкурентов.

Всеобщая взаимозависимость проявляется и в условиях обострения конкурентной борьбы, и в условиях, когда достигается договоренность с другими олигополистами и возникает тенденция превращения отрасли в чисто монопольную.

Возможны две основные формы поведения фирм в условиях олигополистических структур: некооперативное и кооперативное. В случае некооперативного поведения каждый продавец самостоятельно решает проблему определения цены и объема выпуска продукции. В случае кооперативного поведения все фирмы-участники кооперации договариваются о цене и объеме выпускаемой продукции.

В условиях высокой степени неопределенности олигополисты ведут себя по-разному. Одни пытаются игнорировать конкурентов и действовать, как будто в отрасли господствует совершенная конкуренция. Другие, наоборот, пытаются предвидеть поведение соперников и внимательно следят за каждым их шагом. Наконец, некоторые из них считают наиболее выгодным тайный сговор с фирмами-противниками.

В данном разделе мы рассмотрим олигополию, в которой несколько производителей объединяются в коалицию. При этом будет рассмотрено две ситуации. В первой участники коалиции прямо заявляют о своем союзе остальным участникам олигополии. Во второй ситуации несколько производителей совершают тайный сговор, при этом всем остальным участникам рынка приходится строить догадки о том, был ли заключен союз или нет.

**Модель без коалиций**. Рассмотрим систему, которая состоит из $n$ однотипных игроков-олигополистов. Пусть каждый из этих игроков может выбрать некоторое действие $x_i$, при этом целевые функции игроков имеют вид

(1) $f_i = (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_i - \dfrac{x_i^2}{2r}$.

Содержательно первое слагаемое в (1) означает доход $i$-го игрока, второе – его затраты на производство $x_i$ единиц продукции. Стандартным способом нахождения равновесия Нэша является нахождение максимума целевой функции каждого игрока по его действию и решение получившейся системы $n$ уравнений. В данном случае в равновесном состоянии все игроки выбирают одинаковое действие, равное

(2) $\dfrac{1}{n + 1 + \dfrac{1}{r}}$.

При этом их выигрыши будут равны $\dfrac{1}{2}\dfrac{r(2r+1)}{(nr+r+1)^2}$.

**Явная коалиция**. Пусть первые $m$ игроков заключили союз. То есть, выбирая свои действия, они будут максимизировать не каждый свою целевую функцию, а агрегированную функцию

(3) $F = \sum_{k=1}^{m} f_k$ .

Рассмотрим случай, когда все игроки системы осведомлены о том, что союз заключен. Тогда целевые функции имеют следующий вид:

(4) $$\begin{cases} F_i = (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_1 - \dfrac{x_1^2}{2r} + \ldots + (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_m - \dfrac{x_m^2}{2r}, \ i \le m, \\ F_i = (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_i - \dfrac{x_i^2}{2r}, \ i > m. \end{cases}$$

Находя равновесие Нэша стандартным способом, приходим к системе уравнений вида

(5) $$\begin{cases} 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k - \dfrac{x_i}{r} = 0, \ i \le m, \\ 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_i - \dfrac{x_i}{r} = 0, \ i > m. \end{cases}$$

Первая группа уравнений описывает действия игроков, заключивших союз, вторая группа уравнений – действия игроков, оказавшихся вне коалиции.

Вычитая последовательно уравнения внутри каждой группы, систему можно привести к следующему равносильному виду:

(6) $$\begin{cases} 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k - \dfrac{x_1}{r} = 0, \\ \dfrac{1}{r} x_i - \dfrac{1}{r} x_{i+1} = 0, \ i \le m - 1, \\ 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{m+1} - \dfrac{x_{m+1}}{r} = 0, \\ \left(1 + \dfrac{1}{r}\right) x_i - \left(1 + \dfrac{1}{r}\right) x_{i+1} = 0, \ m + 1 \le i \le n - 1. \end{cases}$$

Таким образом, легко видеть, что действия всех игроков в коалиции окажутся одинаковыми. Одинаковыми будут и действия игроков, не вошедших в этот союз. Обозначим тогда $y = x_i$,

$i = 1, \ldots, m$ и $z = x_i$, $i = m + 1, \ldots, n$. Тогда систему можно записать в следующем виде:

$$(7)\quad \begin{cases} 1 - 2my - (n-m)z - \dfrac{y}{r} = 0, \\ 1 - my - (n-m)z - z - \dfrac{z}{r} = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$(8)\quad \begin{cases} y = \dfrac{(r+1)r}{mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + r + 1}, \\ x = \dfrac{(mr+1)r}{mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + r + 1}. \end{cases}$$

Выпишем выигрыши игроков в равновесии. Игроки, вошедшие в коалицию, получают выигрыши по

$$\frac{1}{2}\frac{(r+1)r(2mr^2 + 2mr + r + 1)}{(mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + r + 1)^2}.$$

Здесь мы считаем, что суммарный выигрыш коалиции делится поровну между ее участниками.

Игроки, не вошедшие в коалицию, получают выигрыши по

$$\frac{1}{2}\frac{(mr+1)r(2mr^2 + 2mr + 2r + 1)}{(mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + r + 1)^2}.$$

Для первых $m$ игроков найдем разницу в выигрышах (в случае, когда заключен союз, и в случае, когда союза нет). Эта разница записывается выражением

$$-\frac{1}{2}\frac{r^3(-1 + 8m^2r^3n + 2nmr - 4mr^3n - 2r - 2mr^3n^2 + m)}{(mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + 1)^2(nr + r + 1)^2} -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{r^3(8m^2r^2 + 4mr - 2nr - 2m^3r^2n + m^2r^2n^2 + 4m^2r^2n)}{(mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + 1)^2(nr + r + 1)^2} -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{r^3(2m^2r^3n^2 - 2mr^3 - n^2r^2 - 2nr^2 - 8m^3r^3 + 8m^2r^3)}{(mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + 1)^2(nr + r + 1)^2} -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{r^3(8m^3r^2 - 2m^3r + 2m^4r^3 - r^2 - 4m^3r^3n + m^4r^2)}{(mr^2n - m^2r^2 + 2mr^2 + mr + nr + 1)^2(nr + r + 1)^2}.$$

Рассмотрим частный случай $n = 30$ и построим график этой разницы в плоскости параметров $\langle r, m \rangle$ (см. Рис. 79).

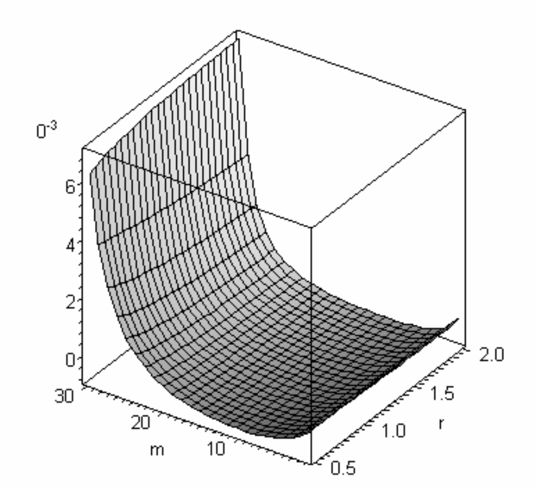


Рис. 79. Разница выигрышей для участников коалиции при размере системы $n = 30$

На графике (Рис. 79) видно, что эта разница оказывается положительной только при достаточно больших значениях числа участников коалиции. При этом участники максимально выигрывают в коалиции, когда никто не остается вне союза, т. е. все участники рынка действуют совместно.

Таким образом, не всегда коалиция оказывается выгодной, т. е. не всегда участники коалиции увеличивают свой выигрыш по сравнению с выигрышем в случае отсутствия коалиции.

Интересно отметить, что «выгодное» число участников коалиции зависит от эффективности работы игроков. На Рис. 80 отмечена область таких значений параметров $r$ и $m$, при которых игроки получают больший выигрыш, заключив союз, нежели работая по отдельности.

Рассмотрим другой частный случай – положим эффективность всех игроков постоянной и равной $r = 1$. Посмотрим, как будет зависеть разница в выигрышах игроков в случае наличия коалиции и в случае ее отсутствия (Рис. 81). Как видно из Рис. 81, коалиции становятся выгодными только при достаточно большом числе игроков (когда $m$ сравнимо с $n$). При этом при фиксированном числе игроков в системе коалиция сначала становится убыточной, и только с ростом размера коалиции начинает приносить прибыль. Продемонстрируем это для случая $n = 25$ (см. Рис. 82).

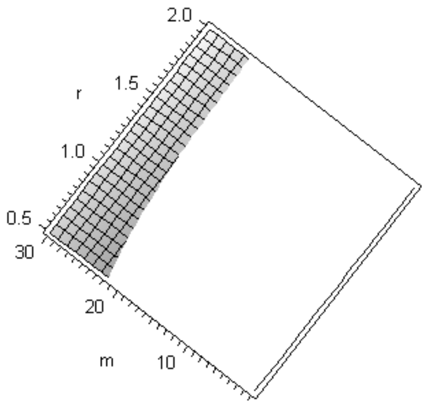


Рис. 80. Область выгодных для их участников коалиций при размере системы $n = 30$

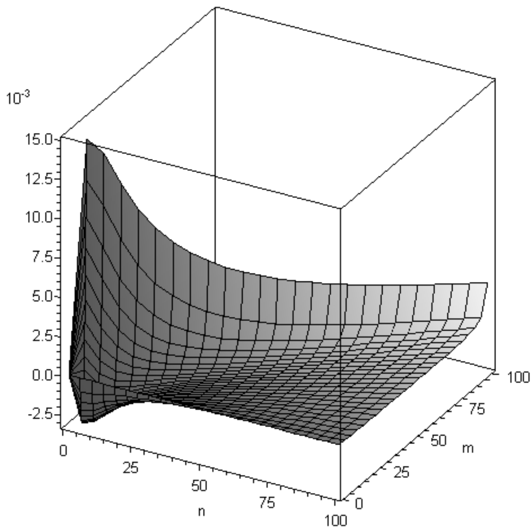


Рис. 81. Разница выигрышей участников коалиции при эффективности $r = 1$

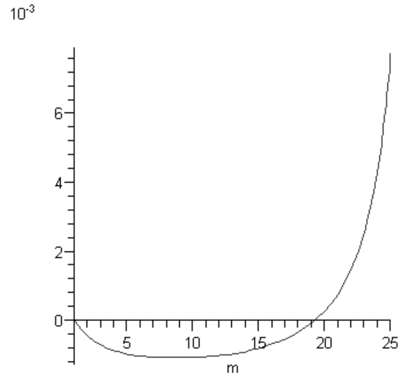


Рис. 82. Разница выигрышей участников коалиции
при эффективности r = 1 и размере системы $n$ = 30

Найдем точку минимума разности выигрышей участников коалиции при $r$ = 1. Эта разность записывается выражением

$$\Delta = -\frac{1}{2}\frac{-4-4n-n^2-2nm+3m^4-18m^3+4m+15m^2)}{(nm-m^2+3m+n+2)^2(n+2)^2}+$$

$$(9)\quad +\frac{1}{2}\frac{12m^2n+3m^2n^2-6m^3n-2mn^2}{(nm-m^2+3m+n+2)^2(n+2)^2}.$$

Рассмотрим разницу выигрышей $\Delta$ как функцию переменной $m$ с параметром $n$. Найдя производную функции по ее аргументу и приравняв ее к нулю, стандартным способом получаем, что функция (9) достигает своего экстремума (в данном случае – минимума) в точке

$$(10)\quad m = \frac{1}{6}n + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{n^2+2n+13}\,.$$

График этой зависимости изображен на Рис. 83. Отметим, что при $n$ = 25 получим $m_{min} \approx 8.7$, что полностью согласуется с Рис. 82.

**Скрытая коалиция**. Выше был рассмотрен случай явного союза игроков – наличие коалиции и ее состав были общеизвестны. Однако возможен и иной случай – когда о коалиции известно лишь ее участникам, а остальные игроки ни о чем не подозревают.

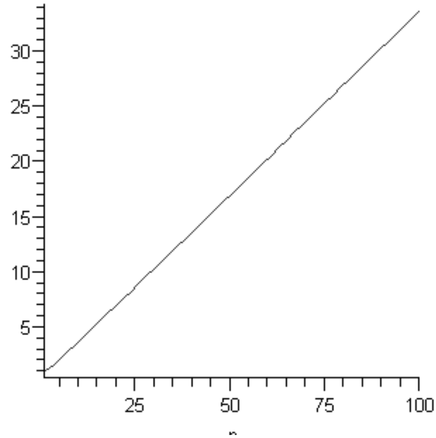


Рис. 83. Наименее выгодный размер коалиции

Итак, пусть первые $m$ игроков заключили коалицию и действуют совместно, а остальные $(n - m)$ игроков не знают о коалиции. Адекватным описанием такой ситуация является рефлексивная игра, где наряду с $n$ реальными игроками в системе появляются $m$ фантомных игроков. Фантомные игроки в данном случае – это первые $m$ игроков в представлении остальных. Действительно, реально первые $m$ игроков образуют коалицию, а в представлении остальные $(n - m)$ игроков они действуют независимо.

Целевые функции в действительности и в представлении игроков имеют следующий вид:

$$(11)\quad \begin{cases} f_i = (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_1 - \dfrac{x_1^2}{2r} + \ldots + (1 - x_1 - \ldots - x_n)x_m - \dfrac{x_m^2}{2r},\ i \le m, \\ f_i = (1 - x_{i1} - \ldots - x_{in})x_i - \dfrac{x_i^2}{2r},\ i > m, \\ f_{ji} = (1 - x_{j1} - \ldots - x_{jn})x_{ji} - \dfrac{x_{ji}^2}{2r},\ \ j > m, i \le n, \\ x_{ii} = x_i, i \le n. \end{cases}$$

Здесь за $x_{ij}$ обозначено действие $j$-го игрока в представлении $i$-го. При этом величины $x_{ii}$ и $x_i$ считаем совпадающими – каждый игрок имеет верные представления о своих действиях.

Находя информационное равновесие в этой игре, приходим к системе уравнений

$$(12)\quad \begin{cases} 1-\sum\limits_{k=1}^{m} x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - \dfrac{x_i}{r} = 0,\ i \le m, \\ 1-\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} - x_i - \dfrac{x_i}{r} = 0,\ i > m, \\ 1-\sum\limits_{k=1}^{n} x_{jk} - x_{ji} - \dfrac{x_{ji}}{r} = 0,\ j > m,\ i \le n, \\ x_{ii} = x_i,\ i \le n. \end{cases}$$

Как и в случае явной коалиции, попарно вычтем уравнения внутри каждой группы. Приходим к следующей системе:

$$(13)\quad \begin{cases} 1-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - \sum\limits_{k=1}^{m} x_k - \dfrac{x_1}{r} = 0, \\ \dfrac{1}{r}x_i - \dfrac{1}{r}x_{i+1} = 0,\ \ i \le m-1, \\ 1-\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} - x_{m+1} - \dfrac{x_{m+1}}{r} = 0, \\ \left(1+\dfrac{1}{r}\right)x_i - \left(1+\dfrac{1}{r}\right)x_{i+1} = 0,\ \ m+1 \le i \le n-1, \\ 1-\sum\limits_{k=1}^{n} x_{jk} - x_{j1} - \dfrac{x_{j1}}{r} = 0,\ j > m, \\ \left(\left(2+\dfrac{1}{r}\right)x_{j1} + \sum\limits_{k=2}^{n} x_{jk}\right) - \left(\left(2+\dfrac{1}{r}\right)x_{j+1,1} + \sum\limits_{k=2}^{n} x_{j+1,k}\right) = 0,\ \ j > m, \\ \left(1+\dfrac{1}{r}\right)x_{ji} - \left(1+\dfrac{1}{r}\right)x_{j,i+1} = 0,\ \ j > m,\ i < n, \\ x_{ii} = x_i,\ i \le n. \end{cases}$$

Аналогично случаю явной коалиции получаем равенство действий для игроков, находящихся внутри одной группы (т. е. игроков вошедший в коалицию, не вошедших в нее и действия в представлении игроков, не вошедших в коалицию).

Таким образом, можно ввести обозначения для действий игроков по группам:

• реальные действия игроков, вошедших в коалицию, обозначим через $x$;

• реальные действия игроков, не вошедших в коалицию, обозначим через $y$;

• действия фантомных игроков – игроков, вошедших в коалицию, в представлении не вошедших в коалицию игроков обозначим через $z$.

Тогда систему (13) можно записать в следующем виде:

$$(14)\quad \begin{cases} \left(2m + \frac{1}{r}\right)x + (n-m)y = 1, \\ \frac{y}{x} + (n+1)z = 1, \\ \left(n + 1 + \frac{1}{r}\right)z = 1, \\ z = y. \end{cases}$$

Действия игроков в таком случае примут следующий вид:

$$(15)\quad \begin{cases} x = \frac{r}{2mr+1}\frac{mr+r+1}{nr+r+1}, \\ y = \frac{r}{nr+r+1}. \end{cases}$$

Можно заметить, что при $m = 1$ (т. е. в случае, когда коалиция не образуется), действия игроков полностью совпадают с действиями в случае отсутствия союза в системе.

Выигрыш игроков, вошедших в коалицию, составит

$$(16)\quad f = \frac{1}{2}\frac{r(mr+r+1)^2}{(nr+r+1)^2(2mr+1)},$$

а разница в выигрышах в случае заключения союза и в случае его отсутствия составит

$$(17)\quad \Delta f = \frac{1}{2}\frac{r^3(m^2-2m+1)}{(nr+r+1)^2(2mr+1)}.$$

Как и прежде зафиксируем эффективности всех игроков на уровне $r = 1$ и построим график зависимости разности выигрышей при разном числе игроков в системе (см. Рис. 84).

Легко видеть, что в случае «тайного сговора» максимальный выигрыш от создания коалиции игроки получают, как и в случае явной коалиции, при максимально возможном числе коалиционеров. Очевидное отличие от явного союза состоит в том, что тайный сговор всегда выгоден (повышает выигрыш участников).

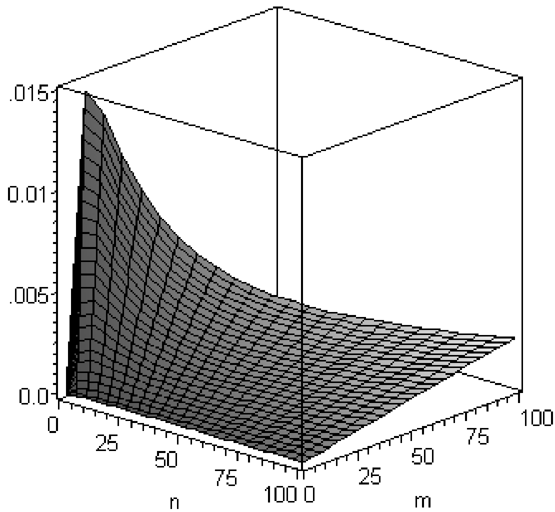


Рис. 84. Разница выигрышей участников коалиции
при эффективности $r = 1$

Рассмотрим выигрыши и разницу в выигрышах (по сравнению с отсутствием коалиции) игроков, не попавших в союз. Для них эти значения записываются выражениями

(18) $g = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2mn - 8m + 4n - 3 - 4m^2}{(2m+1)(n+2)^2}$.

и

(19) $\Delta g = -\dfrac{mn - m + 2n - 2m^2}{(2m+1)(n+2)^2}$.

Проследим зависимость разницы выигрышей при различном числе игроков в системе и числе игроков, заключивших союз (см. Рис. 85).

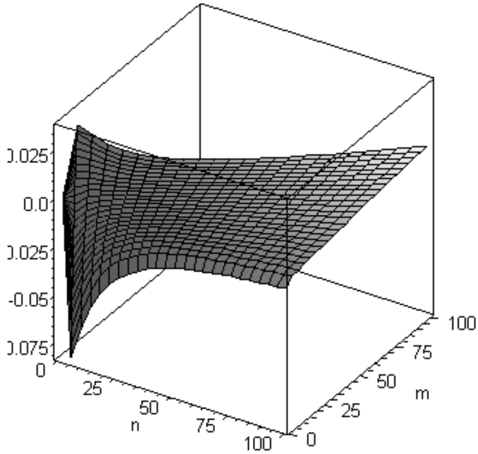


Рис. 85. Разница выигрышей игроков, не вошедших в коалицию, при эффективности $r = 1$

Можно заметить, что, как правило, игроки вне союза теряют в выигрыше. Однако если в союз вступило достаточно большое число игроков, игрокам вне коалиции это также выгодно.

Найдем, при каком размере тайной коалиции оставшиеся вне ее игроки оказываются в выигрыше. Из соотношения (19) легко видеть, что находящиеся вне коалиции игроки оказываются в выигрыше (по сравнению с отсутствием коалиции) при достаточно больших $m$ – начиная с

(20) $m = \frac{1}{4}n - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{n^2 + 14n + 1}$

или, для неограниченно возрастающего $n$ – при $m \approx n/2$.

Завершая рассмотрение случая скрытых коалиций, отметим, что возникающее при этом информационное равновесие не является стабильным (см. раздел 2.7) – результат игры будет неожиданным для не вошедших в коалицию агентов. Для описания динамики представлений агентов в рефлексивных играх требуется более сложная конструкция (см. раздел 2.14), однако этот вопрос выходит за рамки данной работы.

Таким образом, в настоящем разделе рассмотрена модель олигополии с явно или тайно существующей коалицией. При рассмотрении этой модели удалось выявить следующее:

- явно заключенный союз не всегда приносит дополнительную выгоду его участникам;

- явный союз, затрагивающий всех (или почти всех) участников рынка (монополия) приносит наибольший прирост в прибыли для всех участников коалиции;

- неявно заключенный союз всегда приносит дополнительные прибыли его участникам;

- тайный союз может быть полезен и не участвующим в нем игрокам.

Перспективным представляется исследование вопросов формирования явных и тайных коалиций (в том числе – нескольких коалиций) в других типах игр, а также выявление общих закономерностей взаимодействия в условиях неполной информации о существовании коалиций.

## 4.23. АКТИВНЫЙ ПРОГНОЗ

**Общее понятие об активном прогнозе.** Люди всегда стремились и стремятся к уменьшению влияния неконтролируемых ими факторов на результаты деятельности за счет получения дополнительной информации о том, что им неизвестно вообще или известно неточно. Этим, наверное, качественно объясняется широкая распространенность в нашей жизни всевозможных прогнозов – погоды, состояния рынка, экономического развития, научно-технического прогресса и т.д.

Информация, получаемая субъектом (в том числе – коллективным) в результате прогноза, может быть просто принята им к сведению, а может изменить его поведение по сравнению с тем, как он вел бы себя в отсутствии этой информации. В первом случае говорят о *пассивном прогнозе*, во втором случае – об *активном* [117]. Такое разделение условно, так как в принципе любой прогноз может рассматриваться как активный, поэтому активным обычно считается прогноз, в результате которого целенаправленное изменение поведения субъекта проявляется достаточно ярко.

Рассмотрим основные известные подходы к определению пассивного и активного прогнозов. В энциклопедическом словаре приводится следующее определение [146, с. 1063]: «*Прогноз* (от греческого prognosis – предвидение, предсказание) – конкретное предсказание, суждение о состоянии какого-либо явления в будущем». В [143] прогноз определяется как «некоторое суждение относительно неизвестных, особенно – будущих событий. Термины «суждение» и «событие» получают здесь свободное толкование. Совершенно необязательно, чтобы это «суждение» появилось в письменной форме, было опубликовано или сообщено каким-либо иным способом. Описываемое событие может выражать даже отсутствие некоторых явлений».

В [9] выделяется позитивный конструктивный подход к прогнозированию как активному воздействию на будущее путем планирования, программирования, проектирования и управления явлениями и процессами. В рамках этого подхода прогнозирование не является самоцелью, а составляет основу для принятия решений. В прогнозе в качестве параметров должны фигурировать управляющие переменные (то есть должны анализироваться различные сценарии), и для характеризации места прогноза в принятии решений[69] можно выделить следующую цепочку: «прогноз–план–программа–проект–управление» [9, с.21].

Взаимоотношение между прогнозом и принятием решений рассматривается также в [151]: 1) знание лицом, принимающим решение (ЛПР), настоящего состояния описывается в некоторых переменных. Далее, 2) выделяются инструментальные (управляемые) и неуправляемые переменные. 3) Осуществляется предсказание будущих значений неуправляемых переменных в зависимости от значений управляемых переменных – получаются условные прогнозы (сценарии). 4) Оцениваются результаты, то есть сравниваются исходы третьего пункта. 5) Производится выбор значений управляемых переменных, то есть осуществляется принятие решений. Другими словами, формулирование решения в зависимости от текущего состояния отражает политику ЛПР (т. е. механизм принятия решений). Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место игра одного активного игрока с пассивным игроков, называемым в исследовании операций «природой». Влияние его прогноза на поведение

---

[69] Вообще, прогнозирование является неотъемлемым этапом управления. В настоящей работе акцент делается, в основном, на тех случаях, когда собственно управление заключается в целенаправленном сообщении прогнозной или какой-либо другой информации.

других субъектов не учитывается (точнее, учитывается пассивно – через прогноз неуправляемых переменных), то есть прогноз в этом случае является не методом управления, а методом устранения неопределенности (условного по стратегии).

Различают поисковый и нормативный прогнозы. Под *поисковым прогнозом* понимается определение возможных состояний объекта прогнозирования в будущем. Задача *нормативного прогноза* заключается в определении путей и сроков достижения желаемых состояний прогнозируемого объекта в будущем. Другими словами нормативный прогноз – предсказания, «цель которых заключается в том, чтобы вызвать интерес и побудить к действию» [180, с. 58]. Поэтому нормативный прогноз может рассматриваться как управление в явном виде.

В [92] подчеркивается, что специалист, принимающий решения на основании прогноза, пытается предотвратить осуществление неблагоприятного прогноза и увеличить вероятность осуществления благоприятного. Существуют две «крайности» во влиянии прогноза на управление [92, с. 21]: «*Самоосуществляющийся прогноз* – это такой прогноз, который оказывается достоверным только потому, что был сделан. *Самоаннулирующийся прогноз* – такой прогноз, который, наоборот, становится недостоверным только потому, что был сделан». Аналогичные свойства политических прогнозов обсуждаются в [144].

В [29] выделяется *активный и пассивный прогноз*, и обсуждаются проблемы априорной и апостериорной оценки качества прогноза. «Пассивный прогноз – такой, для которого результат прогноза не влияет и, по сути, не может влиять на объект прогнозирования. Если же воздействием прогноза на объект прогнозирования нельзя пренебречь (такой прогноз называется активным), то логика прогнозирования резко меняется и осложняется, так как сам прогноз должен учесть эффект результатов прогнозирования». Следовательно, активным является любой нормативный прогноз, а также такие поисковые прогнозы, которые используются при принятии управленческих решений.

Пассивный и активный прогнозы различаются, в числе прочего, в следующем аспекте. Рассмотрим сначала, что понимается под точностью пассивного прогноза. Предположим, что имеется некоторая система, относительно будущих состояний которой делается прогноз. Этот прогноз производится на основе той или иной модели системы (модели прогнозируемого объекта), и вычисляемая апостериори разность ||прогноз – факт||, где ||·|| отражает используемое «расстояние» между состояниями системы, может трактоваться и как *точность пассивного прогноза*, и как критерий адекватности используемой при прогнозе модели моделируемой системе.

Если система является пассивной (не содержит активных элементов, которые могут изменять свое поведение при получении новой информации) или если прогноз не становится известным участникам активной системы, то любой прогноз будет пассивным.

В случае, когда имеет место активный прогноз, использовать для определения его точности приведенную выше разность невозможно, так как невозможно оценить «фактическое» («чистое» – каким оно было бы без информационного воздействия) состояние системы и сравнить его с прогнозным.

Приведем пример активного прогноза. В [88, с. 162] описывается следующий эффект. «Вечером 6 января 1981 года Джозеф Гранвилл, известный советник по капиталовложениям во Флориде, отправил своим клиентам телеграмму: «Цены на акции резко упадут; продавайте завтра». Очень скоро все узнали о совете Гранвилла, и 7 января стало самым черным днем во всей истории Нью-йоркской фондовой биржи. По общему мнению, акции потеряли в цене около 40 миллиардов долларов».

Еще пример активного прогноза [144, с. 51]: «Если влиятельные эксперты, выполняя заказ главы государства, находящегося в конфликтных отношениях с высшим органом законодательной власти, спрогнозировали неизбежность досрочного роспуска парламента, то это могло подвигнуть заказчика именно к такому развитию событий, хотя реально оставались возможности для реализации иного сценария».

Или другой пример из той же области – в начале 70-х годов XX века в результате исследования математических моделей фондового рынка была предложена так называемая формула Блэка-Шоулза для оценки стоимости опционов (производных ценных бумаг). Со временем эта формула вошла во все учебники по экономике, и на ее основе все рассчитывают реальную стоимость опционов, не задумываясь о том, насколько модель Блэка-Шоулза соответствует действительности (эта модель стала, фактически, формировать «действительность») [102].

Обсудив проблему активного прогнозирования на качественном уровне, перейдем к теоретико-игровому анализу.

**Активный прогноз как способ отбора равновесий.** Во всех предыдущих рассмотрениях мы обходили стороной следующий важный вопрос: какое действие выберет агент в случае, когда равновесий больше одного? Этот вопрос дискутируется в теории игр с самого ее возникновения, точнее, со времени формулировки Дж. Нэшем концепции равновесия. Существует обширная литература, посвященная отбору (рафинированию, refinement) равновесий, однако ее анализ выходит за рамки данной работы (упомянем лишь специально посвященную этому вопросу монографию [159], написанную двумя лауреатами Нобелевской премии).

Мы рассмотрим, в связи с активным прогнозированием, лишь одну концепцию, так называемый *эффект фокальной точки* (термин введен в работе [254]). Эффект этот состоит в следующем: если в игре существует несколько равновесий, то игроки выберут то из них, которое выделяется среди прочих в том или ином смысле (так называемое *фокальное равновесие*).

Приведем пример, следуя [81, с. 42]. Пусть в каземате, проекция сверху которого изображена на Рис. 86, находится узник, а вне каземата – его партнер, который желает освободить узника. Каждый из них в отдельности не может пробить стенку, но если они будут пробивать стенку одновременно навстречу друг другу, то отверстие будет проделано. Толщина стенки всюду одинакова.

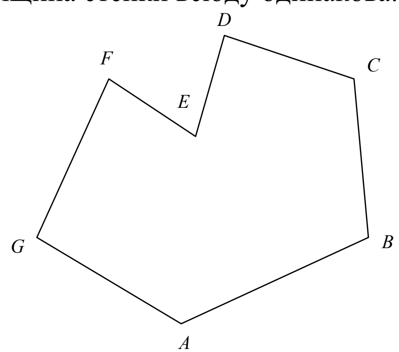


Рис. 86. Эффект фокальной точки: вершина $E$ выделяется среди прочих

Представим себе, что пробить стенку можно только в углах $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$. Пусть контакт в процессе работы и до нее между партнерами невозможен, т. е. ни один из них до конца работы достоверно не знает, какое решение принял его партнер. Как будут вести себя умные и рациональные партнеры?

Ясно, что у каждого участника игры имеется по семь стратегий – пробивать стенку в точке $A$, точке $B$, …, точке $G$. И равновесий тоже ровно семь: ($A$, $A$), ($B$, $B$), …, ($H$, $H$). Однако взгляд на Рис. 86 показывает, что фокальным будет равновесие ($E$, $E$): умные и рациональные партнеры наверняка будут пробивать стену именно в этом углу.

Вернемся к общему случаю ситуации с множеством равновесий. Если некто – например, центр – объявил о том, что исходом игры будет некое конкретное равновесие, то сам факт такого прогноза выделил это равновесие среди прочих. Таким образом, «спрогнозированное» равновесие оказывается фокальным и, скорее всего, именно оно будет реализовано.

**Активный прогноз как вид информационного воздействия.** Рассмотрим теперь случай, когда в ситуации имеется неопределенный параметр, от которого зависят целевые функции агентов (хотя бы одного из них). Если при осуществлении информационного регулирования и рефлексивного управления центр сообщает агенту некий «факт» (информацию о неопределенном параметре либо о представлениях оппонентов), то в задаче активного прогнозирования сообщается прогноз – некая величина $z \in Z$, общеизвестным образом зависящая от неопределенного параметра и действий агентов (например, суммарное действие агентов). Центр как бы сообщает агентам: «Если вы будете действовать рационально, т. е. выберете равновесные действия, то результат будет таким, как я прогнозирую». В этом смысле прогнозом, сообщаемым агенту, может быть и его (агента) собственное действие.

Далее каждый агент на основании прогноза может «восстановить» информацию о состоянии природы и использовать эту информацию (как и при информационном регулировании) при вычислении равновесных действий (в том числе и собственного действия).

Запишем сказанное более формально. Рефлексивная игра задается кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Theta, I\}$, где $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество участников игры (игроков, агентов), $X_i$ – множество допустимых действий $i$-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Theta \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, $I$ – структура информированности. Пусть, кроме этого, имеется функция $z(\cdot)$: $\Theta \times X' \to Z$, $i \in N$, отображающая вектор $(\theta, x)$ в элемент $z$ некоторого *множества прогнозов* $Z$. Элемент $z \in Z$ и есть прогноз, который центр сообщает агентам[70].

После получения прогноза $z$ агенты решают систему $n + 1$ уравнений $x_i \in BR_i(\theta, x_{-i})$, $i \in N$, $z(\theta, x) = z$, определяя значения неопределенного параметра $\theta$ и одновременно вычисляя информационное равновесие[71] $(x_1, \ldots, x_n)$. При этом формируется структура информированности единичной глубины, состоящая из единственного элемента.

Модельные примеры осуществления активного прогноза приведены в разделах 6.4 и 6.5.

## 4.24. СОЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ

В последние годы большой интерес исследователей привлекают социальные сети [39, 226]. Под *социальной сетью* на качественном уровне понимается социальная структура, состоящая из множества элементов сети или агентов (субъектов – индивидуальных или коллективных, например, индивидов, семей, групп, организаций) и определенного на нем множества отношений (совокупности связей между агентами, например, знакомства, дружбы, сотрудничества, коммуникации). Формально социальная сеть представляет собой граф $G(N, E)$, в котором $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – конечное множество вершин и $E$ – множество ребер, отражающих взаимодействие агентов.

При моделировании социальных сетей обычно исходят из предположения о том, что основная характеристика его элемента (его мнение по какому-либо вопросу, «зараженность» чем-либо в моделях распространения эпидемий и т.п.) меняется по некоторому заданному закону исходя из характеристик «соседних» элементов. В таких моделях (назовем их условно моделями первого типа) элемент сети является, по сути, *пассивным*. Многочисленные модели инфор-

[70] Здесь мы предполагаем, что центр осуществляет однородную стратегию, т. е. всем агентам сообщается один и тот же прогноз.
[71] Будем считать, что данная система имеет единственное решение.

мационного управления мнениями, репутацией и доверием пассивных элементов социальных сетей описаны в [39].

Реже встречаются модели, где элемент сети сам выбирает характеристику (например, действие или бездействие) исходя из своих возможностей и интересов. В таких моделях (назовем их условно моделями второго типа) элемент сети является *активным*, т. е. обладает своим интересами (например, формализованными в виде целевой функции) и свободой выбора.

В данном разделе рассматривается пример комплексной модели [156], в которой учитывается как пассивный, так и активный аспекты поведения элементов социальной сети. Каждый такой элемент (агент) характеризуется некоторым параметром, который может меняться под влиянием других агентов и на который может оказывать влияние управляющий орган – *центр*. В то же время, каждый агент обладает целевой функцией и выбирает свое действие из множества допустимых действий.

**Описание теоретико-игровой модели**. Пусть имеется конечное множество агентов, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, каждый из которых характеризуется параметром (типом [112]) $r_i$ (где $0 < r_i < 1$), целевой функцией $f_i$ и выбирает действие $x_i$ (где $x_i$ неотрицательное действительное число). Целевая функция $i$-го агента имеет следующий вид:

$$(1)\quad f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i(x_1 + \ldots + x_n - 1) - \frac{x_i^2}{r_i}.$$

Содержательная интерпретация следующая: агенты прикладывают усилия $x_i$ к некоторому совместному действию, которое окажется успешным (дает положительный вклад в целевые функции агентов) в случае, если сумма усилий превышает некоторый порог, который принимается равным единице. Если действие оказалось успешным, то выигрыш агента (первое слагаемое целевой функции) тем больше, чем больше его усилие. С другой стороны, само по себе усилие агента вносит в его целевую функцию отрицательный вклад (второе слагаемое целевой функции), который зависит от типа $r_i$ – чем больше тип, тем «легче» агенту прикладывать усилие (например, это может быть психологически объяснено большей лояльностью, склонностью агента к совместному действию).

Для нахождения равновесия Нэша, при котором все действия положительны (т. е. максимум целевой функции каждого агента достигается в области $x_i > 0$), запишем следующую систему уравнений:

(2) $$\frac{\partial f_i(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} = x_i - \frac{2}{r_i}x_i + (x_1 + ... + x_n - 1) = 0, \quad i \in N.$$

Удовлетворяющий системе (2) набор действий является равновесным по Нэшу, поскольку справедливо соотношение

(3) $$\frac{\partial^2 f_i(x_1,...,x_n)}{\partial x^2{}_i} = 2 - \frac{2}{r_i} < 0.$$

Для решения системы (2) выразим действие $x_i$ через сумму всех действий агентов (здесь и далее суммирование проводится от 1 до $n$):

(4) $$x_i = \frac{r_i}{2 - r_i}\left(\sum_j x_j - 1\right).$$

Далее просуммируем по всем агентам,

(5) $$\sum_{j=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2 - r_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1\right).$$

и введем следующие обозначения:

(6) $$k_i = \frac{r_i}{2 - r_i},$$

(7) $$\sigma = \sum_i k_i.$$

Используя эти обозначения, можно записать

(8) $$\sum_j x_j = \frac{\sigma}{\sigma - 1}.$$

Из последнего соотношения видно, что система уравнений имеет решение при условии

(9) $\sigma > 1$.

При этом условии для равновесных действий агентов получаем выражение

(10) $$x_i = k_i\left(\frac{\sigma}{\sigma - 1} - 1\right),$$

(11) $$x_i = \frac{k_i}{\sigma - 1}.$$

Вышеприведенные выкладки доказывают следующее утверждение.

Утверждение 4.24.1. Необходимым и достаточным условием существования ненулевого равновесия является условие $\sigma > 1$.

Отметим, что полученное равновесие является не единственным, поскольку в некоторых случаях максимум целевой функции агента достигается на границе области допустимых действий, т. е. при $x_i = 0$. Сформулируем еще два утверждения, которые вместе с утверждением 4.24.1 полностью описывают структуру равновесий игры.

Утверждение 4.24.2. Набор действий (0, 0, … , 0) является равновесием по Нэшу.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

(12) $f_i\ (0,...,x_i,...,0) = x_i(x_i - 1) - \dfrac{x_i^2}{r_i},\quad i \in N.$

Первая и вторая производные этой функции по $x_i$ в нуле отрицательны, поэтому $x_i = 0$ является точкой максимума. Утверждение 4.24.2 доказано.

Утверждение 4.24.3. Если действие хотя бы одного из агентов равно нулю и система находится в положении равновесия по Нэшу, то это равновесие (0, 0, … , 0).

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что нулю равно действие первого агента. Поскольку нуль является точкой максимума по $x_1$ (так как это равновесное действие), частная производная в нуле отрицательна:

(13) $\dfrac{\partial f_1(x_1,...,x_n)}{\partial x_1} = \left(2 - \dfrac{2}{r_1}\right)x_1 + \sum\limits_{j\neq 1} x_j - 1 < 0,$

откуда получаем соотношение

(14) $\left(2 - \dfrac{2}{r_1}\right)x_1 = 0 < 1 - \sum\limits_{j\neq 1} x_j.$

Последнее соотношение дает необходимое условие существования равновесия Нэша при нулевом действии 1-го агента:

(15) $\sum\limits_{j} x_j < 1.$

Выпишем теперь производную целевой функции $k$-го агента:

(16) $\dfrac{\partial f_k(x_1,...,x_n)}{\partial x_k} = \left(2 - \dfrac{2}{r_k}\right)x_k + \sum\limits_{j\neq k} x_j - 1$

Так как действия ограничены только снизу и функция непрерывно дифференцируема, то необходимым условием ненулевого локального максимума является равенство нулю производной, которое можно записать в следующем виде:

$$(17)\ 2\left(\frac{r_k-1}{r_k}\right)x_1 = 1-\sum_{j\neq k} x_j .$$

Последнее равенство противоречиво, поскольку левая его часть отрицательна, а правая – положительна. Утверждение 4.24.3 доказано.

**Задача информационного управления: определение желательных типов агентов**. Перейдем теперь к задаче информационного управления. Введем в рассмотрение центр, который стремится управлять типами агентов таким образом, чтобы привести их в наиболее желательное для него равновесие Нэша. В рамках данной работы будем считать, что задачей центра является нахождение множества состояний сети (наборов типов агентов), при которых его целевая функция достигает максимального значения.

Некоторые возможные варианты целевых функций центра подробно рассматриваются в монографии [39]. В данном случае выберем для нашей системы следующую целевую функцию:

$$(18)\ F = -\sum_j x_j .$$

Содержательно это означает, то действия агентов для центра нежелательны, и его задачей является минимизация их суммарных действий. Примером может быть реакция систем защиты на действия злоумышленников.

Очевидно, центру выгодны нулевые действия агентов. Поэтому он должен стремиться исключить ненулевое равновесие, т. е. сделать его невозможным. Согласно утверждению 4.23.1, ненулевое равновесие не существует при условии

$$(19)\ \sigma \le 1.$$

Переписывая последнее соотношение для типов агентов, получаем окончательно условие на невозможность ненулевого равновесия:

$$(20)\ \sum_i \frac{r_i}{2-r_i} \le 1.$$

В случае если типы агентов одинаковы, последнее соотношение приобретает после преобразования следующий вид:

(21) $r \le \frac{2}{n+1}$.

Таким образом, мы получили условие на типы агентов, при выполнении которого центр достигает своей цели. При этом условии в системе не существует ненулевого равновесия по Нэшу и, таким образом, единственным равновесием оказывается нулевое, при котором целевая функция центра принимает максимальное значение.

**Задача информационного управления: выбор оптимального воздействия на типы агентов**. В данном разделе мы рассмотрим возможности центра по осуществлению управления посредством изменения начальных мнений (типов) агента. Нетрудно видеть, что в данном случае (см. (6), (10), (17)) центр заинтересован в уменьшении мнений агентов, поэтому будем рассматривать только воздействия, уменьшающие типы. Зависимость типа агента от воздействия на него центра должна обладать следующими свойствами

- быть непрерывной;
- асимптотически стремиться к нулю при увеличении воздействия центра;
- в нуле равняться типу агента до воздействия центра;
- монотонно убывать.

Этим условиям удовлетворяет, например, следующая функция:

(22) $r_j^u = r_j^0 e^{-\frac{u_j}{\alpha_j}}$,

где $j$ – номер агента, неотрицательное действительное число $u_j$ – прилагаемое усилие центра, $r_j^0$ – начальный тип агента (до воздействия центра), $r_j^u$ – тип агента после воздействия центра, положительное действительное число $\alpha_j$ – константа, характеризующая степень влияния центра на данного агента. Ниже также будет введено ограничение сверху на $u_j$.

Находясь в одной социальной сети, агенты общаются, обмениваясь мнениями. Такой обмен мнениями приводит к тому, что тип агента изменяется в соответствии с типами агентов, которым он в данный момент доверяет. В том случае, если взаимодействие агентов продолжается достаточно долго, то их мнения стабилизируются –

сходятся к единому, результирующему типу (условия его существования подробно описаны в [39]).

Результирующий тип можно записать как сумму исходных типов агентов с положительными весами $w_j$, характеризующими влиятельность агентов (подробнее см. [39]):

(23) $r^{\infty} = w_1 r_1^u + ... + w_n r_n^u$.

Естественно предположить, что сумма всех усилий центра ограничена сверху. Обозначим такое суммарное максимальное усилие центра $U$, которое будем называть ресурсом. Обозначив через $k$ количество агентов, на которых может влиять центр (без ограничения общности можно считать, что это первые $k$ агентов), оптимизационную задачу относительно $u_j$ можно записать в следующем виде:

(24) $\sum_{i=1}^{n} w_i r_i^0 e^{-\frac{u_i}{\alpha_i}} \to \min,$

(25) $u_j \geq 0; \forall j \leq k,$

(26) $\sum_{j=1}^{k} u_j = U; u_{k+p} = 0; p = 1,...,n-k.$

Для нахождения решения применяется метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для поставленной задачи

(27) $L = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i^0 e^{-\frac{u_i}{\alpha_i}} + \lambda(\sum_{j=1}^{k} u_j - U).$

Следовательно, можно записать систему уравнений

(28) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_j} L = -\dfrac{1}{\alpha_i} w_i r_i^0 e^{-\frac{u_j}{\alpha_j}} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda} L = \sum_{j=1}^{k} u_j - U = 0. \end{cases}$$

Решив уравнения, запишем следующее выражение для

(29) $u_i = \alpha_i \ln \dfrac{\alpha_i w_i r_i^0}{\lambda}.$

Теперь можно выразить λ из второго уравнения, подставив полученное выше выражение для $u_i$,

(30) $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln \dfrac{\alpha_i w_i r_i^0}{\lambda} - U = 0,$

После преобразования, оно может быть записано как

$$(31)\ \ln\lambda = \left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\left(\sum \alpha_i \ln\alpha_i w_i r_i^0 - U\right)$$

Таким образом, выражение для $\lambda$

$$(32)\ \lambda = e^{-\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_i \ln\alpha_i w_i r_i^0 + U\right)},$$

Это позволяет выписать оптимальные управляющие воздействия, которые при существующем ограничении обеспечивают наименьший результирующий тип агентов

$$(33)\ u_i = \alpha_i\left(\ln\alpha_i w_i r_i^0 - \ln\lambda\right).$$

$$(34)\ u_i = \left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\alpha_i U + \left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\sum_{p=1}^{k}\alpha_p \ln\alpha_p w_p r_p{}^0 - \alpha_i \ln\alpha_i w_i r_i^0.$$

Решение системы дает условие на количество ресурса, при котором оптимальное управление центра может гарантировать отсутствие ненулевых равновесий Нэша:

$$(35)\ \sum_{i=1}^{k} e^{-\frac{U}{\alpha_i}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}} w_i r_i^0 e^S \le \frac{2}{n+1} - \sum_{i=k+1}^{n} w_j r_j{}^0,$$

где

$$(36)\ S = \ln\alpha_i w_i r_i^0 - \frac{1}{\alpha_i}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)^{-1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \ln\alpha_i w_i r_i^0.$$

В случае одинаковых значений α (что соответствует одинаковым возможностям центра по влиянию на каждого агента) это соотношение можно записать в более простом виде:

$$(37)\ \begin{aligned} U \ge \alpha\Bigg(&\sum_{j=1}^{k}\ln w_j r_j^0 + \left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)\ln\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right) + \\ &+\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)\ln\left(\frac{2}{n+1} - \sum_{j=k+1}^{n} w_j r_j{}^0\right)\Bigg). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили условие на суммарное количество ресурсов, при выполнении которого центр способен предотвратить активность агентов, т. е. сделать нулевое равновесие Нэша единственным. Иными словами, если центр располагает ресурсом $U$ таким, что выполняется условие (35) (с учетом (36)), то он может при помощи управляющих воздействий (34) добиться бездействия (т. е. выбора нулевых действий) агентов.

В то же время, при недостатке ресурса (т. е. при невыполнении условия (35)) существует ненулевое равновесие Нэша, в котором агенты осуществляют нежелательное для центра коллективное действие.

Итак, в настоящем разделе рассмотрена модель информационного управления в социальной сети, описывающая воздействие центра на мнения (типы) агентов с целью добиться выгодного для центра исхода взаимодействия агентов. В общем случае интерес представляет описание взаимосвязи между возможностями центра по воздействию на мнения членов социальной сети и результатами их взаимодействия. По-видимому, в общем случае эта задача не может быть решена в явном виде, поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является рассмотрение содержательных частных случаев.

## 4.25. УПРАВЛЕНИЕ ТОЛПОЙ

**Модель толпы.** Рассмотрим, следуя [13], *модель толпы* – множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *агентов*, каждый из которых выбирает одно из двух *решений* – «1» (действовать, например, принимать участие в беспорядках) или «0» (бездействовать). Агент $i \in N$ характеризуется, во-первых, своим *влиянием* на другого агента $t_{ji} \geq 0$ – тем "весом" с которым к его мнению прислушивается или его действия учитывает другой агент $j$. Будем считать, что для каждого агента $j$ выполнены следующие условия нормировки $\sum_{i \neq j} t_{ji} = 1$, $t_{ii} = 0$. Во-вторых – своим решением $x_i \in \{0; 1\}$. В-третьих – своим *порогом* $\theta_i \in [0; 1]$, определяющим, будет ли агент действовать при той или иной *обстановке* (векторе $x_{-i}$ решений всех остальных агентов). Формально, действие $x_i$ $i$-го агента определим как наилучший ответ (BR – best response) на сложившуюся обстановку:

$$(1)\ x_i = BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1,\ \text{если} \sum\limits_{j \neq i} t_{ij} x_j \geq \theta_i, \\ 0,\ \text{если} \sum\limits_{j \neq i} t_{ij} x_j < \theta_i. \end{cases}$$

Поведение, описываемое выражением (1), называется *пороговым* [12]. *Равновесием Нэша* будет вектор $x_N$ действий агентов, такой, что $x_N = BR(x_N)$ [41].

Рассмотрим по аналогии с работой [12] следующую *модель динамики коллективного поведения*: в начальный момент времени все агенты бездействуют, далее в каждый из последующих моментов времени агенты одновременно и независимо действуют в соответствии с процедурой (1). Обозначим

$$(2)\ Q_0 = \{i \in N \mid \theta_i = 0\},\ Q_k = Q_{k-1} \cup \{i \in N \mid \sum_{j \in Q_{k-1}, j \neq i} t_{ij} \geq \theta_i\},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Очевидно $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \ldots \subseteq Q_{n-1} \subseteq Q_n = N$. Обозначим через $T = \{t_{ij}\}$ матрицу влияний агентов, через $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ – вектор их порогов. Вычислим следующий показатель:

$$(3)\ q(T, \theta) = \min \{k = \overline{0, n-1} \mid Q_{k+1} = Q_k\}.$$

*Равновесие коллективного поведения* $x^*$ (РКП) определим следующим образом:

$$(4)\ x_i^*(T, \theta) = \begin{cases} 1,\ \text{если}\ i \in Q_{q(T,\theta)} \\ 0,\ \text{если}\ i \in N \setminus Q_{q(T,\theta)} \end{cases},\ i \in N.$$

В [13] доказано, что для любых матриц влияния $T$ и порогов агентов $\theta$ РКП (4) существует, единственно и является одним из равновесий Нэша для игры с наилучшим ответом (1).

Подчеркнем, что определение РКП конструктивно (см. выражения (2)-(4)) – сложность его вычисления невелика. Отметим также тот факт, что, если отсутствуют агенты с нулевыми порогами, то бездействие всех агентов является РКП. С точки зрения управления этот факт, в частности, означает, что, в первую очередь, следует обращать внимание на «*зачинщиков*» – агентов, принимающих решение «действовать» даже когда остальные бездействуют.

**Задача управления.** Агрегированным показателем состояния толпы будем считать число действующих агентов:

$$(5)\ K(T, \theta) = |Q_{q(T,\theta)}|,$$

в анонимном случае $K(m) = p(m)$.

Обозначим вектора начальных значений матриц влияния и порогов агентов $T^0$ и $\theta^0$ соответственно. Пусть заданы *множества допустимых значений* влияний и порогов агентов – соответственно $\mathrm{T}$ и $\Theta$, а также заданы *выигрыш* $H(K)$ управляющего органа – *центра* – от достигнутого состояния толпы $K$ и его *затраты* $C(T, \theta, T^0, \theta^0)$ на изменение репутаций и порогов агентов.

Критерием эффективности управления будем считать значение целевой функции центра, равной разности между выигрышем $H(\cdot)$ и затратами $C(\cdot)$. Тогда *задача управления* примет вид:

(6) $H(K(T, \theta)) - C(T, \theta, T^0, \theta^0) \to \max\limits_{T \in \mathrm{T},\, \theta \in \Theta}$.

Для анонимного случая задача управления (6) примет следующий вид:

(7) $H(p(m)) - C(m, m^0) \to \max\limits_{m \in M}$,

где $M$ – множество допустимых значений векторов порогов в анонимном случае, а $m, m^0$ – конечный и начальный вектора порогов соответственно. Решение задачи управления порогами агентов приведено в [13]. Рассмотрим задачу информационного управления.

**Информационное управление**. Проанализируем возможности *информационного управления*, в котором центр воздействует на представления агентов о параметрах друг друга, на представления о представлениях и т.д. В качестве предмета управления выберем представления о порогах агентов. Информационным управлением будет формирование у агентов структур информированности вида: $\theta_{ij}$ – представления $i$-го агента о пороге $j$-го (структура информированности второго ранга или глубины два); $\theta_{ijk}$ – представления $i$-го агента о представлениях $j$-го агента о пороге $k$-го агента (структура информированности третьего ранга или глубины три) и т.д. Обладая той или иной структурой информированности, агенты выбирают действия, являющиеся информационным равновесием (см. раздел 2.3), в котором каждый агент выбирает свои действия как наилучший ответ на те действия, которые в рамках его представлений должны выбрать оппоненты.

Воспользовавшись выражением (4), характеризующим величины порогов, приводящих к требуемому РКП, можно условно считать, что любой результат, достижимый за счет реального изменения порогов, может быть по аналогии реализован информационным управлением (изменением представлений агентов о порогах друг друга). С этой точки зрения информационное управление порогами эквивалентно просто управлению порогами [13], являясь при этом, наверное, более мягким, чем последнее.

Однако при реализации информационного управления в задачах управления поведением толпы существует одна проблема. Одним из свойств «хорошего» информационного управления является его *стабильность* (см. раздел 2.7) – свойство, заключающееся в том, что все агенты наблюдают в реальности те результаты, которых ожидали.

Предположим, что в рассматриваемой модели толпы каждый агент апостериори наблюдает число агентов, принявших решение «действовать» (отметим, что это достаточно слабое предположение по сравнению с взаимной наблюдаемостью индивидуальных действий). Тогда стабильным будет информационное управление, при котором каждый агент увидит, что реально действует ровно столько агентов, сколько он и ожидал увидеть действующими. Требование стабильности существенно при длительных взаимоотношениях управляющего центра и агентов – если (при нестабильном информационном управлении) агенты один раз усомнятся в достоверности сообщаемой центром информации, то и в дальнейшем они будут иметь все основания в ней сомневаться.

Утверждение 4.26.1. В анонимном случае не существует стабильного информационного равновесия, при котором действуют строго меньшее число агентов, чем в РКП [13].

Доказательство утверждения 4.26.1. Обозначим через $Q_\Sigma$ множество агентов, действующих в стабильном информационном равновесии. Предположим, что их число не превышает числа действующих в РКП $|Q_\Sigma| \le |Q_{p(\theta)}|$. В силу стабильности информационного равновесия для каждого агента $i \in Q_\Sigma$ должно быть выполнено $\left|Q_\Sigma\right| - 1 = \sum_{j \ne i} x_j \ge (n-1)\theta_i$. Значит $\left|Q_{p(\theta)}\right| - 1 \ge (n-1)\theta_i$, из чего следует, что $i \in Q_{p(\theta)}$. Таким образом, $Q_\Sigma \subseteq Q_{p(\theta)}$. Если существуют бездействующие агенты в $Q_{p(\theta)} \setminus Q_\Sigma$, то для них это равновесие нестабильно. Поэтому $Q_\Sigma = Q_{p(\theta)}$ для стабильного информационного равновесия. •

«Негативный» результат утверждения 4.26.1 свидетельствует о сложности осуществления долгосрочного информационного управления пороговым поведением толпы.

## 4.26. МЕТОД РЕФЛЕКСИВНЫХ РАЗБИЕНИЙ

На сегодняшний день известен ряд прикладных моделей, иллюстрирующих эффекты стратегической рефлексии в моделях группового поведения [64, 109]. Перечислим кратко основные результаты, которые свидетельствуют, что наличие рефлексирующих агентов может изменять групповое поведение существенным образом.

В модели **«Диффузная бомба»** (раздел 4.26.1) введение рефлексирующих («интеллектуальных», адаптивных, прогнозирующих поведение оппонентов) агентов позволяет существенно повысить эффективность группового поведения.

Модель **«Рефлексивная игра полковника Блотто»** (раздел 4.26.2) свидетельствует, что рефлексивная «надстройка» над классической теоретико-игровой задачей (игра полковника Блотто) расширяет множество «равновесных» исходов, но, как свидетельствуют результаты имитационного моделирования, может требовать очень высоких рангов рефлексии участников.

Модель **«Олигополия Курно»** (в качестве базовой используется классическая модель олигополии [131, 233]) – см. раздел 4.26.3 – демонстрирует, что при определенном диапазоне значений начальных действий агентов можно реализовать эффективные по Парето или равновесные по Нэшу уровни производства или увеличить суммарный объем производства за счет введения определенного числа агентов первого и второго рангов рефлексии.

Модель «**Задача о консенсусе**» (раздел 4.26.4), содержательная интерпретация которой следующая: действиям агентов соответствуют их положения на прямой (координаты в пространстве или мнения и т. д. – см. обзоры в [163]), агрегированной ситуации – среднее значение координат агентов. Целевой функцией агента является его «отклонение» от агрегированной ситуации, а критерием эффективности – «дисперсия» положений агентов (в данном примере целевая функция центра зависит не только от агрегированной ситуации игры, но и от всего вектора действий агентов). Оказывается, что в этом случае введение рефлексирующих агентов расширяет множество векторов действий, которые могут выбрать агенты, и приводит к росту значения критерия эффективности.

В модели «**Активная экспертиза**» (раздел 4.26.5) наличие рефлексирующих агентов даже первого ранга существенно расширяет диапазон возможных результатов экспертизы [142], которыми может манипулировать ее организатор, т. е. наличие рефлексирующих агентов может приводить к последствиям, негативным, условно говоря, с точки зрения группы в целом (см. также модели формирования команд в [105]). Второй ранг рефлексии позволяет реализовать равновесие Нэша.

В модели «**Транспортные потоки и эвакуация**» (раздел 4.26.6) наличие рефлексирующих агентов первого ранга позволяет достичь минимального (оптимального с «централизованной» точки зрения) времени эвакуации из здания группы агентов, принимающих решения децентрализованно можно найти описание имитационных моделей транспортных потоков и эвакуации, учитывающих рефлексию агентов.

Для модели «**Фондовый рынок**» (следует подчеркнуть, что именно фондовый рынок является объектом моделирования, для которого, наверное, наиболее часто используют «рефлексивные» рассуждения – см., например, [44, 45, 147]) показано (см. раздел 4.26.7), что изменить рыночную цену (по сравнению с нерефлексивным принятием решений) может только определенная «критическая масса» рефлексирующих агентов.

### 4.26.1. Диффузная бомба

В настоящем разделе для т.н. задачи о диффузной бомбе (задачи о групповом проникновении через систему обороны [63]) проведен имитационный сравнительный анализ пяти вариантов, различающихся «интеллектуальностью» поведения (адаптивность, способность к рефлексии, прогнозированию и т.д.) подвижных объектов (ПО). Показано, что наделение ПО возможностью учета параметров системы обороны и прогнозирования поведения других ПО повышает эффективность группового проникновения через систему обороны.

Во многих прикладных областях возникают задачи управления группой ПО, совместно выполняющих некоторое задание. Это задание может заключаться, например, в поиске подвижных или неподвижных объектов в заданной области пространства, или в проникновении в заданную область, или в поражении *целей* и т.д. Как правило, функционирование группы ПО происходит в конфликтной среде, то есть в *условиях противодействия* (обнаружения, информационного противодействия, уничтожения) – со стороны объектов поиска, системы охраны/обороны (элементы которой условно называют «*сенсорами*»), обеспечивающей защиту границ области, целей и т.д.

Введем следующую *систему классификаций* задач группового управления в условиях противодействия.

1) Целью группы ПО является: поиск, проникновение в область;

2) Цель поиска/поражения (далее – целевой объект (ЦО)): одна, несколько; подвижная, неподвижная;

3) Движение происходит: на плоскости, в трехмерном пространстве;

4) Время поражения ЦО: фиксировано, минимизируется; ограничено, произвольно;

5) Число сенсоров: один, два, несколько;

6) Сеть сенсоров: для ПО априори известна, неизвестна; сенсоры: подвижные, неподвижные;

7) ПО: один, несколько;

8) Скорость ПО: постоянная, может варьироваться;

9) Ограничения на скорости и ускорения ПО: отсутствуют, присутствуют;

10) Распределение ЦО (и/или задач, функций и т.п.) среди ПО осуществляется: централизованно, автономно (децентрализованно); программно, в реальном времени;

11) Планирование траекторий ПО (включая обеспечение избежания столкновений) осуществляется: централизованно, автономно; программно, в реальном времени;

12) Взаимодействие ПО (прогноз и координация в зависимости от вероятности обнаружения): учитывается, не учитывается;

13) Вид функционала риска обнаружения ПО (вид зависимости от скорости ПО, расстояний до сенсоров; суммирование сигналов на сенсорах и т.д. – см. ниже).

Каждая комбинация значений признаков классификаций по различным основаниям характеризует соответствующий класс задач.

Обзор задач, порождаемых приведенной выше системой классификаций, не является целью настоящей работы. Ниже рассматривается одна из возможных постановок, а именно – целью *группы*, состоящей из нескольких ПО, движущихся на плоскости, является «поиск» (поражение) неподвижного ЦО; время достижения ЦО не фиксировано; имеется несколько неподвижных сенсоров; ПО движутся с постоянной по абсолютной величине заданной скоростью (направление движения может меняться); планирование ими траекторий осуществляется децентрализовано (автономно) в реальном времени. *Информированность* ПО (та информация о параметрах системы обороны и других ПО, которой они обладают на момент планирования траекторий) детализируется ниже, как и вид функционала риска обнаружения (см. выражения (2) и (5) ниже). Критерием эффективности действий группы ПО будем считать их число $K$, достигших ЦО. Данный класс задач можно условно назвать «*задача о диффузной бомбе*».

Ключевой отличительной характеристикой рассматриваемой в настоящей работе модели является «кооперативное» децентрализованное принятие ПО (обзор методов и результатов решения аналогичных задач для случая одного ПО можно найти в [63]) решений по выбору траекторий движения в условиях, когда вероятность обнаружения/уничтожения каждого из них зависит от относительного расположения всех членов их группы.

Сначала приведем постановку "некооперативной" задачи и некоторые известные методы ее решения, а затем рассмотрим случай, когда вероятность индивидуального обнаружения и/или поражения зависит от взаимного расположения всех ПО.

**Планирование траекторий в условиях противодействия.** Рассмотрим следующую задачу. Заданы начальные положения $(x_j(0), y_j(0))$, $j = \overline{1, K_0}$, на плоскости $K_0$ подвижных объектов. Их цель – оказаться в точке с координатами $(x^*, y^*)$. Положение $j$-го ПО в момент времени $t \geq 0$ обозначим через $(x_j(t), y_j(t))$, его скорость – через $v_j(t) = \sqrt{(\dot{x}_j)^2 + (\dot{y}_j)^2}$, время первого попадания в точку $(x^*, y^*)$ – через $T_j$.

Имеются $N$ неподвижных сенсоров с координатами $(a_i, b_i)$, $i = \overline{1, N}$, имеющих возможность суммировать приходящие на них в один и тот же момент времени сигналы. Расстояние от $j$-го ПО до $i$-го сенсора обозначим через $\rho_{ij}(t) = \sqrt{(x_j(t) - a_i)^2 + (y_j(t) - b_i)^2}$.

В общем случае *риск обнаружения* $j$-го ПО системой сенсоров описывается следующим функционалом:

(1) $$R_j = \int_0^{T_j} \sum_{i=1}^{N} \frac{(v_j(t))^m}{(\rho_{ij}(t))^k} \, dt,$$

где «сигнал» на сенсоре (слагаемое в выражении (1)) зависит от скорости ПО и расстояния от последнего до сенсора. Из вида функционала (1) следует, что риск обнаружения ПО зависит от значений «сигналов» на различных сенсорах. Величина показателя степени $k$ является характеристикой физического поля, в котором осуществляется обнаружение, а величина показателя степени $m$ характеризует зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта (например, сигналов первичного гидроакустического поля).

**«Некооперативная» модель.** Пусть все ПО движутся с постоянной по абсолютной величине скоростью $v_0$. Зная расположение сенсоров и их условные неотрицательные чувствительности $\{c_i\}$, $i = \overline{1, N}$, мы можем по аналогии с выражением (1) для каждой точки $(x, y)$ плоскости определить риск (вероятность обнаружения)

(2) $$r(x, y) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\left(\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}\right)^k}; 1 \right\}$$

обнаружения отдельного ПО, находящегося в этой точке.

Пусть время дискретно. Шаг времени обозначим через $\tau$, через $p$ обозначим вероятность уничтожения обнаруженного ПО (для простоты будем считать, что эта вероятность не зависит от координат точки обнаружения, времени и скорости ПО – учет в будущих исследованиях этих зависимостей представляется перспективным), через $\mathbf{e}(x, y) = (x^* - x, y^* - y) / \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$ – единичный вектор направления на ЦО в точке $(x, y)$, через $\rho((x, y); (q, w))$ –

евклидово расстояние между точками $(x, y)$ и $(q, w)$, через $s_\Delta(x, y)$ – круг радиуса $\Delta \geq 0$ с центром в точке $(x, y)$.

Рассмотрим несколько стратегий поведения ПО.

Вариант I. Первый (самый простой) вариант, когда каждый ПО движется по прямой, соединяющей его начальное положение с ЦО. Соответствующий ПО условно назовем *неинтеллектуальным*.

В рамках варианта I каждый ПО в каждый момент времени должен знать только свое текущее положение и положение ЦО.

Более «интеллектуальные» ПО должны учитывать текущие и/или будущие вероятности их обнаружения. Для описания их поведения определим множество таких точек, что: 1) в них ПО может оказаться, начав двигаться из точки $(x, y)$ со скоростью $v_0$, через время $\tau$; 2) вероятность обнаружения ПО не превышает *пороговой величины* $\delta$:

(3) $S^{\delta}_{v_0\tau}(x, y) = \{(q, w) \mid \rho((x, y); (q, w)) = v_0\tau;\ r(q, w) \leq \delta\}$.

Обозначим $\mathrm{Proj}_{S^{\delta}_{v_0\tau}(x,y)}(x^*, y^*)$ – проекцию положения ЦО на множество $S^{\delta}_{v_0\tau}(x, y)$ (т. е. ближайшая в смысле евклидова расстояния до ЦО точка этого множества; если такая проекция не единственна, выберем равновероятно любую из них).

Вариант II. Введем следующие правила планирования ПО своих траекторий (*алгоритм некооперативного поведения*).

Шаг 1. В каждый период времени ПО, находящийся в точке $(x, y)$, с вероятностью $p\, r(x, y)$ уничтожается системой обороны, а с вероятностью $1 - p\, r(x, y)$ продолжает движение.

Шаг 2. Продолжив движение, ПО к началу следующего периода времени окажется в точке $(u, v)$, где

(4) $(u, v) \in \begin{cases} \mathrm{Proj}_{S^{\delta}_{v_0\tau}(x,y)}(x^*, y^*), \text{ если } (x, y) \notin \mathrm{Proj}_{S^{\delta}_{v_0\tau}(u,v)}(x^*, y^*) \\ (x, y) + \min\{v_0\tau; \rho((x, y); (x^*, y^*))\}\mathbf{e}(x, y), \text{ иначе} \end{cases}$.

Первый случай в выражении (4) соответствует неудалению от ЦО при условии, что риск обнаружения не превысит пороговый. Второй случай – «прорыв» по прямой к ЦО (в случае, если не удается обеспечить выполнение условия непревышения вероятностью обнаружения порогового значения, то есть когда следование этому условию приводит к удалению от ЦО).

В рамках алгоритма некооперативного поведения, ПО, находящийся в некоторой точке, должен иметь оценки риска обнаружения только для $v_0\tau$-окрестности этой точки. То есть поведение ПО локально-оптимально, и требует только локальной информации. Отметим, что при активном режиме обнаружения ($k = 4$) эта локальная информация может вычисляться посредством экстраполяции текущих измерений сигналов сенсоров. При пассивном режиме достаточно потребовать знания всеми ПО координат и чувствительностей сенсоров (что дает им возможность рассчитать риск (2) для произвольной точки плоскости).

Некооперативное поведение группы ПО будет описываться следующим образом: для каждого момента времени для каждого ПО выполнять последовательно Шаг 1 и Шаг 2 до тех пор, пока либо не будут уничтожены все ПО, либо все уцелевшие ПО не достигнут ЦО.

**«Кооперативная» модель.** Взаимодействие ПО будем учитывать следующим образом: предположим, что вероятность обнаружения данного ПО зависит не только от текущих расстояний от него до сенсоров, но и от того, насколько близко к нему расположены другие ПО (пример – рост эффективной поверхности рассеяния). То есть, условно можно считать, что ПО являются "сенсорами" друг для друга, и по мере их взаимного сближения растет вероятность обнаружения.

Обозначим через

$$(5)\ R_j(x_j, y_j) = \min \left\{ r(x_j, y_j) + \sum_{l \neq j} \frac{\alpha}{1 + \left(\sqrt{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2}\right)^k} ; 1 \right\}$$

риск обнаружения $j$-го ПО, находящегося в точке $(x_j, y_j)$, с учетом его взаимодействия с другими ПО, где $\alpha$ – неотрицательная константа.

Вариант III. Агенты прорываются к ЦО по прямой, не учитывая и не прогнозируя вероятности их обнаружения. Данный вариант соответствует варианту I с точностью до замены риска (2) на риск (5). Информированность агентов при этом такая же, что и в варианте I.

Вариант IV. *Алгоритм "кооперативного" поведения* будет описываться Шагами 1' и 2', которые с точностью до замены риска (2) на риск (5) совпадают соответственно с Шагами 1 и 2, причем в выражении (5) суммирование ведется по тем ПО, которые к текущему моменту не были уничтожены. Вариант IV соответствует варианту II с точностью до замены риска (2) на риск (5).

В данном случае для планирования своей траектории каждый ПО, помимо информации, необходимой во второй варианте, должен знать текущие координаты всех ПО[72].

**Рефлексивная модель.** Будем считать, что в группе присутствуют ПО двух типов. Первый тип – назовем их *нерефлексирующими* – действует в соответствии с алгоритмом "кооперативного" поведения (вариант IV). Второй тип – назовем их *рефлексирующими* – действует более сложным образом: каждый из них, считая всех остальных нерефлексирующими (см. раздел 3.4), прогнозирует их поведение. Другими словами, рефлексирующий ПО точно рассчитывает, где окажутся в следующий момент времени другие ПО (действующие в соответствии с вариантом IV) и выбирает направление своего движения с учетом прогнозируемых положений других ПО.

Определим Шаги 1’’ и 2’’, которые с точностью до замены риска (5) на прогнозируемый риск совпадают соответственно с Шагами 1’ и 2’.

<u>Вариант V.</u> *Алгоритм рефлексивного поведения* группы ПО: для каждого момента времени для каждого нерефлексирующего ПО выполнять последовательно Шаги 1' и 2', а для каждого рефлексирующего ПО выполнять последовательно Шаги 1’’ и 2’’, пока все уцелевшие ПО не достигнут ЦО.

Отметим, что в рамках алгоритма рефлексивного поведения (вариант V) информированность каждого ПО должна быть такой же, что и в случае кооперативного поведения (вариант IV).

**Адаптивная модель.** Специфика интеллектуальных агентов заключается, в частности, в том, что каждый агент в качестве информации для корректировки своих представлений о неопределенных параметрах может использовать не только результаты наблюдения за внешней средой, но и результаты наблюдения за поведением других агентов, пытаясь «объяснить», почему они выбрали именно наблюдаемые действия. Применительно к задаче о диффузной бомбе это означает, например, что, даже не имея возможности непосредствен-

[72] Возможно обобщение «кооперативной» модели на случай, когда каждый ПО имеет свой фиксированный «радиус обзора» и при планировании своей траектории имеет информацию и учитывает (в выражении типа (5)) только те другие ПО, которые находятся от него на расстоянии, не превышающем этот радиус.

но измерять (или не имея априорной информации) о значениях вероятности обнаружения в той или иной точке пространства, адаптивный ПО, наблюдая изменения траекторий других ПО, может восстанавливать информацию о пороговой линии.

Пусть имеются ПО двух типов. Предположим, что все ПО в каждый момент времени знают свое текущее положение и положение цели. Дополнительно ПО первого типа в каждый момент времени знают оценки риска обнаружения для $v_0\tau$-окрестности своего текущего положения, а ПО второго типа в каждый момент времени знают (или могут измерить) текущие координаты всех ПО первого типа.

ПО первого типа действуют в соответствии с вариантом II, а ПО второго типа на каждом шаге сначала на основании наблюдения за движением других ПО вычисляют оценку расположения пороговой линии. Затем они действуют в соответствии с вариантом II, подставляя в аналог выражения (3) свою текущую оценку пороговой линии. Другими словами, ПО второго типа веду себя адаптивно (в смысле [105]).

Условно можно назвать ПО первого типа «разведчиками» – они лучше информированы (и, наверное, дороже) и проводят разведку боем, добывая информацию о системе обороны (точнее – о пороговой линии) для других ПО (второго типа).

«Предельными» являются два случая – когда все ПО первого типа (тогда имеем вариант II) или когда все ПО второго типа (тогда имеем вариант I). Итак, имеем шесть вариантов:

| | **Номер варианта** | **Учет вероятности обнаружения** | **Учет положений других ПО** | **Прогноз поведения других ПО** | **Информированность** |
|---|---|---|---|---|---|
| Некооперативная модель | **I** | НЕТ | НЕТ | НЕТ | В каждый момент времени каждый ПО должен знать только свое текущее положение и положение ЦО. |
| | **II** | ДА | НЕТ | НЕТ | Дополнительно к варианту I в каждый момент времени каждый ПО должен знать оценки риска обнаружения для $v_0\tau$-окрестности своего текущего положения |

| | Номер варианта | Учет вероятности обнаружения | Учет положений других ПО | Прогноз поведения других ПО | Информированность |
|---|---|---|---|---|---|
| Кооперативная модель | **III** | НЕТ | ДА | НЕТ | Как в варианте I. |
| | **IV** | ДА | ДА | НЕТ | Дополнительно к варианту II в каждый момент времени каждый ПО должен знать текущие координаты всех остальных ПО. |
| Рефлексивная | **V** | ДА | ДА | ДА | Как в варианте IV. |
| Адаптивная модель | **VI** ПО первого типа | ДА | НЕТ | НЕТ | Как в варианте II. |
| | ПО второго типа | НЕТ | ДА | ДА | Дополнительно к варианту I в каждый момент времени каждый ПО второго типа должен знать текущие координаты всех ПО первого типа. |

Возникает вопрос, как соотносятся между собой эффективности использования ПО тех или иных стратегий. Нахождение ответа на этот вопрос в общем аналитическом виде представляется вряд ли реализуемым, поэтому был выбран путь создания имитационной модели.

**Результаты имитационного моделирования.** Рассмотрим следующую имитационную модель, реализованную в среде AnyLogic к.т.н. В.О. Корепановым. Выберем $K_0 = 100$, $N = 7$, $c_i = 0{,}25$, $p = 0.5$,

$\delta = 0.03$. Начальные положения ПО, ЦО, сенсоры и линии уровня суммарного «сигнала» изображены на Рис. 87.

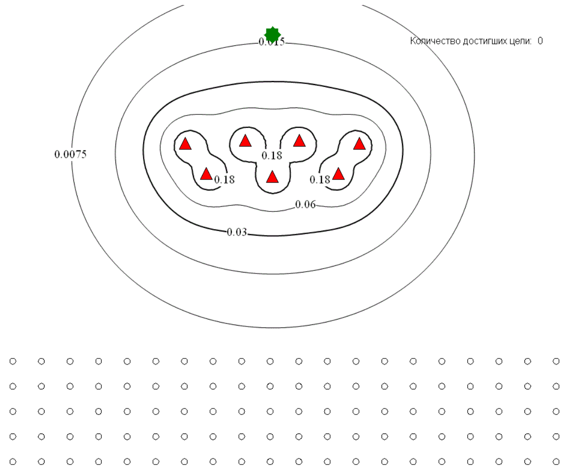


Рис. 87. Начальное расположение ПО, ЦО (звездочка),
сенсоры (треугольники) и линии уровня суммарного «сигнала» (2)

Пример результатов группового проникновения через систему обороны для варианта II приведен на Рис. 88, где черными кружками обозначены уничтоженные ПО.

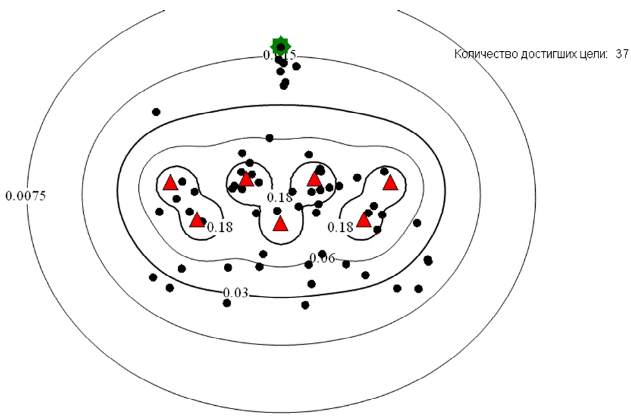


Рис. 88. Пример результатов группового проникновения
через систему обороны для варианта II

На Рис. 89 для вариантов I и II приведены зависимости эффективности $K$ (здесь и ниже каждая точка на графике эффективности является результатом усреднения по 200 испытаниям) действий группы ПО от вероятности $p$ уничтожения обнаруженного ПО. Естественно, с ростом вероятности уничтожения эффективность уменьшается.

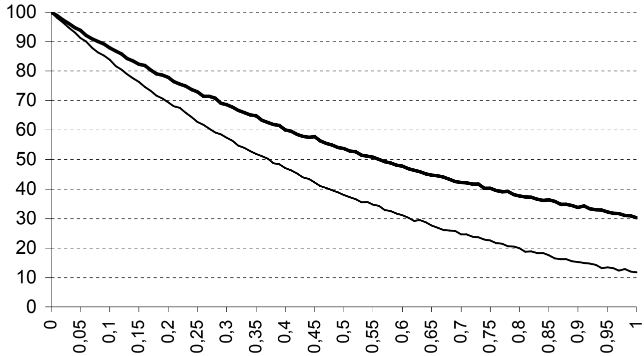


Рис. 89. Зависимость эффективности $K$ действий группы ПО от вероятности р уничтожения обнаруженного ПО для вариантов I (тонкая линия) и II (жирная линия)

Видно, что переход от варианта I к варианту II, т. е. рост интеллектуализации ПО за счет их анализа вероятности уничтожения в $v_0$ $\tau$-окрестности текущего положения, существенно повышает эффективность преодоления системы обороны (например, при $p = 0.5$ эффективность увеличивается с 38 до 53 – примерно на 40 %)

Отметим, что варианты I-II и III-V не сравнимы между собой, так как в последних учитывается взаимодействие ПО и вероятности их обнаружения выше. Поэтому приведем Рис. 90, содержащий для вариантов III-V зависимости эффективности $K$ действий группы ПО от вероятности $p$ (меняющейся в диапазоне от 0.4 до 0.6) уничтожения обнаруженного ПО при $\alpha = 0.03$ (в варианте V считается, что рефлексирующими является половина ПО).

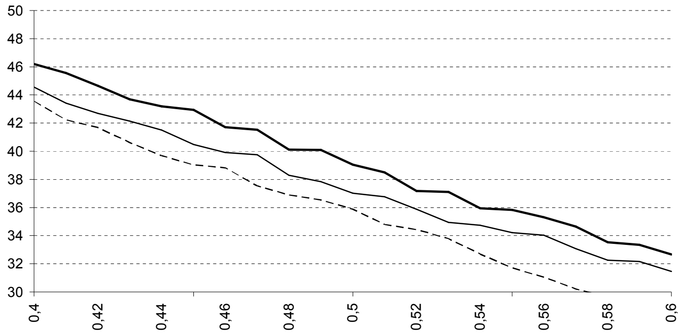


Рис. 90. Зависимость эффективности *K* действий группы ПО от вероятности p уничтожения обнаруженного ПО для вариантов III (пунктирная линия), IV (тонкая линия) и V (жирная линия)

Видно, что, опять же, рост интеллектуализации ПО повышает эффективность преодоления системы обороны (вариант V является самым эффективным, далее идет вариант IV, затем вариант III).

На Рис. 91 приведена зависимость эффективности *K* действий группы ПО от значений параметра $\alpha$, отражающего взаимовлияние ПО.


Рис. 91. Зависимость эффективности *K* действий группы ПО от значений параметра $\alpha$

Обозначим через $K^* \in \{0, 1, \dots, K_0\}$ число рефлексирующих агентов. График зависимости $K(K^*)$ при $\alpha = 0.25$ приведен на Рис. 92.

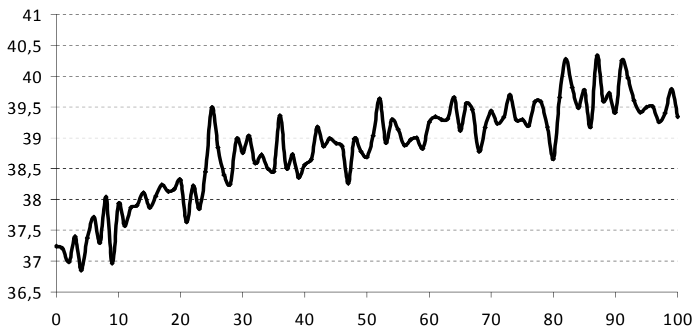


Рис. 92. Зависимость эффективности $K$ действий группы ПО от числа рефлексирующих агентов $K^*$

Видно, что с ростом доли рефлексирующих агентов эффективность действий группы ПО увеличивается. Более того, «*выживаемость*» рефлексирующих ПО выше – среднее число рефлексирующих ПО, достигших ЦО, больше, чем нерефлексирующих (причем в рассматриваемой имитационной модели, например, при 200 испытаниях и равном числе рефлексирующих и нерефлексирующих агентов эта оценка статистически значима).

Приведем также результаты имитационного моделирования для адаптивной модели. Пусть вероятность уничтожения обнаруженного ПО равна 0,5. На Рис. 93 представлена зависимость числа ПО, достигших цели, от числа ПО второго типа (горизонтальные линии соответствуют на Рис. 89 эффективностям, равным соответственно 53,74 и 37,97) для двух случаев – когда все ПО движутся одновременно (нижняя кривая) и когда сначала оборону преодолевают ПО первого типа, а потом уже начинают двигаться ПО второго типа (верхняя кривая).

Видно, что 80 % ПО второго типа обеспечивают в рассматриваемом примере почти такую же эффективность, что и использование только дорогостоящих ПО первого типа.

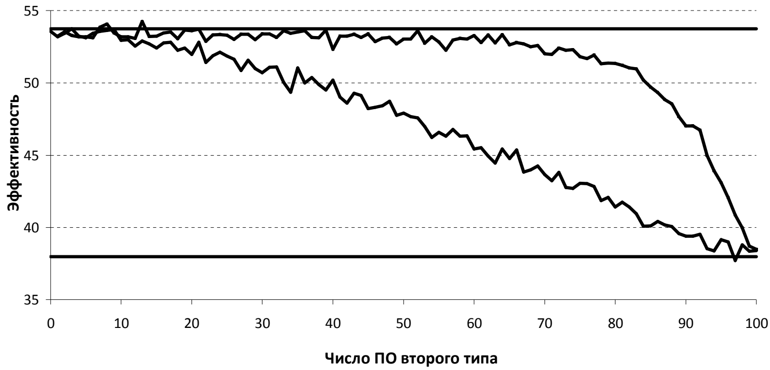


Рис. 93. Зависимость эффективности $K$ действий группы ПО от числа ПО второго типа

Итак, в настоящем разделе для задачи о диффузной бомбе проведен имитационный сравнительный анализ шести вариантов, различающихся «интеллектуальностью» поведения ПО. Показано, что наделение ПО возможностью учета параметров системы обороны и прогнозирования и/или анализа поведения других ПО повышает эффективность решения задачи о групповом проникновении через систему обороны. С другой стороны, понятно, что «платой за интеллектуальность» является рост массо-габаритных характеристик, энергетических, вычислительных и других ресурсов, которыми должны обладать ПО. Поэтому при решении каждой конкретной задачи придется оптимизировать баланс между этими критериями и собственно эффективностью проникновения через систему обороны.

Многообещающим представляется рассмотрение модификаций предложенных моделей за счет варьирования условий обнаружения/поражения и процедур планирования ПО своих траекторий. Например, возможен следующий вариант. Обозначим через $R_0(x, y) = \max\limits_{(q,w)\in s_\Delta(x,y)} r(q, w)$ – максимальный из рисков обнаружения отдельного ПО, находящихся на расстоянии, не большем $\Delta$, от точки $(x, y)$; через $N(x, y) = \#\ \{j \mid (x_j, y_j) \in s_\Delta(x, y)\}$ – число ПО, находящихся в $\Delta$-окрестности точки $(x, y)$. «Кооперативность» учтем следующим образом: будем считать, что, если $N(q, w) \geq K_{max}$ (имеется «критическая масса»), то все ПО, находящиеся в области $s_\Delta(q, w)$, будут обнаружены с вероятностью $R_0(q, w)$ и в случае обнаружения гарантированно уничтожены. Назовем эту модель *моделью критической массы*. Введем следующее правило планирования подвижными объектами своих траекторий. В каждый период времени для ПО, находящегося в точке $(x, y)$ проверяется условие $N(u, v) \geq K_{max}$, где точка $(u, v)$ определяется выражением (4). Если это условие не выполнено, то выполняется Шаг 1. Если условие $N(u, v) \geq K_{max}$ выполнено, то все ПО, находящиеся в области $s_\Delta(x, y)$, уничтожаются с вероятностью $R_0(x, y)$, а с вероятностью $1 - R_0(x, y)$ продолжают движение. В данной модели рефлексирующий ПО может прогнозировать поведение других ПО и в случае, если он вычисляет, что в результате своих действий в соответствии с Шагом 2 он попадет в область, где окажется критическая масса ПО, то он стремится избежать попадания в эту область.

Перспективным также представляется:

1) рассмотрение синхронизации и/или минимизации времени поражения ЦО отдельными ПО;

2) введение зависимости вероятности обнаружения ПО от их числа и скорости;

3) введение зависимости вероятности уничтожения ПО от их числа, координат и/или скорости;

4) использование, быть может в качестве эвристик, известных результатов о свойствах оптимальных траекторий одиночных ПО;

5) обобщение «кооперативной» модели на случай, когда каждый ПО имеет свой фиксированный «радиус обзора» и при планировании своей траектории имеет информацию и учитывает (в выражении типа (5)) только те другие ПО, которые находятся от него на расстоянии, не превышающем этот радиус;

6) исследование более сложных разбиений агентов на ранги рефлексии и учет их взаимной информированности;

7) получение аналитических решений для различных частных случаев задачи о диффузной бомбе.

### 4.26.2. Игра полковника Блотто

*Игрой полковника Блотто* (ИПБ) называется игра двух лиц, в которой игроки однократно, одновременно и независимо (не зная выбора оппонента) распределяют свои ограниченные *ресурсы* между конечным числом *объектов* (полей сражений или объектов защиты/нападения, одновременных конкурсов/аукционов, групп избирателей и т.п. – см. обзор в [65]). Данная модель является каноническим (и одним из первых) примером приложения теории игр к военному делу [103].

Обозначим через $N = \{1, \ldots, n\}$ множество объектов, через $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – действие первого игрока, через $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – действие второго игрока, где $x_i \geq 0$ ($y_i \geq 0$) – количество ресурса, выделенного первым (вторым) игроком на $i$-ый объект, $i = \overline{1,n}$. Ограниченность ресурсов отражена условиями

(1) $\sum_{i \in N} x_i \leq R_x, \sum_{i \in N} y_i \leq R_y.$

**Аукционная модель.** В рамках *аукционной модели* победу на объекте одерживает игрок, выделивший на него большее количество ресурсов (в случае равенства ресурсов каждый из игроков одерживает победу с вероятностью 1/2). Ценность $i$-го объекта для первого (второго) игрока обозначим через $X_i$ ($Y_i$). Тогда выигрыши игроков в аукционной модели будут определяться следующим образом:

(2) $$f_x(x, y) = \sum_{i \in N} X_i I(x_i > y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} X_i I(x_i = y_i),$$

$$f_y(x, y) = \sum_{i \in N} Y_i I(y_i > x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} Y_i I(x_i = y_i),$$

где $I(\cdot)$ – функция-индикатор. Более общим является случай, когда ограничения типа (1) отсутствуют, но из выигрыша (2) вычитаются затраты, монотонные по суммарному количеству использованного игроком ресурса.

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ являются тривиальными. Действительно, при $n = 1$ побеждает игрок, обладающий бóльшим количеством ресурса (в случае равенства ресурсов победа каждого равновероятна). При $n = 2$ оптимальной стратегией каждого игрока является приоритетное выделение ресурса на наиболее ценный для него объект.

Простейшим является *симметричный* ($X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x = R_y$) вариант *дискретной* (ресурсы игроков дискретны) игры полковника Блотто, являющейся матричной игрой (с нулевой суммой).

**Вероятностная модель**. В *вероятностной модели* ИПБ вероятность $p_x(x_i, y_i)$ победы первого игрока на $i$-ом объекте не зависит от других объектов и «пропорциональна» количеству выделенного им на этот объект ресурса и «обратно пропорциональна» взвешенной сумме ресурсов, выделенных на этот объект обоими игроками, например:

(3) $p_x(x_i, y_i) = \dfrac{\alpha_i (x_i)^{r_i}}{\alpha_i (x_i)^{r_i} + (y_i)^{r_i}}$, $p_y(x_i, y_i) = 1 - p_x(x_i, y_i)$,

где $r_i \in (0; 1]$, $\alpha_i > 0$, $p_x(x_i = 0, y_i = 0) = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_i + 1}$. Содержательно, коэффициенты $\{\alpha_i\}$ позволяют соизмерять эффективности использования игроками ресурсов на одном и том же объекте.

Выигрыши игроков в вероятностной модели определяются как математическое ожидание суммарного выигрыша, то есть следующим образом:

(4) $F_x(x, y) = \sum_{i \in N} X_i p_x(x_i, y_i)$, $F_y(x, y) = \sum_{i \in N} Y_i p_y(x_i, y_i)$.

Равновесием Нэша в чистых стратегиях $(x^*, y^*)$ является пара векторов, удовлетворяющих условиям (1), таких, что $\forall\ (x, y)$, удовлетворяющих условиям (1), выполнено

(5) $F_x(x^*, y^*) \geq F_x(x, y^*)$, $F_y(x^*, y^*) \geq F_y(x^*, y)$.

Вероятностная модель в определенном смысле «проще», чем аукционная – единственным равновесием Нэша для случая $X_i = Y_i = \mathrm{Const}$, $r_i = 1$, $\alpha_i = 1$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ является использование игроками чистых стратегий, заключающихся в равном распределении имеющихся у них ресурсов между объектами (см. обзор и ссылки в [65, 103]).

При $X_i = Y_i = V_i$, $\alpha_i = r_i = 1$, $i \in N$ выражения для равновесных действий и выигрышей примут вид (см. обзор и ссылки в [65, 103]):

(6) $x_i^* = \dfrac{V_i}{V} R_x$, $y_i^* = \dfrac{V_i}{V} R_y$, $i \in N$,

(7) $F_x(x^*, y^*) = \dfrac{R_x}{R_x + R_y}\ V,\ F_y(x^*, y^*) = \dfrac{R_y}{R_x + R_y}\ V,$

где $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, то есть игроки делят свой ресурс пропорционально ценности объектов и получают выигрыш, пропорциональный их суммарным ресурсам. Отметим, что при этом равновесные действия каждого из игроков зависят только от «их собственных» параметров – так, например, действия первого игрока $x^*$ не зависят от суммарного количества ресурса $R_y$ у второго игрока и т.п.

**Стратегическая рефлексия в ИПБ**. Рассмотрим аспекты стратегической рефлексии для ИПБ. Пусть $X_i = Y_i = V_i$, $\alpha_i = r_i = 1$, $i \in N$, тогда равновесные действия игроков и их выигрыши в рамках вероятностной модели определяются выражениями (6) и (7) соответственно. Использование концепции равновесия Нэша, как прогнозируемого устойчивого исхода некооперативной игры, подразумевает, что параметры игры являются *общим знанием*. ИПБ в рамках вероятностной модели описывается, во-первых, кортежем $(N, R_x, R_y, \{V_i\})$, включающим множество объектов, ограничения на ресурсы игроков и ценности объектов для игроков. Во-вторых, необходимо задать «правила игры» – вероятности выигрыша (3) и целевые функции (4), стремление к максимизации которых отражает рациональность поведения игроков. Условно можно считать, что информационная рефлексия соответствует отсутствию общего знания относительно количеств ресурсов игроков и ценностей для них объектов, а стратегическая рефлексия – относительно принципов принятия игроками решений.

Из выражения (7) следует, что, в частности, если $R_y > R_x$, то $\forall\ i \in N$ выполнено $x_i^* < y_i^*$, то есть по критерию (2) первый игрок проигрывает второму игроку на всех объектах. Рациональный игрок при этом может задуматься, правильно ли он действует, и, быть может, пересмотреть свои принципы принятия решений.

Обозначим через $BR_x(y) = (u_1\, y_1 + \varepsilon, \ldots, u_n\, y_n + \varepsilon)$ – вектор наилучшего в смысле критерия (2) ответа первого игрока на выбор вторым игроком вектора действий $y$, где $n$-мерный вектор $u = (u_1, \ldots, u_n)$ является решением следующей задачи о ранце:

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} u_i V_i \to \max\limits_{u_i \in \{0;1\}}, \\ \sum_{i=1}^{n} u_i y_i \le R_x, \end{cases}$$

а $\varepsilon = \frac{1}{n}(R_x - \sum_{i=1}^{n} u_i y_i)$, то есть будем считать, что игрок стремится победить на наиболее ценном для него (в рамках ресурсных ограничений) наборе объектов, а остаток ресурса распределяет поровну между всеми объектами.

Аналогично введем $BR_y(x) = (v_1\, x_1 + \delta, \ldots, v_n\, x_n + \delta)$ – вектор наилучшего в смысле критерия (2) ответа второго игрока на выбор первым игроком вектора действий $x$, где $n$-мерный вектор $v = (v_1,\ldots, v_n)$ является решением следующей задачи о ранце:

$$(9)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} v_i V_i \to \max\limits_{v_i \in \{0;1\}}, \\ \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \le R_y, \end{cases}$$

а $\delta = \frac{1}{n}(R_y - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i)$.

Равновесие Нэша в аукционной модели ИПБ может строиться и исследоваться с помощью анализа свойств отображений наилучших ответов $BR_x(\cdot)$ и $BR_y(\cdot)$. Однако нас будут интересовать эффекты стратегической рефлексии. Для их отражения предположим, что нерефлексирующие игроки выбирают равновесие Нэша, соответствующее вероятностной модели (6) ИПБ. Игрок первого ранга рефлексии выбирает свои действия как наилучший в смысле (8) или (9) ответ на действия нерефлексирующего оппонента, считая, что последний действует в рамках вероятностной модели.

В соответствии с принятой в теории рефлексивных игр традицией будем считать, что игрок, имеющий некоторый ранг стратегической рефлексии, считает оппонента имеющим ранг на единицу меньше его собственного (см. раздел 3.4). То есть, имеет место следующая «цепочка»:

(10) $x^1 = BR_x(y^*)$, $y^1 = BR_y(x^*)$,

$$x^2 = BR_x(y^1) = BR_x(BR_y(x^*)),\ y^2 = BR_y(x^1) = BR_y(BR_x(y^*)),\ \ldots,$$

$$x^k = \underbrace{BR_x(BR_y(\ldots}_{k}(\cdot)\ldots)),\ y^m = \underbrace{BR_y(BR_x(\ldots}_{m}(\cdot)\ldots)),$$

где $x^k$ ($y^m$) – действие первого (второго) игрока, обладающего $k$-ым ($m$-ым) рангом стратегической рефлексии, $k$, $m = 1, 2, \ldots$ .

Исследуем *игру рангов* (см. раздел 3.2), в которой первый и второй игроки выбирают не количества ресурса, как в исходной ИПБ, а свои ранги, которые в соответствии с (10) детерминируют распределение ресурсов и, следовательно, выигрыши игроков (2). В игре рангов первый игрок выбирает свой ранг $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, второй игрок – свой ранг $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Каждой паре рангов ставится в соответствие пара чисел $(f_x(k, m), f_y(k, m))$ – выигрышей соответственно первого и второго игрока. То есть рассматриваемая игра рангов является (в общем случае бесконечной) биматричной игрой (в рассматриваемой модели – игрой с постоянной суммой). Отметим, что исследованные на сегодняшний день игры рангов (см. ссылки в разделе 3.2) были конечными, так как «надстраивались» над конечными матричными или биматричными играми.

Для определенности будем считать, что выполнено $R_y > R_x$. С учетом выражения (6) при $x = x^*$, $y = y^*$ задачи (8) и (9) примут соответственно вид:

$$(11)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} u_i V_i \to \max\limits_{u_i \in \{0;1\}}, \\ \sum_{i=1}^{n} u_i V_i \le V \dfrac{R_x}{R_y}, \end{cases}$$

и

$$(12)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} v_i V_i \to \max\limits_{v_i \in \{0;1\}}, \\ \sum_{i=1}^{n} v_i V_i \le V \dfrac{R_y}{R_x}. \end{cases}$$

Как отмечалось выше, второй игрок в равновесии Нэша (6) имеет преимущество на всех объектах. Из (12) следует, что наилучшим ответом второго игрока на фиксированную стратегию первого игрока будет выделять на каждый объект столько же ресурса, сколько выделил первый, а остаток ресурса распределять, например, поровну между всеми объектами (ограничению в задаче (12) удовлетворяет любой, даже состоящий из всех единиц, вектор). При этом второй игрок будет иметь преимущество на всех объектах. Другими словами,

(13) $\forall\ l = 0, 1, 2, \ldots\ f_x(l, l + 1) = 0, f_y(l, l + 1) = V$.

Исследуем теперь поведение первого игрока. Начнем с примера.

Пример 4.26.2.1. Пусть $n = 3$, $V_1 = 1$, $V_2 = 2$, $V_3 = 3$, $R_x = 3$, $R_y = 4$. Равновесием Нэша (отметим, что равновесием в игре с критериями (4)) является $x^* = (1/2, 1, 3/2)$, $y^* = (2/3, 4/3, 2)$. Выигрыши (2) игроков в равновесии $f_x(x^*, y^*) = 0$, $f_x(x^*, y^*) = V = 6$.

Вычисляя наилучшие ответы игроков в соответствии с выражениями (11)-(12), получим следующую биматрицу выигрышей для игры рангов (ограничимся в настоящем примере третьим рангом).

| | | Ранг рефлексии второго игрока | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **0** | **1** | **2** | **3** |
| Ранг рефлексии первого игрока | **0** | (0; 6) | (0; 6) | (2; 4) | (2; 4) |
| | **1** | (4; 2) | (3; 3) | (0; 6) | (0; 6) |
| | **2** | (1; 5) | (4; 2) | (0; 6) | (0; 6) |
| | **3** | (3; 3) | (3; 3) | (5; 1) | (5; 1) |

В данной игре с постоянной суммой гарантирующая стратегия первого игрока – выбирать третий ранг рефлексии, второго игрока – нулевой или первый ранг.

Интересно, что в рассматриваемом примере первый игрок, обладающий меньшим количеством ресурса, в игре рангов обеспечивает себе половину суммарного выигрыша (3 из 6) по сравнению с нулевым значением выигрыша в равновесии Нэша. Более того, комбинации рангов (3, 2) или (3, 3) дают первому игроку еще больший выигрыш – 5 из 6. Этот эффект достигается за счет того, что мы «искусственно» ограничили ранги рефлексии игроков. Действительно, если ограничиться не третьим, а четвертым рангом, то максимальный гарантированный выигрыш первого игрока будет достигаться на четвертом ранге, а третий станет «доминируем» четвертым рангом второго игрока, и т.д. В общем случае, в соответствии с (26), для любого ранга рефлексии первого игрока выбор вторым игроком на единицу большего ранга приводит к тому, что выигрыш первого становится равным нулю.

Условный качественный вывод из рассмотренного примера – в условиях нехватки ресурсов (по сравнению с оппонентом), можно увеличить свой выигрыш за счет увеличения ранга своей рефлексии при условии ограниченности рангов рефлексии оппонента. Другими словами, первому игроку следует всегда выбирать максимальный ранг (если последний больше ранга оппонента). •

Исследуем вопрос о максимальном целесообразном ранге рефлексии игроков – таком ранге, выше которого использовать игрокам не имеет смысла, даже при условии гипотетической неограниченности рангов рефлексии.

Был проведён вычислительный эксперимент с целью поиска повторяемости элементов в матрицах выигрышей игроков, это означало бы ограниченность максимального целесообразного ранга рефлексии, т.к. повышение ранга не добавляло бы новых возможных комбинаций выигрышей в игре рангов.

В эксперименте случайно генерировались ИПБ, в количестве 100 штук, со следующими параметрами: $n = 10$, $\{V_i\}$ – случайные вещественные числа от 2 до 100, $R_x = \Sigma V_i / 3$, $R_y = 2\ R_x$.

Для этих ИПБ рассматривались биматричные игры рангов размерности $2000 \times 2000$ и вычислялись соответствующие *максимальные целесообразные ранги рефлексии* (МЦР). Пусть $A$ – матрица выигрышей игрока 1, $A_i$ – строка матрицы $A$, $i = 1, \ldots, r$, $r = 2000$. Пусть $m$ и $d$ – минимальные неотрицательные числа, такие, что матрица $A$ представима как последовательность строк ($A_1, \ldots, A_m, \{A_{m+1}, \ldots, A_{m+d}\}, A_{m+pd+1}, \ldots, A_{m+pd+q}$), где скобки $\{\ldots\}$ обозначают минимум двукратное повторение, $p = \lfloor (r - m) / d \rfloor$, $q = r - m - p\ d$. Тогда МЦР игрока будет равен $(m + d)$.

По результатам данного эксперимента, максимальный целесообразный ранг рефлексии поднимался до 2000 только в 4 ИПБ из ста. В среднем максимальный целесообразный ранг рефлексии первого игрока равен 231.57, второго игрока – 230.16.

График полученных МЦР для первого игрока представлен на Рис. 94. Следует отметить условность результатов проведенного вычислительного эксперимента – действительно, сложно представить себе игрока, обладающего сотым рангом рефлексии.

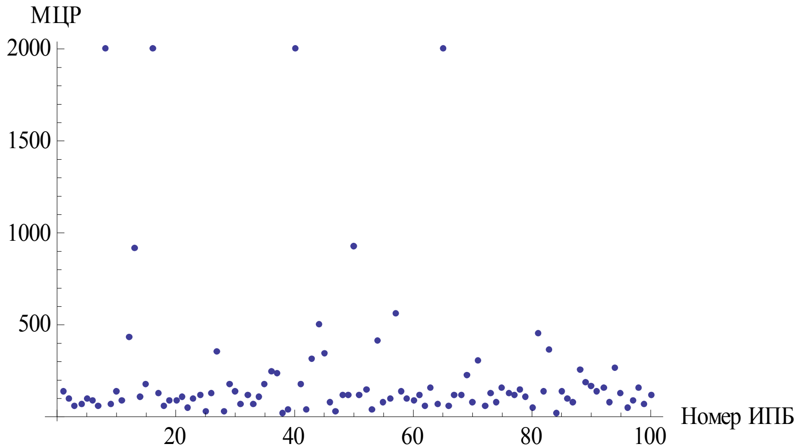


Рис. 94. МЦР для серии случайных ИПБ

Во всех 100 ИПБ, максимальный гарантированный результат игрока 1 равен 0, максимальный гарантированный результат игрока 2 не поднимается выше 0.564 от суммарного выигрыша.

**Информационная рефлексия в ИПБ.** Рассмотрим теперь информационную рефлексию, в рамках которой взаимная информированность игроков описывается структурой информированности, а равновесием их игры является информационное равновесие. В силу выражения (6) равновесное действие каждого игрока зависит только от его оценок ценности объектов и имеющегося у него количества ресурса, и не зависит от параметров оппонента.

Предположим, что могут различаться как оценки игроками ценностей объектов, так и их представления об имеющихся у оппонента ресурсах. Обозначим $V_{ij}$ ($R_{il}$) – оценку $i$-ым игроком ценности $j$-го объекта (количества ресурса), $i, l = 1, 2$, $j \in N$. Естественно считать, что сам игрок достоверно знает количество имеющегося у него ресурса, т. е. $R_{11} = R_x$, $R_{22} = R_y$.

Условием стабильности информационного равновесия будет совпадение выбираемых игроками действий с действиями, ожидаемыми от них оппонентами, то есть

(14) $$\frac{V_{ij}}{\sum\limits_{l \in N} V_{il}} R_{ii} = \frac{V_{3-i,j}}{\sum\limits_{l \in N} V_{3-i,l}} R_{3-i,i}, \; i = 1, 2, j \in N.$$

Если говорить об информационном управлении (воздействии на представления игроков о ценностях объектов, представлениях оппонентов и имеющихся у них ресурсах, представлениях о представлениях и т.д.), то, изменяя $V_{ij}$, управляющий орган может реализовать как информационное равновесие любую комбинацию векторов действий, удовлетворяющих ограничениям (1).

### 4.26.3. Олигополия Курно: стратегическая рефлексия

В модели олигополии Курно [233] (см. также раздел 4.16) агенты принимают решения об объеме выпускаемой ими продукции в условиях, когда ее рыночная цена является известной убывающей функцией суммарного предложения (объема выпуска, объема производства): $P(x) = a - b\, Q(x)$, где $Q(x) = \sum_{i \in N} x_i$ , $a$ и $b$ – известные неотрицательные константы.

Целевая функция $i$-го агента представляет собой разность между выручкой от продаж (равной произведению цены на объем производства) и квадратичными затратами на производство:

(1) $f_i(x_i, Q(x)) = (a - b\, Q(x))\, x_i - (x_i)^2 / 2,\ i \in N.$

Если бы целевые функции агентов были среди них общим знанием, то равновесию Нэша их игры соответствовали бы одинаковые действия:

(2) $x_i^N = \dfrac{a}{1+b+nb},\ i \in N,$

которые приводили бы к равновесному объему выпуска $Q(x^N) = \dfrac{na}{1+b+nb}$ и равновесной цене $P(x^N) = \dfrac{a(1+b)}{1+b+nb}$. Точке Парето, максимизирующей сумму целевых функций агентов, соответствуют действия:

(3) $x_i^P = \dfrac{a}{1+2nb},\ i \in N,$

которые приводят к эффективному объему выпуска $Q(x^P) = \dfrac{na}{1+2nb}$ и эффективной цене $P(x^P) = \dfrac{a(1+nb)}{1+2nb}$. При этом $f(x^P) = \dfrac{a^2}{2(1+2nb)} \geq f(x^N) = \dfrac{a^2(1+2b)}{2(1+b+nb)^2}$, то есть выигрыш каждого агента в точке Парето не меньше, чем в точке Нэша.

Рассмотрим числовой пример. Пусть $n = 10$, $a = 2.1$, $b = 0.1$, $\gamma_i^t = 0.5$. Тогда $x_i^N = 1$, $Q(x^N) = 10$, $P(x^N) = 1.1$, $x_i^P = 0.7$, $Q(x^P) = 7$, $P(x^P) = 1.4$, $f(x^P) = 0.735 > f(x^N) = 0.6$.

Проанализируем динамику коллективного поведения. Пусть фиксирован вектор $x^0$ начальных объемов производства. В соответствии с выражением (4) изменение во времени действий, выбираемых агентами, будет описываться следующим выражением:

(4) $x_i^t = x_i^{t-1} + \gamma_i^t \left[\dfrac{a - b\sum\limits_{j\neq i} x_j^{t-1}}{1+2b} - x_i^{t-1}\right],\ i \in N,\ t = 1, 2, \ldots$ .

В соответствии с выражением (4) действия агентов будут сходиться к равновесию Нэша.

Перейдем теперь к рефлексивному случаю. При заданном векторе начальных действий $x^0$ агенты нулевого ранга рефлексии выберут действия

(5) $x_i = A + B\ x_i^0,\ i \in N_0$,

где $A = \dfrac{a - bQ(x^0)}{1+2b}$, $B = \dfrac{b}{1+2b}$. Агенты первого ранга рефлексии выберут действия

(6) $x1_j = A_1 + B^2\ x_j^0,\ j \in N_1$,

где $A_1 = \dfrac{a(1+3b) - bna + b^2 Q(x^0)(n-2)}{(1+2b)^2}$.

Пусть в рассматриваемом числовом примере все начальные действия агентов одинаковы: $x_i^0 = 0.5$, $i \in N$. Тогда $x_i = 31/24 = 1.291(6)$, $x1_j = 103.5/144 = 0.71875$, что гораздо ближе к Парето-эффективным действиям. Варьируя число агентов первого уровня, можно менять сумму действий агентов от $\sim 7.2$ до $\sim 12.9$. Этому диапазону принадлежат равновесные по Нэшу действия, но не принадлежит точка Парето. То есть при векторе начальных действий $x_i^0 = 0.5$, $i \in N$, наличия агентов первого ранга рефлексии недостаточно для реализации за счет рефлексивного управления Парето-оптимальной точки. Но вполне достаточно для реализации соответствующего равновесию Нэша суммарного объема производства – для этого доля рефлексирующих агентов первого уровня должна быть около 49 %.

Возможность реализации точки Парето зависит от вектора начальных действий: например, первый ранг рефлексии является максимальным целесообразным для реализации точки Парето при векторе начальных действий $x_i^0 = 0.2$, $i \in N$. Тогда $x_i = 1.5$, $x1_j = 0.55$, и при доле агентов первого ранга рефлексии, равной примерно 84 %, на рынке установится эффективная цена $P(x^P)$. Однако такая ситуация не будет стабильной (см. условия стабильности в разделе 3.4).

Если все начальные действия агентов одинаковы, то рефлексивное разбиение задается лишь числом агентов с соответствующим рангом рефлексии, поэтому, опуская индексы, соответствующие номерам агентов, можно записать, что агенты второго ранга рефлексии выберут действия

(7) $x2 = \dfrac{1}{1+2b}\ [a - b\, n_0\, x - b\, (n - n_0 - 1)\, x1]$.

Итого, получаем, что в зависимости от рефлексивного разбиения реализуется суммарное действие

(28) $Q(n_1, n_2) = (n - n_1 - n_2)\, x + n_1\, x1 + n_2\, x2 =$

$$= \frac{1}{1+2b}\ [(a - b\, (n - 1)\, x^0)\, (n - n_1 - n_2) + \frac{1}{1+2b}\ [a\, (1 + 3\, b) -$$

$$- n\, a\, b + b^2\, x^0\, (n - 1)^2]\, n_1 + \frac{1}{1+2b}[a - b\, n_0\, (n - n_1 - n_2)x]\, n_2].$$

Исследуем зависимость объёма выпуска $Q(n_1, n_2)$ от числа рефлексирующих агентов первого и второго ранга и зададимся вопросом, при каких значениях $(n_1, n_2)$ суммарный объем выпуска соответствует равновесному по Нэшу, то есть когда выполняется $Q(n_1, n_2) = Q(x^N)$ в зависимости от начальных действий агентов $x^0$.

Для рассматриваемого примера кривая $AB$ пересечения графика $Q(n_1, n_2)$ и «нэшевской» плоскости $Q = 10$ приведена на Рис. 95.

Оказывается, что эта кривая не зависит от $x^0$ – её формула в плоскости $Q = 10$: $n_1 = 1 - n_2 - \dfrac{n-1}{\left(1+\frac{b}{b+1}n\right)\left(\frac{b}{2b+1}n_2 - 1\right)}$.

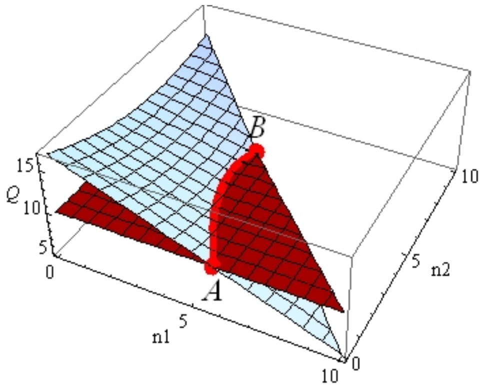


Рис. 95. Кривая *AB* «реализует» равновесие Нэша

Из Рис. 95 видно, что введение даже только агентов первого ранга увеличивает суммарный объем производства.

Отметим, что с точки зрения «стабильности», если имеет место динамика, то если на первом шаге агенты попадают в точку Нэша, то и в дальнейшем ни один из них (ни нерефлексирующий, ни рефлексирующий) не имеют оснований для изменения своих действий.

Если же мы ищем такое число рефлексирующих агентов, чтобы объём производства был равен отличному от $Q(x^N)$ значению, например объёму, соответствующему Парето-оптимальной ситуации, то кривая *AB* будет меняться в зависимости от $x^0$. Оказывается что в рассматриваемом примере кривая пересечения $Q(n_1, n_2)$ с любой плоскостью – это кривая второго порядка.

Сформулируем теперь задачу следующим образом – выбором рефлексивного разбиения реализовать требуемый суммарный объем производства, например, равный 12 (больше $Q(x^N)$). Предположим, что в начальный момент времени агенты не осуществляли производства ($x^0 = 0$). Достичь требуемого объёма можно – см. Рис. 96.

Если $x^0 \approx 0.305$, то кривая *AB* касается плоскости $n_1 = 0$ (точка *C* на Рис. 97), то есть, в этом случае можно только агентами нулевого и второго ранга рефлексии достичь требуемого суммарного объёма производства.

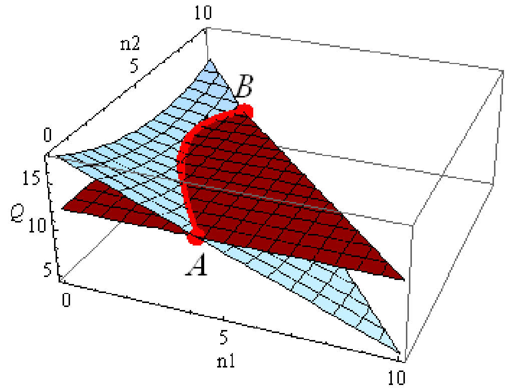


Рис. 96. «Реализация» требуемого суммарного объема производства

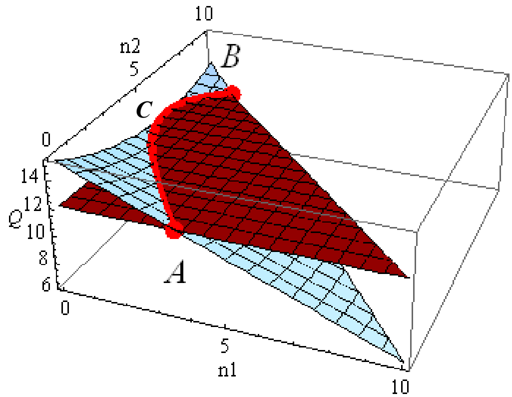


Рис. 97. «Реализация» требуемого суммарного объема производства в отсутствии агентов первого ранга (точка *C*)

Таким образом, в модели олигополии Курно введение рефлексирующих агентов позволяет увеличить суммарный объем производства и/или реализовать его Парето-эффективное значение.

### 4.26.4. Задача о консенсусе

Содержательная интерпретация «задачи о консенсусе» следующая: действиям агентов соответствуют их положения на прямой (координаты в пространстве или мнения и т.д. – см. обзоры в [163, 255]), агрегированной ситуации – среднее значение координат агентов: $Q(x) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} x_i$. Целевой функцией агента будем считать его «отклонение» от агрегированной ситуации:

(1) $f(x_i, Q(x)) = -(x_i - Q(x))^2$, $i \in N$.

Критерием эффективности будем считать «дисперсию» положений агентов (в данном примере целевая функция центра зависит не только от агрегированной ситуации игры, но и от всего вектора действий агентов):

(2) $F(x) = -\frac{1}{n}\sum_{i \in N} (Q(x) - x_i)^2$.

С теоретико-игровой точки зрения ситуация тривиальна – если бы целевые функции агентов были бы среди них общим знанием, то агенты легко вычислили бы, что равновесием Нэша является любой вектор одинаковых действий. Отметим, что при этом полностью отсутствует конфликт интересов агентов, а любое равновесие Нэша однопериодной игры одновременно максимизирует и критерий эффективности (2). Однако в случае (даже одношагового) коллективного поведения агентов в условиях неполной их информированности все не так просто.

Ранг 0. При заданных начальных положениях агентов $x^0$ $i$-й агент в соответствии с выражением (3.4.2) выберет действие

(3) $x_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i} x_j^0 = \frac{1}{n-1}(nQ(x^0) - x_i^0)$, $i \in N$,

равное среднему положению остальных агентов, $i \in N$. Сделанный вывод остается в силе и в случае, когда целевые функции агентов зависят не от агрегированной ситуации, а от *агрегированной обстановки*: $g(x_i, Q_i(x_{-i})) = -(x_i - Q_i(x_{-i}))^2$, где $Q_i(x_{-i}) = \frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i} x_j$, $i \in N$.

Из выражения (3) следует, что $Q(x) = Q(x^0)$, то есть среднее значение координат агентов не изменяется, а значение критерия эффективности возрастает в $(n-1)^2$ раз: $F(x) = \frac{1}{(n-1)^2} F(x^0)$.

Ранг 1. Пусть имеются $n_1$ агентов, обладающих первым рангом рефлексии, а остальные $n_0 = n - n_1$ агентов имеют нулевой ранг. Агенты нулевого ранга рефлексии выберут действия, определяемые выражением (3), а агенты первого ранга – следующие действия:

(4) $x1_j = \dfrac{nQ(x) - x_j}{n-1} = \dfrac{n^2(n-2)Q(x^0) + x_j^0}{(n-1)^2}, j \in N_1.$

Если все агенты обладают первым рангом рефлексии, то $Q(x1_{j \in N}) = Q(x) = Q(x^0)$, т. е. среднее значение координат агентов не изменяется (такой случай является идеальным с точки зрения стабильности рефлексивного разбиения – все агенты наблюдают ожидаемые значения). Значение критерия эффективности возрастает еще в $(n-1)^2$ раз: $F(x1_{j \in N}) = \dfrac{1}{(n-1)^2} F(x) = \dfrac{1}{(n-1)^4} F(x^0)$.

Рассмотрим пример – пусть $n = 2$. Получаем, что в зависимости от своих рангов рефлексии агенты выберут следующие действия:

| | | **Агент 1** | **Агент 2** |
|---|---|---|---|
| **Начальные действия** | | $x_1^0$ | $x_2^0$ |
| **Ранг рефлексии** | **0** | $x_2^0$ | $x_1^0$ |
| | **1** | $x_1^0$ | $x_2^0$ |
| | **2** | $x_2^0$ | $x_1^0$ |

Видно, что, во-первых, вектор действий обоих агентов, обладающих вторым рангом рефлексии, совпадает с вектором действий нерефлексирующих агентов. Во-вторых, при одинаковых рангах рефлексии обоих агентов значение критерия эффективности не зависит от ранга. В-третьих, все четыре возможные комбинации действий агентов исчерпываются нулевым и первым рангами их рефлексии. В-четвертых, максимальное (равное нулю) значение критерия эффективности (2) достигается в случае, когда один из агентов (любой) имеет нулевой ранг рефлексии, а другой агент – первый ранг.

Следовательно, в рассматриваемом примере максимальный целесообразный ранг рефлексии равен единице.

### 4.26.5. Активная экспертиза

Рассматриваемый в настоящем подразделе пример свидетельствует, что наличие рефлексирующих агентов может приводить к последствиям, негативным, условно говоря, с точки зрения группы в целом (см. также модели формирования команд в [105]).

Содержательная интерпретация модели активной экспертизы следующая (см. также раздел 4.15): имеются $n$ экспертов – агентов, сообщающих информацию организатору экспертизы – центру. Центр принимает решение $Q(x) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} x_i$, равное среднему арифметическому мнений агентов.

Пусть на сообщения агентов наложено требование неотрицательности. Целевой функцией агента будем считать «отклонение» итогового мнения от его начального (истинного) мнения [112]:

(1) $f(x_i, Q(x)) = -(x_i^0 - Q(x))^2,\ i \in N.$

Пусть агенты упорядочены по возрастанию их начальных мнений: $x_1^0 < x_2^0 < \ldots < x_n^0$.

С теоретико-игровой точки зрения, если бы целевые функции агентов были среди них общим знанием, то агенты легко вычислили бы равновесие Нэша: $x_i^N = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $x_n^N = n\ x_n^0$.

Определим множество агентов $M(x^0) = \{i \in N \mid x_i^0 \geq \frac{1}{n}\sum_{l \neq i} x_l^0\}$.

<u>Ранг 0.</u> При заданных начальных мнениях агентов $x^0$, они в соответствии с выражением (10) выберут действия

(2) $x_i = \max\ \{n\ x_i^0 - \sum_{l \neq i} x_l^0,\ 0\},\ i \in N.$

Вычислим $Q(x) = \sum_{i \in M(x^0)} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i \in M(x^0)}\sum_{l \neq i} x_l^0$.

<u>Ранг 1.</u> Пусть имеются $n_1$ агентов, обладающих первым рангом рефлексии, а остальные $n_0 = n - n_1$ агентов имеют нулевой ранг. Агенты нулевого ранга рефлексии выберут действия, определяемые выражением (2), а агенты первого ранга – следующие действия:

(3) $x1_j = \max\ \{n\ x_j^0 - \sum_{l \in M(x^0) \setminus \{j\}} x_l\ ;\ 0\},\ j \in N_1.$

Рассмотрим числовой пример. Пусть имеются 10 агентов, чьи начальные мнения равны их номеру. Действия агентов приведены в следующей таблице:

| **№** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x^0}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\boldsymbol{Q(x^0)}$ | 5,5 | | | | | | | | | |
| $\boldsymbol{x}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 |
| $\boldsymbol{Q(x)}$ | 16,5 | | | | | | | | | |
| $\boldsymbol{x1}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Варьируя число рефлексирующих агентов первого ранга (от 0 до 10), центр может менять результаты экспертизы (одиннадцать возможных точек) от 0 до 16,5. Отметим, что этот диапазон шире, чем интервал истинных мнений экспертов (ср. с результатами анализа информационной рефлексии в задачах экспертизы в разделе 4.15), то есть, центр, осуществляя рефлексивное управление, имеет значительные возможности по манипулированию результатами экспертизы.

Ранг 2. Агенты второго ранга рефлексии выберут действия:

$$(4)\ x2_j = \max\ \{n\ x_j^0 - \sum_{l \in N_1 \cup N_2 \cap M(x^0) \setminus \{j\}} x1_l - \sum_{l \in N_0 \cap M(x^0) \setminus \{j\}} x_l\ ;\ 0\},\ j \in N_2.$$

Пусть центр использует следующее рефлексивное разбиение: $N_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_1 = \{6, 7, 8, 9\}$, $N_2 = \{10\}$. Тогда в соответствии с выражениями (2)-(4) все агенты, кроме десятого, выберут нулевые действия, а десятый агент – действие, равное 100. То есть в рассматриваемом примере второго ранга рефлексии достаточно, чтобы получить ситуацию, совпадающую с равновесной по Нэшу.

#### 4.26.6. Транспортные потоки и эвакуация

Рассмотрим помещение, в котором находятся $n$ агентов. В помещении имеются два выхода, условно назовем их «левым» ($L$) и «правым» ($R$). Время выхода определяется моментом времени, когда из данного выхода вышел последний агент, направившийся к нему. Каждый агент однократно принимают решение, из какого выхода он будет выходить. Скорости движения всех агентов в отсутствие пробок примем одинаковыми. Обозначим $n_L$ ($n_R$) – число агентов, направившихся к левому (правому) выходу, $n_L + n_R = n$.

Пусть известна зависимость $T(k)$ времени выхода в зависимости от числа агентов $k \geq 0$. Зависимость эту будем считать непрерывной, выпуклой (отражение эффекта «пробок») и равной нулю в нуле (когда имеется один агент, пробки отсутствуют, и он покидает помещение без задержек). Обозначим через $T_L$ ($T_R$) время движения агента до левого (правого) выхода, причем $T_L > T_R$, то есть правый выход расположен ближе левого. Итак, полное время выхода налево равно $T(n_L) = T_L + T(n_L)$, направо: $T(n_R) = T_R + T(n_R)$.

Оптимальное с точки зрения *времени эвакуации* $T^*$ – покидания помещения последним из агентов (а именно этот критерий используется в моделях эвакуации) – распределение агентов по направлениям движения ($n_L^*$; $n_R^*$) является решением следующей системы уравнений (см. также Рис. 98):

(1) $$\begin{cases} T(n_L^*) + T_L = T(n_R^*) + T_R, \\ n_L^* + n_R^* = n. \end{cases}$$

Минимальное время эвакуации равно

(2) $T^* = T(n_L^*) + T_L = T(n_R^*) + T_R$ .

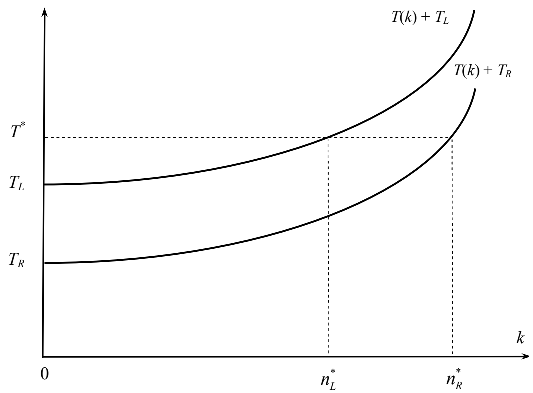


Рис. 98. Зависимость времени эвакуации от числа агентов, выбирающих правый или левый выход

Рассмотрим теперь коллективное поведение агентов, считая, что каждый из них стремится покинуть помещение как можно скорее. Агенты нулевого ранга рефлексии будут выбирать правый выход (до него они в рамках введенных предположений доберутся быстрее), агенты первого ранга рефлексии, прогнозируя, что в правом выходе агенты нулевого ранга создадут пробку, выберут левый выход.

Время выхода в зависимости от числа агентов первого ранга рефлексии (см. Рис. 99) равно

(3) $T1(n_1) = \max\ \{T(n_1) + T_L; T(n - n_1) + T_R\}$.

Видно, что как малое, так и очень большое число рефлексирующих агентов плохо, так как увеличивает время эвакуации (см. Рис. 99). Т. е. существует оптимальное число рефлексирующих агентов, при котором время эвакуации минимально.

Из свойств функции $T(\cdot)$ и предположения $T_L > T_R$ следует, что минимум выражения (3) достигается при числе агентов первого ранга рефлексии $n_1^*$, определяемом из следующего соотношения:

(4) $T(n_1^*) + T_L = T(n - n_1^*) + T_R$.

Последнее условие совпадает с условием (2), т. е. $n_1^* = n_L^*$, $T1(n_1^*) \equiv T^*$, значит, первый ранг рефлексии является максимальным целесообразным в рамках рассматриваемой модели.

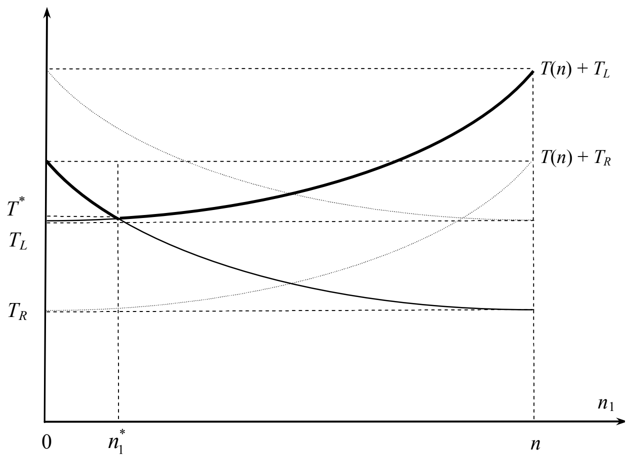


Рис. 99. Зависимость времени эвакуации от числа агентов первого ранга рефлексии

В рассматриваемой модели можно добавлять агентов второго, третьего и более высоких рангов рефлексии, однако это вряд ли целесообразно, так как не позволит улучшить уже достигнутое за счет введения агентов первого ранга значение времени эвакуации (2). Описание имитационных моделей транспортных потоков и эвакуации можно найти в [62].

### 4.26.7. Фондовый рынок

В настоящем разделе обсуждаются возможные расширения описанного выше метода рефлексивных разбиений, а именно – на примере частной модели фондового рынка рассматривается стратегическая рефлексия агентов «над» их равновесными по Нэшу стратегиями. Фондовый рынок является объектом моделирования, для которого наиболее часто используют «рефлексивные» рассуждения – см., например, [11, 45, 46, 147]. В работе [49] рассмотрена теоретико-игровая модель фондового рынка, в которой каждый агент в каждый момент времени обладает некоторым количеством (для которого выполняются динамические балансовые ограничения) денег и актива, который он может приобретать или продавать по сложившейся на рынке цене. Последняя зависит как от тренда $\theta$ (внешний фактор, являющийся общим знанием), так и от соотношения между спросом и предложением – с ростом спроса рыночная цена на актив растет, с ростом предложения – падает. В указанной работе показано, что в условиях общего знания агентов обо всех параметрах игры структура равновесия Нэша такова: либо все агенты приобретают актив на все имеющиеся у них средства (если они тем самым «увеличивают» относительную цену актива), либо все агенты продают все имеющиеся у них активы (если они тем самым «уменьшают» относительную цену актива).

Рассмотрим следующую модель. Пусть каждый агент обладает в начальный момент времени суммой $u_0 \geq 0$ и активом $x_0 \geq 0$. В соответствии с результатами [49] в начальный момент времени у агента имеются две альтернативы: либо приобрести актив на всю сумму $u_0$, либо продать все $x_0$ единиц актива (рынок при этом не ограничен).

В зависимости от действий $x$ агента сложится следующая цена: если все агенты приобретают актив, то цена $p$ будет равна $p^+ = p_0 + \theta + \alpha\, n\, x_0$; если агенты продают актив, то цена $p$ будет равна

$p^- = p_0 + \theta - \alpha\, n\, x_0$, где $\alpha$ – коэффициент зависимости цены от спроса/предложения.

Начальное значение целевой функции агента равно $u_0 + x_0\, p_0$, конечное:

♦ $(x_0 + u_0 / p_0)\, p^+ - u_0$, если актив приобретается с намерением последующей продажи;

♦ $u_0 + x_0\, p_0$, если актив продается;

♦ $u_0 + x_0\, (p_0 + \theta)$, если агент не предпринимает никаких действий.

Для того чтобы выяснить, какое из трех действий (покупать, продавать или ничего не делать) предпримет рациональный агент, необходимо сравнить три полученные величины. Получаем, что, если имеет место положительный тренд ($\theta \geq 0$) или если тренд отсутствует ($\theta = 0$), то актив следует приобретать. При отрицательном тренде ($\theta < 0$) дело обстоит сложнее, а именно актив следует приобретать при условии

$$(1)\ \theta \geq \frac{p_0 u_0}{p_0 x_0 + u_0} - \alpha\, n\, x_0.$$

Последнее условие означает, что если агенты, приобретая актив и повышая тем самым его цену в следующем периоде, могут «перебороть» отрицательный тренд, то актив следует приобретать. В противном случае актив им следует продавать.

Если подходить более корректно и исследовать все соотношения между параметрами, то есть для каждого из трех действий найти условия, при которых данное действие оптимально, то получим, что рациональный агент должен придерживаться следующего алгоритма: приобретать актив, если выполнено условие (1), и продавать его, если верно обратное соотношение. Интересно, что пассивное поведение – не предпринимать никаких действий – невыгодно ни при одной комбинации параметров модели.

Качественный вывод из проведенного анализа следующий. Существование постоянного тренда цены актива относительно «стоимости» денег, приводит к тому, что, если этот тренд положительный, то следует вкладывать все деньги в приобретение актива. Если тренд отрицательный, то наоборот – целесообразно избавляться от актива. Возможность влияния агентами на цену актива за счет своих действий (покупки или продажи) приводит к тому, что приобретать актив в случае отрицательного тренда имеет смысл только в том случае, если этими действиями можно «преодолеть» тренд.

Итак, мы описали равновесие Нэша агентов. Рассмотрим теперь рассуждения рефлексирующего агента первого ранга. Если выполнено условие (1), то он может спрогнозировать, что все агенты нулевого ранга будут приобретать актив. Если условие (1) не выполнено, то он может спрогнозировать, что все агенты нулевого ранга будут продавать актив (цена на него упадет) и ему выгодно действовать так же. Получаем, что действия рефлексирующих агентов будут такие же, как и нерефлексирующих, то есть в рассмотренной модели добавление рефлексирующих агентов любого ранга не меняет рыночной цены.

Сделанный вывод является следствием того, что мы рассмотрели достаточно «интеллектуальных» нерефлексирующих агентов. Действительно, предполагалось, что они способны прогнозировать изменение рыночной цены в зависимости от своих действий.

Рассмотрим другую модель с менее «интеллектуальными» агентами нулевого ранга, а именно предположим, что они ориентируются лишь на знак тренда. Тогда при положительном тренде агенты нулевого ранга будут приобретать актив, в результате чего его цена будет расти, и рефлексирующим агентам лишь остается следовать их примеру. Ситуация меняется при отрицательном тренде – агенты нулевого ранга будут продавать актив, в результате чего цена «еще более снизится». Но, рефлексирующие агенты могут попытаться своими действиями (приобретая актив) «переломить тренд». Для этого, правда, им необходимо быть уверенными, во-первых, что доля $q$ рефлексирующих агентов является среди них общим знанием, а во-вторых, что эта доля достаточна для того, чтобы цена выросла. Последнее условие по аналогии с условием (1) можно записать в виде:

$$(2)\ \theta \geq \frac{p_0 u_0}{p_0 x_0 + u_0} + \alpha\, n\, (1 - 2\, q)\, x_0,$$

т. е.

$$(3)\ q \geq q^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha n x_0}\left[\frac{p_0 u_0}{p_0 x_0 + u_0} - \theta\right].$$

Отметим, что критическая доля $q^*$ рефлексирующих агентов составляет не менее половины от общего числа агентов (условие $q^* \leq 1$

эквивалентно условию (1)). Рассмотрим числовой пример. Пусть $n = 100$, $u_0 = 1000$, $p_0 = 10$, $x_0 = 100$, $\alpha = 0.001$, $\theta = -1$. Условие (1) выполнено. Из выражения (3) находим $q^* = 53$ %.

Подчеркнем, что предположение о том, что доля рефлексирующих агентов является среди них общим знанием, противоречит введенному выше предположению о структуре субъективных рефлексивных разбиений (см. раздел 3.4), так как последнее предполагает, что рефлексирующие агенты «не знают о существовании» других агентов того же ранга рефлексии (и более высоких рангов). К росту рыночной цены при отрицательном тренде будет приводить любое рефлексивное разбиение, при котором доли рефлексирующих агентов любых рангов (кроме нулевого) в сумме превышают $q^*$, и эта информация является общим знанием среди рефлексирующих агентов соответствующих уровней. Данное утверждение, имеющее прозрачные содержательные интерпретации, свидетельствует, что структура субъективных рефлексивных разбиений, введенная в разделе 3.4 и используемая в разделах 4.26.3-4.26.6, не является единственно возможной и адекватной всем моделям, представляющим интерес для практики. То есть, перспективным направлением будущих исследований представляется рассмотрение и других структур субъективных рефлексивных разбиений.

Таким образом, метод рефлексивных разбиений множества рациональных агентов на подмножества агентов, обладающих различными рангами стратегической рефлексии, позволяет:

• с точки зрения теории принятия решений – расширить класс моделей коллективного поведения интеллектуальных агентов, осуществляющих совместную деятельность в условиях неполной информированности и отсутствия общего знания;

• с дескриптивной точки зрения – расширить множество ситуаций, которые в рамках модели могут быть «объяснены» как устойчивые исходы взаимодействия агентов; соответственно, в рамках задач управления – расширить область управляемости;

• с нормативной точки зрения – ставить и решать задачи группового управления за счет подбора структуры информированности агентов.

Анализ примеров седьмого раздела позволяет констатировать, что наличие рефлексирующих агентов может изменять групповое поведение самым разным образом.

В модели «Олигополия Курно» при определенном диапазоне значений начальный действий агентов можно реализовать эффективные по Парето или равновесные по Нэшу уровни производства за счет введения агентов первого и второго рангов рефлексии.

В модели «Задача о консенсусе» введение рефлексирующих агентов расширяет множество векторов действий, выбираемых агентами, и приводит к росту значения критерия эффективности.

В модели «Активная экспертиза» наличие рефлексирующих агентов даже первого ранга существенно расширяет диапазон возможных результатов экспертизы. Второй ранг рефлексии позволяет реализовать равновесие Нэша.

В модели «Транспортные потоки и модель эвакуации» наличие рефлексирующих агентов первого ранга позволяет достичь минимального (оптимального с «централизованной» точки зрения) времени эвакуации.

В модели «Фондовый рынок» показано, что изменить ситуацию (по сравнению с нерефлексивным принятием решений) может только определенная «критическая масса» рефлексирующих агентов.

В заключение отметим, что, во-первых, в моделях раздела 4.26 почти не рассматривались агенты со вторым и более высокими рангами рефлексии (либо они превышают максимальный целесообразный ранг, либо соответствующие модели получаются слишком сложными для получения аналитических выводов).

Во-вторых, считалось, что агенты любого ранга рефлексии достаточно «интеллектуальны» – они выбирают действия, стремясь максимизировать свои целевые функции. Можно допустить наличие и менее интеллектуальных агентов – *агентов-имитаторов* (условно, обладающих минус первым рангом рефлексии), действия которых определяются известной функцией от текущих или прошлых действий других агентов (примеры: выбор действия, равного среднему арифметическому действий остальных агентов; или агентов, связанных с данным; или некоторого другого фиксированного агента). Наверное, такие модели могут адекватно описывать такое явление как диффузия инноваций и др.

В-третьих, явно недостаточное внимание уделено условиям стабильности.

В-четвертых, представляется перспективным установление соответствия и совместное развитие метода рефлексивных разбиений с теорией когнитивных иерархий, (в которой рангам рефлексии соответствуют когнитивные уровни, и используется вероятностная модель – игрок некоторого уровня считает остальных распределенными по более низким уровням в соответствии с распределением Пуассона) – направлением, активно развиваемым в экспериментальной экономике и поведенческой теории игр – см., например, [188, 194] и обзор в разделе 3.4.

Кроме того, задачи управления, поиска максимального целесообразного ранга рефлексии и др. можно и нужно ставить и решать в рамках и других (отличных от рассмотренных выше) модификаций предложенной рефлексивной модели коллективного поведения, что представляется перспективным направлением будущих исследований. В первую очередь, это – задачи *активного прогноза* (см. [117] и раздел 4.23), в рамках которого агенты по информации центра о будущем состоянии системы «восстанавливают» текущее состояние и на основании этой новой информации принимают решения. Здесь введение рефлексивных разбиений выглядит очень многообещающим.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены **рефлексивные игры**, описывающие интерактивное взаимодействие агентов, которые принимают решения на основе иерархии своих представлений о существенных параметрах, представлениях других агентов и т.д.

Ключевыми понятиями являются следующие (см. подробности и корректные определения выше):

- **фантомный агент** – агент, существующий в представлении реального или другого фантомного агента и наделяемый в рамках этих представлений определенной информированностью;
- **информационная структура** – граф, отражающий взаимную информированность агентов (реальных и фантомных);
- **рефлексивная структура** – совокупность субъективных рефлексивных разбиений агентов (*субъективное рефлексивное разбиение* – представления агента о разбиении всех агентов на ранги стратегической рефлексии);
- **информационное равновесие** – равновесие рефлексивной игры (то есть обобщение равновесия Нэша на случай некооперативной игры реальных и фантомных агентов при заданной структуре информированности);
- **рефлексивное равновесие** – совокупность действий агентов, являющихся наилучшими ответами на предполагаемые в рамках существующей рефлексивной структуры действия оппонентов;
- **информационное управление** – поиск допустимой информационной структуры, которой соответствует наилучшее (с точки зрения управляющего органа) информационное равновесие.
- **рефлексивное управление** – поиск допустимой рефлексивной структуры, которой соответствует наилучшее (с точки зрения управляющего органа) рефлексивное равновесие.

С точки зрения теории игр рассмотренная в настоящей работе концепция информационного равновесия охватывает ситуации принятия игроками решений на основе иерархии в общем случае несогласованных представлений о взаимной информированности и является обобщением равновесия Нэша.

С точки зрения теории коллективного поведения рассмотренная в настоящей работе концепция рефлексивного равновесия охватывает ситуации принятия игроками решений на основе иерархии в общем случае несогласованных представлений о принципах принятия оппонентами решений и является обобщением моделей когнитивных иерархий и др.

Кроме того, предложенные подходы к моделированию информационной и стратегической рефлексии, во-первых, охватывает, то есть позволяют единообразно описывать как частные случаи, многие прикладные задачи (скрытое управление, информационное управление через СМИ, рефлексию в психологии и художественных произведениях и др. – см. четвертую главу настоящей работы).

Во-вторых, в рамках построенной модели появляется возможность исследования зависимости информационного и/или рефлексивного равновесия и выигрышей агентов от структур информированности и/или рефлексивных структур (в том числе – рангов рефлексии) и, в частности, определения максимального целесообразного в той или иной ситуации ранга рефлексии (см. разделы 2.6 и 3.2).

В-третьих, имея зависимость информационного (рефлексивного) равновесия от структуры информированности (рефлексивной структуры), можно ставить и решать задачи соответственной информационного и рефлексивного управления – определения той структуры информированности (рефлексивной структуры), при которой система оказывается в требуемом информационном (рефлексивном) равновесии.

Многочисленные прикладные модели из самых разных областей свидетельствуют о продуктивности предложенного подхода к описанию **рефлексии в управлении**.

В качестве стратегической задачи будущих исследований можно назвать интеграцию моделей информационной и стратегической рефлексии, то есть построение языка единообразного совместного описания информационных и рефлексивных структур.

## ЛИТЕРАТУРА

1 Автономов В.С. Модель человека в экономической науке. – СПб.: Экономическая школа, 1998. – 230 с.

2 Адельсон-Вельский Г.М., Арлазаров В.Л., Донской М.В. Программирование игр. – М.: Наука, 1978. – 255 с.

3 Айзекс Р. Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 479 с.

4 Анисимов О.С. Методология: функции, сущность, становление. – М.: РАГС, 1996. – 380 с.

5 Аткинсон Р. Человеческая память и процесс обучения. – М.: Прогресс, 1980. – 528 с.

6 Беленький В.З., Волконский В.А., Иванков С.А. и др. Итеративные методы в теории игр и программировании. – М.: Физматлит, 1974. – 240 с.

7 Беляков С.А., Борисов В. И., Шумов В.В. Введение в погранометрику. – М: Пограничная академия ФСБ России, 2012. – 667 с.

8 Берн Э. Игры, в которые играют люди. Люди, которые играют в игры. – М.: Прогресс, 1988. – 400 с.

9 Бестужев-Лада И.В. Окно в будущее. – М.: Мысль, 1970. – 269 с.

10 Бирштейн Б.И., Боршевич В.И. Стратагемы рефлексивного управления в западной и восточных культурах // Рефлексивные процессы и управление. 2002. Т. 2. № 1. С. 27 – 44.

11 Бирштейн Б.И., Боршевич В.И. Теория рефлексивности Дж. Сороса: опыт критического анализа // Рефлексивные процессы и управление. 2001. № 1. С. 88 – 101.

12 Бреер В.В. Теоретико-игровые модели конформного коллективного поведения // Автоматика и телемеханика. 2012. № 10. С. 111 – 126.

13 Бреер В.В., Новиков Д.А. Модели управления толпой // Проблемы управления. 2012. № 2. С. 38 – 44.

14 Бреер В.В., Новиков Д.А. Пороговая модель коррупционного поведения // Системы управления и информационные технологии. 2011. № 3. С. 73 – 75.

15 Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 11. С. 3 – 30.

16 Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 – 25.

17 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Кулик О.С., Новиков Д.А. Механизмы страхования в социально-экономических системах. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 109 с.
18 Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
19 Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Введение в теорию управления организационными системами. – М.: Либроком, 2009. – 264 с.
20 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997. – 188 с.
21 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
22 Бухарин С.Н., Цыганов В.В. Методы и технологии информационных войн. – М.: Академический проект, 2007. – 382 с.
23 Бэндлер Р., Гриндер Д. Структура магии. – СПб.: Издательство «Белый кролик», 1996. – 496 с.
24 Бэндлер Р., Гриндер Д. Из лягушек – в принцы (нейролингвистическое программирование). – Екатеринбург, 1998. – 206 с.
25 Варшавский В.И., Поспелов Д.А. Оркестр играет без дирижера. – М.: Наука, 1989. – 208 с.
26 Васин А.А., Гурвич В.А. Коалиционные ситуации равновесия в метаиграх / Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 38 – 44.
27 Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 412 с.
28 Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука. 1990. – 256 с.
29 Вишнев С.М. Основы комплексного прогнозирования. – М.: Наука, 1977. – 289 с.
30 Воеводин А.И. Стратагемы – стратегии войны, манипуляции, обмана. – М.: Белые альвы, 2002. – 256 с.
31 Волгин Л.Н. Принцип согласованного оптимума. – М.: Советское радио, 1977. – 144 с.
32 Выборнов Р.А. Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников. – М.:ИПУ РАН, 2006. – 110 с.
33 Выборнов Р.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивная модель коррупции // Современные сложные системы управления (HTCS’2004):

Материалы IV международной конференции. – Тверь: ТГТУ, 2004. – С. 186 – 189.
34 Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
35 Гонтарев А.В., Чхартишвили А.Г. О явных и скрытых коалициях в рефлексивных играх // Управление большими системами. 2009. № 26. С. 47 – 63.
36 Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
37 Грачев Г., Мельник И. Манипулирование личностью: организация, способы и технологии информационно-психологического воздействия. – М.: Институт философии РАН, 1999. – 235 с.
38 Громыко Ю.В. Оргдеятельностные игры и развитие образования / Технология прорыва в будущее. – М.: Независимый методологический университет, 1992. – 191 с.
39 Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. – М.: Физматлит, 2010. – 228 с.
40 Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г. О стратегической рефлексии в биматричных играх // Управление большими системами. 2008. № 21. С. 49 – 57.
41 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.
42 Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: Российская экономическая школа, 2002. – 140 с.
43 Доценко Е.Л. Психология манипуляции: феномены, механизмы и защита. – М.: ЧеРо, 2000. – 344 с.
44 Ерешко Ф.И., Лохныгина Ю.В. Рефлексивные стратегии в системах управления / Труды Юбилейной международной научно-практической конференции «Теория активных систем». – М.: Синтег, 1999. С. 211 – 213.
45 Ерешко Ф.И., Лохныгина Ю.В. Исследование моделей рефлексивных стратегий в управляемых системах. – М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 с.
46 Ерешко Ф.И. Моделирование рефлексивных стратегий в управляемых системах. – М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 с.
47 Ермаков Н.С., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели репутации и норм деятельности. – М.: ИПУ РАН, 2005. – 67 с.

48 Зимбардо Ф., Ляйппе М. Социальное влияние. – СПб.: Питер, 2000. – 448 с.
49 Зинченко В.И., Новиков Д.А., Старостенко В.В. Об одной теоретико-игровой модели фондового рынка // Тр. IV междунар. конф. «Современные сложные системы управления». – Тверь, ТГТУ, 2004. С. 294 – 297.
50 Зинченко В.П. Рефлексивные процессы в интернет-взаимодействиях (на примере шахматных игр) // Рефлексивные процессы и управление. 2002. Т. 2. № 1. С. 90 – 95.
51 Информационное общество: Информационные войны. Информационное управление. Информационная безопасность / Под ред. М.А. Вуса. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1999. – 212 с.
52 Кабаченко Т.С. Методы психологического воздействия. – М.: Педагогическое общество России, 2000. – 544 с.
53 Казанцев С.Б., Новиков Д,А., Чхартишвили А.Г. Об условиях стационарности линейных рефлексивных отображений // Системы управления и информационные технологии. 2004. № 5. С. 20 – 22.
54 Калашников А.О. Модели и методы организационного управления информационными рисками корпораций. – М.: Эгвес, 2011. – 312 с.
55 Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. – М.: Физматлит, 2009. – 280 с.
56 Канеман Д., Словик П., Тверски А. Принятие решений в неопределенности. – Харьков: Гуманитарный центр, 2005. – 632 с.
57 Карнеги Д. Как завоевывать друзей и оказывать влияние на людей. – М.: Прогресс, 1989. – 720 с.
58 Ким Д.П. Методы поиска и преследования подвижных объектов. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
59 Клыков Ю.И. Ситуационное управление большими системами. – М.: Энергия, 1974. – 136 с.
60 Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. – М.: Прогресс, 1979. – 504 с.
61 Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.
62 Корепанов В.О. Модели рефлексивного группового поведения и управления. – М.: ИПУ РАН, 2011. – 133 с.

63 Корепанов В.О., Новиков Д.А. Задача о диффузной бомбе // Проблемы управления. 2011. № 5. С. 66 – 73.

64 Корепанов В.О., Новиков Д.А. Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления // Проблемы управления. 2011. № 1. С. 21 – 32.

65 Корепанов В.О., Новиков Д.А. Рефлексивная игра полковника Блотто // Системы управления и информационные технологии. 2012. № 1. С. 55 – 62.

66 Крогиус Н.В. Личность в конфликте. – Саратов: СГУ, 1976. – 144 с.

67 Крогиус Н.В. О психологии шахматного творчества. – М.: Физкультура и спорт, 1969. – 96 с.

68 Крогиус Н.В. Психология шахматного творчества. – М.: Физкультура и спорт, 1981. – 183 с.

69 Крылов В.Ю. Методологические и теоретические проблемы математической психологии. – М.: Янус-К, 2000. – 376 с.

70 Кузнецов Н.А., Кульба В.В., Микрин Е.А и др. Информационная безопасность систем организационного управления. Теоретические основы. – М.: Наука, 2006. Т.1 – 495 с. Т.2 – 437 с.

71 Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. – М.: МГУ, 1984. – 104 с.

72 Кукушкин Н.С. Роль взаимной информированности сторон в играх двух лиц с непротивоположными интересами // ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12. № 4. С. 1029 – 1034.

73 Кульба В.В., Малюгин В.Д., Шубин А.Н., Вус М.А. Введение в информационное управление. – С.Пб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 1999. – 116 с.

74 Лезина З.М. Манипулирование выбором вариантов: теория агенды // Автоматика и телемеханика. 1985. № 4. С. 5 – 22.

75 Лепа Р.Н. Модели рефлексивного управления в экономике. – Донецк, Институт экономики промышленности НАН, 2012. – 380 с.

76 Лефевр В.А. Алгебра совести. – М.: «Когито-Центр», 2003. – 426 с.

77 Лефевр В.А. Исходные идеи логики рефлексивных игр / Материалы конференции «Проблемы исследования систем и структур». – М.: Издание АН СССР, 1965.

78 Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. – М.: Советское радио, 1973. – 158 с.

79 Лефевр В.А. Космический субъект. – М.: Институт психологии РАН, 1997.
80 Лефевр В.А. Логика рефлексивных игр и рефлексивное управление / Принятие решений человеком. – Тбилиси: Мецниереба, 1967.
81 Лефевр В.А. Рефлексия. – М.: «Когито-Центр», 2003. – 496 с
82 Лефевр В.А. Формула человека. Контуры фундаментальной психологии. – М.: Прогресс, 1991. – 108 с.
83 Лефевр В.А. Элементы логики рефлексивных игр // Проблемы инженерной психологии. Вып. 4. Ленинград, 1966. С. 273 – 299.
84 Лефевр В.А. Лекции по теории рефлексивных игр. – М.: «Когито-Центр», 2009. – 218 с.
85 Лысаков А.В., Новиков Д.А. Договорные отношения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 100 с.
86 Льюс Р., Райфа Х. Игры и решения. – М.: Изд-во Иностр. Лит., 1961 – 642 с.
87 Лэйнг Р. Я и другие. – М.: Эксмо-пресс, 2002. – 304 с.
88 Майерс Д. Социальная психология. – СПб.: Питер, 1998. – 688 с.
89 Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 360 с.
90 Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. – М.: Наука, 1998. – 528 с.
91 Малявин В.В. (перевод с кит.) Тридцать шесть стратагем. – М.: Белые альвы, 2000. – 192 с.
92 Мартино Д. Технологическое прогнозирование. – М.: Прогресс, 1977. – 591 с.
93 Механизмы управления / Под ред. Д.А. Новикова. – М: ЛЕНАНД, 2011. – 192 с.
94 Микрин Е.А., Кульба В.В., Косяченко С.А. и др. Информационное обеспечение систем организационного управления. Часть 1. Методологические основы организационного управления. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2011. – 464 с.
95 Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
96 Модели и методы анализа и синтеза сценариев развития социально-экономических систем / Под ред В.Л. Шульца, В.В. Кульбы. – М.: Наука, 2012. Том 1. – 304 с. Том 2. – 358 с.
97 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 485 с.

98 Найн А.Я. Рефлексивное управление образовательным учреждением. – Шадринск: Исеть, 1999. – 328 с.
99 Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 708 с.
100 Нижегородцев Р.М. Теоретические основы информационной экономики. – Владикавказ: Проект-Пресс, 1998. – 248 с.
101 Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: Синтег, 2007. – 668 с.
102 Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология научного исследования. – М.: Ленанд. – 288 с.
103 Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. 2012. № 37. С. 25 – 62.
104 Новиков Д.А. «Когнитивные игры»: линейная импульсная модель // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 14–22.
105 Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Физматлит, 2008. – 184 с.
106 Новиков Д.А. Методология управления. – М.: Либроком, 2011. – 128 с.
107 Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 – 26.
108 Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.
109 Новиков Д.А. Модели стратегической рефлексии // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 3 – 18.
110 Новиков Д.А. Рациональная интеллектуализация мультиагентных систем / Труды международной научно-практической мультиконференции «Управление большими системами-2011». – М.: ИПУ РАН, 2011. Том 3. С. 233 – 238.
111 Новиков Д.А. Рефлексия и устойчивость коллективного поведения в многоагентных системах // Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». – Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2007. С. 360 – 365.
112 Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
113 Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.

114 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.
115 Новиков Д.А. Стратегическая рефлексия в биматричных играх / Сборник трудов «Региональная экономика в информационном измерении: модели, оценки, прогнозы». – М.: Бизнес-Юнитек, 2003. С. 296 – 307.
116 Новиков Д.А., Суханов А.Л. Модели и механизмы управления научными проектами в ВУЗах. – М.: Институт управления образованием РАО, 2005. – 80 с.
117 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 101 с.
118 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Информационное равновесие: точечные структуры информированности // Автоматика и Телемеханика. 2003. № 10. С. 111 – 122.
119 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Нелинейные рефлексивные отображения / Труды Международной научно-практической конференции «Нелинейная динамика технологических процессов и систем». – Липецк: ЛГТУ, 2003. С. 31 – 37.
120 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Прикладные модели информационного управления. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.
121 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003. – 149 с.
122 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексия в механизмах планированиям // Системы управления и информационные технологии. 2004. № 5. С. 27 – 38.
123 Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. – 248 с.
124 Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 206 с.
125 Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971. – 230 с.
126 Охрименко В.В. Простая модель экономической динамики со спекуляциями. – М.: ВЦ РАН, 2002. – 31 с.
127 Петровский В.А. Опыт событийной транскрипции в рефлексии // Рефлексивные процессы и управление. 2001. № 1. С. 61 – 70.
128 Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. – СПб.: Изд-во С.-Пб. ун-та, 1992. – 216 с.
129 Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.

130 Пиз А. Язык телодвижений. – Н. Новгород: Ай кью, 1992.
131 Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. – М.: Дело, 2001 – 808 с.
132 Поддъяков А.Н. Исследовательское поведение: стратегии познания, помощь, противодействие, конфликт. – М.: Фак-т психологии МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002. – 189 с.
133 Поспелов Д.А. Игры рефлексивные / Энциклопедия кибернетики. Т. 1. – Киев: Гл. редакция УСЭ, 1974. С. 343.
134 Поспелов Д.А. Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. – М.: Радио и связь, 1989.
135 Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
136 Почепцов Г.Г. Информационно-психологическая война. – М.: Синтег, 2000. – 180 с.
137 Психологический словарь / Под ред. В.П. Зинченко. – М.: Педагогика-пресс, 1996. – 400 с.
138 Расторгуев С.П. Философия информационной войны. – М.: Вузовская книга, 2001. – 468 с.
139 Романько А.Д., Чхартишвили А.Г. Моделирование информационных воздействий в рефлексивных играх: простые сообщения // Сб. трудов ВГАСУ. – Воронеж: ВГАСУ, 2006. – С. 157 – 167.
140 Рудык Н.Б. Поведенческие финансы или между страхом и алчностью. – М.: Дело, 2004, – 272 с.
141 Саймон Г. Науки об искусственном. – М.: Мир, 1972. – 147 с.
142 Сетевая экспертиза. 2-е изд. / Под ред. чл.-к. РАН Д.А. Новикова, проф. А.Н. Райкова. – М.: Эгвес, 2011. – 166 с.
143 Сидельников Ю.В. Теория и практика экспертного прогнозирования. – М.: ИМЭМО РАН, 1990. – 195 с.
144 Симонов К.В. Политический анализ. – М.: Логос, 2002. – 152 с.
145 Сластенин В.А., Подымова Л.С. Педагогика: инновационная деятельность. – М.: Магистр, 1997. – 224 с.
146 Советский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 1632 с.
147 Сорос Д. Алхимия финансов. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 416 с.
148 Сэндидж Ч., Фрайбургер В., Ротцолл К. Реклама: теория и практика. – М.: Прогресс, 1989.
149 Таран Т. Логические модели рефлексивного выбора // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 103 – 117.

150 Таран Т.А. Рефлексивные модели в системах поддержки принятия решений / Труды 2-й Международной конференции «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций». – М.: ИПУ РАН, 2002. Том 2. С. 117 – 135.
151 Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. – М.: Статистика, 1971. – 488 с.
152 Томас Т.Л. Рефлексивное управление в России: теория и военные приложения // Рефлексивные процессы и управление. 2002. Т. 2. № 1. С. 71 – 89.
153 Трахтенгерц Э.А. Компьютерные методы реализации экономических и информационных управленческих решений. Том 2. Реализация решений. – М.: Синтег, 2009. – 224 с.
154 Трахтенгерц Э.А. Компьютерные технологии манипулирования общественным мнением. – М.: Синтег, 2011. – 296 с.
155 Тюков А.А. Рефлексия в науке и в обучении. – Новосибирск: НГУ, 1984. – 124 с.
156 Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г. Об одной модели информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 265 – 275.
157 Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 836 с.
158 Харрис Р. Психология массовых коммуникаций. – СПб.: Прайм-Еврознак, 2002. – 448 с.
159 Харшаньи Д., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. – СПб.: Экономическая школа, 2001. – 405 с.
160 Хёйзинга Й. Homo ludens. В тени завтрашнего дня. – М.: Прогресс, 1992. – 464 с.
161 Цыганов В.В., Бухарин С.Н. Информационные войны в бизнесе и политике. Теория и методология. – М.: Академический проект, 2007. – 336 с.
162 Чалдини Р. Психология влияния. – СПб.: Питер, 2001. – 288 с.
163 Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. 2009. № 3. С. 136 – 151.
164 Чхартишвили А.Г. Информационное равновесие // Управление большими системами. 2003. № 3. С. 100 – 119.
165 Чхартишвили А.Г. О траекториях уклонения на плоскости // Вестник Московского университета. Серия. 1, Математика. Механика. 2000. № 3. С. 64 – 66.

166 Чхартишвили А.Г. Об одной рефлексивной игре поиска // Управление большими системами. 2003. № 5. С. 123 – 128.
167 Чхартишвили А.Г. Об одном геометрическом свойстве следящей области в задачах поиска // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1992. № 3. С. 7 – 10.
168 Чхартишвили А.Г. Равновесие Байеса–Нэша: точечные структуры информированности бесконечной глубины // Автоматика и Телемеханика. 2003. № 12. С. 105 – 111.
169 Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры: трансформация структур информированности // Проблемы управления. 2008. № 5. С. 43 – 48.
170 Чхартишвили А.Г. Согласованное информационное управление // Проблемы управления. 2011. № 3. С. 43 – 48.
171 Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. – М.: ПМСОФТ, 2004. – 227 с.
172 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. Вып. 4. С. 827 – 862.
173 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Метод следящих областей в задачах поиска // Математический сборник. 1993. Т. 184. № 10. С. 107 – 134.
174 Шейнов В.П. Психология обмана и мошенничества. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 512 с.
175 Шейнов В.П. Скрытое управление человеком (психология манипулирования). – М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 848 с.
176 Шеманов А.Ю. Самоидентификация на пороге «осевых времен» (к интерпретации модели рефлексии В. Лефевра) / От философии жизни к философии культуры. – СПб., 2001. С. 137 – 158.
177 Шибутани Т. Социальная психология. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1998. – 544 с.
178 Шрейдер Ю.А. Человеческая рефлексия и две системы этического сознания // Вопросы философии. 1990. № 7. С. 32 – 42.
179 Щедровицкий Г.П. Принципы и общая схема методологической организации системно-структурных исследований и разработок / Системные исследования. – Москва, 1981. С. 193 – 227.
180 Эйрес Р. Научно-техническое прогнозирование и долгосрочное планирование. – М.: Мир, 1971. – 295 с.
181 Alaoui L., Penta A. Level-k Reasoning and Incentives. Barcelona GSE Working Papers Series Working Papers # 653. – Barcelona GSE, 2012. – 49 p.

182 Ambroszkiewicz S. On the Concepts of Rationalizability in Games // Annals of Operations Research. 2000. № 97. P. 55 – 68.
183 Arad A., Rubinstein A. The 11-20 Money Request Game: Evaluating the Upper Bound of k-Level Reasoning / Working Paper – http://ideas.repec.org/p/cla/levarc/661465000000000073.html.
184 Aumann R.J. Agreeing to Disagree // The Annals of Statistics. 1976. Vol. 4. № 6. P. 1236 – 1239.
185 Aumann R.J., Brandenbunger A. Epistemic Conditions for Nash Equilibrium // Econometrica. 1995. Vol. 63. № 5. P. 1161 – 1180.
186 Aumann R.J., Heifetz A. Incomplete Information / Handbook of Game Theory. Vol III. Elseiver, 2002. P. 1665 – 1686.
187 Aumann R.J. Interactive Epistemology I: Knowledge // International Journal of Game Theory. 1999. № 28. P. 263 – 300.
188 Bardsley N., Mehta J., Starmer C., Sugden R. Explaining Focal Points: Cognitive Hierarchy Theory versus Team Reasoning. – Nottigham: The University of Nottigham, 2008. CeDEx Discussion Paper № 17. – 56 p.
189 Bernheim D. Rationalizable Strategic Behavior // Econometrica. 1984. № 5. P. 1007 – 1028.
190 Bottero M. Cognitive hierarchies and the centipede game. Stockholm: SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance № 723. 2010. – 38 p.
191 Brams S.J. Theory of Moves. – Cambridge: Univ. of Cambridge, 1995. – 248 p.
192 Brandenburger A., Dekel E. Hierarchies of Beliefs and Common Knowledge // Journal of Economic Theory. 1993. Vol. 59. P. 189 – 198.
193 Burchardi K., Penczynski S. Out of Your Mind: Estimating The Level-k Model. –London: London School of Economics, 2010. Working Paper. – 44 p.
194 Camerer C., Ho T., Chong J. A Cognitive Hierarchy Model of Games // The Quarterly J. of Economics. 2004. № 8. P. 861 – 898.
195 Camerer C., Ho T., Chong J. Behavioral Game Theory: Thinking, Learning, and Teaching. Working Paper. 2001. – 70 p.
196 Camerer C., Ho T., Chong J. Cognitive Hierarchy: A Limited Thinking Theory In Games / Experimental Business Research, 2005. V. 3. P.203 – 228.
197 Camerer C., Ho T., Chong J. Models of Thinking, Learning and Teaching in Games // AEA Paper Proc. 2003. V. 92. № 2. P. 192 – 195.

198 Camerer C., Weigelt K. Information Mirages in Experimental Asset Markets // Journal of Business. 1991. Vol. 64. P. 463 – 493.
199 Choi S. A cognitive hierarchy model of learning in networks. London: Centre for Economic Learning and Social Evolution, 2006. Working Papers 238. http://eprints.ucl.ac.uk/14461/
200 Choi S., Gale D., Kariv S. Behavioral Aspects of Learning in Social Networks: An Experimental Study / Advances in Behavioral and Experimental Economics. Ed. by John Morgan, 2005. JAI Press.
201 Choi S., Gale D., Kariv S. A Quantal Response Equilibrium Analysis of Social Learning in Networks. Working paper. UCL, 2006.
202 Clark H.H., Marshall C.R. Definite Reference and Mutual Knowledge / Elements of Dicourse Understanding (ed. By A.K. Joshi, B.L. Webber, I.A. Sag). – Cambridge: Cambridge University Press, 1981. P. 10 – 63.
203 Cooper D., Van Huyck J. Evidence on the Equivalence of the Strategic and Extensive Form Representation of Games // J. of Economic Theory. 2003. V. 110. № 2. P. 290 – 308.
204 Costa-Gomes M., Broseta B. Cognition and Behavior in Normal-Form Games: An Experimental Study // Econometrica. 2001. V. 69. № 5. P. 1193 – 1235.
205 Costa-Gomes M., Crawford V. Cognition and Behavior in Two-Person Guessing Games: An Experimental Study // AER. 2006. V. 96. P. 1737 – 1768.
206 Crawford V., Costa-Gomes M., Iriberri N. Structural Models of Nonequilibrium Strategic Thinking: Theory, Evidence and Applications // Journal of Economic Literature. 2012 (forthcoming).
207 Dasgupta P., Hammond P., Maskin E. The implementation of social choice rules: some general results on incentive compatibility // Review of Economic Studies. 1979. Vol. 46. № 2. P. 185 – 216.
208 Fagin R., Geanakoplos J., Halpern J., Vardi M. The Hierarchical Approach to Modeling Knowledge and Common Knowledge // International Jounal of Game Theory. 1999. Vol. 28. P. 331 – 365.
209 Fagin R., Halpern J., Moses Y., Vardi M. Reasoning about knowledge. – Cambridge: MIT Press, 1995.
210 Fagin R., Halpern J., Moses Y., Vardi M. Common Knowledge Revisited // Annals of Pure and Applied Logic. 1999. Vol. 96. P. 89 – 105.

211 Fagin R., Halpern J., Vardi M. A Model-theoretic Analysis of Knowledge // Journal of Assoc. Comput. Mach. 1991. Vol. 38. № 2. P. 382 – 428.
212 Fudenberg D., Levine D. The Theory of Learning in Games. Massachusetts: MIT Press, 1998. – 292 p.
213 Fudenberg D., Tirole J. Game Theory. – Cambridge: MIT Press, 1995. – 579 p.
214 Gale D., Kariv S. Bayesian Learning in Social Networks // Games and Economic Behavior. 2003. V. 45(2). P. 329 – 346.
215 Gamov G., Stern M. Puzzle Math. – N.Y.: Viking Press, 1958. – 128 p.
216 Geanakoplos J. Common Knowledge / Handbook of Game Theory. Vol. 2. Amsterdam: Elseiver, 1994. P. 1438 – 1496.
217 Gray J. Notes on Database Operating System / Operating Systems: an Advanced Course. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 66. – Berlin: Springer, 1978. P. 393 – 481.
218 Halpern J., Moses Y. Knowledge and common knowledge in a distributed environment // Journal of Assoc. Comput. Mach. 1990. Vol. 37. № 3. P. 549 – 587.
219 Harsanyi J. Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players // Management Science. Part I: 1967. Vol. 14. № 3. P. 159 – 182. Part II: 1968. Vol. 14. № 5. P. 320 – 334. Part III: 1968. Vol. 14. № 7. P. 486 – 502.
220 Heifetz A. Iterative and Fixed Point Belief // Journal of Philosophical Logic. 1999. Vol. 28. P 61 – 79.
221 Heinrich T., Wolff I. Strategic Reasoning in Hide-and-Seek Games: A Note. Research Paper Series № 74. – Konstanz: Thurgau Institute of Economics, 2012. – 15 p.
222 Hintikka J. Knowledge and Belief. – Ithaca: Cornell University Press, 1962. – 148 p.
223 Ho T., Su X. A Dynamic Level-k Model in Games. Berkeley: University of California, 2010. Working Paper. – 45 p.
224 Howard N. Theory of Meta-games // General Systems. 1966. № 11. P. 187 – 200.
225 Howard N. “General” Metagames: an Extension of the Metagame concept / Game Theory as a Theory of Conflict Resolution. – Dordrecht: Reidel, 1974. P. 258 – 280.
226 Jackson M. Social and Economic Networks. – Princeton: Princeton University Press, 2008. – 520 p.

227 Kripke S. A Completeness Theorem in Modal Logic // Journal of Symbolic Logic. 1959. № 24. P. 1 – 14.
228 Lefebvre V.A. Algebra of Conscience. 2nd ed. – Springer, 2010. – 372 p.
229 Lefebvre V.A. Sketch of Reflexive Game Theory / Proc. of Workshop on Multi-Reflexive Models of Agent Behavior. – Los Alamos, New Mexico, USA, 1998. P. 1 – 44.
230 Lewis D. Convention: a Philosophical Study. – Cambridge: Harvard University Press, 1969. – 232 p.
231 Luft J. On Human Interaction. – Palo Alto, CA: National Press, 1969. – 177 p.
232 Luft J., Ingham H. The Johari Window: a Graphic Model for Interpersonal Relations. University of California: Western Training Lab, 1955. – 55 p.
233 Mas-Collel A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.
234 McCarthy J., Sato M., Hayashi T., Igarishi S. On the Model Theory of Knowledge. Technical Report STAN-CS-78-657. – Stanford: Stanford University, 1979. – 78 p.
235 McCain R. Learning Level-k Play in Noncooperative Games. Philadelphia: Drexel University, 2010. Working Paper. – 23 p.
236 McKelvey R., Palfrey T. An Experimental Study of the Centipede Game // Econometrica. 1992. V. 60. № 3. P. 803 – 836.
237 McKelvey R., Palfrey T. Quantal Response Equilibria for Normal Form Games // Games and Economic Behavior. 1995. V. 10(1). P. 6 – 38.
238 Mertens J.F., Zamir S. Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information // International Journal of Game Theory. 1985. № 14. P. 1– 29.
239 Miller G. The Magical Number Seven Plus or Minus Two: Some Limits on Capacity for Information Processing // Psychological Review. 1956. Vol. 63. № 1. P. 81 – 92.
240 Morris S. Approximate Common Knowledge Revisited // International Journal of Game Theory. 1999. Vol. 28. P. 385 – 408.
241 Morris S., Shin S.S. Approximate Common Knowledge and Coordination: Recent Lessons from Game Theory // Journal of Logic, Language and Information. 1997. Vol. 6. P. 171 – 190.
242 Moulin H. Game Theory for Social Sciences. – NY: New York Press, 1986. – 228 p.

243 Myerson R. Game Theory: Analysis of Conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
244 Nagel R. Experimental Results on Interactive Competitive Guessing // American Economic Review. 1995. Vol. 85. № 6. P. 1313 – 1326.
245 Nagel R. Unraveling in Guessing Games: An Experimental Study // AER. 1995. V. 85. P. 1313 – 1326.
246 Nash J.F. Non-cooperative Games / Ann. Math. 1951. Vol. 54. P. 286 – 295.
247 Nisan N., Roughgarden T., Tardos E. et al. Algorithmic Game Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 776 p.
248 Pearce D.G. Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection // Econometrica. 1984. № 5. 1029 – 1050.
249 Penta A. Higher Order Uncertainty and Information: Static and Dynamic Games // Econometrica. 2012. Vol. 80. № 2. P. 631 – 660.
250 Rapoport A., Guyer M. A Taxonomy of 2×2 Games / General Systems: Yearbook of the Society for General Systems Research. 1966. № 11. P. 203 – 214.
251 Ross L., Greene D., House P. The “False Consensus” Effect: an Egocentric Bias in Social Perception and Attribution // Journal of Experimental Social Psychology. 1977. Vol. 13. P. 279 – 301.
252 Rubinstein A. The Electronic Mail Game: Strategic Behavior Under “Almost Common Knowledge” // American Economic Review. 1989. Vol 79. P. 385 – 391.
253 Sakovics J. Games of Incomplete Information without Common Knowledge Priors // Theory and decision. 2001. № 50. P. 347 – 366.
254 Schelling T. The Strategy of Conflict. – Cambridge: Harvard University Press, 1960. – 328 p.
255 Shoham Y, Leyton-Brown K. Multiagent systems: Algorithmic, Game-Theoretical and Logical Foundations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 504 p.
256 Simon R. The Difference of Common Knowledge of Formulas as Sets // International Journal of Game Theory. 1999. Vol. 28. P. 367 – 384.
257 Sobel J. Giving and Receiving Advice. – 2010. URL: www.webmeets.com/files/papers/ESWC/2010/3055/20100820-Sobel-pairedinvitedsession[1].pdf (дата обращения 21.01.2011).
258 Stahl D. Evolution of Smart$_n$ Players // Games and Economic Behavior. 1993. № 5. P. 604 – 617.

**259** Stahl D., Wilson P. Experimental Evidence on Players' Models of Other Players // Journal of Economic Behavior and Organization. 1994. Vol. 25. P. 309 – 327.
**260** Stahl D., Wilson P. On Players Models of Other Players: Theory and Experimental Evidence // Games and Economic Behavior. 1995. V. 10. P. 213 – 254.
**261** Strzalecki T. Depth of Reasoning and Higher Order Beliefs Working Paper. – Harvard: Harvard University, 2010. – 32 p.
**262** Sutter M., Czermak S., Feri F. Strategic sophistication of individuals and teams in experimental normal-form games. University of Innsbruck. Working Paper. – 55 p.
**263** The Handbook of Experimental Economics / Ed. by J. Kagel and A. Roth. – Princeton: Princeton University Press, 1995. – 740 p.
**264** Van Huyck J., Cook J., Battalio R. Adaptive Behavior and Coordination Failure // J. of Economic Behavior and Organization. 1997. V. 32. P. 483 – 503.
**265** Vanderschraaf P. Knowledge, Equilibrium and Conventions // Erkenntnis. 1998. Vol. 49. P. 337 – 369.
**266** Weber R. Behavior and Learning in the «Dirty Face» Game // Experimental Economics. 2001. Vol. 4. P. 229 – 242.
**267** Weibull J. Evolutionary Game Theory. – Cambridge: MIT Press, 1995. – 265 p.
**268** Wolter F. First Order Common Knowledge Logics // Studia Logica. 2000. Vol. 65. P. 249 – 271.
**269** Wright J., Leyton-Brown K. Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games / Proc. of Conf. Associat. Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10), 2010. P. 461 – 473.

Научное издание

*НОВИКОВ Дмитрий Александрович*
*ЧХАРТИШВИЛИ Александр Гедеванович*

# РЕФЛЕКСИЯ И УПРАВЛЕНИЕ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Обложка *Ю.В. Уманец*

ИД № 01389 от 30.03.2000
Гигиеническое заключение № 77.99.02.953.Д.005466.07.03
от 25.07.2003

Подписано в печать 15.10.2012. Формат 60 × 90 / 16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,75. Уч.-изд. л. 28,45.
Тираж 1000 экз.

Издательство физико-математической литературы
123182 Москва, ул. Щукинская, д. 12, к.1