А.Г.Ивановский, И.А.Горгидзе

ОБ ОДНОЙ ЭПИСОГЛАСОВАННОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему из n предприятий. Каждое предприятие может выпускать продукцию m различных видов. Обозначим $s_{ij}>0$ – оценку производительности предприятия i по продукции вида j, q_{ij} – затраты предприятия i на единицу времени работы по выпуску продукции вида j, x_{ij} – продолжительность работы предприятия i по выпуску продукции вида j, T_i – планируемая продолжительность работы предприятия, λ_j – цена продукции вида j $(i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,m)$. Пусть задано соотношение продукции различных видов в плане выпуска продукции всеми предприятиями, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n} s_{ij}x_{ij} = \gamma B_j$, $j=1,2,\ldots,m$. Поставим задачу определить $x_{ij}\geq 0$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$ и $\gamma>0$ такие, что

$$\gamma \longrightarrow max \tag{I}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij}x_{ij} = \gamma B_j, \quad j=1,2,\ldots,m; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = T_i, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Содержательно эта задача соответствует максимизации выпуска продукции в заданном отношении. Пусть функция предпочтения предприятия i имеет вид

$$\psi_i(\lambda, x_i) = \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j s_{ij} - q_{ij})x_{ij}.$$

Поставим задачу определить оптимальный согласованный план, то есть оптимальный план, удовлетворяющий условиям согласования

$$\left[\max_k(\lambda_k s_{ik} - q_{ik}) - (\lambda_j s_{ij} - q_{ij})\right]x_{ij} = 0, \quad i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m. \tag{4}$$

Обозначим γ_m – значение γ в оптимальном плане задачи (I)-(3), γ_c – значение γ в оптимальном согласованном плане, то есть в решении задачи (I)-(4). Коэффициентом согласования системы называется отношение [I,2,3,4]

$$\rho_c = \frac{\gamma_c}{\gamma_m} \leqslant 1. \qquad (5)$$

Если $\rho_c = 1$ при любых значениях $s_{ij} > 0$, $q_{ij} > 0$ ($i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$), то модель называется эписогласованной [2].

Теорема. Модель (I)-(4) является эписогласованной.

Доказательство. Положим $\gamma = \gamma_m$ и рассмотрим множество планов, удовлетворяющих условиям (2), (3), где $\gamma = \gamma_m$. Очевидно, это множество оптимальных планов. Необходимо доказать, что среди них найдется хотя бы один согласованный план. Рассмотрим следующую распределительную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} q_{ij} x_{ij} \longrightarrow min \qquad (6)$$

при ограничениях (2), (3) и $\gamma = \gamma_m$. Очевидно, эта задача имеет решение. Поэтому двойственная задача тоже имеет решение. Обозначим λ_j ($j = 1,2,\ldots,m$) и ϑ_i ($i = 1,2,\ldots,n$)-двойственные переменные и выпишем двойственную задачу

$$-\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i T_i + \sum_{j=1}^{m} \gamma_m B_j \lambda_j \longrightarrow max \qquad (7)$$

при ограничениях

$$\lambda_j s_{ij} - \vartheta_i \leqslant q_{ij} \ ; \ (i = 1,2,\ldots,n \ ; \ j = 1,2,\ldots,m). \qquad (8)$$

Выпишем необходимые и достаточные условия оптимальности

$$(\lambda_j s_{ij} - q_{ij} - \vartheta_i) x_{ij} = 0 \ ; \ (i = 1,2,\ldots,n \ ; \ j = 1,2,\ldots,m). \qquad (9)$$

Отсюда следует, что для оптимальных решений x^0, λ^0 прямой и двойственной задач имеет место

$$\left[\max_k (\lambda_k^0 s_{ik} - q_{ik}) - (\lambda_j^0 s_{ij} - q_{ij})\right] x_{ij}^0 = 0 \ ;$$

$$i = 1,2,\ldots,n \ ; \ j = 1,2,\ldots,m.$$

Таким образом, план x^0 удовлетворяет условиям согласования. Осталось доказать, что существует согласованное управление $\lambda^0 \geqslant 0$. Для этого заметим, что из условий $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} s_{ij} \geqslant \gamma_m B_j$ $j = 1,2,\ldots,m$ следует, что $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} s_{ij} = \gamma_m B_j$. Поэтому условия (2) в задаче (2), (3), (6) можно заменить на условия

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \geq \gamma_m B_j \; ; \; j=1,2,\ldots,m. \qquad (10)$$

При этом для двойственной задачи получаем добавочные ограничения $\lambda_j \geq 0$, $j=1,2,\ldots,m$.

Литература

1. Бурков В.Н.,Ивановский А.Г.Решение задачи согласованного межотраслевого планирования.Материалы Всесоюзного совещания по вопросам единства методики и типизации ОАСУ. Ч. II.Баку,Аз.НИИ НТИ,1971.
2. Ивановский А.Г.Проблема согласованного планирования в активных системах.Международный симпозиум по проблемам организационного управления и иерархическим системам. Рефераты докладов.Ч.II.М.,ИАТ,1972.
3. Бурков В.Н.,Ивановский А.Г.,Горгидзе И.А.Некоторые задачи управления активными системами.Сб."Актуальные вопросы технической кибернетики".М.,"Наука",1972.
4. Ивановский А.Г.Задача согласованного планирования двух отраслей.Сб."Системы управления (проблемы и методы)". М.,"Наука",1972.