

И.М.Гуревич

**СЕТИ КЛАССИЧЕСКИХ
И КВАНТОВЫХ КОМПЬЮТЕРОВ**

Учебное пособие

Москва 2011

РЕФЕРАТ

В учебнике «Сети классических и квантовых компьютеров» дан анализ и прогнозирование развития сетей классических и квантовых компьютеров. Кратко описано современное состояние классических сетей. Дана оценка потенциальных потребностей цивилизации в передаче, переработке и хранении информации. Оценены потенциальные затраты на сети. Описаны основные проблемы и тенденции развития сетей классических компьютеров, современное состояние квантовых сетей. Дан анализ и определение перечня свойств сетей классических и квантовых компьютеров подлежащих исследованию. Приведена детализация задач исследований. Осуществлены выбор и разработка методов и моделей исследований стационарных и нестационарных сетей классических и квантовых компьютеров. Дано описание объекта моделирования. Приведены статическая модель, динамическая модель, самосогласованная система многоуровневых статических и динамических моделей сетевых систем. Описаны методы квантовой механики, закон сохранения неопределенности как методы исследований сетей квантовых компьютеров и ряд следствий – принцип информационного запрета, информационная форма закона сохранения неопределенности.

Дана оценка степени адекватности и сложности предлагаемых моделей, в том числе, произведен анализ адекватности и точности статической модели сетевой системы, динамической модели сетевой системы, сложность предлагаемых моделей. Проведены оценки и моделирование, в том числе, исследование сетей классических компьютеров - исследование общих свойств сетей, исследование динамики сети с помощью преобразования Лапласа, исследование динамики одноканальной системы массового обслуживания с бесконечной очередью, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием при различных видах изменения интенсивностей входного потока. Проведено исследование динамики сетевой системы состоящей из одноканальных бесконечных очередей, с пуассоновскими входными потоками и экспоненциальным обслуживанием, исследование динамики системы множественного доступа "Алоха", исследование динамики модельной сети, свойств Интернет. Начато исследование сетей квантовых компьютеров. Показано сохранение неопределенности при квантовых вычислениях. Дана оценка информационной емкости q -бита. Описан процесс квантовой телепортации, принцип запрета клонирования. Предложено использовать информационную емкость q -бита и телепортацию квантовых состояний для увеличения пропускной способности канала связи. Проведено исследование свойств Бозе и Ферми – частиц как физических носителей информации. Проведено обсуждение взаимосвязи сетей

классических и квантовых компьютеров. В заключение приведены основные результаты и выводы.

СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения и сокращения.....	
Введение.....	
Основная часть.....	
1. Анализ и прогнозирование развития сетей классических и квантовых компьютеров	
1.1. Современное состояние классических информационных сетей.....	
1.2. Оценка потенциальных потребностей цивилизации в передаче, переработке и хранении информации.....	
1.3. Потенциальные затраты на сети.....	
1.4. Возможности сетевой организации информационного обмена.....	
1.5. Основные проблемы.....	
1.6. Наличие соответствующих теоретических моделей.....	
1.7. Тенденции развития сетей классических компьютеров.....	
1.8. Современное состояние квантовых сетей.....	
2. Анализ и определение перечня свойств сетей классических и квантовых компьютеров подлежащих исследованию.....	
3. Детализация задач исследований.....	
4. Выбор и разработка методов и моделей исследований стационарных и нестационарных сетей классических и квантовых компьютеров.....	
4.1. Методы моделирования и исследования стационарных и нестационарных сетей.....	
4.1.1. Описание объекта моделирования.....	
4.1.2. Статическая модель.....	
4.1.3. Динамическая модель.....	
4.1.4. Самосогласованная система многоуровневых статических и динамических моделей сетевых систем.....	
4.1.5. Методы квантовой механики.....	
4.2. Закон сохранения неопределенности как метод исследований сетей классических и квантовых компьютеров.....	
4.2.1. Основная идея.....	
4.2.2. Описание физической системы (объекта).....	
4.2.3. Закон сохранения неопределенности.....	
4.2.4. Принцип информационного запрета.....	
4.2.5. Неопределенность и информация.....	
4.2.6. Информационная форма закона сохранения неопределенности.....	
5. Оценка степени адекватности предлагаемых моделей.....	
5.1. Анализ адекватности и точности статической модели сетевой системы	
5.2. Об адекватности динамической модели сетевой системы.....	
5.3. Сложность предлагаемых моделей.....	
6. Проведение оценок и моделирования.....	

6.1. Исследование сетей классических компьютеров.....	
6.1.1. Исследования общих свойств сетей.....	
6.1.2. Исследование динамики сети с помощью преобразования Лапласа.....	
6.1.3. Исследование динамики одноканальной системы массового обслуживания с бесконечной очередью, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием.....	
6.1.4. Исследование динамики сетевой системы состоящей из одноканальных бесконечных очередей, с пуассоновскими входными потоками и экспоненциальным обслуживанием.....	
6.1.5. Исследование динамики системы множественного доступа "Алоха".....	
6.1.6. Исследование динамики модельной сети.....	
6.1.7. Динамические свойства сетевых систем. Устойчивость	
6.1.8. О свойствах Интернет.....	
6.2. Исследование сетей квантовых компьютеров.....	
6.2.1. Сохранение неопределенности при квантовых вычислениях.....	
6.2.2. Информационная емкость q-бита.....	
6.2.3. Квантовая телепортация.....	
6.2.4. Запрет клонирования.....	
6.2.5. Использование информационной емкости q-бита и телепортации квантовых состояний для увеличения пропускной способности канала связи.....	
6.2.6. Бозе и ферми – частицы как физические носители информации.....	
6.3. О взаимосвязи сетей классических и квантовых компьютеров.....	
Заключение.....	
Список используемых источников.....	
Приложение 1. Об оптимизации решения задач в вычислительном центре	
Приложение 2. Оценка объема информации в системе при нестационарном входном потоке.....	

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

s - номер узла отправителя информации;

i_1, i_k - номера узлов ранее пройденных информацией;

f - номер узла смежного с узлом p , из которого информация направляется в рассматриваемую очередь pq ;

p - номер узла, в котором сформирована рассматриваемая очередь pq ;

q - номер смежного узла с узлом p , в который направляется информация потока из рассматриваемой очереди pq ;

j_1, j_m - номера узлов, которые пройдет информация потока в дальнейшем движении по сети из рассматриваемой очереди;

t - номер узла-адресата;

$\alpha\beta\dots$ – параметры входных потоков (приоритет, интенсивность и т. п.);

i – номер узла, из которого информация, идущая по адресу t , поступает в рассматриваемую очередь pq на узле p , направляясь в узел j через смежный с узлом p узел q ;

λ_{ij}^t - множество путей, используемых для передачи информации по адресу t из узла i в узел j ;

P_t – конечный полумарковский процесс, конечная цепь Маркова;

$1/\mu$ - среднее время обслуживания одного сообщения;

C – пропускная способность канала связи;

L - средняя длина сообщения;

Ψ_{pq} - характеристики очереди pq ;

λ_{pq} – интенсивность потока информации, поступающей на вход очереди pq ;

V_i^t - интенсивность внешнего потока сообщений, идущих по адресу t , поступающего в узел i ;

η^t – среднее значение произвольной сетевой характеристики для процесса

P_t ;

η – среднее значение произвольной сетевой характеристики по сети в целом;

n_a – число узлов-адресатов;

η_{ny} – число возможных промежуточных узлов;

n_{nl} – число промежуточных линий связи;

$P_{ij}^t(T)$ – частота передачи сообщений между узлами сети;

T – интервал времени измерений;

p_{ij}^t – вероятность передачи информации между узлами сети i, j ;

p_{pq}^{ijt} – вероятность выбора направлений pq при передаче информации по адресу t из узла i в узел j ;

$F_{ij}^t, \Phi_{pq}^{ijt}$ – булевы функции;

x_{mf} – булевы переменные определяющие состояние очереди (направления) mf ;

a_{mf} – вероятность направления информации в очередь (направление) mf ;

α_i^t – сетевые константы, влияющие на выбор направлений передачи;

P – матрица переходных вероятностей;

p_{ij}^t – элементы матриц переходных вероятностей P_t процесса P_t ;

ξ_{pq}^{ijt} – множество путей передачи информации, идущей по адресу t из узла i в узел j , содержащих направление pq ;

θ_m^t – времена пребывания информации в узлах сети;

ρ_{pq} – вероятность образования очередей pq заданной длины l ;

l – длина очереди;

\bar{l} – максимальная длина очереди;

τ – среднее время доставки сообщений;

v_t – вектор-столбец интенсивностей внешних потоков сообщений, идущих в узел t ;

v_{ke} – вероятность незанятости ребра ke ;

$||\Delta B||$ – оценка точности определения вероятностей незанятости ребер сети;

E – матрица, все элементы которой равны единице

Z_{dg} – матрица, полученная из матрицы Z заменой всех недиагональных элементов нулями;

D – диагональная матрица, i –й элемент которой равен $1/d_i$, а остальные элементы равны нулю;

Λ – пространство потоков;

λ^i – поток, поступающий на вход i –го узла однопродуктовой сети

ρ – метрика;

$m(\lambda)$ – матрица, элементы $m_{ij}(\lambda)$ которой зависят от λ ;

λ_{-t} – вектор-столбец, который отличается от вектора λ тем, что из него исключены компоненты, соответствующие поглощающим состояниям t ;

$Q(\lambda_{-t})$ – оператор в пространстве λ_{-t} ;

t – поглощающее состояние;

i – произвольное невозвратное состояние;

Ω_r – граница множества Ω ;

φ – отображение пространства потоков Λ в пространство показателей, характеристик сети Π ;

I – единичная матрица

O – матрица, все элементы которой равны 0;

n – вектор-строка, все элементы которого равны 1;

ζ_t – вектор-столбец, все элементы которого равны 1;

A^T – матрица, полученная из матрицы A транспортированием;

A_{sg} – матрица, полученная из матрицы A возведением в квадрат каждого элемента;

A_{dg} – матрица, полученная из матрицы A заменой всех элементов, не лежащих на главной диагонали, нулями;

$N = (n_{ij}) = (I-Q)^{-1}$ - фундаментальная матрица системы;

n_{ij} - число попаданий потока выходящего из части i системы

в часть j ;

$\tau = N \theta$ - вектор-столбец средних значений произвольной аддитивной характеристики системы;

$\theta = (\theta_i)$ - значение аддитивной характеристики системы на i -й ее части;

$D = (2N-I)N \bullet \theta_{sq} - \tau_{sq}$ - вектор-столбец дисперсией аддитивной характеристики τ ;

$B = (b_{ij}) = NR - b_{ij}$ - вероятность попадания потока выходящего из части i в часть системы j (доля потока попавшего в j -ю часть системы);

R - вектор-столбец вероятностей перехода из частей системы в часть отождествленную с поглощающим состоянием;

$H = (h_{ij}) = (N-I) N_{dq}^{-1} h_{ij}$ - вероятность попадания потока, выходящего из части i системы в часть j ;

$\Phi_{ij}(\tau)$ - функция распределения времени пребывания сообщений в очереди ij ;

$\varphi_{ij}(\tau, \lambda^{\circ}_i) = \partial \Phi_{ij}(\tau, \lambda^{\circ}_i) / \partial \tau$ плотность распределения времени пребывания сообщений в очереди;

λ°_j - интенсивность стационарного потока сообщения в j -ом узле;

ν°_j - интенсивность входного (внешнего) потока сообщений поступающих в j -ый узел;

r_{ij} - вероятность того, что сообщение из узла i попадает в узел j или вероятность того, что сообщение пройдет через очередь ij (считаем, что в сети организованы очереди перед выходными направлениями, каналами);

$\psi(x)$ - волновая функция квантового объекта;

$|\psi\rangle$ - состояние квантового объекта;

$N = - \int |\psi(x)|^2 \ln |\psi(x)|^2 dx$ - неопределенность квантового объекта, описываемого волновой функцией $\psi(x)$;

$N_\psi = - \sum |c_i|^2 \ln |c_i|^2$ – неопределенность квантового объекта, описываемого волновой функцией $\psi = \sum c_i \psi_i$;

$\varphi(x) = e^{i\alpha x} \psi(x)$ – унитарное мультипликативное преобразование;

I_{xy} – информация связи случайных величин x и y ;

N_x – неопределенность (информационная энтропия) случайной величины x ;

N_y – неопределенность (информационная энтропия) случайной величины y ;

N_{xy} – неопределенность (информационная энтропия) случайной величины (x, y) ;

$\|A\|$ - норма матрицы A ;

λ_{i0} – интенсивность стационарного входного потока в узле i ;

$\Delta\lambda_{i0}$ – изменение интенсивности входного потока;

i, j – номера узлов сети. $1 \leq i, j \leq n$. n – число узлов в сети;

$\lambda_i(t)$ – суммарное изменение интенсивности потока в узле i в момент времени t ;

$v_i(t)$ – изменение интенсивности внешнего потока, поступающего в узел i в момент времени t ;

$\lambda_j(t)$ – суммарное изменение интенсивности потока в узле j в момент времени t ;

p_{ij} – вероятность того, что сообщения из узла i будут переданы в узел j ;

$\lambda_i(0)$ – суммарная интенсивность потока в узле i в нулевой момент времени.

$v_i(0)$ – интенсивность внешнего потока, поступающего в узел i в нулевой момент времени.

$\lambda_j(0)$ – суммарная интенсивность потока в узле j в нулевой момент времени.

$|\Psi^+_{12}\rangle; |\Psi^-_{12}\rangle; |\Phi^+_{12}\rangle; |\Phi^-_{12}\rangle$ - вектора Белла.

ВВЕДЕНИЕ

Уже тридцать лет идет лавинообразный процесс развития сетей классических компьютеров. Разработаны методы исследований и проектирования сетей классических компьютеров, созданы многочисленные корпоративные сети, Интернет. Примерно десять лет столь же бурно развивается теория квантовых вычислений, квантовых компьютеров. Получен ряд результатов существенных для исследований и разработок сетей квантовых компьютеров (открыты эффекты телепортации неизвестных состояний квантовых объектов, запрета клонирования неизвестных квантовых состояний). Это и ряд других результатов дает возможность поставить задачу систематического изложения результатов исследований, разработок и эксплуатации сетей классических и квантовых компьютеров (СККК), использующих средства обработки и передачи информации, основанные на новых физических принципах.

В учебном пособии «Сети классических и квантовых компьютеров» приводится анализ и прогнозирование развития сетей классических компьютеров, Определен перечень свойств сетей классических и квантовых компьютеров подлежащих исследованию. Дана детализация задач обучения. Описаны методы и модели исследований стационарных и нестационарных сетей классических и квантовых компьютеров. Изложены оценки степени адекватности предлагаемых моделей. Приведены оценки характеристик и моделирования свойств сетей классических компьютеров. Изложены начальные результаты исследования сетей квантовых компьютеров и гибридных сетей. Исследование и разработка методов использования новых физических принципов при построении информационно-вычислительных сетей в дальнейшем позволит увеличить эффективность вычислений, решать задачи комбинаторной сложности.

Настоящий учебник предназначен для студентов университетов и технических вузов, аспирантов и специалистов по специальностям вычислительная техника, информатика, связь.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. Анализ и прогнозирование развития сетей классических и квантовых компьютеров

1.1. Современное состояние классических информационных сетей

Современное состояние классических информационных систем и сетей характеризуется следующими показателями и характеристиками.

1.1.1. Основные используемые среды передачи информации

- оптическое волокно;
- коаксиальный кабель;
- витая пара;
- радиоканалы различных диапазонов;
- звуковые каналы.

1.1.2. Основные физические носители информации

- модулированная электромагнитная волна различной частоты;
- звуковая волна.

1.1.3. Используемые принципы модуляции

- амплитудная модуляция;
- частотная модуляция;
- фазовая модуляция;
- поляризация;
- комбинированные методы.

1.1.4. Пропускная способность каналов связи

Ориентировочные текущие и прогнозируемые значения пропускной способности разных типов каналов связи даны в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Ориентировочные текущие и прогнозируемые значения пропускной способности разных типов каналов связи

Тип канала	Используемая пропускная способность	Потенциальная пропускная способность
Оптическое волокно	Десятки Гбит/с	Единицы Тбит/с
Коаксиальный кабель	Единицы Гбит/с	Десятки Гбит/с
Витая пара	Единицы Гбит/с	Десятки Гбит/с
Радиоканалы различных диапазонов	Десятки Мбит/с	Десятки Гбит/с
Звуковые каналы	Десятки Кбит/с	Сотни Кбит/с

1.1.5. Виды передаваемой информации

- голос;
- данные;
- статические изображения;
- видеoinформация, в частности, телевидение;
- комбинации перечисленных видов.

1.1.6. Основные типы абонентов

По юридическому статусу:

- физические лица;
- предприятия, корпорации;
- ведомства, государственные структуры.

По территориальному расположению.

- локализованные абоненты;
- территориально-распределенные абоненты.

1.1.7. Количество абонентов

- в развитых странах десятки процентов от численности населения;
- десятки процентов от общего числа компьютеров (в США около 90%);
- сотни миллионов пользователей Интернет.

1.1.8. Основные типы сетей

По степени охвата абонентов:

- локальные вычислительные сети;
- кампусы;
- корпоративные, ведомственные сети;
- сети общего пользования;
- Интернет.

По мобильности

- стационарные, фиксированные сети;
- мобильные сети.

1.1.9. Основные стандарты и протоколы

- Ethernet, BlueTooth;
- TCP/IP;
- SDH/ATM;
- HFC;
- XDSL;
- MPEG/DVB;
- WWW;
- GSM, DECT.

1.1.10. Основные параметры, определяющие сеть

- перечень и возможная дислокация абонентов;
- виды передаваемой информации;
- приоритеты;
- интенсивность нагрузки;
- форматы сообщений;
- структура сети;
- узлы связи;
- алгоритмы маршрутизации;
- очереди;
- правила обслуживания очередей.
- типы каналов связи, пропускная способность;
- время пребывания в узлах и очередях.

1.1.11. Основные характеристики сетей

- вероятностно-временные;
- надежностные;

- достоверность;
- пропускная способность.

1.1.12. Основные свойства сетей

- Существование и единственность распределения информационных потоков в узлах, очередях и каналах связи;
- Монотонность;
- Непрерывность;
- Устойчивость.

1.2. Оценка потенциальных потребностей цивилизации в передаче, переработке и хранении информации

Оценим потребности современной цивилизации в передаче, обработке и хранении информации. Приведем три оценки – оценку сверху для 2030-2050гг., среднюю оценку – ближайшая перспектива и оценку снизу – по-видимому, уже прошлое время.

1.2.1. Оценка сверху

Исходные предположения:

- количество людей на земном шаре, использующих информационные ресурсы, 10 миллиардов человек;
- каждый человек получает данные, речь, изображения со скоростью 1 Мбит/с

Следовательно, суммарная скорость передачи информации в информационной сети современной цивилизации составляет

$$10^{10} \times 10^6 = 10^{16} \text{ бит/с}$$

Если предположить, что вся информация перерабатывается и хранится, то в течение года на Земле (в году примерно 3×10^7 секунд) перерабатывается и накапливается 3×10^{23} бит или 4×10^{22} байт. (40 000 000 000 Терабайт в год).

1.2.2. Средняя оценка

Исходные предположения:

- количество людей на земном шаре использующих информационные ресурсы 1 миллиард человек;
- каждый человек получает данные, речь, изображения со скоростью 100 Кбит/с

Следовательно, суммарная скорость передачи информации в информационной сети современной цивилизации составляет

$$10^9 \times 10^5 = 10^{14} \text{ бит/с}$$

Если предположить, что вся информация перерабатывается и хранится, то в течение года на Земле перерабатывается и накапливается 3×10^{21} бит или 4×10^{20} байт (400 000.000Террабайт в год).

1.2.3. Оценка снизу

Исходные предположения:

- количество людей на земном шаре использующих информационные ресурсы 100 миллионов человек;
- каждый человек получает данные, речь, изображения со скоростью 10 Кбит/с

Следовательно, суммарная скорость передачи информации в информационной сети современной цивилизации составляет

$$10^8 \times 10^4 = 10^{12} \text{ бит/с}$$

Если предположить, что вся информация перерабатывается и хранится, то в течение года на Земле перерабатывается и накапливается 3×10^{19} бит или 4×10^{18} байт. (4 000 000 Террабайта в год)

Примечание. Следует отметить, что инженерно-психологические исследования дают оценку пропускной способности человека – оператора 7 бит/с (7×10^7 бит/год).

1.3. Потенциальные затраты на сети

Предположим, что на одного абонента для создания сетевой инфраструктуры и подключения к ней необходимы вложения в 100 долларов США. Тогда капитальные вложения на сети на $n = 10^{10}$ (десять миллиардов) человек составят 10^{12} долларов США – всего один триллион долларов. Если на одного абонента для создания сетевой инфраструкту-

ры и подключения необходимы вложения в 1000 долларов США, то капитальные вложения на сети на $n = 10^{10}$ (десять миллиардов) человек составят 10^{13} долларов США – десять триллионов долларов.

1.4. Возможности сетевой организации информационного обмена

Сетевая организация информационного обмена обеспечивает следующие возможности:

- вещание, оповещение;
 - обмен информации между абонентами;
 - организация единого информационного пространства;
- совместное решение задач.

1.5. Основные проблемы

В настоящее время основными проблемами являются:

- обеспечение безопасности;
- поиск абонентов;
- поиск информации;
- эффективное использование сетевых ресурсов (оптимизация структур, маршрутизация, управление).

1.6. Наличие соответствующих теоретических моделей

Начало разработки методов анализа и синтеза сетей связи в 1910г. положил Эрланг. В трудах советских ученых А.А. Харкевича, А.Д. Харкевича. С.И. Самойленко, Г.П. Захарова, М.А. Шнепс-Шнеппе. А.В. Бутрименко, И.А. Мизина. В.Г. Лазарева, Рогинского, Г.И. Пранявичуса, В.М. Ченцова, В.К. Демина, С. Шибанова, В.С. Шибанова. И.А. Соколова, В.И. Васильева и др., иностранных ученых Л. Клейнрока, Дж. Мартина, Д. Девиса. Д. Барбера и др. [1-19] разработаны методы, модели и программы, позволяющие оценивать вероятностно-временные и надежность характеристики сетей. Разработанные методы базируются на теории массового обслуживания, теории диффузионных процессов, теории расписаний, имитационных моделях. В настоящее время развит аппарат исследований и проектирования сетей классических компьютеров, позволяющий:

- исследовать статические (стационарные) сети классических компьютеров, рассчитывать их характеристики, изучать свойства статических (стационарных) сетей [20-25];
- исследовать динамику сетей классических компьютеров,

рассчитывать динамические характеристики, изучать поведение и динамику сетей, в частности, устойчивость, наблюдаемость, управляемость [26-28];

- оптимизировать структуру, алгоритмы маршрутизации, параметры сетей;

- разрабатывать методы управления сетями.

Основными теоретическими проблемами в области исследований и проектирования сетей классических компьютеров в настоящее время являются:

- исследование и иерархическая оптимизация реальных сетей большой размерности (Интернет);
- оптимальная маршрутизация в нестационарных сетях;
- оптимальное управление сетями.
- выбор оптимальных рядов средств связи и передачи данных.

1.7. Тенденции развития сетей классических компьютеров

В настоящее время можно отметить следующие тенденции развития сетей классических компьютеров:

- разработка методов и средств, позволяющих наиболее полно использовать возможности имеющейся среды передачи, сетевой инфраструктуры, в частности, спутниковых каналов, кабельного телевидения, медных проводов;
- расширение используемой полосы частот, использование новых диапазонов, повышение пропускной способности каналов связи;
- развитие сетевой инфраструктуры;
- повышение эффективности маршрутизации;
- повышение эффективности управления;
- увеличение количества абонентов, в том числе мобильных;
- использование сетей во всех видах жизнедеятельности (образование, медицина, культура, торговля, промышленность, оборона, безопасность);
- разработка методов совместного использования сетевых ресурсов при решении сложных задач.

В целом можно сделать вывод, что развитие сетей классических компьютеров осуществляется адекватно развитию компьютеров и несколько опережает потребности смежных отраслей цивилизации.

При этом развитие идет неравномерно (по странам и территориям) и, безусловно, можно привести много примеров обратного.

Имеется много научных и технических проблем, однако накопленные знания и опыт, технические и программные решения позволяют считать, что проблемы развития классических информационных систем и сетей будут преодолены.

1.8. Современное состояние квантовых сетей

Современное состояние квантовых сетей характеризуется следующим [29-35].

В настоящее время идет бурное развитие теории квантовых вычислений и квантовых компьютеров. В частности, открыт принцип квантовой телепортации, разработаны квантовые методы помехоустойчивого кодирования, которые могут быть положены в основу теории и практики сетей квантовых компьютеров. Показано, что распределенные вычисления дают возможность реализовать дополнительные функциональные возможности.

Исследуются физические принципы реализации квантовых компьютеров, проводятся экспериментальные исследования и макетирование. В 2000г. IBM продемонстрировала первый квантовый компьютер, построенный на пяти атомах.

Теоретические исследования сетей квантовых компьютеров, аналогичные исследованиям классических компьютеров, насколько это известно автору, не проводились. Во всяком случае, не доступны соответствующие публикации.

Основными проблемами исследований сетей квантовых компьютеров являются:

- выбор физических носителей информации;
- разработка адекватных методов исследований и проектирования;
- разработка эффективных методов передачи информации;
- определение областей использования сетей квантовых компьютеров;
- взаимодействие, совместное функционирование сетей квантовых и классических компьютеров.

2. Анализ и определение перечня свойств сетей классических и квантовых компьютеров подлежащих исследованию

В таблице 2.1 приведен перечень характеристик сетей классических компьютеров, сетей квантовых компьютеров сетей классических и квантовых компьютеров (гибридных сетей).

Таблица 2.1 – Перечень характеристик сетей классических и квантовых компьютеров

Характеристики	Сеть классических компьютеров	Сеть квантовых компьютеров	Сеть классических и квантовых компьютеров
Носители информации:			
Хранение информации	Системы атомов, молекул	Ферми-частицы	Системы атомов, молекул, Ферми-частицы
Передача информации	Модулированная электромагнитная волна (система Бозе-частиц)	Бозе и ферми-частицы	Бозе-частицы и ферми-частицы системы Бозе-частиц
Узлы сети	Компьютеры, маршрутизаторы, коммутаторы	Компьютеры	Компьютеры, маршрутизаторы, коммутаторы
Каналы связи	Модулированная электромагнитная волна (система Бозе частиц с нулевой массой покоя)	Бозе и ферми частицы	Бозе-частицы, системы Бозе-частиц, ферми частицы
Очереди	Организуются в компьютерах и маршрутизаторах	Отсутствуют	Организуются в классических компьютерах и маршрутизаторах
Маршрутизация	Осуществляется в компьютерах и маршрутизаторах	Отсутствует	Осуществляется в классических компьютерах и маршрутизаторах
Характеристики се-			

тей ККК:			
Вероятностно-временные	+	Подлежат исследованию	Подлежат исследованию
Надежность	+	Подлежат исследованию	Подлежат исследованию
Достоверность	+	Подлежат исследованию	Подлежат исследованию
Пропускная способность	+	Подлежат исследованию	Подлежат исследованию
Устойчивость носителя информации	-	Подлежат исследованию	Подлежат исследованию
Свойства			
Существование и единственность распределения информационных потоков в узлах сети	+	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию
Монотонность	+	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию
Непрерывность	+	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию
Устойчивость	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию
Наблюдаемость	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию
Управляемость	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию	Подлежит исследованию
8. Наличие возможностей			
Помехоустойчивого кодирования	Имеется	Имеется	Имеется
Копирования носителей информации	Имеется	Имеется (ограничено)	Имеется (ограничено)
Клонирования носителей информации	Имеется	Отсутствует	Имеется в классической части
Увеличение пропускной способности канала связи	Ограничена теоремами Шеннона	Имеется	Имеется

3. Детализация задач исследований

Основные задачи.

3.1. Определение перечня свойств сетей классических и квантовых компьютеров, подлежащих исследованию

Определение перечня свойств сетей классических и квантовых компьютеров, подлежащих исследованию, включает следующие задачи:

- определение перечня свойств сетей классических компьютеров,
- определение перечня свойств сетей квантовых компьютеров,
- определение перечня свойств сетей классических и квантовых компьютеров.
- сравнительный анализ свойств сетей классических и квантовых компьютеров.

3.2. Выбор и разработка методов и моделей исследований

Выбор и разработка методов и моделей исследований включает следующие задачи:

- выбор и разработка методов и моделей исследований сетей классических компьютеров;
- выбор и разработка методов и моделей исследований сетей квантовых компьютеров;
- выбор и разработка методов и моделей исследований сетей классических и квантовых компьютеров;
- оценка степени адекватности, трудоемкости и времени моделирования сетей классических компьютеров;
- оценка степени адекватности, трудоемкости и времени моделирования сетей квантовых компьютеров;
- оценка степени адекватности, трудоемкости и времени моделирования сетей классических и квантовых компьютеров.

3.3. Проведение оценок и моделирования

Проведение оценок и моделирования включает следующие задачи:

- оценка максимальной информационной емкости q -бита;

- оценка максимальной пропускной способности канала связи использующего потенциальную емкость q-бита и процесс квантовой телепортации;
- построение моделей и исследование свойств и оценка характеристик сетей классических компьютеров;
- построение моделей и исследование свойств и оценка характеристик сетей квантовых компьютеров;
- построение моделей и исследование свойств и оценка характеристик сетей классических и квантовых компьютеров.

3.4. Анализ полученных результатов

Анализ полученных результатов включает следующие работы:

- сравнительный анализ характеристик и свойств сетей классических компьютеров, сетей квантовых компьютеров, сетей классических и квантовых компьютеров;
- обобщение результатов исследований.

3.5. Разработка рекомендаций по эффективным областям использования и построению систем и сетей классических и квантовых компьютеров

Разработка рекомендаций по эффективным областям использования и построению систем и сетей классических и квантовых компьютеров включает следующие работы:

- разработка рекомендаций по дальнейшим исследованиям и разработкам;
- определение результатов подлежащих реализации;
- выявление критических областей создания СККК;
- определение результатов подлежащих реализации;
- разработка проекта ТЗ на ОКР по внедрению результатов НИР;
- разработка проекта ТЗ на НИР по исследованию критических областей создания СККК.

Примечания:

1. Должны быть рассмотрены стационарные сети, сети с изменяющейся входной нагрузкой, сети с ненадежными узлами и каналами связи;
2. В ходе исследований должны быть учтены входная нагрузка, приоритеты сообщений, структура системы, сети, алгоритмы маршрутизации, параметры и дисциплины обслуживания

- очередей в узлах сети, пропускные способности каналов связи;
3. В ходе исследований должны быть разработаны методы и модели определения пропускной способности, времени доставки сообщений, надежности доставки, вероятности образования циклов;
 4. В ходе исследований должны быть разработаны методы и модели описывающие динамику сети, определения длительности переходных процессов;
 5. В ходе исследований должны быть разработаны методы исследования свойств СККК: доказательства существования и единственности распределения информационных потоков в узлах сети, монотонности, непрерывности, исследования устойчивости носителей информации и сетей;
 6. Должна быть обеспечена возможность исследования и разработки, в дальнейшем, методов организации вычислений в СККК.

4. Выбор и разработка методов и моделей исследований стационарных и нестационарных сетей классических и квантовых компьютеров

4.1. Методы моделирования и исследования стационарных и нестационарных сетей

4.1.1. Описание объекта моделирования

Сети связи, системы передачи данных, системы обмена данными, вычислительные сети, информационные системы и сети представляют собой сложные искусственные объекты, содержащие многие тысячи взаимосвязанных, территориально-распределенных элементов, важнейшим назначением которых является передача информации между абонентами, в качестве которых выступают люди и вычислительные машины (классические и квантовые). Составляя в настоящее время инфраструктуру систем управления, жизнеобеспечения и жизнедеятельности сети связи в значительной мере определяют их эффективность. Стоимость функционирующих и проектируемых сетей связи достигает сотен миллиардов долларов. Сложность и высокая стоимость сетей связи определяют объективную потребность разработки и использования методов исследования и проектирования сетей связи, удовлетворяющих требованиям адекватности, точности и эффективности. Адекватность - это свойство метода учитывать основные факторы, влияющие на процессы передачи информации. Адекватность метода является необходимым условием обеспечения требуемой точности расчетов, которая для задач исследования и создания сетей связи составляет 10-20%. Эффективность метода определяется потребностями в используемых для вычислений ресурсах времени и памяти.

Начало разработки методов анализа и синтеза сетей связи в 1910г. положил Эрланг. Как уже отмечалось в трудах советских ученых А.А. Харкевича, А.Д. Харкевича, С.И. Самойленко, Г.П. Захарова, М.А. Шнепс-Шнеппе, А.В. Бутрименко, И.А. Мизина, В.Г. Лазарева, Рогинского, Г.И. Пранявичуса, В.М. Ченцова, В.К. Демина, С. Шибанова, В.С. Шибанова, И.А. Соколова, В.И. Васильева и др., иностранных ученых Л. Клейнрока, Дж. Мартина, Д. Девиса, Д. Барбера и др. разработаны методы, модели и программы, позволяющие оценивать вероятностно-временные и надежность характеристики сетей. Разработанные методы базируются на теории массового обслуживания, теории диффузионных процессов, теории расписаний, имитационных моделях.

В разработанных моделях, за исключением имитационных, не учитываются сетевые, маршрутные алгоритмы, процедуры. Имитационные же

модели сложны и требуют значительных ресурсов. Л. Клейнрок в перечне нерешенных проблем, связанных с анализом и проектированием сетей, в первую очередь, отмечает: "Имеется ряд явлений, для которых не созданы модели (в частности, к ним относятся явления, которые связаны с процедурами выбора маршрутов и управления потоками), а для большого числа явлений получены лишь частные результаты. Главная трудность состоит в сильной взаимозависимости поведения различных очередей в сети массового обслуживания, которая проявляется, как только рассматривается какая-либо реальная модель сети" [2].

В настоящем разделе излагается метод исследований и проектирования сетей связи, решающий проблему создания модели стационарной сети связи, которая учитывает процедуры выбора маршрутов и управления сообщениями и удовлетворяет требованиям адекватности, точности и эффективности.

Сети связи, системы передачи, обмена данными, вычислительные, информационные системы и сети являются искусственными объектами, характеризующимися:

1) совокупностью абонентов сети, в качестве которых выступают люди, взаимодействующие с оконечным оборудованием, терминалами, автоматизированными рабочими местами, и электронно-вычислительные машины, взаимодействующие с мультиплексорами, модемами, аппаратурой передачи данных. Количество абонентов для ведомственных сетей достигает нескольких тысяч, для сетей общего пользования, Интернет сотен миллионов. Абоненты сети территориально распределены на сотни, тысячи, десятки тысяч километров. Абоненты обмениваются речевыми сообщениями, данными, изображениями;

2) совокупностью узлов связи, на которых осуществляется выбор маршрутов передачи информации, хранение информации, ограничение информационных потоков, исключение информации из сети, перераспределение информации между очередями и каналами, передача информации по каналам связи;

3) совокупностью каналов связи, соединяющих узлы связи. По каналам связи осуществляется перенос информации в виде физического сигнала. Каналы связи на ребрах соединяющих узлы сети могут образовывать пучки.

Узлы взаимосвязанные каналами определяют структуру сети;

4) сетевыми алгоритмами, задающими процедуры выбора маршрутов и управления потоками. Сетевые алгоритмы определяют маршрут движения сообщений по сети;

5) правилами организации и ведения очередей сообщений в узлах сети. Правилами резервирования элементов сети;

6) параметрами элементов сети:

- канальной емкостью ребер сети;

- пропускной способностью каналов связи;
- длиной канала связи;
- вероятностью ошибок на знак, бит при передаче сообщения по каналу связи;
- объемами памяти, отводимыми на узлах связи для организации очередей;
- стоимостью передачи сообщений по каналу связи и т.п.;

7) параметрами информационного обмена:

- интенсивностью потоков между абонентами сети, изменением интенсивности;
- временем между поступлением соседних сообщений;
- длиной сообщений;

8) совокупностью сетевых (системных) характеристик, описывающих качество обслуживания абонентов системы и качество функционирования сети связи, включая аддитивные, по пути, проходимому информацией:

- время доставки сообщений, его составляющие – время установления соединений, время переноса информации, время пребывания сообщений в узлах сети;

- длина пути, проходимого сообщением, число переприемов, длина циклов, стоимость передачи сообщений, величина помех и т.д.;
- вероятностные;
- надежность доставки сообщений, вероятность доставки сообщений по неправильному адресу, вероятность установления соединений, вероятность установления соединений по неправильному адресу, вероятность образования циклов, вероятность передачи сообщений из одного узла сети в другой и т.п.;
- прочие (интенсивность потоков в узлах и ребрах сети, очередях, коэффициенты использования (загрузки) каналов связи, длины очередей, время пребывания сообщений в узлах сети и т.п.).

В разделе 4.1.2. описываются стационарные сети, в которых входные потоки стационарны, структура сети, сетевые алгоритмы, правила организации и обслуживания очередей, правила резервирования элементов сети, параметры элементов сети фиксированы. Модели нестационарных сетей рассматриваются в разделах 4.1.3., 4.1.4.

Преодолеть "проклятие размерности" при исследованиях и проектировании сетей связи, вычислительных сетей, информационных систем, учитывая при этом основные сетевые факторы, можно, если перейти от однородного описания сети в целом на уровне очередей к модели сети связи иерархической конструкции.

4.1.2. Статическая модель

Предлагаемая трехуровневая модель сети включает модели сетевого уровня, модели уровня узла, модели уровня очередей. Модели сетевого уровня отображают процессы передачи информации по сети связи в целом, описывают вероятностно-временные и прочие характеристики сети. Модели уровня узла отображают процедуры выбора маршрутов и управления потоками, процедуры распределения потоков между очередями. Описывают вероятностно-временные характеристики узлов сети. Модели уровня очередей отображают процедуры обслуживания информационных потоков в очередях, формируемых в узлах сети. Описывают вероятностно-временные характеристики очередей.

Допускается объединение моделей уровня узла и уровня очередей. В этом случае модель сети становится двухуровневой, причем модели уровня узла - очередей описывают вероятностно-временные характеристики узлов сети и очередей. В процессе исследований, моделирования, расчетов модели сетевого уровня, уровня узла и уровня очередей объединяются в единую систему взаимосвязанных моделей. В систему моделей сети связи могут быть добавлены модели частных элементов и процессов, определяющих константы для предлагаемой трехуровневой модели.

а) Правила идентификации очередей и потоков

В виду того, что существенное значение в формировании трехуровневой модели сети связи имеет идентификация очередей, потоков, дадим их формальное описание.

Не нарушая общности рассмотрения, будем считать, что очереди формируются в узлах сети перед выходным направлением. Таким образом, очереди будут идентифицироваться двумя индексами rq , uv , mf , ..., первый из которых обозначает узел, на котором формируется очередь, второй – смежный узел, в который информация пойдет из данной очереди.

Будем рассматривать (выделять) те потоки, которые различают сетевые алгоритмы, т. е. Потоки, которые формируют сетевые алгоритмы, направляя информацию при всевозможно различных состояниях элементов (очередей) сети и сочетание этих состояний с учетом параметров входных потоков.

В общем случае, в модели могут различаться потоки с учетом всего предыдущего и будущего маршрута передачи информации и таких параметров входных потоков как приоритет, длина сообщения и т. п. Поток в общем случае идентифицируется набор индексов:

$$s i_1 \dots i_k f p q j_1 \dots j_m t \alpha \beta \dots$$

s – номер узла отправителя информации;

i_1, \dots, i_k – номера узлов ранее пройденных информацией;

f – номер узла смежного с узлом p , из которого информация направляется в рассматриваемую очередь pq ;

p – номер узла, в котором сформирована рассматриваемая очередь;

q – номер смежного узла с узлом p , в который направляется информация потока из рассматриваемой очереди pq ;

$j_1 \dots j_m$ – номер узлов, которые пройдет информация потока в дальнейшем движении по сети из рассматриваемой очереди pq ;

t – номер узла-адресата;

α, β, \dots – параметры входных потоков (приоритет, интенсивность и т.п.).

Если необходимо рассматривать внутренние потоки на узлах, то в идентификаторы очередей необходимо добавить индексы дополнительных фиктивных узлов.

Однако, существование сетей с сетевыми алгоритмами, различающимися столь детально определенными очередями, маловероятно, и в дальнейшем, не нарушая общности, будем считать, что поток идентифицируется пятью индексами: i, p, q, j, t , i – номер узла, из которого информация, идущая по адресу t , поступает в рассматриваемую очередь pq на узле p , направляясь в узел j через смежный с узлом p узел q .

Введение в рассмотрение потоков $i p q j t$ достаточно для исследования весьма сложных сетевых алгоритмов.

Если узел j совпадает с узлом t $j \equiv t$, то потоки идентифицируются четырьмя индексами $i p q t$.

Для класса сетевых алгоритмов, составляющих способы коммутации сообщений, пакетов и способ коммутации каналов при установлении соединения служебным сообщением, узел i совпадает с узлом p , узел j совпадает с узлом q – $i \equiv p, j = q$ и потоки идентифицируются тремя индексами $p q t$.

Потоки, направленные на вход очередей $p q$, будем обозначать символом λ с соответствующими идентификаторами: $\lambda_{pq}^{ij t}, \lambda_{pq}^{i t}, \lambda_{pq}^t$, соответственно.

б) Системы потоковых уравнений

Законы сохранения в сетях находят свое выражение прежде всего в системе потоковых уравнений. Системы потоковых уравнений состояются относительно интенсивности потоков, поступающих на вход элементов, фрагментов сети и отражают тот факт, что информация

в процессе ее передачи по сети связи не может самопроизвольно появляться и исчезать, что информация в соответствии с реализуемыми сетью сетевыми алгоритмами из данного узла (очереди) будет доведена до адресата или передана в другой узел (очередь), или будет «потеряна», вследствие отказов в поступлении в очереди, истечения допустимого времени пребывания в сети и т.п. Поточковые уравнения могут составляться как для суммарных потоков, обладающих определенными свойствами или отличительными признаками, например, для потоков заданных приоритетов, потоков, идущих в определенные адреса, очереди. Поточковые уравнения могут взаимосвязывать потоки в смежных и в произвольных элементах сети.

Системы поточковых уравнений составляются на всех уровнях рассматриваемой модели сети.

Система поточковых уравнений сетевого уровня имеет вид

$$\lambda_j^t = \sum_i p_{ij} \lambda_i + v_j^t$$

$i, j, t = 1, \dots, n.$

Данная система уравнений говорит о том, что интенсивность информационного потока, идущего по адресу t и поступающего на узел j , равна сумме интенсивности информационных потоков, поступающих в данный узел j из других узлов $i - p_{ij}^t \cdot \lambda_i$ и внешнего потока, поступающего в данный узел $j - v_j^t$. В состав рассматриваемых узлов включаются узлы сети, которым соответствуют состояния конечных полумарковских процессов P_t , а также дополнительные (фиктивные) состояния, в которые в модели направляются «потерянные» сообщения.

Системы поточковых уравнений уровня узла связывают потоки, входящие в узел и исходящие из него. Система поточковых уравнений очереди связывает интенсивность потока на выходе очереди и интенсивность потока на входе очереди.

Модели сетевого уровня отображают процессы передачи информации по сети связи в целом. Модели сетевого уровня взаимосвязывают значения сетевых характеристик с сетевыми алгоритмами (задаваемыми моделями уровня узла), правилами обслуживания очередей и параметрами элементов сети (задаваемыми моделями уровня очередей). Сетевой уровень представляется совокупностью конечных цепей Маркова (КЦП) [36], конечных полумарковских процессов (КПП) [37]. Каждому узлу адресату ставится в соответствие один и только один конечный полумарковский процесс.

Состояние КЦП, КПП в общем случае отождествляются с узлами сети. Как правило, все процессы определены на одних к тех же состояниях. Каждому узлу может ставиться в соответствие несколько состояний КЦП, КПП. При необходимости, состояниями КЦП, КПП могут

объявляться определенные совокупности элементов сети, очереди, события. Могут также вводиться дополнительные или фиктивные состояния (в которые, например, будут направляться потерянные по разным причинам сообщения). Определение множеств(а) состояний процессов производится Исследователем или Конструктором в соответствии со стоящей перед ним задачей,

В качестве сетевых моделей используются как поглощающие КЦП, КПП (в этом случае узлы-адресаты в каждом КПП объявляются поглощающими состояниями), так и регулярные КПП.

Элементы матриц переходных вероятностей и значения процессов на состояниях КПП (узлах сети) вычисляются моделями уровня узла.

Модели уровня узла отображают процедуры выбора маршрутов и управления потоками, процедуры распределения потоков между очередями. Модели уровня узла взаимосвязывают значения вероятностей передачи информации между узлами сети (являются элементами матриц переходных вероятностей КЦП, КПП), значения вероятностей выбора направлений передачи (направления передачи отождествляются с очередями, организуемыми перед направлениями) при передаче информации по адресу t из узла i в узел j , времена пребывания информации в узлах сети с вероятностями направления информации в очереди и временами обслуживания информации в очередях. Кроме того, модели уровня узла определяют зависимости вероятности направления информации в очередь (направление) от вероятностно-временных характеристик очередей и сетевых констант, влияющих на выбор направлений передачи. Последние модели могут быть выделены в отдельный уровень. Сетевые процедуры (алгоритмы) задаются в виде совокупности булевых функций, определяющих условия передачи информации между узлами сети. Аргументами булевых функций являются булевы переменные, описывающие состояния элементов сети (очередей).

Булевы функции задаются для всех адресатов и всех пар узлов. Условия передачи информации обладают свойством полноты.

Состояния булевых переменных могут иметь разнообразный физический смысл – "работоспособен", "не работоспособен", "свободен", "занят", "очередь не превышает заданной длины, длина очереди плюс константа, плюс время доставки – минимально из заданной совокупности очередей" и т.п. Состояния могут также составлять комбинации вышеописанных состояний разных элементов сети и любых очередей.

Вероятность передачи информации, идущей в адрес t из узла i в узел j , есть вероятность того, что булева функция принимает значение единицы и определяется вероятностями принятия переменными значения единицы :

Данные вероятности являются элементами матриц переходных вероятностей модели сетевого уровня.

Модели уровня очередей отображают процессы обслуживания информационных потоков в очередях, формируемых в узлах сети. Модели уровня очередей устанавливают взаимосвязь между вероятностно-временными характеристиками очередей и входными потоками, характеристиками моделей очередей. Модели описывают (учитывают) дисциплину обслуживания ("в порядке поступления", "последний пришел – первый обслуживается", "обслуживание с разделением процессора" и т.д.), структуру системы обслуживания (одноканальная, многоканальная), ограничения на длину очереди (нулевая очередь, конечная очередь, бесконечная очередь), ограничения на время пребывания сообщений в очереди, законы распределения интервала времени между моментами поступления информации, законы распределения времени обслуживания, приоритеты.

В моделях уровня очередей осуществляется вычисление вероятностей образования очереди заданной длины, вероятностей, того, что сообщения, поступившие на вход очереди, пройдут через эту очередь, времени обслуживания информации в очереди. Вероятность того, что сообщения, поступившие на вход очереди, пройдут через нее, равна вероятности того, что не все места в очереди заняты

Модели уровня очередей могут быть заданы в виде формулы, систем уравнений, решение которых производится в ходе вычисления значений сетевых характеристик, в виде параметров или функциональных зависимостей, полученных в результате имитационного моделирования или статистических измерений.

В настоящее время, модели очередей в аналитическом виде получены, главным образом, в предположениях о пуассоновских входных потоках и экспоненциальном обслуживании.

Приведем ряд основных формул теории конечных цепей Маркова [36], с использованием которых производится оценка систем.

$$N = (I - Q)^{-1} \text{ - фундаментальная матрица системы;}$$

Q - матрица, получаемая из матрицы переходных вероятностей системы P вычеркиванием строки и столбца соответствующих части системы, отождествленной с поглощающим состоянием;

I - единичная матрица;

$$N = (n_{ij}), \text{ где}$$

n_{ij} - число попаданий потока выходящего из части i системы в часть j ;

$$\tau = N \theta.$$

$\tau = (\tau_i)$ - вектор-столбец средних значений произвольной аддитивной характеристики системы $\theta = (\theta_i)$.

θ_i - значение аддитивной характеристики системы на i -й ее части.

$$D=(2N-I)N \bullet \theta_{sq} - \tau_{sq}$$

– вектор-столбец дисперсией аддитивной характеристики τ .

(A_{sq} матрица, полученная из матрицы A возведением ее элементов в квадрат).

$$B=(b_{ij})=NR.$$

b_{ij} - вероятность попадания потока выходящего из части i в часть системы j (доля потока попавшего в j -ю часть системы);

R - вектор-столбец вероятностей перехода из частей системы в часть отождествленную с поглощающим состоянием.

$$H = (h_{ij}) = (N-I)N_{dq}^{-1}$$

h_{ij} - вероятность попадания потока, выходящего из части i системы в часть j .

A_{dq} - матрица, полученная из матрицы A , заменой всех недиагональных элементов нулями.

Объем вычислений по приводимым формулам пропорционален n^3 .

Отметим, что оценку систем можно производить также с использованием теории регулярных цепей Маркова. Оценка функций распределения характеристик систем производится с использованием аппарата полумарковских процессов, с вложенными КЦМ, определяемыми, как и ранее. Использование предлагаемого аппарата адекватно для стационарных систем в случае алгоритмов обмена не использующих информацию о предыдущем и последующем пути потока, а также в случаях, когда смена состояний связей x_{ke} происходит много быстрее продолжительности циклов. В противном случае получаемые оценки являются оценками сверху.

Методы и примеры оценок характеристик сетей связи, вычислительных сетей с использованием предлагаемого аппарата КЦМ (ПМП) – нелинейная статическая модель сетевой системы приведены в [20-28].

Как уже отмечалось, статическая модель сетевой системы включает три уровня:

- сетевой уровень;
- уровень узла;
- уровень очередей.

Сетевой уровень описывает характеристики сетевой системы в целом:

- вероятностно-временные характеристики доставки сообщений, в том числе среднее время, дисперсия, функция распределения;

- другие характеристики аддитивные по проходимому пути, в том числе, длина пути, число переключений, ошибки; стоимость доставки;
- надежность доставки сообщений, в том числе, вероятность доставки, вероятность доставки по неправильному адресу, вероятность образования циклов;
- надежность сетевой системы, в том числе, связность, коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности;
- нагрузку на узлы и каналы связи.

Уровень узла описывает характеристики узлов сети:

- вероятностно-временные характеристики пребывания сообщений в узлах сети, в том числе среднее время, дисперсия, функция распределения;
- вероятности передачи сообщений из узла к другим узлам сети;
- вероятность потери сообщения на узле;
- надежность узла, в том числе, коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности;
- нагрузку на узлы.

При построении модели сети описывается каждый узел.

Уровень очередей описывает характеристики очередей сети:

- вероятностно-временные характеристики пребывания сообщений в очередях сети, в том числе среднее время, дисперсия, функция распределения;
- вероятности прохождения очереди;
- вероятность потери сообщения на узле;
- нагрузку на очередь.

При составлении модели описывается каждая очередь сети.

На основе моделей всех трех уровней составляется система потоковых уравнений, которая содержит всю информацию о сети.

Сетевой уровень моделируется совокупностью конечных цепей Маркова или совокупностью конечных полумарковских процессов – по одной цепи или одному процессу для каждого узла – адресата. Для моделирования уровня узла используется аппарат теории вероятностей. Очереди моделируются методами теории массового обслуживания. Система потоковых уравнений сетевого уровня, как правило, представляется системой нелинейных алгебраических уравнений

$$\lambda_j(0) = \sum_i p_{ij} \lambda_i(0) + v_j(0).$$

Суммирование осуществляется по всем узлам сети;

$\lambda_i(0)$ – суммарная интенсивность потока в узле i в произвольный нулевой момент времени;

$v_i(0)$ – интенсивность внешнего потока, поступающего в узел i в произвольный нулевой момент времени;

$\lambda_j(0)$ – суммарная интенсивность потока в узле j в произвольный нулевой момент времени t_0 ;

p_{ij} – вероятность того, что сообщения из узла i будут переданы в узел j .

4.1.3. Динамическая модель

Исследованию сетевых систем (сетей связи, вычислительных, информационных сетей и т.п.) посвящено большое количество работ [1-19]. Практически во всех работах рассматриваются стационарные сети (сети с фиксированными элементами, сетевыми алгоритмами и стационарными входными и внутри сетевыми потоками).

В связи с разработкой имитационной агрегативной модели [15] многоуровневой вычислительной модели сети [20-24], и можно утверждать, что средства анализа статических (стационарных сетей) в целом созданы. Исследования же динамики сетевых систем находятся на начальной стадии, так как традиционно используемый для исследований математический аппарат (теория массового обслуживания, теория надёжности), да и нетрадиционный аппарат (теория конечных полумарковских процессов, теория конечных цепей Маркова) по своей природе является средством описания стационарных систем. Теория диффузионных процессов дает лишь грубое приближение [2]. Использование для анализа нестационарных процессов в сетях методов имитационного моделирования связано с колоссальными затратами ресурсов на разработку моделей и на проведение исследований.

Между тем, реальные сети являются нестационарными объектами. Их нестационарность определяется, в частности, изменениями нагрузки,

перемещениями абонентов сети, выходом из строя и восстановлением элементов сети, реконфигурацией сети и т.п. Отсутствие адекватного, по возможности несложного, аппарата исследования нестационарных сетей приводит к тому, что сети рассчитываются на максимальные, пиковые нагрузки. Кроме того, при проектировании сетей не проводится анализ их устойчивости, времени и качества переходных процессов.

В настоящем разделе приводится модель сетевой системы, позволяющая описывать динамику изменений таких характеристик сети, как потоки в узлах и очередях, времена и вероятность доставки сообщений, вероятность образования циклов к т.п., исследовать устойчивость сетей, время и качество переходных процессов.

И, наконец, пожалуй, самое главное. Динамические модели сетевых систем необходимы для разработки методов и средств оптимального управления ими. Дело в том, что используемые и разрабатываемые в

настоящее время методы, алгоритмы и программно-аппаратные комплексы управления связью базируются, и это необходимо подчеркнуть, исключительно на эвристических, экспериментальных идеях, представляют собой всякий раз определенное открытие, изобретение ученого, конструктора. Сильно развитый и широко применяемый в разнообразных областях аппарат теории оптимального управления не используется для управления сетевыми системами и их элементами из-за отсутствия динамических моделей сетевых систем. Поэтому, разработка динамических моделей сетевых систем служит основой для применения классических методов теории оптимального управления, а также для разработки на их базе новых предметно ориентированных методов оптимального управления сетевыми системами.

Как будет показано далее, динамика сетевых систем описывается системами интегральных уравнений Вольтерра второго рода и исследование динамики сетевых систем сводится к исследованию соответствующих систем интегральных уравнений.

а)линейная динамическая модель очереди без потерь

Рассмотрим очередь ij . Предположим, что на вход очереди в момент времени t_0 поступает стационарный поток сообщений на обслуживание λ_i° , на выходе очереди - стационарный поток обслуживания заявок λ_{ij}°

Пусть $\Phi_{ij}(\tau)$ - функция распределения времени пребывания сообщений в очереди. $\Phi_{ij}(\tau)$ обладает следующими свойствами:

1) функция распределения времени пребывания в очереди $\Phi_{ij}(\tau)$ зависит от интенсивности потока сообщений, поступающих на вход очереди λ_i°

$$\Phi_{ij}(\tau) = \Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^\circ).$$

Эта зависимость, как правило, является нелинейной.

2) $\Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^\circ) = 0$, при $\tau \leq 0$.

3) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^\circ) = 1$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Свойства 2, 3 выполняются во всей области Ω_i существования функции распределения $\lambda_j^\circ \subset \Omega_i$.

4) Предполагаем существование плотности распределения времени

пребывания сообщений в очереди

$$\varphi_{ij}(\tau, \lambda_i^\circ) = \partial \Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^\circ) / \partial \tau = \Phi'_{ij}(\tau, \lambda_i^\circ).$$

Рассмотрим очередь под воздействием ступенчатого изменения интенсивности входного потока.

Предположим, что в момент времени t_0 на вход очереди ij подается ступенчатое приращение входного потока $\Delta \lambda_i^\circ = \lambda_i(t)$. Будем считать, что $\lambda_i(t) \ll \lambda_i^\circ$

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ \Delta \lambda_i^\circ = \lambda_i(0) & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

Как описать изменение интенсивности выходного потока под действием ступенчатого изменения входного потока?

В теории автоматического управления изменение выходных сигналов системы под действием ступенчатого сигнала описывается с использованием переходной функции. Переходной функцией называется функция, которая определяет выходной сигнал системы как функцию времени, если входной сигнал имеет вид единичной функции и при условии, что до момента подачи сигнала система находилась в равновесии [38-40].

Каким образом определить переходную функцию очереди? Основная идея предлагаемого метода построения динамической модели очереди, а также сетевой системы в целом заключается в том, что в качестве переходной функции очереди при малых изменениях интенсивности входного потока предлагается использовать функцию распределения времени пребывания сообщений в очереди.

В самом деле, по нашему предположению очередь до момента t_0 находилась в равновесии.

Изменение интенсивности выходного потока в момент времени $\tau > t_0$ равно изменению входного потока, умноженному на вероятность того, что это изменение дойдет до выхода очереди. Но функция распределения времени пребывания сообщений в системе массового обслуживания определяет вероятность обслуживания сообщений за заданное время и тем самым вероятность прохождения изменения интенсивности через очередь.

Итак, функции распределения времени обслуживания сообщений в очереди $ij - \Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^\circ)$ есть переходная функция очереди

$$\lambda_{ij}(\tau, \lambda^{\circ}_i) = \Phi_{ij}(\tau, \lambda^{\circ}_i) \cdot \lambda_i(0)$$

Рассмотрим изменения интенсивности выходного потока $\lambda_{ij}(t)$ очереди ij .

$$\begin{array}{ll} \text{При } t \leq t_0 & \lambda_{ij}(t) = 0; \\ \text{при } t > t_0 & \lambda_{ij}(t) > 0; \\ \text{при } t \rightarrow \infty & \lambda_{ij}(t) \rightarrow \lambda^{\circ}_i. \end{array}$$

Теперь рассмотрим очередь под воздействием произвольного малого изменения входного потока.

Использование $\Phi_{ij}(\tau) = \Phi_{ij}(\tau, \lambda^{\circ}_i)$ в качестве переходной функции позволяет описать изменение выходного потока при произвольном (но малом) изменении входного. Для этого достаточно использовать представление выходного потока в виде интеграла Дюамеля

$$\lambda_{ij}(t) = d/dt \int_0^t \Phi_{ij}(t-\tau) \lambda_i(\tau) d\tau = d/dt \int_0^t \Phi_{ij}(\tau) \lambda_i(t-\tau) d\tau.$$

Последнее выражение удобнее представить в следующем виде:

$$\lambda_{ij}(t) = \Phi_{ij}(0, \lambda^{\circ}_i) \lambda_i(t) + \int_0^t \Phi'_{ij}(t-\tau) \lambda_{ij}(\tau) d\tau.$$

Ввиду того, что

$$\Phi_{ij}(0, \lambda^{\circ}_i) = 0 \quad (\text{свойство 2})$$

и

$$\Phi'_{ij}(\tau) = \varphi_{ij}(\tau) \quad (\text{свойство 4}),$$

получаем выражение, которое и будет использоваться в дальнейшем

$$\lambda_{ij}(t) = \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau) \lambda_i(\tau) d\tau$$

Изменение интенсивности выходного потока очереди без потерь равно свертке плотности распределения времени пребывания сообщений в очереди и изменения интенсивности входного потока.

Если плотность распределения времени пребывания сообщений в очереди есть δ -функция, что соответствует простой задержке сообщений,

$$\varphi_{ij}(t-\tau) = \delta_{ij}(t-\tau),$$

то

$$\lambda_{ij}(t) = \int_0^t \delta_{ij}(t - \tau) \lambda_i(\tau) d\tau = \lambda_i(t - \tau).$$

Изменение интенсивности выходного потока при задержке сообщений на время τ , как и следовало ожидать, равно изменению интенсивности входного потока задержанному на τ .

б)линейная динамическая модель очереди с потерями, не зависящими от входного потока

Если не все сообщения, поступающие на вход очереди ij , проходят на выход очереди, то выражение описывающее динамику очереди, необходимо уточнить.

Пусть p_{ij} - вероятность того, что сообщения, поступившие на вход очереди ij в стационарном режиме (здесь предполагаем, что p_{ij} от входного потока λ°_j не зависит), пройдут ее.

Тогда, для описания динамики очереди передаточную функцию очереди – функцию распределения времени обслуживания в очереди, необходимо умножить на вероятность прохождения сообщения через очередь

$$\lambda_{ij}(\tau, \lambda^{\circ}_i) = p_{ij} \cdot \Phi_{ij}(\tau, \lambda^{\circ}_i) \cdot \lambda^{\circ}_i.$$

В случае произвольного (но малого) изменения интенсивности входного потока интенсивность выходного потока также выразится через интеграл Дюамеля

$$\lambda_{ij}(t, \lambda^{\circ}_j) = p_{ij} \int_0^t \phi_{ij}(t-\tau, \lambda^{\circ}_j) \lambda_i(\tau) d\tau.$$

Отметим, что последнее выражение также справедливо при распределении входного потока между несколькими очередями, идентифицируемыми индексом j с фиксированными вероятностями p_{ij} .

в)линейная динамическая модель сети с фиксированными вероятностями передачи сообщений между очередями сети

Интенсивности потоков в стационарном режиме сети связаны системой потоковых уравнений

$$\lambda^{\circ}_j = \sum_i p_{ij} \lambda^{\circ}_i + v^{\circ}_j.$$

Здесь λ°_j - интенсивность стационарного потока сообщения в j -ом узле;

v_j^0 - интенсивность входного (внешнего) потока сообщений поступающих в j -ый узел;

p_{ij} - вероятность того, что сообщение из узла i попадает в узел j или вероятность того, что сообщение пройдет через очередь ij (считаем, что в сети организованы очереди перед выходными направлениями, каналами).

При описании малых изменений интенсивностей потоков в сети в целом используем для каждой очереди ij полученное ранее выражение.

$$\lambda_{ij}(t, \lambda_i^0) = p_{ij} \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, \lambda_i^0) \lambda_i(\tau) d\tau.$$

Просуммировав по i и добавив изменение потока, входящего в j -ый узел сети извне – $v_j(t)$, получим изменение интенсивности входного потока в j -том узле сети:

$$\lambda_j(t) = (\sum_i \lambda_{ij}(t, \lambda_i^0)) + v_j(t) = \sum_i (p_{ij} \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, \lambda_i^0) \lambda_i(\tau) d\tau) + v_j.$$

Изменение интенсивностей потока в узле j равно сумме изменений интенсивностей потоков, поступающих в узел j из смежных узлов, плюс изменение потока, входящего в j -ый узел сети извне $v_j(t)$

$$\lambda_j(t) = \sum_i (p_{ij} \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, \lambda_i^0) \lambda_i(\tau) d\tau) + v_j.$$

Таким образом, динамика сети в окрестности точки равновесия

$$\lambda^0 = (\lambda^0_1, \lambda^0_2, \dots, \lambda^0_n).$$

описывается системой полученных интегральных уравнений [41-42].

Система интегральных уравнений показывает, что динамические свойства сети (изменение интенсивностей потоков в узлах) в точке λ^0 определяются статическими характеристиками сети, стационарными интенсивностями потоков в узлах сети λ^0_i , вероятностями передачи сообщений между узлами сети p_{ij} , плотностями распределения времен обслуживания сообщений в очередях сети $\varphi_{ij}(\tau, \lambda^0_i)$ и изменением интенсивностей входных потоков.

Полученная система интегральных уравнений является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Это определяется тем, что ядро уравнения при $t \leq \tau$ равно нулю. Следовательно, динамика сети связи, информационной сети, системы с очередями, системы массового обслуживания и т.п. описывается системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

г) динамическая модель очереди, учитывающая зависимость вероятности прохождения сообщения через очередь от входного потока

Вновь рассмотрим стационарную очередь. На входе очереди стационарный поток интенсивности λ_i° , на выходе - λ_j° . $p_{ij}(\lambda_i^\circ)$ – вероятность того, что сообщения, поступившие на вход очереди пройдут ее и появятся на выходе очереди.

$$\lambda_{ij}^\circ = p_{ij}(\lambda_i^\circ) \lambda_i^\circ.$$

Вначале пренебрежем временными задержками сообщений в очереди и проанализируем влияние изменения входного потока на выходной. Рассмотрим стационарный входной поток $\lambda_i^\circ + \lambda_i$; $|\lambda_i| \ll \lambda_i^\circ$. На выходе очереди имеем стационарный выходной поток

$$\lambda_{ij}^\circ + \lambda_{ij} = p_{ij}(\lambda_i^\circ + \lambda_i) (\lambda_i^\circ + \lambda_i).$$

Разложим $p_{ij}(\lambda_i^\circ + \lambda_i)$ в точке λ_i° в ряд Тейлора

$$p_{ij}(\lambda_i^\circ + \lambda_i) = p_{ij}(\lambda_i^\circ) + (dp_{ij}(\lambda_i^\circ)/d\lambda_i) \cdot \lambda_i + o(\lambda_i).$$

Подставим последнее выражение в предыдущее

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^\circ + \lambda_{ij} &= (p_{ij}(\lambda_i^\circ) + (dp_{ij}(\lambda_i^\circ)/d\lambda_i) \cdot \lambda_i) (\lambda_i^\circ + \lambda_i) = \\ &= p_{ij}(\lambda_i^\circ) \lambda_i^\circ + p_{ij}(\lambda_i^\circ) \lambda_i + (dp_{ij}(\lambda_i^\circ)/d\lambda_i) \lambda_i \lambda_i^\circ + o(\lambda_i). \end{aligned}$$

Имеем при $\lambda_j \rightarrow 0$

$$\lambda_{ij} = [p_{ij}(\lambda_i^\circ) + (dp_{ij}(\lambda_i^\circ)/d\lambda_i) \cdot \lambda_i^\circ] \lambda_i.$$

Данное выражение фактически представляет собой первую вариацию функционала λ_{ij}°

$$\delta \lambda_{ij}^\circ = [p_{ij}(\lambda_i^\circ) + (dp_{ij}(\lambda_i^\circ)/d\lambda_i)] \delta \lambda_i^\circ.$$

Учет времени пребывания сообщений в очереди ij как и ранее дает интеграл Дюамеля

$$\lambda_{ij}(t) = (p_{ij}(\lambda_i^\circ) + dp_{ij}(\lambda_i^\circ)/d\lambda_i) \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau) \lambda_i(\tau) d\tau.$$

Если p_{ij} не зависит или слабо зависит от изменения λ_i^0 , то

$$dp_{ij}(\lambda_i^0)/d\lambda_i^0 = 0,$$

и, как и ранее, получаем

$$\lambda_{ij}(t) = p_{ij}(\lambda_i^0) \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau) \lambda_j(\tau) d\tau.$$

д) динамическая модель сетевой системы, учитывающая зависимости вероятности прохождения сообщения через очереди сети от потоков, поступающих на вход очередей

Рассмотрим стационарную сеть. Система потоковых уравнений в точке

$$\lambda^0 = (\lambda^0_1, \lambda^0_2, \dots, \lambda^0_n)$$

имеет вид

$$\lambda^0_j = \sum_{i \neq j} p_{ij}(\lambda^0_i) \lambda^0_i + v_j.$$

Как и в случае очереди, в начале пренебрежем временными задержками сообщений в очередях сети и проанализируем влияния взаимного изменения потоков. Вариация интенсивности выходного потока $\delta\lambda^0_j$ равна

$$\begin{aligned} \delta\lambda^0_j &= (\sum_{i \neq j} \delta\lambda^0_{ij} + \delta v_j) = \\ &= (\sum_{i \neq j} [p_{ij}(\lambda^0_i) + (dp_{ij}(\lambda^0_i)/d\lambda^0_i) \cdot \lambda^0_i]) \delta\lambda^0_i + \delta v_j. \end{aligned}$$

Обозначим

$$p^1_{ij}(\lambda^0_i) = p_{ij}(\lambda^0_i) + (dp_{ij}(\lambda^0_i)/d\lambda^0_i) \cdot \lambda^0_i.$$

Тогда выражение для вариации интенсивности выходного потока $\delta\lambda^0_j$ примет вид

$$\delta\lambda^0_j = (\sum_{i \neq j} p^1_{ij}(\lambda^0_i) \delta\lambda^0_i + \delta v_j).$$

Учет временной задержки сообщений в очередях сети приводит к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\lambda_j(t) = (\sum_{i \neq j} p^1_{ij}(\lambda^0_i) \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau) \lambda_i(\tau) d\tau + v_j(t).$$

Или

$$\lambda_j(t) = (\sum_{i \neq j} p_{ij}(\lambda_i^0) + dp_{ij}(\lambda_i^0)/d\lambda_i^0 \cdot \lambda_i^0) \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau) \lambda_i(\tau) d\tau + v_j(t).$$

Заметим, что

$$p_{ij}(\lambda_i^0) + dp_{ij}(\lambda_i^0)/d\lambda_i^0 \cdot \lambda_i^0 = d\lambda_j^0/d\lambda_i^0.$$

Поэтому систему уравнений, описывающих динамику сетевой системы можно записать в виде

$$\lambda_j(t) = \sum_{i \neq j} d\lambda_j^0/d\lambda_i^0 \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau) \lambda_i(\tau) d\tau + v_j(t).$$

Определим взаимосвязь между малыми изменениями интенсивностей потоков λ_i^0 и λ_j^0 . Для этого вычислим частные производные $\partial\lambda_i^0/\partial\lambda_j^0$.

$$\partial\lambda_i^0/\partial\lambda_j^0 = \sum_k (\partial\lambda_i^0/\partial v_k) (\partial v_k/\partial\lambda_j^0)$$

Поскольку $v_k = \lambda_k - \sum_j p_{jk}(\lambda_j^0) \lambda_j^0$, то

$$\partial v_k/\partial\lambda_j^0 = (-\partial(p_{jk}(\lambda_j^0) \lambda_j^0)/\partial\lambda_j^0) = -(p_{jk}(\lambda_j^0) + \partial(p_{jk}(\lambda_j^0)/\partial(\lambda_j^0)) \cdot \lambda_j^0),$$

и

$$\partial v_k/\partial\lambda_i^0 = (-\partial(p_{ik}(\lambda_i^0) \lambda_i^0)/\partial\lambda_i^0) = -(p_{ik}(\lambda_i^0) + \partial(p_{ik}(\lambda_i^0)/\partial(\lambda_i^0)) \cdot \lambda_i^0),$$

то

$$\begin{aligned} \partial\lambda_i^0/\partial\lambda_j^0 &= \sum_k (\partial\lambda_i^0/\partial v_k) \partial v_k/\partial\lambda_j^0 = \\ &= \sum_k (p_{jk}(\lambda_j^0) + \partial(p_{jk}(\lambda_j^0)/\partial(\lambda_j^0)) \cdot \lambda_j^0) / (p_{ik}(\lambda_i^0) + \partial(p_{ik}(\lambda_i^0)/\partial(\lambda_i^0)) \cdot \lambda_i^0) \end{aligned}$$

Или

$$\partial\lambda_i^0 = \partial\lambda_j^0 (\sum_k (p_{jk}(\lambda_j^0) + \partial(p_{jk}(\lambda_j^0)/\partial(\lambda_j^0)) \cdot \lambda_j^0) / (\sum_k p_{ik}(\lambda_i^0) + \partial(p_{ik}(\lambda_i^0)/\partial(\lambda_i^0)) \cdot \lambda_i^0))$$

Как уже отмечалось, предложенная система уравнений Вольтерра второго рода описывает сетевую систему в окрестности точки равновесия. Это связано с необходимостью использования в виде ядер интегральных уравнений плотностей распределения времен пребывания сообщений в соответствующих очередях $\varphi_{ij}(\tau, \lambda_i^0)$, которые, в свою очередь зависят от интенсивностей входных потоков

$$\varphi_{ij}(\tau, \lambda_i^0) = \varphi_{ij}(\tau, \lambda_i^0(t)),$$

Поэтому, для описания динамики сети на интервале $[t_0, t_1]$ необходимо задать эволюцию плотностей распределения времен пребывания.

$$\lambda_j(t) = \sum_i (p_{ij} \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, (\lambda^{\circ}_i(t)) \lambda_i(\tau) d\tau) + v_j.$$

Это можно сделать разными способами, например, продолжением решения на интервале или с помощью «термодинамического» приближения. В последнем случае необходимо положить

$$\varphi_{ij}(t-\tau, \lambda^{\circ}_i(t)) = \varphi_{ij}(t-\tau, (\lambda^{\circ}_i + \lambda_i(t)).$$

Тогда будет получена система уравнений для приближенного описания динамики сетевой системы на интервале $[t_0, t_1]$

$$\lambda_j(t) = \sum_i (p_{ij} \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, (\lambda^{\circ}_i + \lambda_i(t)) \lambda_i(\tau) d\tau) + v_j.$$

Отметим, что полученная автором система интегральных уравнений, описывает динамику большого класса естественных и искусственных систем точно также как известные в физике уравнения, описывают динамику больших классов естественных систем:

- уравнения Ньютона в классической механике описывают динамику системы взаимодействующих тел;
- уравнения Шредингера описывают динамику квантовых объектов;
- уравнения Максвелла описывают динамику электромагнитного поля;
- уравнения Эйнштейна описывают динамику гравитационного поля.

Начальное состояние сетевой системы в нулевой момент времени задается либо на основе априорных данных, либо статической моделью (см. предыдущий раздел).

Динамическая модель сетевой системы позволяет:

- исследовать поведение сетевой системы при изменении воздействия внешней среды, отказах элементов системы, изменении структуры системы;
- получить критерии устойчивости сетевых систем;
- решать задачи оптимального управления сетевыми системами.

Статическая и динамическая и модели сети буквально учитывают все основные параметры сети – структуру сети, пропускную способ-

ность каналов связи, алгоритмы маршрутизации, внешнюю нагрузку, надежность узлов и каналов связи, дисциплины обслуживания очередей, длины сообщений, пакетов, приоритеты.

Статическая и динамическая и модели сети позволяет определить характеристики стационарной и нестационарной сети, исследовать свойства сетей.

Статическая и динамическая и модели сети имеют полиномиальную сложность. Это делает возможным проводить расчеты систем, состоящих из сотен узлов.

е) описание динамики сетевой системы системой дифференциальных уравнений

В ряде случаев динамику сетевой системы можно описать системой дифференциальных уравнений. Для примера рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с бесконечной очередью, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием. Динамика рассматриваемой очереди (изменение интенсивности выходного потока при изменении интенсивности входного потока) описывается интегральным уравнением Вольтерра с вырожденным ядром.

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t, \lambda_{io}) &= \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, \lambda_{io}) \lambda_i(\tau, \lambda_{io}) d\tau = \\ &= \int_0^t (1/(\mu_{ij} - \lambda_{io}) e^{-(\mu_{ij}-\lambda_{io})t} e^{(\mu_{ij}-\lambda_{io})\tau} \lambda_i(\tau, \lambda_{io}) d\tau = \\ &= (1/(\mu_{ij} - \lambda_{io}) e^{-(\mu_{ij}-\lambda_{io})t} \int_0^t e^{(\mu_{ij}-\lambda_{io})\tau} \lambda_i(\tau, \lambda_{io}) d\tau. \end{aligned}$$

В операторной форме

$$\lambda_{ij}(p) = \varphi_{ij}(p, \lambda_{io}) \lambda_i(p).$$

В рассматриваемом случае преобразование Лапласа плотности распределения времени пребывания сообщений в очереди равно

$$\varphi_{ij}(p, \lambda_{io}) = (\mu_{ij} - \lambda_{io}) (\mu_{ij} - \lambda_{io} + p).$$

Поэтому

$$\lambda_{ij}(p) = (\mu_{ij} - \lambda_{io}) / (\mu_{ij} - \lambda_{io} + p) \lambda_i(p).$$

Или

$$p \lambda_{ij}(p) + (\mu_{ij} - \lambda_{io}) \lambda_{ij}(p) (p) = (\mu - \lambda_o) \lambda_i(p).$$

Или

$$p \lambda_{ij}(p) = - (\mu_{ij} - \lambda_{io}) (\lambda_{ij}(p) - \lambda_i(p)).$$

Переходя к оригиналам, получаем дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее однолинейную систему массового обслуживания с бесконечной очередью, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием.

$$d\lambda_{ij}(t)/dt = - (\mu_{ij} - \lambda_{io}) (\lambda_{ij}(t) - \lambda_i(t)).$$

Полученное линейное дифференциальное уравнение первого описывает динамику однолинейной системы массового обслуживания с бесконечной очередью, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием в окрестности точки λ_o .

Ввиду общности изложенные методы и модели могут использоваться для исследований стационарных и нестационарных сетей классических и квантовых компьютеров.

Следует отметить, что предложенная автором система динамических уравнений (интегральных уравнений Вольтерра второго рода) использует в качестве ядер плотности времен пребывания (задержек) и поэтому, может быть использована для описания произвольных сетевых систем с задержками безотносительно к физической природе задержек.

4.1.4. Самосогласованная система многоуровневых статических и динамических моделей сетевых систем

Логика функционирования сетевой системы, ее конструкция, параметры элементов определяют, задают свойства сетевой системы и значения ее характеристик. Отображение из пространства логических матриц в пространство стохастических матриц дает возможность построить самосогласованную вычислительную модель сетевой системы [28]. В самосогласованную систему моделей сетевых систем входят ранее рассмотренные модели, как разной степени детализации, так и разного функционального назначения. По степени детализации выделяются три группы (уровня) моделей: микроописание, промежуточное описание, макроописание.

Микроописание (уровень очередей) используется для моделирования очередей системы; промежуточное описание (уровень узла), как

правило, используется для моделирования совокупностей очередей, между которыми в узлах сетевой системы распределяются сообщения; макроописание (сетевой уровень используется для моделирования сетевой системы в целом). Между различными уровнями описания имеется взаимосвязь, а именно:

- ряд выходных характеристик микроописания (интенсивности выходных потоков, вероятности образования очередей заданных длин, функции распределения времен пребывания в очередях) являются входными характеристиками для промежуточного описания.

- Ряд выходных характеристик промежуточного описания (вероятности передачи сообщений между очередями, узлами сети, функции распределения времен пребывания в узлах сети) являются входными данными для макроописания.

- И, наконец, выходные характеристики макроописания (интенсивности входных потоков) являются входными характеристиками для микроописания.

По функциональному назначению выделяются три группы моделей (Рис 6.1.):

- статические модели (раздел 4.1.2);
- динамические потоковые модели (раздел 4.1.3);
- модели эволюции функций (плотностей) распределения времен пребывания (разделы 4.1.3 и 4.1.4).

Описание сетевой системы осуществляется в пространстве интенсивности потоков. Эволюция, движение сетевой системы описывается изменением вектора интенсивностей потоков.

Статическая модель описывает равновесные состояния сетевой системы. В равновесных состояниях фиксируются значения потоков, поступающих в систему извне, параметры и характеристики элементов сетевой системы, правила выбора маршрутов движения сообщения и т. п. Интенсивности потоков в узлах и очередях сети также принимают установившиеся фиксированные значения, как и характеристики очередей, узлов и системы в целом. Статическая модель описывает стационарные процессы передачи сообщений по сетевой системе. Стационарными состояниями, как правило, являются либо начальные, либо конечные состояния сетевой системы. Динамическая потоковая модель на интервале описывает изменение интенсивностей потоков в узлах и очередях сети при изменении

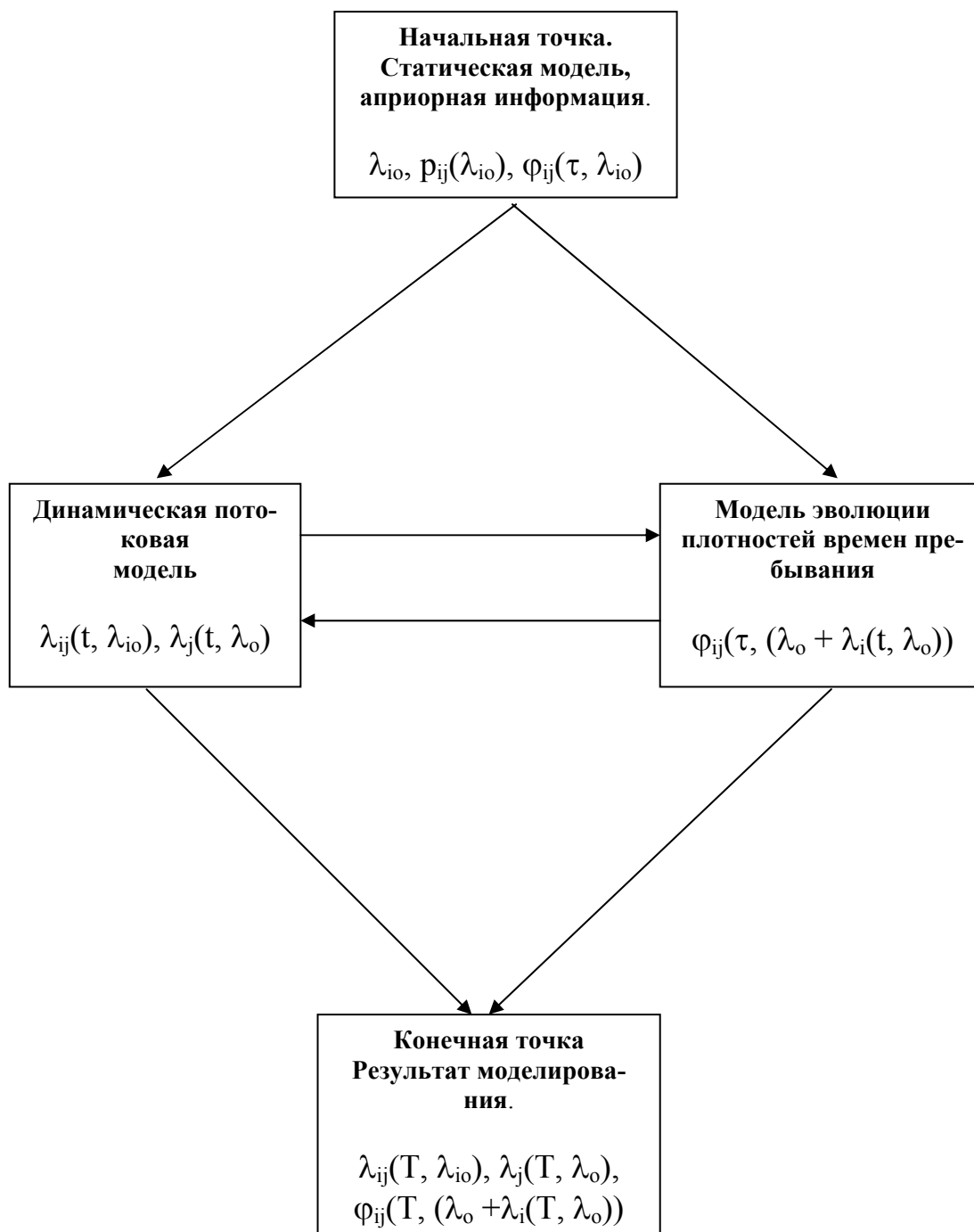


Рисунок 4.1. Взаимосвязь моделей при исследованиях, расчетах сетей на интервале $[0, T]$

интенсивности внешней нагрузки. Начальным состоянием в момент t_0 может являться состояние, описываемое статической моделью. Вместе с тем, в качестве начального состояния можно рассматривать произвольное состояние сетевой системы. Изменение интенсивностей потоков в момент t_0 зависит от вероятностей передачи сообщений между узлами и очередями сети и плотностей распределения времен пребывания сообщений в очередях сети.

Модель эволюции функций (плотностей) распределения времен пребывания описывает динамику изменений функций (плотностей) времен пребывания сообщений, поступивших в очередь в момент времени t при изменении интенсивности входного потока. Все три класса моделей взаимосвязаны.

Выходные данные статической модели определяют начальную точку, как для динамической потоковой модели, так и для модели эволюции функций (плотностей) распределения.

Выход динамической потоковой модели (интенсивности потоков на выходе очередей системы) является входом для модели эволюции функций (плотностей) распределения.

Выход модели эволюции (плотности распределения времен пребывания в очередях системы) является входом в динамическую потоковую модель.

Трехуровневая модель сетевой системы является иерархической конструкцией и включает модели сетевого уровня, модели уровня узла, модели уровня очередей. Модели сетевого уровня отображают процессы передачи информации по сети в целом и описывают вероятностно-временные, надежность и прочие характеристики сети. Модели уровня узла отображают процедуры выбора маршрутов и управления потоками, процедуры распределения потоков между очередями и описывают вероятностно-временные характеристики узлов. Модели уровня очередей отображают процедуры обслуживания информационных потоков в очередях, формируемых в узлах сети, и описывают вероятностно-временные характеристики очередей.

Трехуровневая модель сети связи дает возможность оценивать следующие характеристики сетей связи:

- аддитивные по пути, проходимому информацией – время доставки информации, время установления соединений, длину пути, проходимого сообщением, число переприемов, длину циклов, стоимость передачи сообщений, величину помех и т. п.;
- вероятностные – надежность доставки сообщений, вероятность доставки сообщений по неправильному адресу, вероятность установления соединений, вероятность установления соединений по неправильному адресу, вероятность образования циклов, вероятность передачи сообщений из одного узла сети в другой.

- Кроме того, в процессе расчетов определяются интенсивности потоков в узлах и ребрах сети, в очередях, коэффициенты использования (загрузки) каналов связи, длины очередей.

Каждый уровень статической модели сетевой системы представляет собой набор типовых модулей, реализующих определенные функции вычислений. Так, на сетевом уровне – это модули вычисления среднего времени доставки сообщений, дисперсии времени доставки надежности доставки сообщений, вероятности образования циклов и т. п. На уровне узла – это модули вычисления вероятностей передачи сообщений по заданным направлениям для различных алгоритмов маршрутизации и модули вычисления времен пребывания сообщений в узлах сети. На уровне очередей – это модули, описывающие различные типы очередей. Кроме того, в статическую модель сетевой системы входят модули составления и решения систем потоковых уравнений, а также вспомогательные и сервисные модули. Модули имеют стандартные согласованные входы и выходы. Набор модулей различных уровней может неограниченно пополняться при условии соблюдения ранее принятых форматов данных.

Используемое в трехуровневой модели определение состояния КПП делает число состояний пропорциональным размерности сети. Традиционное определение состояния системы – «... Состояние целого задается перечнем состояний, принимаемых в этот момент частями. Такое состояние есть вектор, имеющий определенное число компонентов или составляющих» приводит к экспоненциальному росту числа состояний системы с ростом числа ее частей и комбинаторному росту числа областей пространства состояний. Это делает принципиально невозможным исследование реальных сетей связи методами, использующими традиционное определение состояний. Предлагаемые правила определения состояний, как показывается ниже, успешно нейтрализуют «проклятие размерности» и делают возможным исследование реальных сетевых систем, реальных сетей связи. Переход от однородного описания к иерархическому многоуровневому приводит к качественному изменению количества рассматриваемых в модели состояний, резкому снижению размерности модели, объема описания системы.

Реальные сетевые элементы систем связи и управления являются нестационарными объектами. Их нестационарность определяется, в частности, изменениями нагрузки, перемещениями абонентов сети, выходом из строя и восстановлением элементов сети, ее реконфигурацией и т. п. Отсутствие адекватного, по возможности несложного, аппарата исследования нестационарных сетей приводит к тому, что сети рассчитываются на максимальные пиковые нагрузки. Кроме того, при проектировании сетей не проводится анализ их устойчивости, времени и качества переходных процессов.

Динамические свойства сети (изменение потоков в узлах) в точке

$\lambda_o = (\lambda_{io})$ определяются статическими характеристиками сети, стационарными интенсивностями λ_{io} потоков в узлах сети, вероятностями $p_{ij}(\lambda_{io})$ передачи сообщений между узлами сети, плотностями времен пребывания сообщений в очередях сети $\varphi_{ij}(t, \lambda_{io})$ и изменением интенсивностей входных потоков $v_j(t)$.

Учет временной задержки сообщений в очередях сети приводит к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода

$$\lambda_{ij}(t, v_j(t)) = \int_0^t \varphi_{ij}(t - \tau, \lambda_{io}) \lambda_i(\tau, \lambda_{io}) d\tau.$$

Динамика сетевой системы в целом описывается системой нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\lambda_j(t, \lambda_{io}) = \sum_i \lambda_{ij}(t, \lambda_{io}) = \sum_i p_{ij}(\lambda_{io}) \int_0^t \varphi_{ij}(t - \tau, \lambda_{io}) \lambda_i(\tau, \lambda_{io}) d\tau + v_j(t).$$

Как это показано в предыдущем разделе в ряде случаев возможно представление динамической модели в виде системы дифференциальных уравнений.

Естественными моделями эволюции функций (плотностей) распределения являются уравнения Колмогорова. Для многоканальных систем следует использовать уравнения Колмогорова в общем виде. Для этого необходимо научиться вычислять структурные коэффициенты, исходя из системы потоковых уравнений. Для одноканальных систем массового обслуживания M/G/1 уравнение Колмогорова получено Такачем и носит его имя [2].

$$\begin{aligned} \partial \Phi_{ij}(\omega, t) / \partial t = \partial \Phi_{ij}(\omega, t) / \partial \omega - (\lambda_{ijo} + \lambda_{ij}(t)) \Phi_{ij}(\omega, t) + \\ + (\lambda_{ijo} + \lambda_{ij}(t)) \int_0^t V(\omega - x) d_x \Phi_{ij}(x, t). \end{aligned}$$

Здесь

$\Phi_{ij}(\omega, t)$ – текущая функция распределения времени пребывания сообщений в очереди ij ;

$V(\omega)$ – функция распределения времени обслуживания сообщений в очереди ij .

λ_{ijo} – интенсивность потока сообщений на входе очереди ij в начальный момент времени. Определяется с помощью статической модели сетевой системы.

$\lambda_{ij}(t)$ – изменение интенсивности потока сообщений на входе очереди ij в момент времени t . Определяется с помощью динамической модели сетевой системы.

Приведенное уравнение связывает изменение во времени функции (плотности) распределения времени пребывания сообщения, поступившего в очередь в момент t , с изменением интенсивности потока сообщений, поступающего на вход очереди. Система таких уравнений для всех очередей сети ij позволяет определить все функции распределения времени пребывания сообщений во всех очередях сети и использовать их в системе динамических уравнений сети.

Как отмечалось ранее многоуровневая статическая модель, динамическая потоковая модель и модель эволюции функций (плотностей) распределения составляют самосогласованную (не требующую дополнительной информации) систему моделей сетевых систем полностью описывающих их поведение.

4.1.5. Методы квантовой механики

Следуя [43-45], приведем основные принципы квантовой механики.

Предположим, что для некоторого объекта рассматриваются определенные *начальное* (s) и *конечное* (f) состояния.

Введем в рассмотрение вероятность перехода объекта из состояния s в состояние f – $\omega_{s \rightarrow f}$.

В квантовой механике наряду с вероятностью перехода $\omega_{s \rightarrow f}$ вводят так называемую *амплитуду вероятности перехода* (*амплитуду перехода*, *амплитуду*) $\langle f|s \rangle$. Это есть некое комплексное число, квадрат модуля которого равен вероятности перехода

$$\omega_{s \rightarrow f} = |\langle f|s \rangle|^2.$$

Сформулируем основные правила работы с амплитудами.

Первое правило (неклассическое, волновое).

Предположим, что существует несколько физически неразличимых способов (путей) перехода объекта из s -состояния в f -состояние. В этом случае результирующая амплитуда перехода $\langle f|s \rangle$ есть сумма амплитуд, соответствующих разным способам (путям) перехода

$$\langle f|s \rangle = \sum_i \langle f|s \rangle_i.$$

Индекс i здесь и далее фиксирует i -й способ (путь) перехода.

Второе правило (классическое правило сложения вероятностей независимых событий).

Предположим, что имеется несколько конечных состояний $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$ и рассматривается вероятность перехода в *любое* из этих состояний, безразлично какое.

В этом случае результирующая вероятность перехода

$$|\langle f|s \rangle|^2 = \sum_i |\langle f|s \rangle_i|^2,$$

или

$$\omega_{s \rightarrow f} = \sum_i \omega_{i s \rightarrow f}.$$

Третье правило (классическое правило умножения вероятностей независимых событий).

Предположим, что переход $s \rightarrow f$ совершается через некоторое *промежуточное* состояние v . В этом случае вводят амплитуды последовательных переходов $s \rightarrow v$ и $v \rightarrow f$, ($\langle f|v \rangle$ и $\langle v|s \rangle$).

Результирующая амплитуда $\langle f|s \rangle$ есть произведение указанных амплитуд

$$\langle f|s \rangle = \langle f|v \rangle \langle v|s \rangle.$$

Соответственно, результирующая вероятность есть произведение вероятностей последовательных переходов

$$|\langle f|s \rangle|^2 = |\langle f|v \rangle|^2 \cdot |\langle v|s \rangle|^2,$$

или

$$\omega_{s \rightarrow f} = \omega_{s \rightarrow v} \cdot \omega_{v \rightarrow f}.$$

Четвертое правило (классическое правило умножения вероятностей независимых событий).

Предположим, что имеется два независимых объекта. Пусть один объект совершает переход $f \rightarrow s$, а второй объект совершает переход $F \rightarrow S$. В этом случае результирующая амплитуда перехода для системы объектов $\langle fF|sS \rangle$ выражается через произведение амплитуд перехода для отдельных объектов

$$\langle fF|sS \rangle = \langle f|s \rangle \langle F|S \rangle.$$

Соответственно, результирующая вероятность перехода для системы объектов есть произведение вероятностей переходов отдельных объектов

$$|\langle fF|sS\rangle|^2 = |\langle f|s\rangle|^2 \cdot |\langle F|S\rangle|^2,$$

или

$$\omega_{sS \rightarrow fF} = \omega_{s \rightarrow f} \omega_{S \rightarrow F}.$$

Методы квантовой механики также, в частности, дают возможность описать системы с двумя состояниями – q-биты. В общем случае, анализ начинается с выбора базисных состояний, не обязательно стационарных – каждое с не меняющейся во времени энергией. Базисные состояния должны иметь простой физический смысл.

Пусть в качестве базисных состояний приняты состояния

$$|1\rangle,$$

$$|2\rangle.$$

Тогда любое состояние $|\psi\rangle$ представляется линейной комбинацией состояний $|1\rangle, |2\rangle$.

$$|\psi\rangle = |1\rangle \langle 1| \psi\rangle + |2\rangle \langle 2| \psi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2.$$

Амплитуды C_i (C_1, C_2) удовлетворяют двум линейным уравнениям

$$i \hbar / 2\pi \, d C_i / dt = \sum_j H_{ij} C_j.$$

$i, j = 1, 2$.

Если гамильтониан H_{ij} не зависят от времени, то стационарные состояния с определенной энергией

$$|\psi_I\rangle = |1\rangle e^{-(2\pi i/\hbar) E_I t}$$

и

$$|\psi_{II}\rangle = |2\rangle e^{-(2\pi i/\hbar) E_{II} t}$$

обладают энергиями

$$E_I = (H_{11} + H_{22})/2 - \sqrt{((H_{11} - H_{22})^2/4 + H_{12} H_{21})}$$

$$E_{II} = (H_{11} + H_{22})/2 + \sqrt{((H_{11} - H_{22})^2/4 + H_{12} H_{21})}$$

Обозначим стационарные состояния векторами состояний

$$|I\rangle, |II\rangle.$$

Тогда вектора стационарных состояний выразятся через вектора соответствующие исходным базисным состояниям следующим образом

$$|I\rangle = |1\rangle a_1 + |2\rangle a_2.$$

$$|II\rangle = |1\rangle a_1^* + |2\rangle a_2^*.$$

Здесь a_1, a_2 комплексные числа, удовлетворяющие равенствам

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1;$$

$$|a_1^*|^2 + |a_2^*|^2 = 1;$$

$$a_1/a_2 = H_{12}/(E_I - H_{11});$$

$$a_1^*/a_2^* = H_{12}/(E_{II} - H_{22}).$$

Если

$$H_{11} = H_{22} = E_0,$$

а

$$H_{12} = H_{21} = -A,$$

то

$$E_I = E_0 + A;$$

$$E_{II} = E_0 - A;$$

$$|I\rangle = (1/\sqrt{2}) (|1\rangle - |2\rangle);$$

$$|II\rangle = (1/\sqrt{2}) (|1\rangle + |2\rangle).$$

4.2. Закон сохранения неопределенности как метод исследований сетей классических и квантовых компьютеров

4.2.1. Основная идея

Одним из методов, средств исследования сетей классических и квантовых компьютеров является закон сохранения неопределенности [46-49].

Каждая система является физическим объектом и наоборот любой физической объект является системой в информационном понимании. Квадрат модуля волновой функции $\psi(x)$

$$|\psi(x)|^2$$

задает распределение вероятностей значения характеристик объекта [46-48].

Тем самым с каждым физическим объектом связана информационная характеристика (информационная энтропия) [50] – неопределенность [46(1987), 47(1989)]

$$N = - \int |\psi(x)|^2 \ln |\psi(x)|^2 dx$$

Мы используем термин неопределенность ввиду того, что в физике термин энтропия используется, хотя и в близком, но другом смысле,

Примечание. В 1993 г. американскими учеными [34-35] под названием «величина запутывания» была введена эта же информационная характеристика физических объектов. На русском языке изложение этих работ впервые было приведено в книге [29].

Следовательно, каждый физический объект описывается как физическими характеристиками, так и информационной – неопределенностью.

Иначе говоря, каждый физический объект является носителем информационной и физических характеристик.

4.2.2. Описание физической системы (объекта)

Под физической системой (объектом) будем понимать произвольный, реально существующий объект или совокупность таких объектов. Физические системы обладают и описываются полным набором наблюдаемых параметров, характеристик, величин. Параметры систем принимают действительные значения. Каждый из параметров физиче-

ской системы можно измерить с помощью других физических систем, называемых приборами.

Фундаментальным свойством физических систем, ярко проявляющимся в микромире, является то, что они не имеют точных значений всех своих параметров из полного набора. Значения всех параметров физической системы не могут быть заданы однозначно.

Если эту систему описывать в системе координат, оси которой соответствуют параметрам полного набора, то значения всех координат физической системы не могут быть заданы точно.

Дадим определение неопределенности, используя описание физической системы «по Шредингеру» [43-45]. Согласно квантовой механике, для системы, находящейся в чистом состоянии, часть параметров a задается точно, значения другой части параметров b задаются функцией или плотностью распределения

$$P(b) = |\psi_a(b)|^2,$$

где $\psi_a(b)$ – волновая функция, описывающая физическую систему в b – представлении.

Итак, каждая физическая система обладает информационным свойством (неопределенностью), заключающимся в том, что она не может иметь точных значений всех своих параметров. В качестве количественной меры неопределенности физической системы будем использовать информационную характеристику – информационную энтропию, введенную К. Шенноном [50].

Система, находящаяся в чистом состоянии a имеет неопределенность равную

$$N(a) = - \int |\psi_a(b)|^2 \ln |\psi_a(b)|^2 db.$$

В отличие от энтропии, используемой в статистической физике, характеризующей неопределенность состояний, в которых может находиться физическая система, информационная энтропия характеризует наряду с неопределенностью состояний и неопределенность каждого состояния. Во избежание неоднозначности терминологии в дальнейшем для обозначения свойства «неопределенность» и его количественной меры – информационной энтропии – будем использовать один термин – «неопределенность». Еще раз отметим, что можно сохранить и общепринятый термин «энтропия», соответствующим образом переопределив его. Имя параметра, не имеющего точных значений, будем приписывать к обозначению неопределенности данного параметра. Следовательно, утверждать, что система без точных значений координат имеет пространственную неопределенность, а система без точных значений импульса –

импульсную неопределенность и т.п. В общем случае физические системы обладают пространственной и импульсной неопределенностью. Введенное определение неопределенности придает широко используемому в квантовой механике понятию неопределенности точный информационный смысл.

Можно также дать определение неопределенности, используя описание физической системы «по Дираку» [43-45].

Рассмотрим систему, описываемую волновой функцией

$$\psi = \sum c_i \psi_i .$$

Нормы функций ψ , ψ_i равны единице

$$||\psi|| = 1, ||\psi_i|| = 1,$$

Функции ψ_i ортогональны

$$(\psi_i, \psi_j) = 0 \text{ для } i \neq j.$$

Коэффициенты c_i задают разложение волновой функции системы в базисе $\{\psi_i\}$.

$$\psi = \begin{pmatrix} c_1 \psi_1 \\ c_2 \psi_2 \\ c_3 \psi_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Квадрат модуля коэффициента $c_i - |c_i|^2$ задает вероятность нахождения системы, описываемой волновой функцией ψ , в состоянии ψ_i . Неопределенность системы, описываемой волновой функцией

$$\psi = \sum c_i \psi_i ,$$

задается выражением

$$N_\psi = - \sum |c_i|^2 \ln |c_i|^2 .$$

Сформулируем

4.2.3. Закон сохранения неопределенности

Неопределенность изолированной (замкнутой) системы сохраняется при физически реализуемых преобразованиях и только при них.

Предположение о сохранении информационной характеристики физической системы – неопределенности приводит к ограничению возможных информационно допустимых и физически реализуемых типов преобразований, а именно:

1. Пространственно-временные преобразования должны иметь определитель (якобиан), равный единице.
2. Преобразования волновых функций должны быть унитарными;
3. Мультипликативные преобразования должны иметь вид

$$\varphi(x) = e^{i\alpha x} \psi(x)$$

Последнее следует из того, что комплексные числа по модулю равные единице и только они представимы в виде $e^{i\alpha x}$.

Это определяет группу допустимых преобразований внутренней симметрии и динамических преобразований.

Для линейных преобразований пространства-времени свойство 1 определяет однородность времени, однородность и изотропность пространства и, таким образом, из закона сохранения неопределенности следуют законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения.

4.2.4. Принцип информационного запрета

Закон сохранения неопределенности запрещает изменения (увеличение или уменьшение) неопределенности в части (подсистеме) изолированной (замкнутой) системы.

В частности, в замкнутой (изолированной) системе S невозможно создание или уничтожение или другое изменение ее части (подсистемы).

Невозможность создания или уничтожения или другого изменения части (подсистемы) замкнутой (изолированной) системы S следует из того, что при создании или уничтожении или другом изменении части (подсистемы) замкнутой (изолированной) системы S изменится неопределенность системы S.

При создании или уничтожении или других изменениях части (подсистемы) замкнутой (изолированной) системы должны происходить сопутствующие изменения в системе, сохраняющие неопределенность.

В частности невозможно клонирование объектов без соответствующих изменений в системе. При клонировании объекта должна порождаться информация, объем которой по Шеннону должен быть равен неопределенности клонируемого объекта по Шеннону.

Неопределенность изолированной системы сохраняется, в то время как в ней могут происходить разнообразные процессы, определяемые ее собственными законами. В силу закона сохранения неопределенности замкнутой (изолированной) системы изменение неопределенности сопровождается соответствующим изменением информации и наоборот, изменение информации сопровождается соответствующим изменением неопределенности.

При увеличении неопределенности в замкнутой (изолированной) системе должно увеличиваться количество информации в системе. При уменьшении неопределенности в замкнутой (изолированной) системе должно уменьшаться количество информации в системе. При увеличении информации в замкнутой (изолированной) системе должно увеличиваться количество неопределенности в системе. При уменьшении информации неопределенности в замкнутой (изолированной) системе должно уменьшаться количество неопределенности в системе.

Необходимо отметить, что запрет клонирования не означает запрета копирования, осуществляемого с порождением необходимой информации или неопределенности.

Для анализа взаимосвязи между изменением неопределенности и информации в замкнутой (изолированной) системе S используем выражение для информации связи случайных величин x и y [50, 51].

$$I_{xy} = N_x + N_y - N_{xy}.$$

Здесь

I_{xy} – информация связи случайных величин x и y ;

N_x – неопределенность (информационная энтропия) случайной величины x ;

N_y – неопределенность (информационная энтропия) случайной величины y ;

N_{xy} – неопределенность (информационная энтропия) случайной величины (x, y) .

Перепишем выражение для информации связи случайных величин x и y в виде

$$N_{xy} = N_x + N_y - I_{xy}.$$

Предположим, что $S = (x, y)$ – замкнутая (изолированная) система. В силу закона сохранения неопределенности

$$N_{xy} = \text{const.}$$

Поэтому, любые изменения в замкнутой (изолированной) системе $S = (x, y)$, сохраняют неизменной величину $N_x + N_y - I_{xy}$.

$$N_x + N_y - I_{xy} = \text{const.}$$

У замкнутой (изолированной) системы S , состоящей из частей x, y , сумма неопределенностей ее частей минус информация связи частей есть величина неизменная

$$\Delta N_x = \Delta(N_y - I_{xy}).$$

Или

$$\Delta N_y = \Delta(N_x - I_{xy}).$$

У замкнутой (изолированной) системы S , состоящей из частей x, y , изменение неопределенности одной ее части равно изменению неопределенности другой ее части минус изменение информации связи частей системы.

Или

$$\Delta I_{xy} = \Delta(N_x + N_y).$$

У замкнутой (изолированной) системы S , состоящей из частей x, y , изменение информации связи частей системы равно изменению суммы неопределенностей ее частей.

Принцип информационного запрета можно использовать для изучения замкнутых (изолированных) систем, развивающихся по внутренним законам. Например, если в ходе эволюции первоначально однородной физической системы неопределенность свободных частиц возрастает (убывает), то в системе должна формироваться (деформироваться) информация - неоднородности.

4.2.5. Неопределенность и информация

Физическая система содержит информацию, если в ней имеются устойчивые определенное время неоднородности. Примерами подобных неоднородностей материи являются такие структурные элементы Вселенной, как: кварки, лептоны, элементарные частицы, ядра, атомы,

молекулы, жидкости, кристаллы, звезды, галактики и их скопления, нейтринные «блины».

(Неустойчивые неоднородности, в частности, случайные флуктуации, не формируют информацию).

Объем информации, содержащейся в неоднородности, равен разности неопределенности (информационной энтропии) равномерного (однородного) распределения $P(x)$ и неопределенности (информационной энтропии) неравномерного (неоднородного) распределения $R(x)$.

Для непрерывных величин

$$I = - \int P(x) \ln P(x) dx - (- \int R(x) \ln R(x) dx) = \\ = \int R(x) \ln R(x) dx - \int P(x) \ln P(x) dx$$

Использование информационной энтропии для оценки неопределенности и информации неудивительно. “ В любом случае мы рассматриваем данное выражение, как меру количества случайности в эксперименте, состоящем в однократном бросании нашей кости, и назовем его энтропией этого эксперимента. Эта величина измеряет также количество неопределенности, содержащейся в этом эксперименте, т.е. количество неопределенности до бросания кости относительно того, каков будет его результат. Наконец, эта величина измеряет информацию, содержащуюся в этом эксперименте, или количество информации, получаемой в результате бросания. Тот факт, что случайность и неопределенность имеют естественную общую меру, не удивителен. Вследствие “формулы” прирост информации = устраненная неопределенность представляется разумным, что неопределенность и информация должны измеряться с помощью одной и той же функции” [52].

4.2.6. Информационная форма закона сохранения неопределенности

В силу закона сохранения неопределенности замкнутой (изолированной) системы изменение неопределенности в системе сопровождается соответствующим изменением информации в системе.

При увеличении неопределенности в системе должно увеличиваться количество информации в системе. При уменьшении неопределенности в системе должно уменьшаться количество информации в системе.

Изменение неопределенности ΔN приводит к формированию равного количества информации ΔI :

$$\Delta I = \Delta N,$$

или

$$\Delta I - \Delta N = 0.$$

В дифференциальном виде информационная форма закона сохранения неопределенности выглядит следующим образом.

В замкнутой системе скорость изменения неопределенности равна скорости формирования информации

$$dN/dt = dI/dt, \text{ или}$$

$$d(N - I)/dt = 0$$

Данное утверждение можно рассматривать как информационную форму закона сохранения неопределенности.

Неопределенность изолированной системы сохраняется, в то время как в ней могут происходить разнообразные процессы, определяемые ее собственными законами.

5. Оценка степени адекватности предлагаемых моделей

5.1. Анализ адекватности и точности статической модели сетевой системы

Адекватность модели определяется степенью ее соответствия реальным сетям связи, совокупностью учитываемых моделью факторов и процессов, протекающих в сетях связи, точностью предсказания поведения сети и ее элементов.

В обоснование адекватности модели приведем несколько доводов.

1. Поставим мысленный эксперимент. Предположим, что в нашем распоряжении имеется стационарная сеть связи. На интервале времени измерений T будем измерять следующие величины:

- частоты передачи сообщений между узлами сети;
- частоты выбора направлений передачи;
- времена пребывания сообщений в узлах сети;
- вероятности образования очередей заданной длины;
- времена обслуживания сообщений в очередях и т.п.

Дополнительно предположим, что процессы в сети обладают свойством эргодичности. Тогда при $T \rightarrow \infty$ частоты событий совпадут с вероятностями событий, гистограммы времен совпадут с функциями (плотностями) распределения и т.д.

Таким образом, мы измерим вероятность передачи сообщений между узлами сети, вероятности выбора направлений передачи, времена пребывания сообщений в узлах сети, характеристики очередей. Узлам связи поставим в соответствие состояния КПП. Тем самым, наблюдая стационарную эргодическую сеть связи, мы поставили ей в соответствие совокупность КПП – модели сетевого уровня, совокупность вероятностей выбора направлений передачи и времен пребывания информации в узлах сети - модели уровня узла, совокупность характеристик очередей - модели уровня очередей. То есть, к возможности использования трехуровневой конструкции модели сети связи и описания сети в целом совокупностью конечных полумарковских процессов нас могли привести наблюдения на реальной сети.

2. Трехуровневая модель сети учитывает основные сетевые факторы и процедуры:

- структуру сети;
- сетевые алгоритмы (процедуры выбора маршрутов и управления потоками);
- правила обслуживания очередей в узлах сети;
- параметры элементов сети;
- характеристики входных потоков.

3. В модели обеспечивается расчет практически всех сетевых характеристик аддитивных по проходимому информацией пути, вероятностных и прочих.

- сеть распадается на совокупность одноканальных систем массового обслуживания;
- рассматриваются процедуры передачи сообщений по фиксированным маршрутам;
- обслуживание сообщений осуществляется в порядке поступления

рассматриваются бесконечные очереди;

- интервалы между сообщениями и длина сообщений распределена по экспоненциальному закону.

5. Сравнение расчетов характеристик сетей связи, проводимых на программных реализациях трехуровневой модели, с данными имитационного моделирования показывают удовлетворительную (в пределах десяти процентов) точность расчетов.

6. Трехуровневая модель сети допускает детализацию – путем введения дополнительных состояний КПП, что дает возможность учета при необходимости дополнительных факторов и процедур.

Приведенные соображения безусловно нельзя считать доказательством адекватности трехуровневой модели. Конечным свидетельством в ее пользу может быть лишь сравнение результатов моделирования с измерениями в реальных сетях связи. Вместе с тем, рассмотренные доводы являются стандартным способом качественного и количественного обоснования адекватности модели и не могут не учитываться.

Теперь перечислим возможные источники погрешностей моделирования и пути повышения точности расчетов.

Во-первых, это погрешности сетевого уровня. Они связаны с тем, что информация, попадая в произвольный узел связи, должна находиться в одной и той же вероятностной ситуации, вне зависимости от того, в какой раз она попадает в узел. Это связано с тем, что в используемой модели конечного полумарковского процесса, матрица переходных вероятностей фиксирована. Вместе с тем, ясно, что, попадая вторично в заданный узел, информация может встретить либо новую ситуацию, либо сведения, полученные при прохождении узла в первый раз, изменят вероятностную ситуацию. Формальным требованием адекватности является требование к быстрой смене состояний элементов сети, учитываемых при выборе маршрута. Время смены состояния должно быть намного меньше продолжительности цикла. Данное условие автоматически выполняется, если сетевые алгоритмы не допускают образования циклов. По-видимому, данное условие выполняется для алгоритмов, не учитывающих надежность элементов. Например, при расчете времени доставки сообщений с учетом занятости очередей. Смена состояний

элементов сети "работоспособен-неработоспособен" происходит существенно медленней (время наработки на отказ – сотни часов, время восстановления – десятки минут), чем средняя продолжительность цикла (десятки секунд, минуты). Поэтому расчет системных характеристик с учетом надежностных параметров элементов сети при наличии циклов может дать лишь оценки. Уменьшить данную погрешность можно путем расщепления состояний, соответствующих узлам связи. Одно состояние должно соответствовать узлу при первом приходе информации, второе тому же узлу при втором приходе, третье при третьем и т.д.

Во-вторых, это погрешности моделей уровня очередей, связанные с вычислениями элементов матриц переходных вероятностей, вероятностей выхода сообщений по различным направлениям передачи. В ходе вычислений, в общем случае, необходимо учитывать взаимозависимость вероятностей существования заданных длин разных очередей. Вместе с тем в настоящее время реально возможно производить вычисления в предложениях независимости. Уменьшить данные погрешности можно, переходя к более точным моделям уровня узла и объединяя в единое целое модели уровня узла и очередей.

В-третьих, погрешности уровня очередей – это погрешности, возникающие при расчете вероятностей образования очередей заданных длин. Данный класс погрешностей определяется тем, что для расчета используются формулы теории массового обслуживания, выведенные в определенных предположениях. Чаще всего это предположения о пуассоновости потоков и экспоненциальности обслуживания.

Вместе с тем погрешности данного класса могут быть устранены путем построения более точных моделей массового обслуживания, описывающие реальные процессы в очередях на узлах сети. Работа по построению более точных моделей массового обслуживания должна сочетаться с исследованием свойств реальных потоков в элементах (узлах, каналах, очередях) сетей.

В-четвертых, это технологические погрешности, связанные с точностью задания исходных данных, точностью решения канонической системы уравнений, точностью вычисления характеристик очередей, элементов системы, элементов матриц переходных вероятностей, точностью вычисления системных характеристик. Пути устранения данных погрешностей традиционны. Можно лишь указать необходимость учета существенной редкозаполненности матриц переходных вероятностей и матриц КСУ.

Для оценок точности вычислений сетевых характеристик используем методы вычислительной математики [53].

В ходе оценок будут использоваться следующие известные соотношения для норм матриц

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|;$$

$$\|\alpha A\| = \alpha \|A\|;$$

$$\|A B\| \leq \|A\| \|B\|$$

$$\|A + x\| \leq \|A\| \|x\|$$

а также оценка точности обращения возмущенной матрицы A , справедливая при малых возмущениях.

$$\|\Delta A\| \leq \|A^{-1}\|^{-1}.$$

$$\|A^{-1} + \Delta A^{-1}\| \leq (\|\Delta A\| \|A^{-1}\|^2) / (1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|).$$

В рассматриваемом случае элементы всех матриц не отрицательны и в качестве нормы матрицы может быть использовано одно из выражений

$$\|A\| = \max_{ij} a_{ij};$$

$$\|A\| = \max_i \sum a_{ij};$$

$$\|A\| = \max_j \sum a_{ij};$$

$$\|A\| = (\sum_{ij} a_{ij}^2)^{1/2}.$$

Оценку точности вычислений проведем на примере среднего времени доставки сообщений. Среднее время доставки сообщений равно

$$\tau = (\sum_{it} v_{it} \tau_{it}) / (\sum_{it} v_{it})$$

Оценку точности вычислений будем проводить последовательно в соответствии с функциональной зависимостью переменных.

Выражение (*) представим в векторной форме

$$\tau = (\sum_t V_t \tau_t) / V,$$

где

$V_t = (v_{it})$ - вектор-столбец интенсивностей потоков сообщений, идущих в узел t ;

$V = \sum_{it} v_{it}$ - суммарная нагрузка на сеть.

Оценим погрешность вычислений среднего времени доставки сообщений. При заданной нагрузке на сеть (неточно известны лишь потоки, направляемые в разные узлы) ошибка в определении среднего времени передачи сообщений

$$\|\Delta\tau\| = (\sum_t \|V_t\| \|\Delta\tau_t\| + \|\Delta V_t\| \|\tau_t\|) / \|V\|$$

Если суммарная нагрузка также известна неточно, то

$$\|\Delta\tau\| = (\|V\| \|\Delta\tau\| + \|\Delta V\| \|\tau\|) / \|V\|^2.$$

Далее оценим погрешность вычисления векторов τ_t :

$$\begin{aligned} \|\Delta\tau_t\| &= \|(N_t + \Delta N_t) (\Theta_t + \Delta\Theta_t) - N_t \Theta_t\| = \\ &= \|\Delta N_t \Theta_t + N_t \Delta\Theta_t + \Delta N_t \Delta\Theta_t\|. \end{aligned}$$

Пренебрегая членом второго порядка малости $\Delta N_t \Delta\Theta_t$, получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta\tau_t\| &\leq \|\Delta N_t\| \|\Theta_t\| + \|N_t\| \|\Delta\Theta_t\| \leq \\ &\leq (\|\Delta Q_t\| \|N_t\|^2 \|Q_t\|) / (1 - \|\Delta Q_t\| \|N_t\|). \end{aligned}$$

Если элементы матриц переходных вероятностей определяются с учетом состояния сети - вероятностей b_{kl} , то для $\|\Delta Q_t\|$ справедлива оценка

$$\|\Delta Q_t\| = \|\Delta B_t\|.$$

где $\|\Delta B_t\|$ - оценка точности определения вероятностей незанятости ребер сети (очереди, каналов связи).

Точность вычисления величин b_{kl} определяется точностью решения систем нелинейных уравнений, взаимосвязывающих потоки в узлах и ребрах сети, а точность вычисления времен пребывания сообщений в узлах связи есть просто точность вычисления значений функций. Оценки, аналогичные приведенным, справедливы для определения точности вероятностных характеристик сети связи. Аналогичные оценки точности могут быть даны для расчетов дисперсии аддитивных по проходимому пути характеристик сети связи и точности вычислений характеристик сети с использованием аппарата регулярных цепей Маркова.

Использование аппарата регулярных цепей Маркова для оценки средних значений аддитивных по проходимому информации пути характеристик сети связи дает меньшую точность. Это объясняется тем, что в ходе вычислений операция обращения матриц встречается дважды.

Приведенные выражения дают возможность производить оценки точности вычислений характеристик сетей с использованием трехуровневой модели сети связи.

Сравнение результатов вычислений сетевых характеристик программными реализациями трехуровневой модели и данных имитационного моделирования.

Для сетей служебной связи с коммутацией сообщений осуществлены сравнительные расчеты времени доставки сообщений из узлов сети и интенсивностей потоков в узлах сети (с использованием вышеописанной аналитической и имитационной моделей). Сравнительные расчеты указанных объемно-временных характеристик узлов сети проводились для сетей связи со структурой типа решетка с числом узлов 9, 15, 30. В каждой сети был выбран один узел-получатель (например узел с номером 1), а остальные узлы являлись источниками сообщений.

Узлы сети связаны дуплексными каналами с одинаковой пропускной способностью. Канальная емкость в направлении между узлами задавалась числом каналов.

В каждом узле сети проводился выбор маршрута, по которому будет передаваться сообщение. Использовались 4 алгоритма выбора маршрута.

В узлах сети реализовались централизованный и децентрализованный алгоритм управления очередью сообщений в узле. При использовании централизованного алгоритма управления очередь сообщений является общей для каналов всех направлений, при освобождении канала в любом направлении из очереди выбирается очередное сообщение.

При использовании децентрализованного алгоритма управления очередь обслуживается лишь каналами того направления, который указан последним для данного узла.

Сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования показывает точность расчетов в пределах 10%, достаточную для расчетов конкретных сетей и проведения систематических исследований сетей.

5.2. Об адекватности динамической модели сетевой системы

Источником погрешностей в динамической модели очереди, и соответственно динамической модели сетевой системы в целом является то, что в качестве ядер интегральных уравнений, описывающих динамику сети, используются выражения для функций (плотностей) распре-

деления времен пребывания, полученные в предположении о стационарности входных потоков и процессов обслуживания. Поэтому, возникающие погрешности зависят от скорости изменения входных потоков. Конкретные оценки возникающих в динамической модели ошибок необходимо проводить для заданных сетей, сетевых алгоритмов, очередей. Здесь мы оценим порядок возникающих ошибок и дадим рекомендации по областям использования динамической модели для различных задач исследований.

Известно [54-56], что скорость сходимости вероятностей образования очереди заданной длины и функции (плотности) времени пребывания к стационарному значению имеет экспоненциальный вид

$$p_k(t) = p_k^{\circ} + \Delta p_k^{\circ} e^{-(\alpha\lambda + \beta\mu)t}.$$

$$\varphi_k(t, \tau) = \varphi_k^{\circ}(\tau) + \Delta\varphi_k^{\circ} e^{-(\alpha\lambda + \beta\mu)t}.$$

$$|\Delta\varphi_k(t, \tau)| = |\varphi_k(t, \tau) - \varphi_k^{\circ}(\tau)| = |\Delta\varphi_k^{\circ}| e^{-(\alpha\lambda + \beta\mu)t}.$$

Относительная погрешность равна

$$\delta\varphi_k^{\circ} = \Delta\varphi_k(t, \tau) / \varphi_k^{\circ}(\tau) = |\Delta\varphi_k^{\circ} / \varphi_k^{\circ}| e^{-(\alpha\lambda + \beta\mu)t} \leq e^{-\beta\mu t}$$

При $t \geq 3/\beta\mu = 3/\beta \cdot t_{\text{обсл.}}$

$$\delta\varphi_k^{\circ} \leq e^{-3} < 0,1$$

и, следовательно, можно считать, что за время $3t_{\text{обсл.}}$ процесс устанавливается с точностью в 10%.

Если требуемая точность задана величиной ξ , то можно определить время установления стационарного режима

$$t_{\text{уст}}^{\circ} \geq 1/\beta\mu \cdot \ln \cdot (\Delta\varphi_k^{\circ} / \xi\varphi_k^{\circ}).$$

5.3. Сложность предлагаемых моделей

Используемые в трехуровневой модели определение состояний КПП делает число состояний равными или пропорциональным размером сети. Традиционное определение состояния системы: «Состояние целого задается перечнем состояний, принимаемых в этот момент частями. Такое состояние есть вектор, имеющий определенное число компонентов или составляющих» [57], - приводит к экспоненциальному росту числа состояний системы с ростом числа ее частей, комбинатор-

ному росту числа областей пространства состояний. Это делает принципиально невозможным исследование реальных сетей связи методами, использующими традиционное определение состояния. Предлагаемые правила определения состояния успешно противостоят « проклятию размерности» и делают возможным исследование реальных сетей связи. Итак, размерность моделей сетевого уровня

$$\eta_{cy} \sim n.$$

Объем вычислений в моделях сетевого уровня

$$N_{cy} \sim n^3$$

Размерность моделей уровня узла пропорциональна числу очередей, соотношения между которыми учитывается при выборе маршрутов передачи

$$\eta_{yy} \sim n_u.$$

В реальных сетях $n_u \approx 3-5$. Будем считать, что $n_u = 10$.

Объем вычислений определяется объемом вычислений вероятностей сложных событий и может достигать

$$N_{yy} \sim 2^{n_u} \approx 2^{10} \approx 10^3.$$

Размерность моделей уровня очередей определяется размерностью используемой модели массового обслуживания.

В рамках трехуровневой модели уровня очередей, как правило, представляются конечными формулами, в связи с чем, их размерность не влияет на объем вычислений.

Наиболее существенным ограничением для практической реализации трехуровневой модели сети является размерность системы потоковых уравнений.

Размерность системы потоковых уравнений пропорциональна произведению числа узлов-адресатов n_a , квадрату числа возможных промежуточных узлов n_{ny} , числа промежуточных линий связи (направлений выбора маршрутов) $n_{пл}$

$$\eta_{спу} \sim n_a \cdot n_{ny}^2 \cdot n_{пл}.$$

В общем случае, когда обмен информацией возможен между всеми узлами сети, сетевые алгоритмы допускают передачу в произвольные промежуточные узлы по произвольным линиям связи

$$\eta_{\text{спу}} \sim n^3 m$$

Для сетевых алгоритмов класса коммутации каналов по фиксированным маршрутам (виртуальных соединений в сетях с коммутацией пакетов) размерность СПУ:

$$\eta_{\text{спу}} \sim n^2 m.$$

Для сетевых алгоритмов класса алгоритмов коммутации сообщений . пакетов, коммутации каналов с использованием служебных сообщений для установления соединения размерность СПУ:

$$\eta_{\text{спу}} \sim n m .$$

Для однопродуктных сетей, в общем случае:

$$\eta_{\text{спу}} \sim n^2 m.$$

Для алгоритмов класса коммутации каналов, виртуальных соединений:

$$\eta_{\text{спу}} \sim n m.$$

Для алгоритмов класса коммутации сообщений, пакетов, коммутации каналов с использованием служебных сообщений для установления соединения:

$$\eta_{\text{спу}} \sim n.$$

Таким образом, не составляют практических трудностей исследование и проектирование однопродуктовых сетей, многопродуктовых сетей с коммутацией сообщений, пакетов, коммутации каналов с использованием служебных сообщений для установления соединений.

В общем случае необходимы средства решения систем нелинейных алгебраических уравнений, состоящих из десятков тысяч уравнений.

Решение систем интегральных уравнений с заданной точностью также требует полиномиального объема вычислений.

6. Проведение оценок и моделирования

6.1. Исследование сетей классических компьютеров

6.1.1. Исследования общих свойств сетей

Трехуровневая модель сети является не только удобным средством моделирования и расчетов. Она позволяет исследовать общие свойства, закономерности процессов, протекающих в сетях связи. К ним, прежде всего, относятся свойства существования и единственности распределения потоков в элементах сети (узлах, линиях, связи, очередях), монотонности, непрерывности и выпуклости сетевых характеристик. Исследования существования и единственности распределения интенсивностей потоков в узлах, линиях и очередях сети, не нарушая общности рассмотрения, проведены на примере однопродуктовой сети. Рассмотрим пространство потоков Λ , элементами которого являются вектора $\lambda = (\lambda^1, \lambda^n)$. λ^i - поток, поступающий на вход i -го узла однопродуктовой сети

$$\lambda^i \geq 0.$$

Введем в пространство потоков Λ норму

$$\|\lambda\| = \max |\lambda^i| = \max \lambda^i.$$

Метрику ρ в пространстве Λ определим выражением

$$\rho(\lambda^1, \lambda^2) = \|\lambda^1 - \lambda^2\|.$$

Пусть $m(\lambda)$ - матрица, элементы m_{ij} которой зависят от λ .

Норма (I) в пространстве индуцирует в пространстве матриц

$$M = \{m(\lambda)\}.$$

норму

$$\|m\| = \max_i \sum_j m_{ij}.$$

Стационарные потоки в узлах сети связаны системами уравнений

$$\lambda_j = \sum_i p_{ij}(\lambda) \lambda_i + v_j;$$

$$\lambda_j = \sum_{i \neq t} p_{ij}(\lambda) \lambda_i + v_j,$$

или в векторной форме

$$\lambda = P(\lambda) \lambda + v,$$

$$\lambda_{-t} = P(\lambda_{-t}) \lambda_{-t} + v.$$

λ_{-t} - вектор-столбец, который отличается от вектора λ тем, что из него исключены компоненты, соответствующие поглощающим состояниям.

Множество векторов λ_{-t} образуют пространство Λ_{-t} .

Матрица $Q(\lambda_{-t})$ может рассматриваться как оператор в пространстве Λ_{-t} .

Поэтому исследования существования и единственности распределения потоков в сети сводятся к исследованию свойств оператора $Q(\lambda_{-t})$.

Примечание - Здесь и далее рассматриваются сети без «неустойчивых» элементов – сети с монотонными и непрерывными зависимостями характеристик очередей от нагрузки. Доказывается что сети составленные из «хороших» очередей обладают «хорошими» свойствами. Использование в сетях «неустойчивых» элементов и неправильное использование сетей делает сети «плохими».

Стационарное распределение потоков в узлах сети существует и единственно, если оператор $Q(\lambda_{-t})$ в области своего определения в пространстве Λ_{-t} имеет единственную неподвижную точку [58].

Рассмотрим последовательность векторов

$$\lambda_1 = v; \lambda_2 = Q(\lambda_1) \lambda_1 + v; \dots; \lambda_{k+1} = Q(\lambda_k) \lambda_k + v; \dots$$

Здесь и далее, там, где это будет приводить к неоднозначности, индекс - t писать не будем.

Произведение матриц $Q(\lambda_i)$ обозначим $Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_i Q(\lambda_i).$$

Поток λ назовем допустимым, если каждая его компонента может быть обслужена соответствующим узлом в стационарном режиме.

Множество допустимых потоков в сети обозначим Ω .

$$\Omega \subseteq \Lambda.$$

Докажем ряд утверждений.

Лемма I.

Если $p_{ij}(\lambda') > 0$, для некоторого $\lambda' \subseteq \Omega$, то $p_{ij}(\lambda'') > 0$ для любого $\lambda'' \subseteq \Omega$.

Доказательство:

В рассматриваемой трехуровневой модели без «неустойчивых» очередей $p_{ij}(\lambda)$ либо представляют собой непрерывные функции, не обращающиеся в ноль на области определения, либо тождественно равны нулю.

Доказательство завершено.

Лемма 2.

Рассмотрим матрицы, являющиеся произведением k сомножителей $P^k = P * P * \dots * P$; $Q^k = Q * Q * \dots * Q$.

Пусть p_{ij}^k - элемент ij матрицы P^k , q_{ij}^k - элемент ij матрицы Q^k .

Если матрица Q является подматрицей матрицы P , элементы которой соответствуют переходам между непоглощающими состояниями

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix},$$

то элементы матриц P^k и Q^k , соответствующие переходам между непоглощающими состояниями, совпадают:

$$p_{ij}^k = q_{ij}^k.$$

Доказательство:

Воспользуемся методом математической индукции.

1. Для $k=1$ утверждение очевидно выполняется

$$p_{ij} = q_{ij}.$$

2. Предположим справедливость утверждения для $k = m$:

$$p_{ij}^m = q_{ij}^m.$$

3. Докажем справедливость утверждения для $k = m+1$.

Рассмотрим элементы p_{ij}^{m+1} и q_{ij}^{m+1} .

$$p_{ij}^{m+1} = \sum_s p_{is}^{m+1} p_{sj} = p_{ij}^{m+1} = \sum_{s \neq t} p_{is}^{m+1} p_{sj} p_{ij}^{m+1} + \sum_{s=t} p_{is}^{m+1} p_{sj}$$

$$q^{m+1}_{ij} = \sum_{s \neq t} q^{m+1}_{is} q_{sj}$$

Так как $p_{is} = 0_j$. для $s=t$ по определению, $p^m_{ij} = q^m_{ij}$.
по предположению, то $p^{m+1}_{ij} = q^{m+1}_{ij}$. для $s \neq t$.

Доказательство завершено.

Лемма 3.

Рассмотрим матрицы $Q^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $P^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Пусть $p^k_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ - элемент ij матрицы $P^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$,

$q^k_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ - элемент ij матрицы $Q^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Если матрица $Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ является подматрицей матрицы

$P(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, элементы которой соответствуют переходам между непоглощающими состояниями

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) & Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{array} \right)$$

то элементы матриц $P^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ и $Q^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, соответствующие переходам между непоглощающими состояниями, совпадают

$$p^k_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = q^k_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 4.

Произвольный конечный полумарковский процесс P имеет ненулевую вероятность достичь за n шагов из любого невозвратного состояния одно из поглощающих состояний.

Доказательство:

Рассмотрим элемент p^n_{it} матрицы P^n , где t - поглощающее состояние; i - произвольное невозвратное состояние:

$$p^n_{it} = \sum p_{i s_1} p_{s_1 s_2} \dots p_{s_{n-2} s_{n-1}} p_{s_{n-1} t}.$$

Сумма берется по всем путям длины n , соединяющим узлы i и t .

Так как ясно, что существует хотя бы один путь длины не более n , соединяющий невозвратное состояние с одним из поглощающих состояний t , вероятность реализации которого не равна нулю, то за n шагов процесс P из начального состояния i с ненулевой вероятностью α_i достигнет одного из поглощающих состояний t .

Пусть

$$\alpha = \min \alpha_i.$$

Тогда вероятность достичь одного из поглощающих состояний из произвольного невозвратного состояния не менее $\alpha > 0$, или

$$\sum_i p_{it}^n \geq \alpha > 0.$$

Доказательство завершено.

Следствие.

Так как $\sum_j p_{ij}^n = 1$, то $1 > 1 - \alpha \geq \sum_{j \neq t} p_{ij}^n$.

Так как в соответствии с леммой 2 элементы p_{ij}^n являются элементами матрицы Q^n , для $i, j \neq t$, то норма матрицы Q^n меньше единицы

$$\|Q^n\| < 1.$$

Лемма 5.

Если матрица $Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ существует, то ее норма меньше единицы

$$\|Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\| < 1.$$

Доказательство:

Рассмотрим элемент $p_{it}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ матрицы $P^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{aligned} p_{it}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= \sum p_{i s_1}(\lambda_{s_1}) p_{s_1 s_2}(\lambda_{s_2}) \dots \\ &\dots p_{s_{n-2} s_{n-1}}(\lambda_{s_{n-2}}) p_{s_{n-1} t}(\lambda_{s_{n-1}}). \end{aligned} \quad (*)$$

Сумма берется по всем путям длины n , соединяющим узлы i и t .

$p_{it}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (I) отличается от

$$p_{it}^n = \sum p_{i s_1} p_{s_1 s_2} \dots p_{s_{n-2} s_{n-1}} p_{s_{n-1} t}$$

рассмотренной в лемме 4 тем, что ненулевые элементы $p_{sk sl}$ в последней сумме, заменены на возможно другие ненулевые (в соответствии с леммой I) элементы $p_{sk sl}(\lambda_{sk})$.

Поэтому если $p_{it}^n > 0$ в последней сумме, то $p_{it}^n > 0$ также больше нуля в сумме (*).

Значит, вероятность достичь одного из поглощающих состояний из одного из невозвратных состояний полумарковского процесса P, задаваемого матрицей переходных вероятностей $P^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, не менее некоторого числа

$$\alpha' > 0; p_{it}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \geq \alpha' > 0.$$

Так как в соответствии с леммой 3 элементы матрицы $Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, являются элементами матрицы $P^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, то отсюда следует, что норма матрицы $Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, меньше единицы

$$\|Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\| < 1.$$

Доказательство завершено.

Примечание - Для сети с потерями матрица $Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ существует для любых $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, поэтому $\|Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\| < 1$ для всех $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Лемма 6.

Для сети связи с потерями множество допустимых значений интенсивностей потоков представляет собой полное пространство.

Доказательство:

Для сети связи с потерями интенсивности потоков, поступающих на вход любого узла, сети не ограничены (сообщения, необслуживаемые на узлах, получают отказ).

Множество допустимых значений интенсивностей потоков состоит из векторов

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n): \quad \infty > \lambda_i \geq 0.$$

Известно [58], что данное пространство является полным.

Теперь сформулируем теорему I.

Теорема I.

Пусть сеть с потерями задана трехуровневой моделью. Тогда для произвольных стационарных значений интенсивностей входных потоков существует и единственно стационарное распределение интенсивностей потоков в узлах сети.

Доказательство:

Из леммы 6 следует, что Ω - полное метрическое пространство.

Из леммы 5 следует, что для сети с потерями для любого входного потока v $\|Q^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\| < 1$.

Тогда в соответствии с теоремой о неподвижной точке [58] система

$$\lambda = P(\lambda) \lambda + v$$

всегда имеет решение $\lambda^*(v)$. Решение $\lambda^*(v)$ является единственным для заданного входного потока v .

Доказательство завершено.

Следствие I.

В сети с потерями существует и единственно распределение потоков в очередях сети и каналах связи

$$\lambda_{ij} = p_{ij}(\lambda_i) \lambda_i.$$

Следствие 2.

Стационарное распределение потоков может быть получено итерационной процедурой, причем скорость сходимости определяется выражением

$$(\beta^n / (1 - \beta)) \rho(\lambda_1, \lambda_2) \prod_i \|Q(\lambda_i)\| \geq \rho(\lambda_{k+1}, \lambda^*)$$

$$\beta = \max_{\lambda} \prod_i \|Q(\lambda_i)\|$$

Лемма 7.

В устойчивых системах массового обслуживания интенсивность потока на выходе есть монотонно-возрастающая функция интенсивности потока на входе.

Доказательство:

Доказательство производится непосредственной проверкой по формулам теории массового обслуживания.

Доказательство завершено.

Лемма 8.

При увеличении интенсивности потока на входе одной из очередей сети, интенсивности потоков на входе остальных очередей не уменьшаются.

Доказательство:

Пусть увеличилась интенсивность входного потока в произвольной очереди r_q . Тогда в соответствии с леммой 7 интенсивность потока на выходе очереди r_q также увеличится. При этом не уменьшаются интенсивности потоков на входах очередей в смежных узлах, причем на входах всех очередей, взаимосвязанных с очередью r_q , интенсивности потоков возрастут, их увеличение, в свою очередь, может увеличить интенсивность потока на входе очереди r_q и на входах других очередей и т.д. Интенсивности потоков в очередях, независимых от очереди r_q , останутся неизменными.

Доказательство завершено.

Следствие.

При увеличении интенсивности входных потоков, поступающих извне в сеть, интенсивности потоков, поступающих в очереди всех узлов сети, не уменьшаются.

Если $v_2 \geq v_1$, то $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

Примечание - Считаем, что $\lambda_2 \geq \lambda_1$, если $\lambda_2^i \geq \lambda_1^i$ для всех i .

Лемма 9.

Последовательность векторов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ неубывающая.

Доказательство.

Доказательство проведем по индукции.

1) Для $k=1$

$$\lambda_1 = v, \lambda_2 = Q(v) v + v.$$

Так как $p_{ij}(v) v^i \geq 0$, то $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

2) Предположим, что для $k=m$ $\lambda_{m+1} \geq \lambda_m$.

5) Докажем справедливость леммы для $k=m+1$

$$\lambda_{m+2} \geq \lambda_{m+1}.$$

Пусть λ_m, λ_{m+1} - интенсивности потоков на входе i -го узла (на входе одной из очередей i -го узла) на $m, m+1$ итерациях;

$p_{ij}(\lambda_m) \lambda_m^i, p_{ij}(\lambda_{m+1}) \lambda_{m+1}^i$ - интенсивности потоков на выходах i -го узла (на выходах очередей i -го узла) на $m, m+1$ итерациях.

Так как по предположению $\lambda_{m+1} \geq \lambda_m$, то в соответствии с леммой 8

$$p_{ij}(\lambda_{m+1}) \lambda_{m+1}^i \geq p_{ij}(\lambda_m) \lambda_m^i$$

и

$$\lambda_{m+2}^i = \sum_i p_{ij}(\lambda_{m+1}) \lambda_{m+1}^i \geq \sum_i p_{ij}(\lambda_m) \lambda_m^i = \lambda_{m+1}^i.$$

Доказательство завершено.

Лемма 10.

Предположим, что неподвижная точка λ^* системы

$$\lambda = Q(\lambda) \lambda + v$$

существует и принадлежит множеству допустимых значений интенсивностей потоков Ω .

Тогда все члены последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$ также

принадлежат множеству допустимых значений интенсивностей потоков

Если $\Omega \ni \lambda^*$, то $\Omega \ni \lambda_i \forall i$.

Доказательство:

Множество Ω представляет собой выпуклое множество, в общем случае заданное соотношениями $\lambda_i \geq 0, \lambda_i < \lambda_{i\max}$.

Здесь $\lambda_{i\max}$ - интенсивность потока в i -том узле, равная интенсивности обслуживания сообщений в этом узле.

В соответствии с леммой 9

$$\dots \geq \lambda_k \geq \dots \geq \lambda_2 \geq \lambda_1.$$

Поэтому $\lim \lambda_k = \lambda^*$ и $\lambda^* \geq \lambda_k$.

Так как $\Omega \ni \lambda^*$, Ω - выпуклое множество, то λ_k также принадлежит Ω .

Доказательства завершено.

Следствие.

Пусть Ω_Γ – граница множества Ω и $\rho(\lambda^*, \Omega_\Gamma) = \rho^*$.
Тогда $\rho(\lambda_k, \Omega_\Gamma) \geq \rho^*$.

Теорема 2.

Пусть сеть без потерь задана трехуровневой моделью. Тогда итерационная процедура

$$\lambda_1 = v, \lambda_2 = Q(\lambda_1) \lambda_1 + v, \dots \quad (*)$$

позволяет установить существование стационарного распределения потоков в узлах сети. В случае ее сходимости стационарное распределение потоков в узлах сети существует и единственно. Если последовательность (*) расходится или выходит за область допустимых значений, то стационарного распределения потоков в узлах сети не существует. Хотя бы одна из очередей сети переполняется.

Доказательство.

Для сети без потерь множество допустимых значений потоков

$$\Omega = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \lambda_{i_{\max}} > \lambda_i \geq 0\}.$$

Границы множества Ω_Γ - не входят в множество Ω .

Поэтому необходимо показать, что итерационная процедура (*) в случае существования решения порождает точки, лежащие внутри множества Ω . Это следует из леммы 10. Далее доказательство аналогично доказательству теоремы I.

Пусть $\Phi = \{\phi\}$ - множество отображений пространства потоков Λ в пространство показателей, характеристик сети $\Pi = \{\pi\}$.
Отображение ϕ ставит каждому значению вектора интенсивностей потоков λ в сети единственное значение некоторой сетевой характеристики π (например, время доставки сообщений, время пребывания сообщений в узлах сети, вероятность образования циклов)

$$\pi = \phi(\lambda).$$

Следствие.

Пусть отображение ψ каждому значению стационарных входных потоков V ставит в соответствие сетевой поток λ . Тогда каждому значению стационарных входных потоков V суперпозиция отображений ψ и ϕ ставит в соответствие единственное значение сетевой характеристики π определённой на пространстве потоков Ω .

$$\phi(\psi(v)) = \phi(\lambda) = \pi$$

Теорема 3.

Пусть сеть задана трехуровневой моделью. Тогда интенсивности потоков в узлах и ребрах сети непрерывно зависят от интенсивностей входных потоков V на области допустимых значений.

Доказательство.

Как следует из описания трехуровневой модели сети, элементы матриц переходных вероятностей p_{ij}^t непрерывным образом зависят от интенсивностей входных потоков, поступающих на вход очередей узла λ_{pq}^{ijt} и соответственно от $\lambda_{pq} = \sum_{ijt} \lambda_{pq}^{ijt}$. Поэтому доказательство теоремы непосредственно вытекает из теоремы о непрерывности неподвижной точки [58].

Следствие I

Если отображение $\pi = \phi(\lambda)$ непрерывно, то характеристика сети π непрерывно зависит от интенсивности входных потоков v .

Следствие 2

Если отображение $\pi = \phi(\lambda)$ монотонно-неубывающее, то характеристика сети $\pi = \phi(\psi(v))$ монотонно не убывает с ростом интенсивности входного потока v .

6.1.2. Исследование динамики сети с помощью преобразования Лапласа

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода типа свертки

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t k(t-s) \varphi(s) ds + f(t)$$

Предположим, что функции $k(t)$ и $f(t)$ непрерывны при $t \geq 0$ и являются функциями-оригиналами. Пусть

$$|k(t)| \leq M_1 e^{S_1 t};$$

$$|f(t)| \leq M_2 e^{S_2 t}.$$

Тогда интегральное уравнение имеет единственное непрерывное решение при любом значении λ . Для решения $\varphi(t)$ можно получить оценку

$$|\varphi(t)| \leq M_3 e^{S_3 t},$$

где $S_3 > \max(S_1, S_2)$.

Таким образом, решение $\varphi(t)$ уравнения Вольтерра есть также функция-оригинал.

Пусть $\varphi(t) = \Phi(p)$; $k(t) = K(p)$; $f(t) = F(p)$.

Применяя, к обеим частям уравнения Вольтерра, преобразование Лапласа

$$\Phi(p) = 1/2\pi \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dp$$

и пользуясь теоремой умножения, будем иметь

$$\Phi(p) = F(p)/(1-\lambda k(p))$$

Функция $\Phi(p)$ будет аналитической в полуплоскости $\text{Re } p = S > S_3$, так что знаменатель не может иметь корней в указанной полуплоскости. Используя формулу обращения Лапласа, находим решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения

$$\varphi(t) = 1/2\pi i \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)/(1-\lambda K(p)) \cdot e^{pt} dp \quad (s > S_3)$$

(интеграл берется вдоль левой прямой $\text{Re } p = S > S_3$ и понимается в смысле главного значения).

Указанный метод решения приложим к системам интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_j(t) = f_j(t) + \lambda \sum_{i=1}^n \kappa_{ij}(t-s) \varphi(s) ds$$

где $(i = 1, 2, \dots, n)$;

$\kappa_{ij}(t)$, $f_i(t)$ - известные непрерывные функции-оригиналы.

Применяя к обеим частям системы уравнений преобразование Лапласа, получим систему

$$\Phi_j(p) = F_j(p) + \lambda \sum_{i=1}^n K_{ij}(p) \Phi_i(p)$$

($j = 1, 2, \dots, n$).

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_i(p)$. Пусть $(\Phi_1(p), \Phi_2(p), \dots, \Phi_n(p))$ есть решение данной системы уравнений. Тогда система $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$, где $\varphi_i(t)$ получены обратным преобразованием Лапласа

$$\varphi_j(t) = \Phi^{-1}_j(p)$$

будет искомым решением исходной системы интегральных уравнений. Для сетевой системы преобразование Лапласа дает следующую систему алгебраических уравнений

$$\lambda_j(p) = \sum_{i=1}^n p_{ij}(\lambda^0_i) \varphi_{ij}(p, \lambda^0_i) \cdot \lambda_i(p) + v_j(p)$$

или

$$\sum_{i=1}^n [\delta_{ij} - p_{ij}(\lambda^0_i) \varphi_{ij}(p, \lambda^0_i)] \lambda_i(p) = v_j(p)$$

где

$$\delta_{ij} \begin{cases} 1, & \text{если } j = i; \\ 0, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

В матричном виде уравнение запишется следующим образом

$$(I - Q(p)) \Lambda(p) = V(p)$$

где

I – единичная матрица;

$$Q(p) = \{q_{ij}(p)\};$$

$$q_{ij}(p) = p_{ij}(\lambda^0_i) \varphi_{ij}(p, \lambda^0_i).$$

Известно, что решение системы существует тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля

$$|I - Q(P)| \neq 0$$

В этом случае

$$\Lambda(p, \lambda^{\circ}_i) = N(p, \lambda^{\circ}_i) V(p),$$

где

$$N(p) = (n_{ij}(p, \lambda^{\circ}_i)) = (I - Q(p, \lambda^{\circ}_i))^{-1};$$

$$\lambda_i(p) = \sum_{j=1}^n n_{ij}(p) \cdot V_j(p);$$

$$n_{ij}(p, \lambda^{\circ}_i) = M_{ij}(p, \lambda^{\circ}_i) / |I - Q(p, \lambda^{\circ}_i)|;$$

$M_{ij}(p, \lambda^{\circ}_i)$ - алгебраическое дополнение матрицы $(I - Q)$.

Таким образом доказана Теорема 1

Пусть $\lambda^{\circ} = (\lambda^{\circ}_1, \lambda^{\circ}_2, \dots, \lambda^{\circ}_n)$ - точка равновесия сетевой системы в момент t_0

$\lambda_i(t), \lambda_j(t)$ - изменения интенсивности потоков в узлах сети;

$v_i(t), v_j(t)$ - изменения интенсивности входных потоков;

$r_{ij}(\lambda^{\circ}_i)$ - вероятности передачи сообщений между узлами сети, вероятность прохождения очереди ij ;

$\phi_{ij}(\tau, \lambda^{\circ}_i)$ - плотность распределения времени обслуживания сообщений в очереди сети ij .

Изменения потоков в узлах сети однозначно и непрерывно определяются изменениями входных потоков тогда и только тогда, когда определитель

$$|I - Q(p, \lambda^{\circ}_i)| = |\delta_{ij} - p_{ij}(\lambda^{\circ}_i)| \phi_{ij}(\lambda^{\circ}_i)$$

не равен нулю для всех p . В этом случае

$$\Lambda(p, \lambda^{\circ}_i) = N(p, \lambda^{\circ}_i) V(p)$$

$$N(p) = (n_{ij}(p, \lambda^{\circ}_i)) = (I - Q(p, \lambda^{\circ}_i))^{-1}.$$

$$\lambda_i(p) = \sum n_{ij}(p) \cdot V_j(p)$$

$$n_{ij}(p, \lambda^{\circ}_i) = M_{ij}(p, \lambda^{\circ}_i) / |I - Q(p, \lambda^{\circ}_i)|;$$

$$\lambda_j(t) = \sum_i (1/2\pi i) \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} n_{ij}(p) V_j(p) dp = \sum_i \int_0^t n_{ij}(t-\tau, \lambda^{\circ}_i) v_j(\tau) d\tau;$$

где - $n_{ij}(\tau) = (1/2\pi i) \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} M_{ij}(p, \lambda^{\circ}_i) / |I - Q(p, \lambda^{\circ}_i)| e^{p\tau} dp$.

6.1.3. Исследование динамики одноканальной системы массового обслуживания с бесконечной очередью, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием

Будем считать, что имеется один канал пропускной способности C_{ij} (интенсивность обслуживания $\mu_{ij} = 1/LC_{ij}$, где L средняя длина сообщений).

Кроме того, как это общепринято, считаем, что потоки, поступающие на вход очередей сети, являются пуассоновскими.

Тогда плотность распределения времени пребывания сообщений в очереди имеет вид (рассматриваем динамическую модель в окрестности точки λ_{i0}).

$$\varphi_{ij}(t, \lambda_{i0}) = (\mu_{ij} - \lambda_{i0}) e^{-(\mu_{ij} - \lambda_{i0})t} = (1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0})t}$$

Динамика рассматриваемой очереди (изменение интенсивности выходного потока при изменении интенсивности входного потока) описывается интегральным уравнением Вольтерра с вырожденным ядром.

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) &= \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, \lambda_{i0}) \lambda_i(\tau, \lambda_{i0}) d\tau = \\ &= \int_0^t (1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0})t} e^{(1/LC_{ij} - \lambda_{i0})\tau} \lambda_i(\tau, \lambda_{i0}) d\tau = \\ &= (1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0})t} \int_0^t e^{(1/LC_{ij} - \lambda_{i0})\tau} \lambda_i(\tau, \lambda_{i0}) d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим

$$(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) = a.$$

Тогда интегральное уравнение примет вид

$$\lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) = a e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} \lambda_i(\tau, \lambda_{i0}) d\tau.$$

а) изменение интенсивности входного потока представляет собой δ -функцию

Если изменение интенсивности входного потока представляет собой δ -функцию

$$\lambda_i(t, \lambda_{i0}) = \delta(t),$$

то изменение интенсивности выходного потока равно плотности распределения времени пребывания сообщений в очереди

$$\lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) = \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, \lambda_{i0}) \delta(\tau) d\tau =$$

$$\lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) = \varphi_{ij}(t, \lambda_{i0}) = (1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) t}.$$

б) изменение интенсивности входного потока представляет собой «ступеньку» высотой $\Delta\lambda_{i0}$

Если изменение интенсивности входного потока представляет собой «ступеньку» высотой $\Delta\lambda_{i0}$

$$\lambda_i(t, \lambda_{i0}) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } \Delta\lambda_{i0} \text{ при } t \geq 0,$$

то

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) &= a e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} \Delta\lambda_{i0} d\tau = a e^{-at} (1/a) (e^{a\tau} \Delta\lambda_{i0})|_0^t = \\ &= a e^{-at} \Delta\lambda_{i0} (1/a) (e^{at} - 1) = \Delta\lambda_{i0} (1 - e^{-at}) = \\ &= \Delta\lambda_{i0} (1 - e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) t}). \end{aligned}$$

Интенсивность выходного потока возрастает от 0 до $\Delta\lambda_{i0}$.

Изменение интенсивности выходного потока в 0 и ∞ равно

$$\lambda_{ij}(0, \lambda_{i0}) = 0, \lambda_{ij}(\infty, \lambda_{i0}) = \Delta\lambda_{i0}.$$

в) изменение интенсивности входного потока представляет собой «экспоненциальный импульс»

Если изменение интенсивности входного потока представляет собой «экспоненциальный импульс»

$$\lambda_i(t, \lambda_{i0}) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и}$$

$$\Delta\lambda_{i0} e^{-\alpha t} \text{ при } t \geq 0,$$

то

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) &= a e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} \Delta\lambda_{i0} e^{-\alpha\tau} d\tau = a e^{-at} 1/(a - \alpha) (e^{(a-\alpha)\tau} \Delta\lambda_{i0})|_0^t = \\ &= \Delta\lambda_{i0} e^{-at} a / (a - \alpha) (1 - e^{(a-\alpha)t}) = \Delta\lambda_{i0} a / (a - \alpha) (e^{-at} - e^{(a-\alpha)t}). \end{aligned}$$

и изменение интенсивности выходного потока в 0 и ∞ равно

$$\lambda_{ij}(0, \lambda_{i0}) = \lambda_{i0}, \lambda_{ij}(\infty, \lambda_{i0}) = \Delta\lambda_{i0}.$$

В точке экстремума при

$$d\Delta\lambda_{i0} / (a - \alpha) (e^{-\alpha t} - e^{-a t}) / dt = 0.$$

Экстремальное значение изменения интенсивности выходного достигается при

$$t = (\ln a / \alpha) / (a - \alpha) = \ln (a / \alpha)^{1/(a-\alpha)}.$$

Экстремальное значение изменения интенсивности выходного потока равняется

$$\lambda_i(t, \lambda_{i0}) = (a \Delta\lambda_{i0} / (a - \alpha)) ((a^2 / \alpha)^{1/(a-\alpha)} - a^{1/(a-\alpha)})$$

г) изменение интенсивности входного потока $\lambda_i(\tau, \lambda_{i0})$ представляет собой “импульс” продолжительностью t_0

Если изменение интенсивности входного потока $\lambda_i(\tau, \lambda_{i0})$ представляет собой “импульс” продолжительностью t_0

$$\lambda_i(t, \lambda_{i0}) = 0 \text{ при } \tau < 0, t \geq t_0,$$

$$\lambda_i(t, \lambda_{i0}) = \Delta\lambda_{i0} \text{ при } t_0 \geq t \geq 0.$$

То

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) &= a e^{-a t} \int_0^t e^{a \tau} \Delta\lambda_{i0} d\tau - a e^{-a t} \int_{t_0}^t e^{a \tau} \Delta\lambda_{i0} d\tau = \\ &= a e^{-a t} (1/a) (e^{a \tau} \Delta\lambda_{i0})|_0^t - a e^{-a t} (1/a) (e^{a \tau} \Delta\lambda_{i0})|_{t_0}^t. \end{aligned}$$

При $t_0 \geq t \geq 0$

$$\lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) = \Delta\lambda_{i0} (1 - e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) t});$$

При $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) &= \Delta\lambda_{i0} (1 - e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) t}) - \Delta\lambda_{i0} (1 - e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) (t - t_0)}) = \\ &= \Delta\lambda_{i0} (e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) (t - t_0)} - e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) t}) = \\ &= \Delta\lambda_{i0} e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) t} (e^{(1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) t_0} - 1). \end{aligned}$$

Изменение интенсивности выходного потока в 0 и ∞ равно

$$\lambda_{ij}(0, \lambda_{io}) = \lambda_{io}, \lambda_{ij}(\infty, \lambda_{io}) = 0.$$

Изменение интенсивности выходного потока при $t = t_0$ равно

$$\lambda_{ij}(t_0, \lambda_{io}) = \Delta\lambda_{io} (1 - e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{io}) t_0}).$$

д) изменение интенсивности входного потока представляет собой линейную функцию

Если изменение интенсивности входного потока представляет собой линейную функцию

$$\lambda_i(t, \lambda_{io}) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } bt \text{ при } t \geq 0,$$

то

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t, \lambda_{io}) &= a e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} b\tau d\tau = a e^{-at} b \int_0^t e^{a\tau} \tau d\tau = \\ &= a e^{-at} b \left((1/a) e^{at} t - (1/a^2)(e^{at} - 1) \right) = \\ &= b(t - (1/a) (1 - e^{-at})) = b(t - (1/(1/LC_{ij} - \lambda_{io})) (1 - e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{io}) t})) \end{aligned}$$

и изменение интенсивности выходного потока в 0 и ∞ равно

$$\lambda_{ij}(0, \lambda_{io}) = 0, \lambda_{ij}(\infty, \lambda_{io}) = \infty.$$

При $t = 1/a$

$$\lambda_{ij}(1/a, \lambda_{io}) = b/ea = b/e(1/LC_{ij} - \lambda_{io}).$$

е) изменение интенсивности входного потока представляет собой синусоиду

Если изменение интенсивности входного потока представляет собой синусоиду

$$\lambda_i(\tau, \lambda_{io}) = 0 \text{ при } \tau < 0 \text{ и } b\sin\omega\tau \text{ при } \tau \geq 0,$$

то

$$\lambda_{ij}(t, \lambda_{io}) = a b e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} \sin \omega\tau d\tau =$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t (\cos \omega \tau - i \sin \omega \tau) d\tau &= \int_0^t e^{(a+i\omega)\tau} d\tau = (1/(a+i\omega)) e^{(a+i\omega)\tau} \Big|_0^t = \\ &= (1/(a+i\omega)) (e^{(a+i\omega)t} - 1) = \\ &= ((a-i\omega)/(a^2+\omega^2)) (\cos \omega t - i \sin \omega t - 1) = \\ &= ((a-i)/(a^2-\omega^2)) (\cos \omega t - 1) - i\omega/(a^2+\omega^2) \sin \omega t \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t, \lambda_{i0}) &= a b e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} \sin \omega \tau d\tau = (a b e^{-at} \omega \sin \omega t)/(a^2 + \omega^2) = \\ &= (1/LC_{ij} - \lambda_{i0}) b e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{i0})t} \omega \sin \omega t / ((1/LC_{ij} - \lambda_{i0})^2 + \omega^2) \end{aligned}$$

Изменение интенсивности выходного потока в 0 и ∞ равно

$$\lambda_{ij}(0, \lambda_{i0}) = 0, \lambda_{ij}(\infty, \lambda_{i0}) = 0.$$

В данном примере при синусоидальном входном потоке на выходе очереди будут наблюдаться локальные экстремумы (максимумы и минимумы) изменения интенсивности выходного потока.

Определим их. Вычислим производную от изменения интенсивности выходного потока $\lambda_{ij}(t, \lambda_{i0})$

$$\begin{aligned} d\lambda_{ij}(t, \lambda_{i0})/dt &= d(a b e^{-at} \omega \sin \omega t / (a^2 + \omega^2)) / dt = \\ &= a b \omega / (a^2 + \omega^2) d(e^{-at} \sin \omega t) / dt = \\ &= (a b \omega / (a^2 + \omega^2)) (-a e^{-at} \sin \omega t + e^{-at} \cos \omega t). \end{aligned}$$

В точках экстремума производная равна нулю

$$(a b \omega / (a^2 + \omega^2)) (-a e^{-at} \sin \omega t + e^{-at} \cos \omega t) = 0.$$

Или

$$-a \sin \omega t + \cos \omega t = 0$$

Откуда

$$\operatorname{ctg} \omega t = a,$$

и

$$\omega t = \operatorname{arccctg} a + \pi k.$$

Экстремальные значения изменения интенсивности выходного потока достигаются при

$$t_k = (1/\omega) (\operatorname{arccctg} a + \pi k)$$

и равны

$$\lambda_{ij}(t_k, \lambda_{i0}) = a b e^{-(a/\omega) (\operatorname{arccctg} a + \pi k)} (\omega \operatorname{Sin} (\operatorname{arccctg} a + \pi k)) / (a^2 + \omega^2).$$

Вычислим

$$\operatorname{Sin} (\operatorname{arccctg} a + \pi k).$$

Из определения арккотангенса и котангенса имеем

$$\operatorname{Ctg} (\operatorname{arccctg} a) = a$$

и

$$\operatorname{Cos} (\operatorname{arccctg} a) / \operatorname{Sin} (\operatorname{arccctg} a) = a.$$

Откуда получаем

$$\operatorname{Sin}^2 (\operatorname{arccctg} a) = 1 / (1 + a^2).$$

Поскольку $a \geq 0$, то $\operatorname{arccctg} a \geq 0$ и $\operatorname{Sin} \operatorname{arccctg} a \geq 0$, то

$$\operatorname{Sin} (\operatorname{arccctg} a) = \sqrt{1 / (1 + a^2)}.$$

Если $(\operatorname{arccctg} a + \pi k)$ находится в первой четверти, то

$$\operatorname{Sin} (\operatorname{arccctg} a + \pi k) \geq 0.$$

Если $(\operatorname{arccctg} a + \pi k)$ находится в третьей четверти, то

$$\operatorname{Sin} (\operatorname{arccctg} a + \pi k) < 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Sin} (\operatorname{arccctg} a + 2\pi k) = \sqrt{1 / (1 + a^2)},$$

$$\operatorname{Sin} (\operatorname{arccctg} a + 2\pi k + 1) = - \sqrt{1 / (1 + a^2)}.$$

Окончательно имеем выражения для экстремальных значений изменений интенсивности выходного потока одноканальной системы массового обслуживания с бесконечной очередью, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием при синусоидальном изменении интенсивности входного потока.

$$\lambda_{ij}(t_{2k}, \lambda_{io}) = ab\omega (\sqrt{1/(1+a^2)})/(a^2 + \omega^2) \cdot e^{-(a/\omega) (\sqrt{1/(1+a^2)} + 2\pi k)}$$

$$\lambda_{ij}(t_{2k+1}, \lambda_{io}) = -ab\omega (\sqrt{1/(1+a^2)})/(a^2 + \omega^2) e^{-(a/\omega) (\sqrt{1/(1+a^2)} + 2\pi k + 1)}$$

Данный пример показывает, что очередь сглаживает синусоидальные колебания.

6.1.4. Исследование динамики сетевой системы состоящей из одноканальных бесконечных очередей, с пуассоновскими входными потоками и экспоненциальным обслуживанием

Будем считать, что в каждом ребре сети имеется один канал пропускной способности C_{ij} (интенсивность обслуживания $\mu_{ji} = 1/LC_{ij}$, где L средняя длина сообщений).

Кроме того, как это общепринято, считаем, что потоки, поступающие на вход очередей сети, являются пуассоновскими.

Тогда плотности распределения времен пребывания сообщений в очередях сети имеют вид (рассматриваем динамическую модель в окрестности точки $\lambda_o = (\lambda_{1o}, \lambda_{2o}, \dots, \lambda_{no})$).

$$\varphi_{ij}(t, \lambda_{io}) = (\mu_{ij} - \lambda_{io}) e^{-(\mu_{ij} - \lambda_{io})t} = (1/LC_{ij} - \lambda_{io}) e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{io})t}$$

Динамика рассматриваемой сети описывается системой интегральных уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами.

$$\lambda_j(t, \lambda_o) = \sum_i p_{ij} \int_0^t (1/LC_{ij} - \lambda_{io}) e^{-(1/LC_{ij} - \lambda_{io})t} e^{(1/LC_{ij} - \lambda_{io})\tau} \lambda_j(\tau, \lambda_o) d\tau + v_j(t)$$

Систему уравнений перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \lambda_j(t, \lambda_o) &= \sum_i p'_{ij} \int_0^t e^{-\alpha_{ij}t} e^{\alpha_{ij}\tau} \lambda_i(\tau, \lambda_o) d\tau + v_j(t) = \\ &= \sum_i p'_{ij} e^{-\alpha_{ij}t} \int_0^t e^{\alpha_{ij}\tau} \lambda_i(\tau, \lambda_o) d\tau + v_j(t). \end{aligned}$$

Здесь

$$p'_{ij} = p_{ij}(1/LC_{ij} - \lambda_{io}) = p_{ij} \alpha_{ij};$$

$$\alpha_{ij} = 1/LC_{ij} - \lambda_{i0}.$$

Допустим, что решение $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ уравнения существует. Обозначим

$$U_{ij} = \int_0^t e^{\alpha_{ij} \tau} \lambda_i(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\lambda_i(\tau, \lambda_0) = \sum_k P'_{ki} e^{-\alpha_{ki} \tau} U_{ki} + v_i(\tau).$$

Умножим обе части уравнения на $e^{\alpha_{ij} \tau}$ и проинтегрируем от 0 до t. Получим

$$\int_0^t e^{\alpha_{ij} \tau} \lambda_i(\tau) d\tau = \sum_k p'_{je} e^{-\alpha_{ki} t} U_{ki} e^{\alpha_{ij} \tau} d\tau + \int_0^t v_i(\tau) e^{\alpha_{ij} \tau} d\tau.$$

Используя определение U_{ij} , получим

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \sum_k p'_{ki} e^{-\alpha_{ki} t} U_{ki} \int_0^t e^{\alpha_{ij} \tau} d\tau + \int_0^t v_i(\tau) e^{\alpha_{ij} \tau} d\tau = \\ &= \sum_k p'_{ki} e^{-\alpha_{ki} t} U_{ki} (1/\alpha_{ij}) e^{\alpha_{ij} \tau} \Big|_0^t + \int_0^t v_i(\tau) e^{\alpha_{ij} \tau} d\tau = \\ &= \sum_k p'_{ki} e^{-\alpha_{ki} t} ((e^{\alpha_{ij} t} - 1)/\alpha_{ij}) U_{ki} + \int_0^t v_i(\tau) e^{\alpha_{ij} \tau} d\tau \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили систему алгебраических уравнений относительно U_{ij}

$$U_{ij} = \sum_k a_{kij} U_{ki} + f_{ij}.$$

Здесь

$$a_{kij} = (p_{kj} \alpha_{ki} / \alpha_{ij}) (e^{(\alpha_{ij} - \alpha_{ki}) t} - e^{-\alpha_{ki} t}),$$

$$f_{ij} = \int_0^t v_i(\tau) e^{\alpha_{ij} \tau} d\tau.$$

Полученная система алгебраических уравнений содержит в общем случае n (n-1) уравнение и n (n-1) неизвестное U_{ij} .

Решив систему относительно U_{ij} , можно выразить через них потоки $\lambda_j(t, \lambda_0)$ в соответствии с уравнениями

$$\lambda_j(t, \lambda_0) = \sum_i U_{ij} p'_{ij} e^{-\alpha_{ij} t} U_{ij} + v_j(t).$$

6.1.5. Исследование динамики системы множественного доступа "Алоха"

В стационарном режиме поток на выходе системы равен [2]

$$\lambda_j = \lambda_i e^{-a\lambda_i}$$

λ_i - интенсивность суммарного входного потока сообщений

λ_j - интенсивность выходного (обслуженного) потока

a - коэффициент ($a = 1, 2$)

При входном потоке λ_i выходной поток λ_j равен

$$\lambda_j = \lambda_i e^{-a\lambda_i} = p_{ij}(\lambda_i) \lambda_i,$$

где $p_{ij}(\lambda_i) = e^{-a\lambda_i}$.

Производная от p_{ij} по λ_i равна

$$\partial p_{ij}(\lambda_i) / \partial \lambda_i = -a e^{-a\lambda_i}$$

Следовательно, коэффициент в интегральном уравнении, описывающем динамику очереди

$$p'_{ij}(\lambda_i) = p_{ij}(\lambda_i) + (\partial p_{ij}(\lambda_i) / \partial \lambda_i) \cdot \lambda_i = e^{-a\lambda_i} (1 - a\lambda_i).$$

Интегральное уравнение, описывающее динамику системы в окрестности точки λ_i , имеет вид

$$\lambda_i(t) = (1 - a\lambda_i) e^{-a\lambda_i} \int_0^t \phi_{ij}(t-\tau) \lambda_i(\tau) d\tau$$

При $a\lambda_i > 1$ увеличение входного потока вызывает уменьшение выходного потока.

При $a\lambda_i = 1$, зависимость выходного потока от входного определяется второй производной

$$\partial^2 p_{ij} / \partial \lambda_i^2 = a^2 e^{-a\lambda_i}.$$

Поскольку $a^2 e^{-a\lambda_i} > 0$, то увеличение входного потока вызывает увеличение выходного потока.

При $a\lambda_i < 1$ увеличение входного потока вызывает увеличение выходного потока.

Тем самым строго показан известный факт – возможность возникновения неустойчивости в элементах сети, использующих алгоритм типа «Алоха». В частности, в локальных вычислительных сетях Ethernet со

случайным методом доступа, в спутниковых каналах связи с TDMA – множественным доступом с временным разделением. Если с локальным использованием алгоритма типа «Алоха» еще можно смириться. (Естественно под контролем администратора ЛВС или оператора спутниковой станции), то глобальное использование алгоритма типа «Алоха» или других источников неустойчивости представляется недопустимым. Следует отметить, что в сетях Ethernet идет повсеместная замена концентраторов (обеспечивающих использование общей среды и создающих неустойчивость) на коммутаторы (обеспечивающих использование отдельных каналов связи и тем самым решающих проблему неустойчивости).

6.1.6. Исследование динамики модельной сети

На рисунке изображена модельная сеть из шести узлов.

Узел 1 – узел-адресат;

v_i – интенсивность внешнего потока, поступающего в узел i ;

I – направление первого выбора;

II – направление второго выбора;

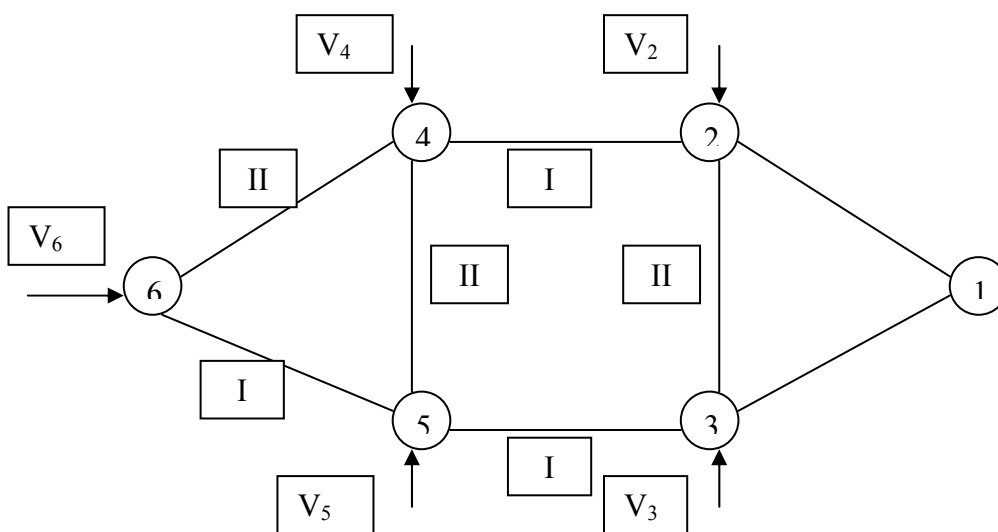


Рисунок 6.1. Модельная сеть

Канальные емкости, пропускные способности, средние длины сообщений равны единице.

Сообщения идут по направлению первого выбора (лежащему на кратчайшем пути) если соответствующий канал свободен. Если канал занят, то сообщения направляются в очередь (бесконечную) стоящую во втором направлении выбора. Система потоковых уравнений имеет вид:

$$\lambda_6 = \lambda_6$$

$$\lambda_5 = p_{65} \lambda_6 + p_{45} \lambda_4 + v_5.$$

$$\lambda_4 = p_{64} \lambda_6 + p_{54} \lambda_5 + v_4.$$

$$\lambda_3 = p_{53} \lambda_5 + p_{23} \lambda_2 + v_3.$$

$$\lambda_2 = p_{42} \lambda_4 + p_{32} \lambda_3 + v_2.$$

$$\lambda_1 = p_{31} \lambda_3 + p_{21} \lambda_2.$$

Здесь

$$p_{65} = b_{65}; \quad p_{64} = 1 - b_{65}.$$

$$p_{53} = b_{53}; \quad p_{54} = 1 - b_{53}.$$

$$p_{42} = b_{42}; \quad p_{45} = 1 - b_{42}.$$

$$p_{31} = b_{31}; \quad p_{32} = 1 - b_{31}.$$

$$p_{21} = b_{21}; \quad p_{23} = 1 - b_{21}.$$

В свою очередь

$$b_{65} = 1/(1+\lambda_6);$$

$$b_{53} = 1/(1+\lambda_5);$$

$$b_{42} = 1/(1+\lambda_4);$$

$$b_{31} = 1/(1+\lambda_3);$$

$$b_{21} = 1/(1+\lambda_2).$$

Следовательно, вероятности переходов между узлами сети равны

$$p_{65} = 1/(1+\lambda_6); \quad p_{64} = \lambda_6/(1+\lambda_6).$$

$$p_{53} = 1/(1+\lambda_5); \quad p_{54} = \lambda_5/(1+\lambda_5).$$

$$p_{42} = 1/(1+\lambda_4); \quad p_{45} = \lambda_4/(1+\lambda_4).$$

$$p_{31} = 1/(1+\lambda_3); \quad p_{32} = \lambda_3/(1+\lambda_3).$$

$$p_{21} = 1/(1+\lambda_2); \quad p_{23} = \lambda_2/(1+\lambda_2).$$

Соответствующие частные производные равны

$$\partial p_{65}/\partial \lambda_6 = -(1/(1+\lambda_6)^2); \quad \partial p_{64}/\partial \lambda_6 = 1/(1+\lambda_6)^2.$$

$$\partial p_{53}/\partial \lambda_5 = -(1/(1+\lambda_5)^2); \quad \partial p_{54}/\partial \lambda_5 = 1/(1+\lambda_5)^2.$$

$$\partial p_{42}/\partial \lambda_4 = -(1/(1+\lambda_4)^2); \quad \partial p_{45}/\partial \lambda_4 = 1/(1+\lambda_4)^2.$$

$$\partial p_{31}/\partial \lambda_3 = -(1/(1+\lambda_3)^2); \quad \partial p_{32}/\partial \lambda_3 = 1/(1+\lambda_3)^2.$$

$$\partial p_{21}/\partial \lambda_2 = -(1/(1+\lambda_2)^2); \quad \partial p_{23}/\partial \lambda_2 = 1/(1+\lambda_2)^2.$$

Окончательный вид системы стационарных потоковых уравнений

$$\lambda_6^\circ = v_6;$$

$$\lambda_5^\circ = (1/(1+\lambda_6^\circ)) \cdot \lambda_6^\circ + (\lambda_4^\circ/(1+\lambda_4^\circ)) \cdot \lambda_4^\circ + v_5^\circ;$$

$$\lambda_4^\circ = (\lambda_6^\circ/(1+\lambda_6^\circ)) \cdot \lambda_6^\circ + (\lambda_5^\circ/(1+\lambda_5^\circ)) \cdot \lambda_5^\circ + v_4^\circ;$$

$$\lambda_3^\circ = (1/(1+\lambda_5^\circ)) \cdot \lambda_5^\circ + (\lambda_2^\circ/(1+\lambda_2^\circ)) \cdot \lambda_2^\circ + v_3^\circ;$$

$$\lambda_2^\circ = (1/(1+\lambda_4^\circ)) \cdot \lambda_4^\circ + (\lambda_3^\circ/(1+\lambda_3^\circ)) \cdot \lambda_3^\circ + v_2^\circ;$$

$$\lambda_1^\circ = (1/(1+\lambda_2^\circ)) \cdot \lambda_2^\circ + (1/(1+\lambda_3^\circ)) \cdot \lambda_3^\circ.$$

Динамика рассматриваемой сети опишется системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\lambda_6(t) = v(t);$$

$$\lambda_5(t) = [(1/(1+\lambda_6^\circ)) - (1/(1+\lambda_6^\circ))^2] \int_0^t \varphi_{65}(t-\tau) \cdot \lambda_6(\tau) \cdot d\tau +$$

$$+ [(\lambda_4^\circ/(1+\lambda_4^\circ)) + (1/(1+\lambda_4^\circ)^2)] \int_0^t \varphi_{45}(t-\tau) \lambda_4(\tau) d\tau + v_5(t) =$$

$$= \lambda_6^\circ / (1 + \lambda_6^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{65}(t-\tau) \lambda_6(\tau) d\tau + (\lambda_4^{\circ 2} + \lambda_4^\circ + 1) / (1 + \lambda_4^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{45}(t-\tau) \lambda_4(\tau) d\tau +$$

$$+ v_5(t);$$

$$\lambda_4(t) = (\lambda_6^{\circ 2} + \lambda_6^\circ + 1) / (1 + \lambda_6^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{64}(t-\tau) \lambda_4(\tau) d\tau +$$

$$+ (\lambda_5^{\circ 2} + \lambda_5^\circ + 1) / (1 + \lambda_5^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{54}(t-\tau) \lambda_4(\tau) d\tau + v_4(t);$$

$$\lambda_3(t) = \lambda_5^\circ / (1 + \lambda_5^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{53}(t-\tau) \lambda_3(\tau) d\tau +$$

$$(\lambda_2^{\circ 2} + \lambda_2^\circ + 1) / (1 + \lambda_2^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{23}(t-\tau) \lambda_2(\tau) d\tau + v_3(t);$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_4^\circ / (1 + \lambda_4^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{42}(t-\tau) \lambda_4(\tau) d\tau +$$

$$+ (\lambda_3^{\circ 2} + \lambda_3^\circ + 1) / (\lambda_3^\circ + 1)^2 \int_0^t \varphi_{32}(t-\tau) \lambda_3(\tau) d\tau + v_2(t);$$

$$\lambda_1(t) = \lambda_2^\circ / (1 + \lambda_2^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{21}(t-\tau) \lambda_2(\tau) d\tau + \lambda_3^\circ / (1 + \lambda_3^\circ)^2 \int_0^t \varphi_{31}(t-\tau) \lambda_3(\tau) d\tau.$$

Применив преобразование Лапласа, получим систему уравнений в комплексной области

$$\lambda_6(s) = v_6(s);$$

$$\lambda_5(s) = \lambda_6^\circ / (1 + \lambda_6^\circ)^2 \Phi_{65}(s) \lambda_6(s) + (\lambda_4^{\circ 2} + \lambda_4^\circ + 1) / (1 + \lambda_4^\circ)^2 \Phi_{45}(s) \lambda_4(s) + v_5(s);$$

$$\lambda_4(s) = (\lambda_6^{\circ 2} + \lambda_6^\circ + 1) / (1 + \lambda_6^\circ)^2 \Phi_{64}(s) \lambda_6(s) +$$

$$+ (\lambda_5^{\circ 2} + \lambda_5^\circ + 1) / (1 + \lambda_5^\circ)^2 \Phi_{54}(s) \lambda_5(s) + v_4(s);$$

$$\lambda_3(s) = \lambda_5^\circ / (1 + \lambda_5^\circ)^2 \Phi_{53}(s) \lambda_5(s) + (\lambda_2^{\circ 2} + \lambda_2^\circ + 1) / (1 + \lambda_2^\circ)^2 \Phi_{23}(s) \lambda_2(s) + v_3(s);$$

$$\lambda_2(s) = \lambda_4^\circ / (1 + \lambda_4^\circ)^2 \Phi_{42}(s) \lambda_4(s) + (\lambda_3^{\circ 2} + \lambda_3^\circ + 1) / (1 + \lambda_3^\circ)^2 \Phi_{32}(s) \lambda_3(s) + v_2(s);$$

$$\lambda_1(s) = \lambda_2^\circ / (1 + \lambda_2^\circ)^2 \Phi_{21}(s) \lambda_2(s) + \lambda_3^\circ / (1 + \lambda_3^\circ)^2 \Phi_{31}(s) \lambda_3(s).$$

6.1.7. Динамические свойства сетевых систем. Устойчивость

Проблемы устойчивости управляемости, наблюдаемости сетевых систем, в частности, систем связи, вычислительных и информационных

сетей, являются одними из наиболее важных проблем, решение которых позволит обосновать не только подходы к проектированию конкретных классов сетей, но и позволит создать единую методологию проектирования разнообразных систем, состоящих из множества взаимосвязанных частей. Приведем некоторые из наиболее типичных вопросов, ответы на которые должно дать решение данных проблем.

К чему приведет временное изменение входного потока в один или несколько узлов сети? Вернется ли сеть в исходное состояние? Или небольшое изменение, например, в сетях с циклами, приведет к лавинообразному нарастанию суммарного потока в сети и ее перегрузке, а может быть к остановке сети? Возможно ли «раскачать» сеть специально подобранным изменением внешней нагрузки? Иначе говоря, могут ли в сетях наблюдаться резонансные явления? Может ли сеть перейти в неустойчивое состояние при отказе или разрушении ее элементов? Можно ли перевести сеть из одного состояния в другое? Как быстро? Какова длительность переходных процессов в сетевой системе? Какой характер носят переходные процессы?

Сетевые системы, в общем случае, являются нелинейными системами относительно потоков в узлах и очередях. Рассмотренная ранее система линейных уравнений Вольтерра описывает динамику сетевой системы в точке λ_0 и ее достаточно малой окрестности. Тем не менее, известные методы анализа нелинейных систем позволяют сводить исследование устойчивости нелинейных систем к исследованию устойчивости их линейных приближений.

Приведем ряд необходимых в дальнейшем сведений.

«Состояние равновесия называется устойчивым, если для любой области ξ , окружающей эту точку, существует такая область начальных отклонений $\delta = \delta(\xi)$, что возмущение, начавшееся в области δ , не достигает границ области ξ . Если такую область указать нельзя, т. е. если любое возмущенное движение достигает границ области, то состояние равновесия будет неустойчивым. Условия устойчивости требуют, чтобы движение, начавшееся внутри δ , не достигало границ области ξ ; однако совершенно не обязательно, чтобы возмущенное движение стремилось к состоянию равновесия (если это происходит, система является асимптотически устойчивой). В принципе, возможны случаи, когда возмущенное движение около устойчивого состояния равновесия не «затухает», а продолжается сколь угодно долго, причем «амплитуда» возмущенного движения будет тем меньше, чем меньше величина начального отклонения.

Для того, чтобы установить, является ли состояние равновесия устойчивым согласно одному из методов Ляпунова:

а) находятся уравнения первого приближения, которые получаются путем линеаризации характеристики $F(z)$ нелинейного элемента вблизи состояния равновесия z_0 . Процедура такой линеаризации очень проста и состоит в разложении функций в ряд Тейлора у точки $z=z_0$, в котором удерживаются только два члена

$$F(z) = F(z_0) + \left. \frac{dF}{dz} \right|_{z_0} \Delta Z ,$$

т. е. фактически сводится к нахождению производной от F в точке z_0 . Это соответствует замене нелинейной характеристики касательной в точке равновесия. Для полученной в результате линейной системы составляется передаточная функция (что эквивалентно составлению уравнений первого приближения);

б) определяется (с помощью любого из известных критериев), будет ли полученная линейная система устойчива. В том случае если линейная система устойчива (это соответствует отрицательным вещественным частям характеристического уравнения), состояние равновесия исходной нелинейной системы будет асимптотически устойчивым. Если линейная система неустойчива (это соответствует наличию хотя бы одного корня характеристического уравнения с положительной вещественной частью), то состояние равновесия исходной нелинейной системы неустойчиво. И только в том случае, когда линейная система находится на границе устойчивости (все корни мнимые), рассматриваемый метод Ляпунова не дает ответа на вопрос об устойчивости состояний равновесия исходной нелинейной системы и требуется дополнительное исследование» [38].

Сетевая система устойчива, более того асимптотически устойчива в точке λ_0 , тогда и только тогда, когда характеристический определитель

$$\det(I - Q(P, \lambda_0))$$

не имеет корней с неотрицательной действительной частью.

Исследование корней характеристического определителя проведем в несколько этапов.

Вначале исследуем общие свойства преобразований Лапласа плотностей распределения.

Лемма 1

Если $\varphi(t)$ - плотность распределения

то

$$\varphi^*(P) = \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{-Pt} dt, \text{ то } \varphi^*(0) = 1$$

и

$$\varphi^*(0) > |\varphi^*(P)| \quad \forall P \quad \operatorname{Re} P > 0.$$

Доказательство.

$$1) \quad \varphi^*(0) = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = 1.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad |\varphi^*(P)| &= \left| \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{-Pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} \varphi(t) |e^{-Pt}| dt = \{P_{x>0} = x + iy\} = \int_0^{\infty} \varphi(t) |e^{-xt} e^{iyt}| dt = \\ &= \int_0^{\infty} \varphi(t) |e^{-xt}| |e^{iyt}| dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-xt} dt < 1. \end{aligned}$$

Лемма 2.

Для сети с конечными очередями

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(\lambda_0) |\varphi_{ij}(\lambda_0, P)| < 1$$

для всех $P \operatorname{Re} P \geq 0$.

Доказательство.

По лемме 1 для всех функций $\varphi_{ij}(P, \lambda_0)$, являющихся преобразованием Лапласа от плотности распределения $|\varphi_{ij}(\lambda_0, P)| \leq 1$ при $\operatorname{Re} P \geq 0$.

Кроме того, для сети с конечными очередями $\sum_{j=0}^n P_{ij}(\lambda_0) < 1$ для всех точек равновесия λ_0 .

Поэтому

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(\lambda_0) |\varphi_{ij}(\lambda_0, P)| \leq \sum_{j=1}^n P_{ij}(\lambda_0) < 1.$$

Доказательство завершено.

Лемма 3.

Для сети с бесконечными очередями

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(\lambda_0) |\varphi_{ij}(\lambda_0, P)| \leq 1 (< 1)$$

для всех $P \operatorname{Re} P \geq 0$ ($\operatorname{Re} P \geq 1$).

Доказательство данной леммы аналогично доказательству предыдущей.

Лемма 4.

Характеристический определитель динамической модели сетевой системы с конечными очередями в точке λ_0

$$\det(\delta_{ij} - P_{ij}(\lambda_0) \varphi_{ij}(P, \lambda_0))$$

не может иметь корней с положительной действительной частью.

Доказательство.

Воспользуемся теоремой Леви-Деспланка, которая утверждает, что если $A = (a_{ij})$ - комплексная квадратная матрица порядка n и

$$|a_{ij}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,$$

то $\det(A) \neq 0$.

В соответствии с леммой 2

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(\lambda_0) |\varphi_{ij}(P, \lambda_0)| < 1$$

Поскольку $P_{ii}(\lambda_0) = 0$ по определению (передача сообщений осуществляется между различными узлами), то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n P_{ij}(\lambda_0) |\varphi_{ij}(P, \lambda_0)| < 1,$$

кроме того,

$$\delta_{ii} = 1.$$

Таким образом, условия теоремы Леви-Деспланка выполнены, и следовательно характеристический полином не имеет решений с неотрицательной действительной частью.

Лемма доказана.

Таким образом доказана Теорема 1.

Сетевая система с конечными очередями, описываемая многоуровневой моделью, является устойчивой и асимптотически устойчивой при произвольных входных потоках.

Данная теорема фактически доказана ранее. Остается лишь добавить, что при произвольных потоках стационарное распределение потоков в узлах и очередях сети существует и единственно.

Теперь можно ответить на некоторые из поставленных ранее вопросов.

1. Кратковременные изменения входных потоков не могут надолго вывести сетевую систему с конечными очередями из состояния равновесия. С течением времени система возвратится в исходное положение равновесия.

2. Резонансные, колебательные режимы в сетевых системах при неизменной ее структуре, сетевых алгоритмах, параметрах элементов невозможны. При возвращении в состояние равновесия переходной процесс в сетях с конечными очередями протекает монотонно.

Теорема 2.

Сетевая система с бесконечными очередями, описываемая многоуровневой моделью, в общем случае является полустойчивой, т. е. характеристическое уравнение может иметь корни с нулевыми действительными частями. Корней с положительными действительными частями система с бесконечными очередями, также как и система с конечными очередями, сетевая система иметь не может.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей.

Таким образом, в сетях с бесконечными очередями

- 1) могут возникать колебательные процессы, явления резонанса;
- 2) при возвращении в состояние равновесия переходные процессы могут иметь колебательный характер;

3) для обеспечения устойчивости сетевых систем в них необходимо вводить узлы, очереди с конечными объемом сообщений - функцией которых был бы «сброс» лишней нагрузки.

В качестве таких узлов можно использовать узлы на входе сети;

4) последнее замечание носит, впрочем, чисто теоретический характер. В реальных физически реализуемых сетях все очереди конечны, поэтому все без исключения реальные сети являются устойчивыми;

5) о продолжительности переходных процессов в сетевых системах можно сказать следующее.

Продолжительность переходного процесса определяется наименьшим по модулю отрицательным корнем характеристического уравнения.

Если обозначить действительную часть наименьшего по модулю отрицательного корня характеристического уравнения через $\text{Re}P_0$, то продолжительность переходного процесса пропорциональна

$$(\text{Re}P_0)^{-1}.$$

Так для линейной динамической модели бесконечной очереди уровня 0,95 установившегося режима процесс достигает через

$$\tau = 3\tau(\lambda_0),$$

где $\tau(\lambda_0)$ - время пребывания сообщений в системе массового обслуживания.

Рассмотрим два примера сетей из очередей с циклом

Сеть из двух очередей с циклом, представлена на рисунке 6.2.

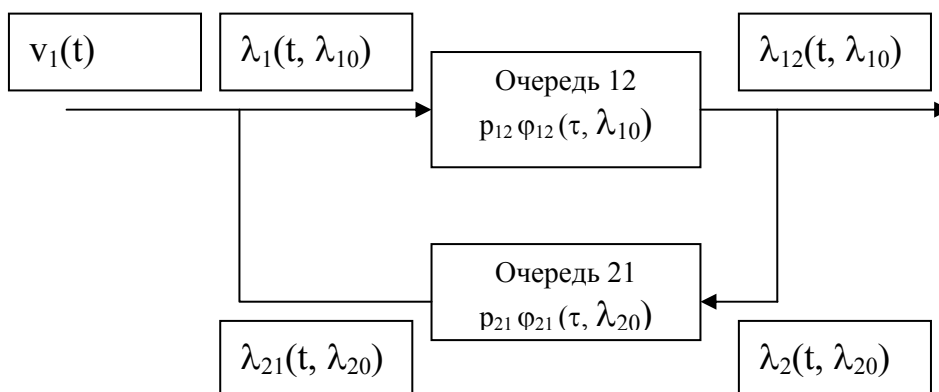


Рисунок 6.2. Сеть из двух очередей с циклом.

Здесь

$v_1(t)$ – изменение интенсивности потока, входящего в сеть (в очередь 12) извне;

$\lambda_1(t, \lambda_{10})$ – изменение интенсивности потока, на входе

очереди 12;

p_{12} – вероятность прохождения сообщений через очередь 12;

$\varphi_{12}(\tau, \lambda_{10})$ – плотность распределения времени пребывания сообщений в очереди 12;

λ_{10} – интенсивность потока, на входе очереди 12 в начальный момент времени;

$\lambda_{12}(t, \lambda_{10})$ – изменение интенсивности потока, на выходе очереди 12, на выходе рассматриваемой сети из очередей 12 и 21;

$\lambda_2(t, \lambda_{10})$ – изменение интенсивности потока, на входе очереди 21;

p_{21} – вероятность прохождения сообщений через очередь 21;

$\varphi_{21}(\tau, \lambda_{20})$ – плотность распределения времени пребывания сообщений в очереди 21;

λ_{20} – интенсивность потока, на входе очереди 21 в начальный момент времени;

$\lambda_{21}(t, \lambda_{20})$ – изменение интенсивности потока, на выходе очереди 21.

Изменения интенсивностей на входе и выходе очередей рассматриваемой сети из двух очередей связаны следующими соотношениями.

$$\lambda_{12}(t, \lambda_{10}) = p_{12} \int_0^t \varphi_{12}(t-\tau, \lambda_{10}) \lambda_1(\tau, \lambda_{10}) d\tau.$$

$$\lambda_2(t, \lambda_{20}) = \lambda_{12}(t, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_{21}(t, \lambda_{20}) = p_{21} \int_0^t \varphi_{21}(t-\tau, \lambda_{20}) \lambda_2(\tau, \lambda_{20}) d\tau$$

$$\lambda_1(t, \lambda_{10}) = v_1(t) + \lambda_{21}(t, \lambda_{20}).$$

В операторном виде имеем

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) \lambda_1(p, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_2(p, \lambda_{20}) = \lambda_{12}(p, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_{21}(p, \lambda_{20}) = p_{21} \varphi_{21}(p, \lambda_{20}) \lambda_2(p, \lambda_{20}) = p_{21} \varphi_{21}(p, \lambda_{20}) \lambda_{12}(p, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_1(p, \lambda_{10}) = \lambda_{21}(p, \lambda_{20}) + v_1(p).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) (\lambda_{21}(p, \lambda_{20}) + v_1(p)).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) (p_{21} \varphi_{21}(p, \lambda_{20}) \lambda_{12}(p, \lambda_{10}) + v_1(p)).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = p_{12} p_{21} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) \varphi_{21}(p, \lambda_{20}) \lambda_{12}(p, \lambda_{10}) + p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) v_1(p).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10})(1 - p_{12} p_{21} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) \varphi_{21}(p, \lambda_{20})) + p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) v_1(p).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = v_1(p) p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) / (1 - p_{12} p_{21} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) \varphi_{21}(p, \lambda_{20})).$$

При

$$p_{12} = p_{21} = q, \quad \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) = \varphi_{21}(p, \lambda_{20}) = \varphi(p, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = q v_1(p) \varphi(p, \lambda_{10}) / (1 - q^2 \varphi^2(p, \lambda_{10})).$$

$$\varphi(p, \lambda_{10}) = \int_0^{\infty} a e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} a e^{-(a+p)t} dt = (a/(a+p)) e^{-(a+p)t} \Big|_0^{\infty} =$$

При

$$\varphi(p, \lambda_{10}) = a/(a+p).$$

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(p, \lambda_{10}) &= v_1(p) q a / (a+p) (1 - q^2 a^2 / (a+p)^2) = \\ &= v_1(p) q a (a+p) / ((a+p)^2 - q^2 a^2). \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы (сети) равно

$$(a+p)^2 - q^2 a^2 = 0.$$

$$(a+p)^2 = q^2 a^2.$$

Корни характеристического уравнения равны

$$p_1 = -a + qa,$$

$$p_2 = -a - qa.$$

При $q < 1$

$$p_1 = -a + qa = -a(1 - q) < 0,$$

$$p_2 = -a - qa = -a(1 + q) < 0.$$

При $q = 1$ (в сети без потерь)

$$p_1 = 0.$$

$$p_2 = -a - qa = -a(1 + q) < 0.$$

Итак, сеть состоящая из двух очередей без потерь полуустойчива. В ней могут возникать автоколебания.

Передаточная функция рассматриваемой сети из двух очередей равна

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(p, \lambda_{10})/v_1(p) &= qa(a + p)/((a + p)^2 - q^2 a^2) = \\ &= qa(a + p)/((a + p - qa)(a + p + qa)). \end{aligned}$$

И

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = v_1(p) qa(a + p)/((a + p)^2 - q^2 a^2).$$

Рассмотрим замкнутую сеть из n очередей $12, 23, \dots, n-1n, n1$.

Изменения интенсивностей потоков на входе и выходе очередей сети связаны следующими соотношениями

$$\lambda_1(t, \lambda_{10}) = \lambda_{n1}(t, \lambda_{n0}) + v_1(t).$$

$$\lambda_{12}(t, \lambda_{10}) = p_{12} \int_0^t \varphi_{12}(t - \tau, \lambda_{10}) \lambda_1(\tau, \lambda_{10}) d\tau.$$

$$\lambda_2(t, \lambda_{20}) = \lambda_{12}(t, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_{23}(t, \lambda_{20}) = p_{23} \int_0^t \varphi_{23}(t - \tau, \lambda_{20}) \lambda_2(\tau, \lambda_{20}) d\tau.$$

$$\lambda_3(t, \lambda_{30}) = \lambda_{23}(t, \lambda_{20}).$$

$$\lambda_{23}(t, \lambda_{20}) = p_{23} \int_0^t \varphi_{23}(t - \tau, \lambda_{20}) \lambda_2(\tau, \lambda_{20}) d\tau.$$

.....

$$\lambda_{k+1}(t, \lambda_{k+10}) = \lambda_{kk+1}(t, \lambda_{k0}).$$

.....

$$\lambda_{kk+1}(t, \lambda_{k0}) = p_{kk+1} \int_0^t \varphi_{kk+1}(t - \tau, \lambda_{k0}) \lambda_k(\tau, \lambda_{k0}) d\tau$$

$$\lambda_{n1}(t, \lambda_{k+1}) = \lambda_{kk+1}(t, \lambda_{k0}).$$

$$\lambda_{n1}(t, \lambda_{n0}) = p_{n1} \int_0^t \varphi_{n1}(t-\tau, \lambda_{n0}) \lambda_n(\tau, \lambda_{n0}) d\tau$$

$$\lambda_1(t, \lambda_{10}) = v_1(t) + \lambda_{21}(t, \lambda_{20}).$$

В операторном виде имеем

$$\lambda_1(p, \lambda_{10}) = \lambda_{n1}(p, \lambda_{n0}) + v_1(p).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) \lambda_1(p, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_2(t, \lambda_{20}) = \lambda_{12}(t, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_{23}(p, \lambda_{20}) = p_{23} \varphi_{23}(p, \lambda_{20}) \lambda_2(p, \lambda_{20}).$$

$$\lambda_3(p, \lambda_{30}) = \lambda_{23}(p, \lambda_{20}).$$

$$\lambda_{23}(p, \lambda_{20}) = p_{23} \varphi_{23}(p, \lambda_{20}) \lambda_2(p, \lambda_{20}).$$

$$\lambda_{k+1}(p, \lambda_{k+10}) = \lambda_{kk+1}(p, \lambda_{k0}).$$

$$\lambda_{kk+1}(p, \lambda_{k0}) = p_{kk+1} \varphi_{kk+1}(p, \lambda_{k0}) \lambda_k(p, \lambda_{k0}) d\tau$$

$$\lambda_{n1}(p, \lambda_{k+1}) = \lambda_{kk+1}(p, \lambda_{k0}).$$

$$\lambda_{n1}(p, \lambda_{n0}) = p_{n1} \varphi_{n1}(p, \lambda_{n0}) \lambda_n(p, \lambda_{n0})$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) (p_{21} \varphi_{21}(p, \lambda_{20}) \lambda_{12}(p, \lambda_{10}) + v_1(p)).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = p_{12} p_{21} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) \varphi_{21}(p, \lambda_{20}) \lambda_{12}(p, \lambda_{10}) + p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) v_1(p).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10})(1 - p_{12} p_{21} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) \varphi_{21}(p, \lambda_{20})) + p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) v_1(p).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = v_1(p) p_{12} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) / (1 - p_{12} p_{21} \varphi_{12}(p, \lambda_{10}) \varphi_{21}(p, \lambda_{20})).$$

При

$$p_{12} = p_{21} = q,$$

$$\varphi_{12}(p, \lambda_{10}) = \varphi_{21}(p, \lambda_{20}) = \varphi(p, \lambda_{10}).$$

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = q v_1(p) \varphi(p, \lambda_{10}) / (1 - q^2 \varphi^2(p, \lambda_{10})).$$

$$\varphi(p, \lambda_{10}) = \int_0^{\infty} a e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} a e^{-(a+p)t} dt = (a/(a+p)) e^{-(a+p)t} \Big|_0^{\infty} =$$

При

$$\varphi(p, \lambda_{10}) = a/(a+p).$$

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(p, \lambda_{10}) &= v_1(p) q a / (a+p) (1 - q^n a^n / (a+p)^n) = \\ &= v_1(p) q a (a+p)^{n+1} / ((a+p)^n - q^n a^n). \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы (сети) равно

$$(a+p)^n - q^n a^n = 0.$$

$$(a+p - qa)((a+p)^{n-1} + q^{n-1} a^{n-1}) = 0.$$

Первый корень характеристического уравнения равен

$$p_1 = -a + qa,$$

Остальные корни характеристического уравнения есть корни уравнения

$$(a+p)^{n-1} + q^{n-1} a^{n-1} = 0.$$

$$(a+p) = (-1)^{1/(n-1)} qa.$$

$$p_i = -a + (-1)^{1/(n-1)} qa = -a(1 - q(-1)^{1/(n-1)})$$

Поскольку

$$(-1)^{1/(n-1)} = (\cos \pi + i \sin \pi)^{1/(n-1)} = e^{i\pi/(n-1)} = \cos \pi/(n-1) + i \sin \pi/(n-1).$$

$$\cos \pi/(n-1) < 1,$$

то

$$\operatorname{Re} p_i < 0.$$

При $q < 1$

$$p_1 = -a + qa = -a(1 - q) < 0,$$

$$p_i < 0.$$

При $q = 1$ (в системе без потерь)

$$p_1 = 0.$$

$$p_i < 0.$$

Замкнутая сеть из n очередей без потерь полуустойчива.
В ней могут возникать автоколебания.

Передаточная функция рассматриваемой замкнутой сети из n очередей равна

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(p, \lambda_{10})/v_1(p) &= qa(a+p)/((a+p)^n - q^n a^n) = \\ &= qa(a+p)/((a+p-qa)((a+p)^{n-1} - q^{n-1} a^{n-1})). \end{aligned}$$

И

$$\lambda_{12}(p, \lambda_{10}) = v_1(p) qa(a+p)/((a+p)^2 - q^2 a^2).$$

6.1.8. О свойствах Интернет

Интернет является примером современной сложной сети классических компьютеров. Изучение свойств и характеристик Интернет является лучшим способом применения разработанных моделей.

Дадим кратко упрощенное описание Интернет.

а) Интернет это иерархическая сеть, нижний уровень которой представляют компьютеры пользователей непосредственно подключенные к сети, либо локальные вычислительные сети компьютеров пользователей подключенные к сети. Подключение осуществляется либо по выделенным, либо по коммутируемым каналам.

б) Интернет обеспечивает следующие информационные возможности:

- вещание, оповещение;
- обмен информации между абонентами;
- организация единого информационного пространства;
- совместное решение задач.

г) Виды передаваемой информации:

- голос;
- данные;
- статические изображения;
- видеоинформация, в частности, телевидение;
- комбинации перечисленных видов.

д) Количество абонентов.

- в развитых странах десятки процентов от численности населения;
- десятки процентов от общего числа компьютеров (в США около 90%);
- всего в настоящее время насчитываются сотни миллионов пользователей Интернет.

е) Основные используемые среды передачи информации:

- оптическое волокно;
- коаксиальный кабель;
- витая пара;
- радиоканалы различных диапазонов.

ж) Основной физический носитель информации модулированная электромагнитная волна различной частоты.

з) Пропускная способность каналов связи.

- оптическое волокно – десятки Гбит/с;
- коаксиальный кабель – единицы Гбит/с;

- витая пара – единицы Гбит/с;
- медный кабель – десятки Мбит/с;
- радиоканалы различных диапазонов – десятки Мбит/с.

и) Основные типы абонентов.

По юридическому статусу:

- физические лица;
- предприятия, корпорации;
- ведомства, Государственные структуры.

По территориальному расположению.

- локализованные абоненты;
- территориально-распределенные абоненты.

к) Основные уровни иерархии Интернет:

- локальные вычислительные сети;
- кампусы;
- зоны;
- магистральные сети;
- Интернет в целом.

л) Основные стандарты и протоколы Интернет:

- Ethernet,
- TCP/IP;
- SDH/ATM (в магистральных сетях);
- GSM, DECT (радиоканалы);
- V90, ... (последняя миля);
- HFC (последняя миля);
- XDSL (последняя миля);
- WWW.

м) Тип адресации – иерархическая адресация.

н) Основное сетевое оборудование:

- концентраторы;
- коммутаторы;
- маршрутизаторы;
- спутниковые станции;
- модемы.

о) Типы маршрутизации:

- статическая (фиксированные маршруты, последовательный выбор);
- динамическая (адаптивная в зависимости от состояния или характеристик сети).

п) Организация очередей

Как правило, в маршрутизаторах организуются одноканальные

очереди пакетов перед портами, конечной длины, с дисциплиной обслуживания в порядке поступления (FIFO) – первый пришел – первый обслужен.

р) Пакеты, после определенного времени пребывания в сети, стираются.

с) в концентраторах и спутниковых станциях используются алгоритмы доступа типа «Алоха».

т) управление Интернет.

В Интернет отсутствует единый центр управления. Контроль состояния оборудования связи и передачи данных, каналов связи, управление проблемами и производительностью осуществляется локально многочисленными провайдерами.

Для анализа характеристик и свойств Интернет следует использовать многоуровневую систему статических и динамических моделей сетевых систем и результаты исследования общих свойств сетей, приведенные в настоящем отчете. Ясно, что ни в настоящее время, ни в прогнозируемом будущем невозможно будет построить модель сети, состоящую из сотен тысяч, миллионов узлов. Речь может идти о моделировании фрагментов Интернет.

Статическая и динамическая и модели буквально учитывают все основные параметры сети – структуру сети, пропускную способность каналов связи, алгоритмы маршрутизации, внешнюю нагрузку, надежность узлов и каналов связи, дисциплины обслуживания очередей, длины сообщений, пакетов, приоритеты и позволяют исследовать характеристики и свойства фрагментов Интернет. Статическая и динамическая модели сетевых систем имеют полиномиальную сложность. Это делает возможным проводить расчеты фрагментов Интернет состоящих из сотен, тысяч узлов.

Следует отметить, что иерархическая система адресации, принятая в Интернет, соответствует системе идентификации очередей, каналов и узлов, принятую в многоуровневой модели.

Кроме того, интересно, что «конструкция» Интернет соответствует «конструкции» многоуровневой модели. Точнее говоря, по мере развития основных активных элементов Интернет – маршрутизаторов и коммутаторов – их архитектура приближалась к архитектуре многоуровневой модели. Точно также выделяются сетевой уровень, определяемый при определении структуры сети, требований к качеству обслуживания и составлении маршрутных таблиц и уровень узла, определяемый при составлении маршрутных таблиц и определении типов очередей, уровень очередей при определении типов очередей и характеристик каналов связи, параметров пакетов сообщений.

Отметим особенности моделирования Интернет.

Для моделирования фрагментов Интернет (упрощения модели) целесообразно воспользоваться тем обстоятельством, что интенсивность входящего к пользователю потока существенно (как правило на порядок) превышает интенсивность выходящего от пользователя потока и тем обстоятельством, что интенсивность входящего потока на произвольный сервер Интернет существенно (как правило на порядок) меньше интенсивности выходящего с сервера потока.

Это дает возможность использовать однопродуктовые модели, существенно снижая сложность моделирования. При анализе пользовательских характеристик поглощающим состоянием следует объявлять компьютер пользователя. При анализе характеристик поглощающим работы сервера состоянием следует объявлять сервер.

Начальное состояние фрагментов Интернет в нулевой момент времени задается либо на основе априорных данных, либо трехуровневой статической моделью (4.1.1.).

Сетевой уровень описывает характеристики рассматриваемого фрагмента Интернет в целом:

- вероятностно-временные характеристики доставки сообщений, в том числе среднее время, дисперсия, функция распределения;
- другие характеристики аддитивные по проходимому пути, в том числе, длина пути, число переприемов, ошибки; стоимость доставки;
- надежность доставки сообщений, в том числе, вероятность доставки, вероятность доставки по неправильному адресу, вероятность образования циклов;
- надежность Интернет, в том числе, связность, коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности;
- нагрузку на узлы и каналы связи.

Уровень узла описывает характеристики узлов сети:

- вероятностно-временные характеристики пребывания сообщений в узлах сети, в том числе среднее время, дисперсия, функция распределения;
- вероятности передачи сообщений из узла к другим узлам сети;
- вероятность потери сообщения на узле;
- надежность узла, в том числе, коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности;
- нагрузку на узлы.

Описывается каждый узел анализируемого фрагмента Интернет.

Уровень очередей описывает характеристики всех очередей рассматриваемого фрагмента Интернет:

- вероятностно-временные характеристики пребывания сообщений в очередях сети, в том числе среднее время, дисперсия, функция распределения;
- вероятности прохождения очереди;
- вероятность потери сообщения на узле;
- нагрузку на очередь.

Описывается каждая очередь сети.

На основе моделей всех трех уровней составляется система потоковых уравнений, содержащая всю информацию об анализируемом фрагменте Интернет.

Сетевой уровень моделируется совокупностью конечных цепей Маркова или совокупностью конечных полумарковских процессов – по одной цепи или одному процессу для каждого узла – адресата.

Для моделирования уровня узла используется аппарат теории вероятностей.

Очереди моделируются методами теории массового обслуживания.

Система потоковых уравнений Интернет представляется системой нелинейных алгебраических уравнений

$$\lambda_j(0) = \sum_i p_{ij} \lambda_i(0) + v_j(0).$$

- Суммирование осуществляется по всем узлам сети;
- $\lambda_i(0)$ – суммарная интенсивность потока в узле i в нулевой момент времени;
- $v_i(0)$ – интенсивность внешнего потока, поступающего в узел i в нулевой момент времени;
- $\lambda_j(0)$ – суммарная интенсивность потока в узле j в нулевой момент времени;
- p_{ij} – вероятность того, что сообщения из узла i будут переданы в узел j .

Существование и единственность распределения информационных потоков в узлах, очередях и каналах связи фрагмента Интернет при стационарной нагрузке является естественным требованием. Стоит представить, что в Интернет отсутствует или может быть несколько равновесных состояний, что возможно внезапное, скачкообразное изменение состояния и характеристик сети – становится не по себе. Если это так, то в Интернет невозможно добиться гарантированного качества обслуживания – доставка сообщений может занимать произвольное время, пропускная способность сети неопределена. Пользователям такой неоднозначной сети не позавидуешь.

Как мы видели в разделе 6.1.5. неоднозначность может возникать в элементах сети, использующих алгоритм типа «Алоха». В частности, в локальных вычислительных сетях Ethernet со случайным методом доступа, в спутниковых каналах связи с TDMA – множественным доступом с временным разделением. Если с локальным использованием алгоритма типа «Алоха» еще можно смириться. Естественно под контролем администратора ЛВС или оператора спутниковой станции.

Глобальное использование алгоритма типа «Алоха» или других источников неоднозначности представляется недопустимым. Следует отметить, что в локальных и территориальных сетях Ethernet идет повсеместная замена концентраторов (обеспечивающих использование общей среды и создающих неустойчивость) на коммутаторы (обеспечивающих использование отдельных каналов связи и тем самым решающих проблему неустойчивости).

Из общих свойств сетей (раздел 6.1.1.) следует, что во всех очередях Интернет должны выполняться свойства монотонности и непрерывности. Выполнение свойств монотонности и непрерывности является необходимым условием однозначности и устойчивости Интернет.

Устойчивость (способность системы возвращаться в состояние равновесия) является важнейшим свойством Интернет. Известны и широко обсуждаются случаи возникновения штормов, перегрузок в сетях, даже случаи остановки узлов, сетей и методы борьбы с этими явлениями. Однако, обсуждения идут на уровне здравого смысла. Использование результатов раздела 6 позволяет рассмотреть задачу исследования устойчивости Интернет к перегрузкам более строго.

Для исследования динамических характеристик и устойчивости Интернет необходимо использовать динамическую модель системы приведенную в разделе 4.1.3.

Динамика фрагментов Интернет описывается в пространстве интенсивностей информационных потоков системой интегральных уравнений Вольтерра II рода

$$\lambda_j(t) = \sum_i p_{ij} \int \varphi_{ij}(t-\tau) \lambda_i(\tau) d\tau + v_j(t)$$

i, j – номера узлов сети. $1 \leq i, j \leq n$. n – число узлов в сети;

Суммирование осуществляется по всем узлам сети;

Интегрирование осуществляется от 0 до t ;

$\lambda_i(t)$ – суммарное изменение интенсивности потока в узле i в момент времени t ;

$v_i(t)$ – изменение интенсивности внешнего потока, поступающего в узел i в момент времени t ;

$\lambda_j(t)$ – суммарное изменение интенсивности потока в узле j в момент времени t ;

p_{ij} – вероятность того, что сообщения из узла j будут переданы в узел i ,

$$\sum_i p_{ij} \leq 1;$$

$\varphi_{ij}(t)$ – ядра интегральных уравнений – плотности времен пребывания сообщений в очередях j_i на узлах сети

$$\int \varphi_{ij}(t) dt = 1.$$

Динамическая модель позволяет:

- исследовать поведение фрагмента Интернет при изменении внешней нагрузки, отказах узлов сети, изменении структуры сети;
- решать задачи оптимального управления фрагментом Интернет.

Как показано в разделе 6.1.7. настоящего пособия, справедливо следующее утверждение.

Для обеспечения устойчивости Интернет необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\sum_i p_{ij} < 1.$$

Данному условию удовлетворяют сети с конечными очередями. Поскольку реальные сети являются сетями с конечными очередями, то из полученного условия дополнительно следует, что для обеспечения устойчивости Интернет, также как и любой сетевой системы необходимо:

- Запретить образование циклов, размножение сообщений;
- Запретить или ограничить использование многоадресных сообщений;
- Запретить доступ в сеть абсолютно настойчивым абонентам (отключать абсолютно настойчивых абонентов).
- Ограничивать очереди в узлах сети, оборудовании связи;
- При недоступных смежных узлах необходимо стирать сообщения.

Кроме того, во всех очередях Интернет должны выполняться свойства монотонности и непрерывности.

В таблице 6.1.1 приведены сведения о возможных причинах неустойчивой работы Интернет, следствиях неустойчивости, методы борьбы с неустойчивостью и возможные действия.

Таблица 6.1.1 - Сведения о возможных причинах неустойчивой работы Интернет, следствиях неустойчивости, методы борьбы с неустойчивостью и возможные действия.

Возможные причины неустойчивой работы Интернет	К чему приводит неустойчивость	Методы борьбы с неустойчивостью	Возможные действия
Использование неустойчивых элементов	Внезапные, непредсказуемые изменения характеристик сети	Отказ от использования методов случайного доступа к общим сетевым ресурсам . Замена неустойчивых элементов на устойчивые	
Размножение сообщений	Лавинообразный рост нагрузки, блокирование узлов и серверов сети	Запрет многоадресных и циркулярных сообщений	Фильтрация широковещательных пакетов в маршрутизаторах и коммутаторах
Образование циклов	Рост нагрузки, увеличение времени доставки сообщений, блокирование узлов и серверов сети, остановка сети	Запрет циклов	Рациональное построение маршрутных таблиц, ограничение времени жизни пакетов
Чрезмерная внешняя нагрузка	Увеличение времени доставки сообщений, блокирование узлов и серверов сети, остановка сети	Контроль и динамическое ограничение нагрузки	Выделение абонентам ограниченной пропускной способности

6.2. Исследование сетей квантовых компьютеров

6.2.1. Сохранение неопределенности при квантовых вычислениях

Сравнение свойств классических и квантовых компьютеров дано в таблице 6.2.1.

Таблица 6.2.1. - Сравнение свойств классических и квантовых компьютеров

Классические вычисления	Квантовые вычисления
<p>Классический бит – с-бит. Это система имеющая два состояния (0, 1). Других состояний нет.</p>	<p>Квантовый бит – q-бит. Это система имеющая два выделенных (базисных) состояния ($0\rangle$, $1\rangle$) и состояния ψ, представимые в виде линейных комбинаций выделенных состояний</p> $\psi = c_1 0\rangle + c_2 1\rangle$ <p>c_1, c_2 – произвольные комплексные коэффициенты, сумма квадратов модулей которых равна 1</p> $ c_1 ^2 + c_2 ^2 = 1$
<p>Неопределенность с-бита равна $N = -(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2)$, p_1, p_2 – вероятности нахождения с-бита в состояниях 1, 2.</p>	<p>Неопределенность q-бита с двумя выделенными состояниями равна $N = -(c_1 ^2 \ln c_1 ^2 + c_2 ^2 \ln c_2 ^2)$, $c_1 ^2$, $c_2 ^2$ – вероятности нахождения q-бита в состояниях 1, 2.</p>
<p>Максимальная неопределенность с-бита достигается при $p_1 = p_2 = 1/2$ и равна 1 биту.</p>	<p>Максимальная неопределенность q-бита с двумя выделенными состояниями достигается при $c_1 ^2 = c_2 ^2 = 1/2$ и равна 1 биту.</p>

<p>Классический компьютер это система состоящая из n с-бит, имеющая 2^n состояний, образуемых прямым произведением состояний n с-битов. Других состояний нет.</p>	<p>Квантовый компьютер Это система состоящая из n q-бит, имеющая 2^n выделенных (базисных) состояний x_i и состояния ψ, представимые в виде линейных комбинаций выделенных состояний</p> $\psi = \sum c_i x_i,$ <p>Выделенные состояния образованы прямым произведением выделенных состояний n q-битов. c_i – произвольные комплексные коэффициенты, сумма квадратов модулей которых равна 1</p> $\sum c_i ^2 = 1.$
<p>Состояние классического компьютера представляется в виде вектора-строки \rangle (кет-вектора)</p>	<p>Состояние квантового компьютера представляется в виде вектора-строки \rangle (кет-вектора)</p>
<p>Размерность пространства состояний классического компьютера равна 2^n.</p>	<p>Размерность пространства состояний квантового компьютера равна 2^n.</p>
<p>Максимальная неопределенность классического компьютера достигается при $p_i = 2^{-n}$ и равна n бит.</p>	<p>Максимальная неопределенность квантового компьютера состоящего из n q-битов с двумя выделенными состояниями, каждый достигается при $c_i ^2 = 2^{-n}$ и равна n бит.</p>
<p>При решении конкретной задачи классический компьютер преобразует входные (исходные) данные в выходные (результат) в соответствии с заданным алгоритмом (обратимой схемой вычислений)</p>	<p>При решении конкретной задачи квантовый компьютер преобразует входные (исходные) данные в выходные (результат) в соответствии с заданным алгоритмом (обратимой схемой вычислений)</p>
<p>При решении одной и той же задачи классический компьютер на идентичных исходных данных дает тот же результат, что и квантовый компьютер</p>	<p>При решении одной и той же задачи квантовый компьютер на идентичных исходных данных дает тот же результат, что и классический компьютер</p>
<p>Классическое действие – перестановка на некотором множестве с-битов.</p>	<p>Квантовое действие – унитарное преобразование на некотором множестве q-битов.</p>

Классическое действие представляется в виде матрицы перестановок A_n размерности 2^n	Квантовое действие представляется в виде унитарной матрицы U_n размерности 2^n
Классическое действие (перестановка) сохраняет неопределенность	Квантовое действие (унитарное преобразование) сохраняет неопределенность
Обратимая классическая схема – последовательность перестановок	Квантовая схема – последовательность унитарных преобразований
Обратимая классическая схема (последовательность перестановок) сохраняет неопределенность	Квантовая схема (последовательность унитарных преобразований) сохраняет неопределенность

Как отмечено в таблице 6.2.1, неопределенность одного q-бита с двумя выделенными состояниями не превосходит 1 бита (при равной вероятности нахождения в каждом из двух состояний q-бита). Тем самым, в q-бите содержится не более 1 бита информации.

Неопределенность квантового компьютера, состоящего из n q-битов не превосходит n бит (равенство достигается при невзаимодействующих q-битах). Тем самым, в квантовом компьютере, состоящем из n q-битов, содержится не более n бит информации.

Вычисление есть последовательные преобразования на множестве состояний системы. Для изолированного квантового компьютера преобразования – это унитарные операторы. Поскольку при унитарных преобразованиях неопределенность сохраняется, то можно сформулировать

Утверждение

Вычисления, проводимые на изолированном квантовом компьютере, сохраняют неопределенность

$$N_{\text{нач}} = N_{\text{кон}}$$

6.2.2. Информационная емкость q-бита

Как отмечалось в предыдущем разделе, квантовый бит (q-бит) – это система имеющая два выделенных (базисных) состояния ($|0\rangle$, $|1\rangle$). Кроме того, q-бит, в отличие от классического бита, может находиться в любом состоянии ψ , представимом в виде линейной комбинации выделенных состояний

$$\psi = c_1 |0\rangle + c_2 |1\rangle,$$

где c_1, c_2 – произвольные комплексные коэффициенты, сумма квадратов модулей которых равна 1

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Неопределенность q-бита с двумя выделенными состояниями равна

$$N = -(|c_1|^2 \ln |c_1|^2 + |c_2|^2 \ln |c_2|^2),$$

$|c_1|^2, |c_2|^2$ – вероятности нахождения q-бита в состояниях 1, 2.

Максимальная неопределенность q-бита с двумя выделенными состояниями достигается при $|c_1|^2 = |c_2|^2 = 1/2$ и равна 1 биту.

Можно использовать возможность нахождения q-бита в любом состоянии

ψ , представимом в виде линейной комбинации выделенных состояний

$$\psi = c_1 |0\rangle + c_2 |1\rangle,$$

для увеличения его информационной емкости.

Рассмотрим состояния q-бита с максимальной неопределенностью равной единице.

Равенство

$$|c_1|^2 = |c_2|^2 = 1/2$$

достигается при $c_1 = 1/2, -1/2, 1/2 i, -1/2 i$; $c_2 = 1/2, -1/2, 1/2 i, -1/2 i$.

Поэтому существует всего 16 состояний q-бита с максимальной неопределенностью равной единице

1. $1/2 (1, 1)$,
2. $1/2 (1, -1)$,
3. $1/2 (1, i)$,
4. $1/2 (1, -i)$,
5. $1/2 (-1, 1)$,
6. $1/2 (-1, -1)$,
7. $1/2 (-1, i)$,
8. $1/2 (-1, -i)$,
9. $1/2 (i, 1)$,
10. $1/2 (i, -1)$,
11. $1/2 (i, i)$,
12. $1/2 (i, -i)$,
13. $1/2 (-i, 1)$,
14. $1/2 (-i, -1)$,
15. $1/2 (-i, i)$,

16. $\frac{1}{2}(-i, -i)$.

Скалярное произведение состояний $\frac{1}{2}(c_1, c_2)$, где $c_1 = 1, -1, i, -i$; $c_2 = 1, -1, i, -i$, с базисными векторами $(0, 1), (1, 0)$ по модулю равно $\frac{1}{2}$.

К сожалению, информационная емкость q -бита не более одного бита (для равновероятных состояний – один бит), поэтому невозможно одновременно кодировать информацию всеми этими 16 состояниями q -бита, а можно только двумя состояниями q -бита.

Для использования информационной емкости q -бита отправитель должен располагать прибором (передатчиком), который давал бы ему возможность готовить q -биты в заданных состояниях, а получатель классической информации должен располагать прибором (приемником, анализатором), который давал бы ему возможность определять состояние полученного q -бита.

В сетях квантовых компьютеров для использования информационной емкости q -бита отправитель должен располагать прибором (передатчиком, преобразователем), который давал бы ему возможность готовить q -биты в заданных состояниях, либо направлять полученное состояние q -бита с выхода своего квантового компьютера в канал квантовой телепортации, а получатель квантовой информации должен располагать прибором (приемником, преобразователем), который давал бы ему возможность направлять полученное состояние q -бита на вход своего квантового компьютера для проведения дальнейших вычислений.

6.2.3. Квантовая телепортация

Существенные особенности сетей квантовых компьютеров определяют не существующие в классических сетях эффекты телепортации неизвестных квантовых состояний и запрета клонирования (копирования) неизвестных квантовых состояний. Приведем описание данных эффектов, следуя [29-30, 59-67].

Операция телепортации неизвестных квантовых состояний состоит в использовании *запутанного состояния* двух кубитов для передачи *неизвестного* для отправителя A состояния кубита C другому кубиту получателя B (передается только состояние, а не сам квантовый объект!). Возможность такой операции впервые была подтверждена и экспериментально сначала с помощью использования оптических систем а затем и методом ЯМР.

Введем необходимые обозначения:

1, 2, 3 номера q -битов.

q -бит с номером 1 – q -бит с неизвестным состоянием, находится у

отправителя А;

q-биты с номерами 2, 3 – вспомогательные q-биты. **После выполнения операции запутывания находятся у отправителя (номер 2) и получателя В (номер 3);**

состояние 0 (спин вверх) – кэт вектор $|0\rangle$;

состояние 1 (спин вниз) – кэт вектор $|1\rangle$.

Волновая функция (амплитуда вероятности) q-бита номер 1 – с неизвестным состоянием

$$|\Phi_1\rangle = (a|0_1\rangle + b|1_1\rangle)$$

значения коэффициентов а, b неизвестны.

Сформируем запутанное состояние дополнительных q-битов 2, 3.

Его волновая функция (амплитуда вероятности)

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \sqrt{1/2} (|0_2\rangle |1_3\rangle - |1_2\rangle |0_3\rangle)$$

Базис Белла для двух q-битов (q-бит номер 1 – с неизвестным состоянием и q-бит номер 2 – дополнительный q-бит)

$$|\Psi_{12}^+\rangle = \sqrt{1/2} (|0_1\rangle |1_2\rangle + |1_1\rangle |0_2\rangle);$$

$$|\Psi_{12}^-\rangle = \sqrt{1/2} (|0_1\rangle |1_2\rangle - |1_1\rangle |0_2\rangle);$$

$$|\Phi_{12}^+\rangle = \sqrt{1/2} (|0_1\rangle |0_2\rangle + |1_1\rangle |1_2\rangle);$$

$$|\Phi_{12}^-\rangle = \sqrt{1/2} (|0_1\rangle |0_2\rangle - |1_1\rangle |1_2\rangle).$$

В свою очередь, вектора $(|0_1\rangle |1_2\rangle); (|1_1\rangle |0_2\rangle); |0_1\rangle |0_2\rangle; (|1_1\rangle |1_2\rangle)$ могут быть выражены через вектора Белла

$$|\Psi_{12}^+\rangle; |\Psi_{12}^-\rangle; |\Phi_{12}^+\rangle; |\Phi_{12}^-\rangle.$$

$$|0_1\rangle |1_2\rangle = \sqrt{1/2} (|\Psi_{12}^+\rangle + |\Psi_{12}^-\rangle);$$

$$|1_2\rangle |0_2\rangle = \sqrt{1/2} (|\Psi_{12}^+\rangle - |\Psi_{12}^-\rangle);$$

$$|0_1\rangle |0_2\rangle = \sqrt{1/2} (|\Phi_{12}^+\rangle + |\Phi_{12}^-\rangle);$$

$$|1_1\rangle |1_2\rangle = \sqrt{1/2} (|\Phi_{12}^+\rangle - |\Phi_{12}^-\rangle).$$

Начальное состояние трех q-битов задается волновой функцией (амплитудой вероятности)

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{123}\rangle &= |\Phi_1\rangle |\Psi_{23}^-\rangle = \sqrt{1/2} (a|0_1\rangle + b|1_1\rangle) (|0_2\rangle |1_3\rangle - |1_2\rangle |0_3\rangle) = \\
 &= \sqrt{1/2} (a|0_1\rangle |0_2\rangle |1_3\rangle + b|1_1\rangle |0_2\rangle |1_3\rangle - \\
 &\quad - a|0_1\rangle |1_2\rangle |0_3\rangle) - b|1_1\rangle |1_2\rangle |0_3\rangle) = \\
 &= \sqrt{1/2} a(|0_1\rangle |0_2\rangle |1_3\rangle - |0_1\rangle |1_2\rangle |0_3\rangle) + \\
 &\quad \sqrt{1/2} b(|1_1\rangle |0_2\rangle |1_3\rangle - |1_1\rangle |1_2\rangle |0_3\rangle).
 \end{aligned}$$

Подставим в последнее выражение вместо векторов ($|0_1\rangle |1_2\rangle$); ($|1_1\rangle |0_2\rangle$); ($|0_1\rangle |0_2\rangle$); ($|1_1\rangle |1_2\rangle$) вектора Белла $|\Psi_{12}^+\rangle$; $|\Psi_{12}^-\rangle$; $|\Phi_{12}^+\rangle$; $|\Phi_{12}^-\rangle$.

Получим

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{1/2} (a(|0_1\rangle |0_2\rangle |1_3\rangle - |0_1\rangle |1_2\rangle |0_3\rangle) + \\
 &\quad + b(|1_1\rangle |0_2\rangle |1_3\rangle - |1_1\rangle |1_2\rangle |0_3\rangle)) = \\
 &= \sqrt{1/2} a((|\Phi_{12}^+\rangle + |\Phi_{12}^-\rangle) |1_3\rangle - \\
 &\quad - (|\Psi_{12}^+\rangle + |\Psi_{12}^-\rangle) |0_3\rangle) + \\
 &\quad + b(|\Psi_{12}^+\rangle - |\Psi_{12}^-\rangle) |1_3\rangle - \\
 &\quad - (|\Phi_{12}^+\rangle - |\Phi_{12}^-\rangle) |0_3\rangle) = \\
 &= \sqrt{1/2} (a|\Phi_{12}^+\rangle |1_3\rangle + a|\Phi_{12}^-\rangle |1_3\rangle - \\
 &\quad - a|\Psi_{12}^+\rangle |0_3\rangle - a|\Psi_{12}^-\rangle |0_3\rangle) + \\
 &\quad + b|\Psi_{12}^+\rangle |1_3\rangle - b|\Psi_{12}^-\rangle |1_3\rangle - \\
 &\quad - b|\Phi_{12}^+\rangle |0_3\rangle - b|\Phi_{12}^-\rangle |0_3\rangle) = \\
 &= \sqrt{1/2} (a|\Phi_{12}^+\rangle |1_3\rangle - b|\Phi_{12}^+\rangle |0_3\rangle + a|\Phi_{12}^-\rangle |1_3\rangle + b|\Phi_{12}^-\rangle |0_3\rangle - \\
 &\quad - a|\Psi_{12}^+\rangle |0_3\rangle + b|\Psi_{12}^+\rangle |1_3\rangle - a|\Psi_{12}^-\rangle |0_3\rangle - b|\Psi_{12}^-\rangle |1_3\rangle =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1/2} ((|\Phi_{12}^+\rangle (a|1_3\rangle - b|0_3\rangle) + \\
&\quad + |\Phi_{12}^-\rangle (a|1_3\rangle + b|0_3\rangle) + \\
&\quad + |\Psi_{12}^+\rangle (-a|0_3\rangle + b|1_3\rangle) + \\
&\quad + |\Psi_{12}^-\rangle (-a|0_3\rangle - b|1_3\rangle)).
\end{aligned}$$

Таким образом, начальное состояние трех q-битов заданное волновой функцией (амплитудой вероятности)

$$|\Psi_{123}\rangle = |\Phi_1\rangle |\Psi_{23}\rangle$$

представляется в виде четырех слагаемых, каждое из которых есть произведение одного из векторов Белла на некоторое состояние q-бита номер 3.

Причем состояние q-бита номер 3 в каждом случае есть преобразованное, определенным в каждом случае образом, состояние q-бита номер 1 – с неизвестным состоянием

$$|\Phi_1\rangle = (a|0_1\rangle + b|1_1\rangle).$$

Данное обстоятельство дает возможность отправителю, измерив в базе Белла состояние двух находящихся у него q-битов с номерами 1, 2, определить одно из векторов Белла $|\Psi_{12}^+\rangle$; $|\Psi_{12}^-\rangle$; $|\Phi_{12}^+\rangle$; $|\Phi_{12}^-\rangle$.

С каждым из векторов Белла известным образом связано одно и только одно состояние q-бита номер 3

Вектору Белла $|\Phi_{12}^+\rangle$ соответствует состояние q-бита номер 3 $(a|1_3\rangle - b|0_3\rangle)$

Вектору Белла $|\Phi_{12}^-\rangle$ соответствует состояние q-бита номер 3 $(a|1_3\rangle + b|0_3\rangle)$

Вектору Белла $|\Psi_{12}^+\rangle$ соответствует состояние q-бита номер 3 $(-a|0_3\rangle + b|1_3\rangle)$

Вектору Белла $|\Psi_{12}^-\rangle$ соответствует состояние q-бита номер 3 $(-a|0_3\rangle - b|1_3\rangle)$.

Поэтому, сообщив получателю, номер вектора Белла, на который спроектировалось при измерении состояние двух находящихся у отправителя q-битов с номерами 1, 2, отправитель позволит получателю восстановить на q-бите с номером 3 исходное неизвестное отправителю состояние q-бита номер 1.

Поскольку возможно 4 результата, то для передачи отправителю информации о результатах измерения необходимо 2 классических бита.

Для восстановления исходного состояния $|\Phi_1\rangle = (a|0_1\rangle + b|1_1\rangle)$ получателю необходимо выполнить следующие операции.

1. Вектору Белла $|\Phi_{12}^+\rangle$ соответствует состояние $(a|1_3\rangle - b|0_3\rangle)$ и преобразование

$$(-\sigma)_z := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Вектору Белла $|\Phi_{12}^-\rangle$ соответствует состояние $(a|1_3\rangle + b|0_3\rangle)$ преобразование

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Вектору Белла $|\Psi_{12}^+\rangle$ соответствует состояние $(-a|0_3\rangle + b|1_3\rangle)$ и преобразование

$$(-\sigma)_z := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Вектору Белла $|\Psi_{12}^-\rangle$ соответствует состояние q-бита номер 3 $(-a|0_3\rangle - b|1_3\rangle)$ и тождественное со знаком минус преобразование

Теперь опишем подробнее сам процесс квантовой телепортации.

Имеется классический канал. Отправитель А желает передать получателю В информацию о состоянии кубита С вида $|\Phi_1\rangle = (a|0_1\rangle + b|1_1\rangle)$ не зная состояние С (не зная значений параметров а и b).

Он не может ее передать по классическому каналу, поскольку значения параметров, определяющих состояние С неизвестны.

Тогда, отправитель А может сделать следующее.

1. Сначала **из состояний кубитов 2 и 3, принадлежащих отправителю А и получателю В** образуется запутанное вспомогательное состояние

$|\Psi_{23}^-\rangle$

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \sqrt{1/2} (|0_2\rangle |1_3\rangle - |1_2\rangle |0_3\rangle).$$

Отметим, что неопределенность запутанного вспомогательного состояния равна одному биту.

Это состояние кубитов 2 и 3 должно быть предварительно известно как отправителю, так и получателю. Оно играет роль *квантового канала* передачи информации.

2. Общее начальное состояние передаваемого 1 и двух запутанных кубитов 2, 3 квантового канала представляется в виде прямого произведения неизвестного состояния кубита С и запутанного состояния АВ кубитов А и В.

$$|\Psi_{123}\rangle = |\Phi_1\rangle |\Psi_{23}\rangle = \sqrt{1/2} (a|0_1\rangle + b|1_1\rangle) (|0_2\rangle |1_3\rangle - |1_2\rangle |0_3\rangle).$$

Составляющие ортонормированного базиса Белла, построены на состояниях двух q -битов 1 и 2, имеющих только у отправителя А.

Каждому из этих составляющих соответствует определенное состояние кубита получателя В, по-своему зависящему от параметров a и b .

3. Получив некоторое, неизвестное ему состояние $|\Phi_1\rangle$, отправитель производит измерение запутанного состояния двух своих кубитов 1 и 2 в базисе Белла (иначе говоря, осуществляет проектирование на состояния этого базиса). Он получает одну из четырех проекций

4. Он сообщает об этом получателю с помощью классического сигнала (например, по телефону). Необходимо передать 2 бита информации.

5. По полученной информации о векторе Белла получатель на восстанавливает исходное состояние $|\Phi_1\rangle$ на q -бите 3. На этом заканчивается процесс телепортации.

Аналогичный процесс можно организовать и для более, чем двух пользователей. Подобным образом можно телепортировать многокубитовые, в том числе и запутанные состояния, и осуществлять многокубитовые квантовые операции с разнесенными (remote) кубитами. При этом отпадает необходимость иметь кубиты в непосредственной близости друг от друга при выполнении, например, операции CNOT или операции формирования сложных запутанных состояний, таких как состояни. трехкубитового «шредингеровского кота» или GHZ (Greenberger-Horn-Zeilinger)

$$|Y\rangle = (|000\rangle + |111\rangle)/2.$$

Готтесман и Чуанг показали, что, используя однокубитовую квантовую телепортацию, как базовую составляющую (primitive), можно построить квантовые логические операции, которые не могут быть осуществлены непосредственно с помощью унитарных операций. По этой схеме различные разнесенные квантовые операции охватывают определенные вспомогательные состояния и производятся с использованием классически контролируемых однокубитовых операций только на приемном конце квантового канала.

С точки зрения теории информации, кубиты характеризуют *прямые* ресурсы передаваемого сигнала, которые могут быть использованы для передачи информации по квантовому каналу, тогда как забиты представляют собой только *косвенные* ресурсы, необходимые для обслуживания канала связи между А и В. С помощью только одних забитов нельзя передавать направленную информацию о произвольном состоянии системы. Для этого квантовый канал должен быть дополнен направленной передачей классических битов информации.

Все операции, осуществляемые при телепортации, (измерение запутанного состояния отправителем в базисе Белла и однокубитовые унитарные преобразование на приемном конце), являются локальными по своей природе. Они дополняются классической связью. С практической точки зрения важно выяснить, как ведут себя запутанные состояния в процессе телепортации под действием локальных квантовых операций и классической связи (local quantum operations and classical communication — LQCC) и нельзя ли сделать этот процесс более эффективным.

Оценим информационные затраты на телепортацию неизвестного отправителю состояния.

Объем информации передаваемой по классическому каналу – 2 бита.

Объем информации, передаваемой по квантовому каналу – 1 бит.

Объем информации в получаемом состоянии – 1 бит.

6.2.4. Запрет клонирования

Существенное значение для организации процессов передачи информации между квантовыми компьютерами имеет невозможность клонирования (создания копий) неизвестных квантовых состояний.

Если бы клонирование было возможным, то оказалось бы возможным в процессе телепортации передавать классические сигналы со сверхсветовой скоростью. Это означало бы, что два события — отправлен сигнала C от A и получение его у B – разделены пространственно-подобным мнимым интервалом и поэтому в некоторой системе отсчет второе событие могло бы предшествовать первому событию, и, следовательно, во временном интервале между этими событиями состояние передаваемого кубита C могло бы совпадать с состоянием кубита B , есть произошло бы его клонирование.

Из закона сохранения неопределенности (теоремы о невозможности клонирования) также следует, что сохранение копии начального неизвестного сигнального состояния кубита C у отправителя A после телепортации сигнала к получателю B невозможно.

Первоначальный сигнал у отправителя *неизбежно стирается*. Пусть теперь предполагается произвести телепортацию сигнала, образующего запутанное состояние для двух кубитов отправителя A , при этом у получателя B имеется в начале один кубит в некотором состоянии. Помимо этого, как обычно формируется максимально запутанное состояние для кубитов отправителя и получателя, образующее квантовый канал. После телепортации сигнала получатель помимо запутанного состояния канала должен приобрести запутанное состояние переданного кубита и кубита, оставшегося у отправителя. Тем самым неопределенность (запутанность) состояния получателя увеличится вдвое по сравнению с максимальной. Однако это противоречит закону сохранения неопределенности. Таким образом, после телепортации сигнала не только стирается начальный сигнал у от-

правителя, но должно также разрушаться и максимально запутанное состояние, играющее роль квантового канала. Это значит, что имеет место полное или частичное расходование неопределенности (запутывания) как ресурса. Однако, если использовать принцип локальных квантовых преобразований с заимствованием вспомогательного запутывания полного разрушения квантового канала и расходования ресурса неопределенности (запутывания) при выполнении таких операций можно избежать.

6.2.5. Использование информационной емкости q -бита и телепортации квантовых состояний для увеличения пропускной способности канала связи

В разделе 6.2.3. приведена оценка информационных затрат на телепортацию неизвестного отправителю состояния.

Объем информации передаваемой по классическому каналу – 2 бита.

Объем информации, передаваемой по квантовому каналу – 1 бит.

Объем информации в получаемом состоянии – 1 бит.

Таким образом, накладные расходы (2 бита, передаваемые по классическому каналу 1 один бит по квантовому), как будто бы, делают эффект квантовой телепортации бесполезным в практических приложениях.

Казалось бы, что можно предложить идею увеличения пропускной способности канала связи путем эффективного использования потенциальной информационной емкости q -бита и квантовой телепортации.

Идея заключается в следующем.

1. Отправитель и получатель согласуют набор состояний q -бита, используемых ими для передачи информации. Для определенности, 16 состояний, описанных в разделе 4.
2. Отправитель с помощью специального прибора осуществляет приготовление q -бита в одном из известных ему и получателю состояний.
3. Далее подготовленный q -бит поступает в канал телепортации квантовых состояний. Отметим, что в канале телепортации состояние подготовленного для отправки q -бита неизвестно.
4. Реализуется стандартный процесс телепортации неизвестного квантового состояния подготовленный q -бита, описанный в разделе 5.
5. По завершению стандартного процесса телепортации q -бит, состояние которого совпадает с исходным состоянием q -бита отправителя, передается получателю.
6. Получатель с помощью анализатора определяет состояние полученного q -бита. В рассматриваемом случае – одно из 16 состояний.

На этом передача информации завершается.

Вроде бы пропускная способность канала квантовой телепортации увеличилась. Но как только получатель приступит к измерениям (получению из q -бита, из квантовой информации классической информации), весь выигрыш

рыш будет потерян. Дело в том, что достоверное определение одного из неортогональных состояний q -бита требует многократного повторения измерений.

Следуя [43-45] опишем измерительный процесс в квантовой механике. Он состоит из трех этапов:

- подготовительного, когда объект находится (приготавливается) в некотором состоянии $\langle \alpha |$;
- рабочего, на котором происходит взаимодействие объекта с анализатором β , приводящего объект в суперпозиционное состояние

$$\langle \alpha | = \sum \langle \alpha | \beta_i \rangle \langle \beta_i |.$$

Величина $|\langle \alpha | \beta_i \rangle|^2$ есть вероятность обнаружения объекта в базисном состоянии $\langle \beta_i |$;

- регистрирующего этапа, когда происходит обнаружение объекта в том или ином из базисных состояний $\langle \beta_i |$, образующих суперпозицию. На этом этапе объект взаимодействует с детектором, который способен изменить свое состояние. Детектор обнаруживает объект всякий раз в каком-то одном из базисных состояний, составляющих суперпозицию. При этом детектор разрушает суперпозицию и превращает неразличимые альтернативы в различимые.

Если используемое количество состояний превосходит количество базисных, ортогональных состояний, то для того, чтобы определить в каком из возможных состояний находится объект необходимо произвести несколько измерений.

Однако, убрав из процесса передачи информации в сети квантовых компьютеров измерения (получение из q -бита, из квантовой информации классической информации), все же можно предложить метод увеличения пропускной способности канала связи в сети квантовых компьютеров путем эффективного использования потенциальной информационной емкости q -бита и квантовой телепортации.

Предлагается измерение осуществлять один раз – на последнем этапе передачи и обработки информации.

1. Сеть квантовых компьютеров состоит и совокупности квантовых компьютеров, каждый из которых образует узел сети и классических и квантовых каналов, соединяющих узлы сети.

1. На выходе каждого квантового компьютера имеется устройство вывода квантовых состояний для телепортации.
2. На входе каждого квантового компьютера имеется устройство ввода полученных по каналу связи квантовых состояний для дальнейшей обработки.

3. q -бит с выхода квантового компьютера узла отправителя поступает в канал телепортации квантовых состояний. Отметим, что в канале телепортации состояние подготовленного, для отправки q -бита неизвестно.
4. Реализуется стандартный процесс телепортации неизвестного квантового состояния подготовленный q -бита, описанный в разделе 6.2.3.
5. По завершению стандартного процесса телепортации q -бит, состояние которого совпадает с исходным состоянием q -бита отправителя, поступает на вход квантового компьютера узла получателя информации.

На этом передача информации завершается.

Оценим объем информационных затрат на телепортацию неизвестного отправителю состояния и объем переданных сообщений.

Если в сети используется согласованный набор состояний q -битов, используемых для передачи информации, например, 16 состояний, описанных в разделе 4.2.2., то справедлива следующая оценка.

Объем информации передаваемой по классическому каналу – 2 бита.

Объем информации, передаваемой по квантовому каналу – 1 бит.

Объем информации в получаемом состоянии – 4 бита.

Таким образом, предложенный метод передачи информации путем эффективного использования потенциальной информационной емкости q -бита и квантовой телепортации позволяет увеличить пропускную способность канала связи.

При использовании большего числа состояний q -бита можно еще в большей мере увеличить пропускную способность канала связи.

Как уже отмечалось, при увеличении количества используемых состояний q -бита растет вероятность самопроизвольного или под воздействием внешней среды, прежде всего теплового воздействия, излучения, перехода q -бита из заданного состояния в одно из других. Тем самым возрастает вероятность возникновения ошибок. Поэтому пропускная способность канала связи получаемого вышеизложенным методом ограничена. Оценка максимальной пропускной способности является одной из дальнейших задач настоящей работы.

В сетях квантовых компьютеров для использования потенциальной информационной емкости q -бита отправитель должен располагать прибором (передатчиком, преобразователем), который давал бы ему возможность направлять полученное в ходе вычислений состояние q -бита с выхода своего квантового компьютера в канал квантовой телепортации, а получатель квантовой информации должен располагать прибором (приемником, преобразователем), который давал бы ему возможность направлять полученное состояние q -бита на вход своего квантового компьютера для проведения дальнейших вычислений.

6.2.5. Бозе и ферми – частицы как физические носители информации

Информация есть устойчивая определенное время неоднородность [47].

Под устойчивостью неоднородности будем понимать ее существование и способность находиться в определенных состояниях в течение времени сравнимом с рассматриваемым периодом (при нашем анализе с возрастом Вселенной). Устойчивость неоднородности это невозможность самопроизвольного ее распада или самопроизвольного перехода в другие состояния. Примером неустойчивых неоднородностей являются флуктуации.

Исходя из этого определения, проанализируем, какие физические объекты и в какой степени, могут являться носителями информации. Рассмотрим элементарные частицы.

Какие частицы могут использоваться природой для хранения информации? Какие частицы могут использоваться природой для передачи информации? Отличительными признаками, нарушающими однородность, выделяющими физические объекты являются:

- тип частицы, системы частиц;
- состояние частицы, системы частиц;
- количество частиц в определенном состоянии.

Как уже отмечалось, устойчивость частицы (системы частиц) определяется ее временем жизни и ее способностью находиться в определенных состояниях.

Бесконечным временем жизни обладают стабильные частицы – ферми-частицы с ненулевой массой покоя со спином $\frac{1}{2}$ - протон, электрон, нейтрино и бозе-частицы с нулевой массой покоя - фотон (спин 1), гравитон (спин 2). Существует предположение, что протон – нестабильная частица с периодом полураспада миллиарды лет. Но это не нарушает наших требований к носителю информации.

Ферми-частицы (ферми-системы, фермионы) с полуцелым спином имеют стационарные состояния, вероятность самопроизвольного перехода между которыми равна нулю.

Бозе – частицы (бозе-системы, бозоны) имеют свойство накапливаться в одном состоянии.

а) Бозе – частицы как носители информации

Бозе – частицы (бозе-системы, бозоны) имеют свойство накапливаться в одном состоянии ψ и поэтому неразличимы. Система из n бозе – частиц занимает одно состояние ψ .

Кодировка информации возможна состоянием, в котором находятся бозе-частицы.

Кодировка информации количеством бозе – частиц невозможна, поскольку любое состояние, содержащее определенное количество бозе-частиц неустойчиво. Существует ненулевая вероятность самопроизвольного перехода в состояние с большим (меньшим) на единицу числом частиц.

б) Ферми – частицы как носители информации

Ферми – частицы не могут находиться в одинаковых состояниях. Система включающая n ферми – частиц занимает (использует) n разных состояний. Стационарные состояния систем ферми-частиц устойчивы. Вероятность самопроизвольного перехода в другое состояние равна нулю. Следовательно, возможна кодировка информации состояниями, в которых находятся ферми – частицы (ферми-системы, фермионы). Кроме того возможна кодировка информации числом ферми-частиц. Отметим, что кодировка информации состояниями существенно более эффективна.

Физические носители информации должны выполнять две функции:

- хранение информации;
- передачу информации.

Хранение информации целесообразно осуществлять на объектах, которые могут находиться в состоянии покоя и имеют много состояний.

Передачу информации целесообразно осуществлять на объектах, которые имеют состояний и могут находиться в состоянии покоя.

Хранение и передачу информации целесообразно осуществлять разными типами частиц.

Для хранения информации целесообразно использовать ферми-частицы (ферми-системы, фермионы).

Для передачи информации целесообразно использовать бозе-частицы (бозе-системы, бозоны).

Дело в том, что при взаимодействии ферми-частиц и бозе-частиц действует классическая логика. Складываются вероятности, а не амплитуды вероятностей. Тем самым процесс передачи информации нечувствителен к фазе амплитуды бозе-частицы. Принимающая частица воспринимает только состояние бозе-частицы. Это существенно повышает устойчивость передачи информации.

в) Информационная емкость системы из n различных (фермионов) и n неразличимых частиц (бозонов)

Оценим информационную емкость системы из n различных (фермионов) и n неразличимых частиц (бозонов).

Для оценки используем алгебраическую теорию информации [68]. Пусть Ω – конечное множество, $|\Omega|$ – его мощность. Информация элемента $\omega \in \Omega$ определяется по Хартли следующим образом

$$I(\omega) = \log_2 |\Omega|.$$

Говорят, что конечная группа G действует на множестве Ω , если задано отображение $G \times \Omega$ такое, что

$$(\sigma\tau)\omega = \sigma(\tau\omega), e\omega = \omega$$

для всех $\sigma, \tau \in G$ и $\omega \in \Omega$;

здесь $\tau\omega$ обозначает образ пары (τ, ω) при этом отображении, e – единица группы G . В этом случае Ω называют G -множеством.

Множество элементов $\tau \in G$, для которых $\tau\omega = \omega$, есть подгруппа в G . Она называется стационарной подгруппой элемента ω и обозначается G_ω .

Подмножество в Ω , состоящее из всех элементов вида $(\sigma\omega)$ (где $\sigma \in G$) обозначается $G\omega$ и называется орбитой элемента ω . Если σ и τ лежат в одном и том же смежном классе по $H = G_\omega$, то $\sigma\omega = \tau\omega$, и обратно.

Существует взаимно однозначное соответствие между левыми смежными классами G/H и элементами орбиты $G\omega$. Следовательно, порядок орбиты $G\omega$ совпадает с индексом $[G:G_\omega]$. Две орбиты группы G либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, на G -множестве существует каноническое разбиение

$$\Omega = \sum_i G\omega_i.$$

Рассмотрим действие группы перестановок S_n на множестве состояний классического компьютера X_n .

Пусть X – конечное множество (алфавит), $X^n = \Omega$ – множество всех слов (последовательностей букв) длины n в алфавите X . На X^n канонически действует симметрическая группа S_n , переставляющая позиции букв слова. X^n является S_n – множеством.

Для произвольного слова $\omega \in X^n$, $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и произвольной подстановки $\sigma \in S_n$ действие S_n описывается следующим образом

$$\sigma(\omega) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}).$$

Если буква $a_i \in X$ входит в слово ω ровно m_i раз, $i = 1, 2, \dots, q$, то разбиение $m = m_1 + m_2 + \dots + m_q$ определяет композицию (m_1, m_2, \dots, m_q) слова ω . Все слова одной и той же орбиты имеют одну и ту же композицию и обратно.

Величина

$$I_0 = \log_2 |G\omega|,$$

где $G\omega = S_n$,

называется 0-информацией слова ω .

Стационарная подгруппа G_ω является в данном случае прямым произведением симметрических групп

$$S_{m_1} \times S_{m_2} \times \dots \times S_{m_q}.$$

Поэтому,

$$I_0(\omega) = \log_2 n! / (m_1! m_2! \dots m_q!).$$

Чем меньше симметрий в слове, тем больше в нем 0-информации.

Если слово состоит из одинаковых букв, то $n! = m_1!$ и значение 0-информации равно нулю.

Максимальным значением 0-информации обладают слова с одинаково часто встречающимися буквами.

Если $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$, то

$$I_0(\omega) = \log_2 n!$$

Оценим $I_0(\omega)$, используя формулу Стирлинга,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n.$$

$$\begin{aligned} I_0(\omega) &= \ln n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n = \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + n(\ln n - 1) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi) + n(\ln n - \frac{1}{2}) \approx n \ln n. \end{aligned}$$

Для любого слова x длины n в алфавите из q букв справедливо

$$I_0(x) = n(H(x) - O(1)).$$

$$O(1) = ((q-1) \ln n)/qn.$$

$$O(1) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Совокупность из n бозонов находящихся в одном состоянии имеет значение 0-информации равное нулю.

Совокупность из n фермионов находящихся в разных состояниях имеет значение 0-информации равное $n \ln n$.

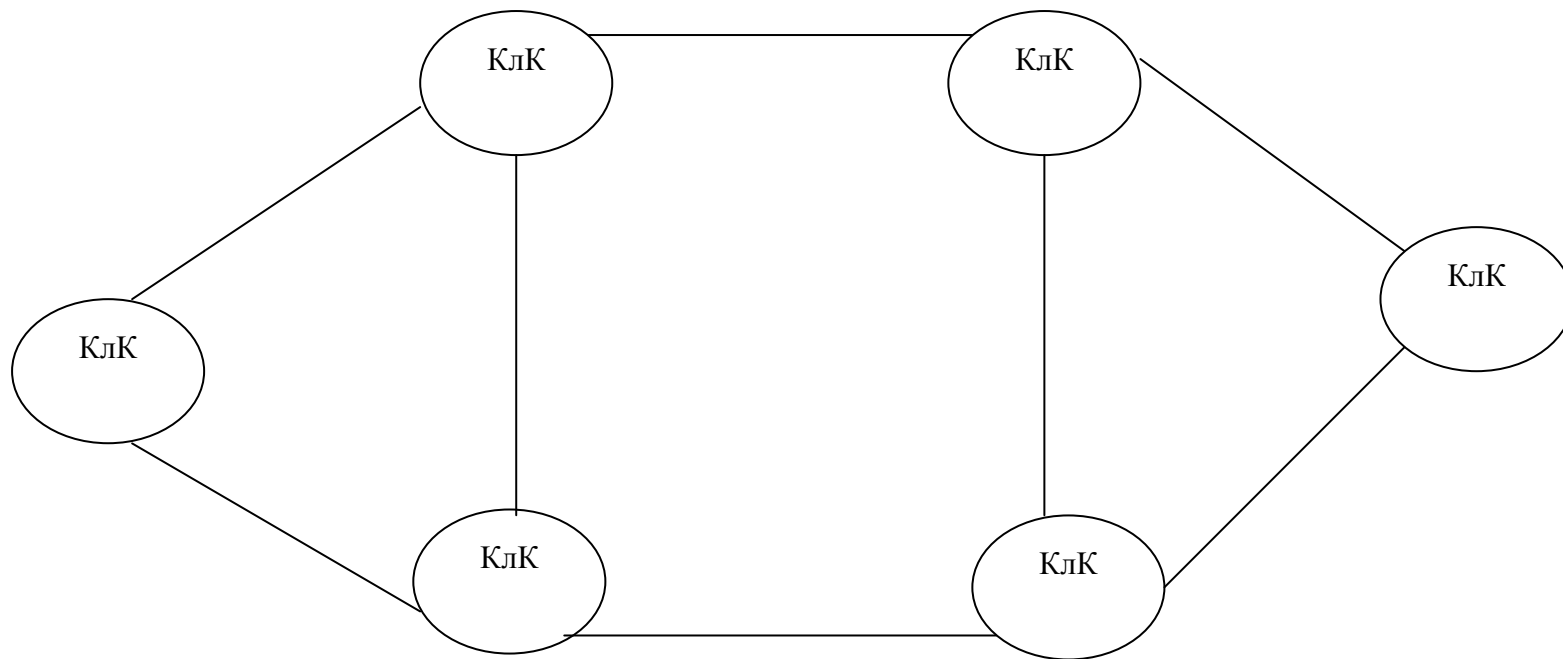
Следовательно, наиболее подходящими для формирования и хранения информации структурными единицами материи являются фермионы.

Вместе с тем, наиболее подходящими для передачи информации структурными элементами материи являются бозоны.

6.2.6. О взаимосвязи сетей классических и квантовых компьютеров

Если пользователями сети являются люди или классические компьютеры, то на входе/выходе сети должны быть классические биты. Если пользователями сети являются квантовые компьютеры, то на входе/выходе сети должны быть q -биты. В первом случае, при использовании в сети квантовых компьютеров необходимы преобразования классических битов в квантовые и обратно.

Возможные варианты сетей классических и квантовых компьютеров использующих классические и квантовые каналы связи приведены на рисунках 6.3-6.11.



КлК Классический компьютер
————— Классический канал связи

Рисунок 6.3. Сеть классических компьютеров на базе классических каналов связи

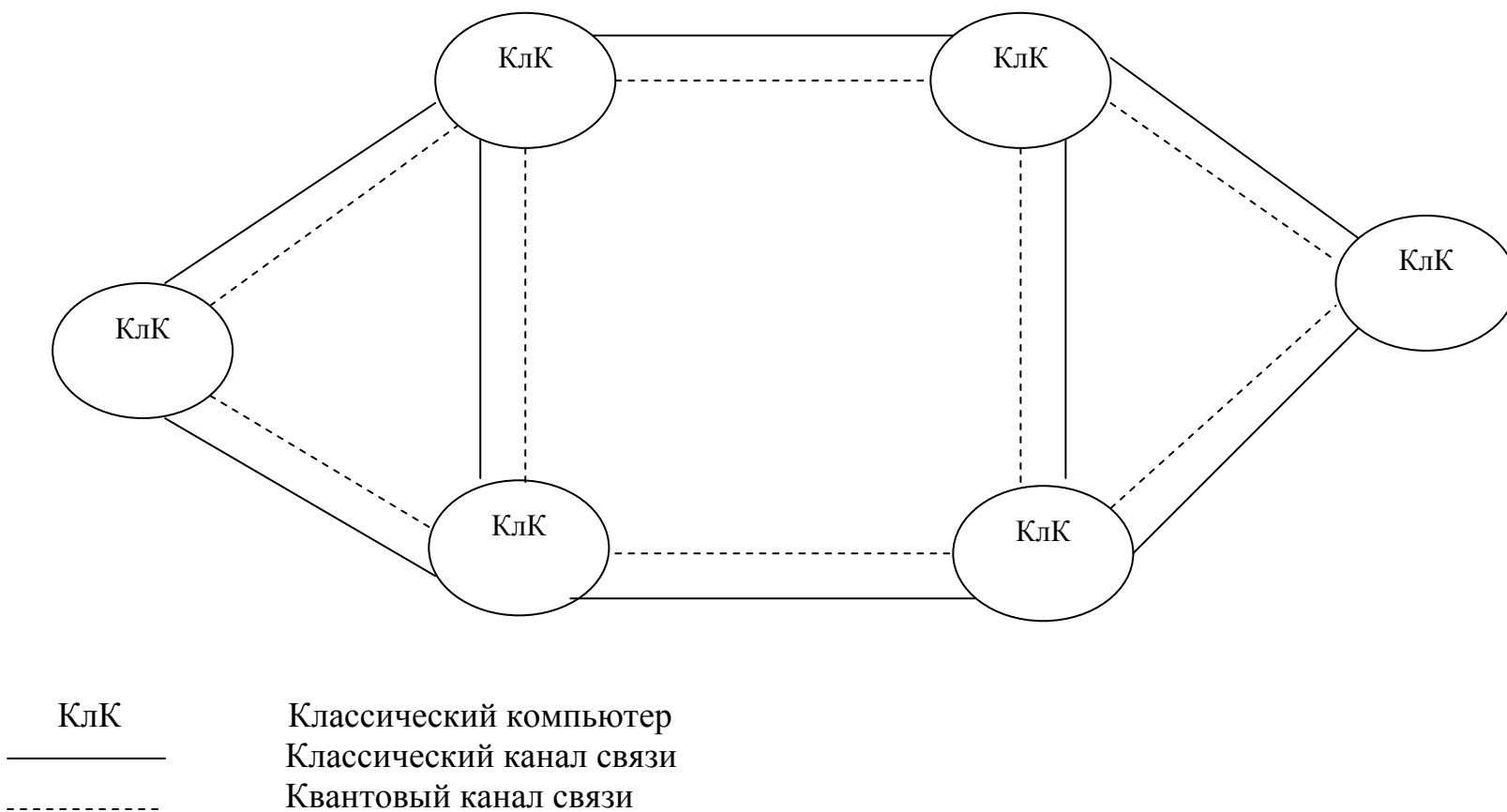
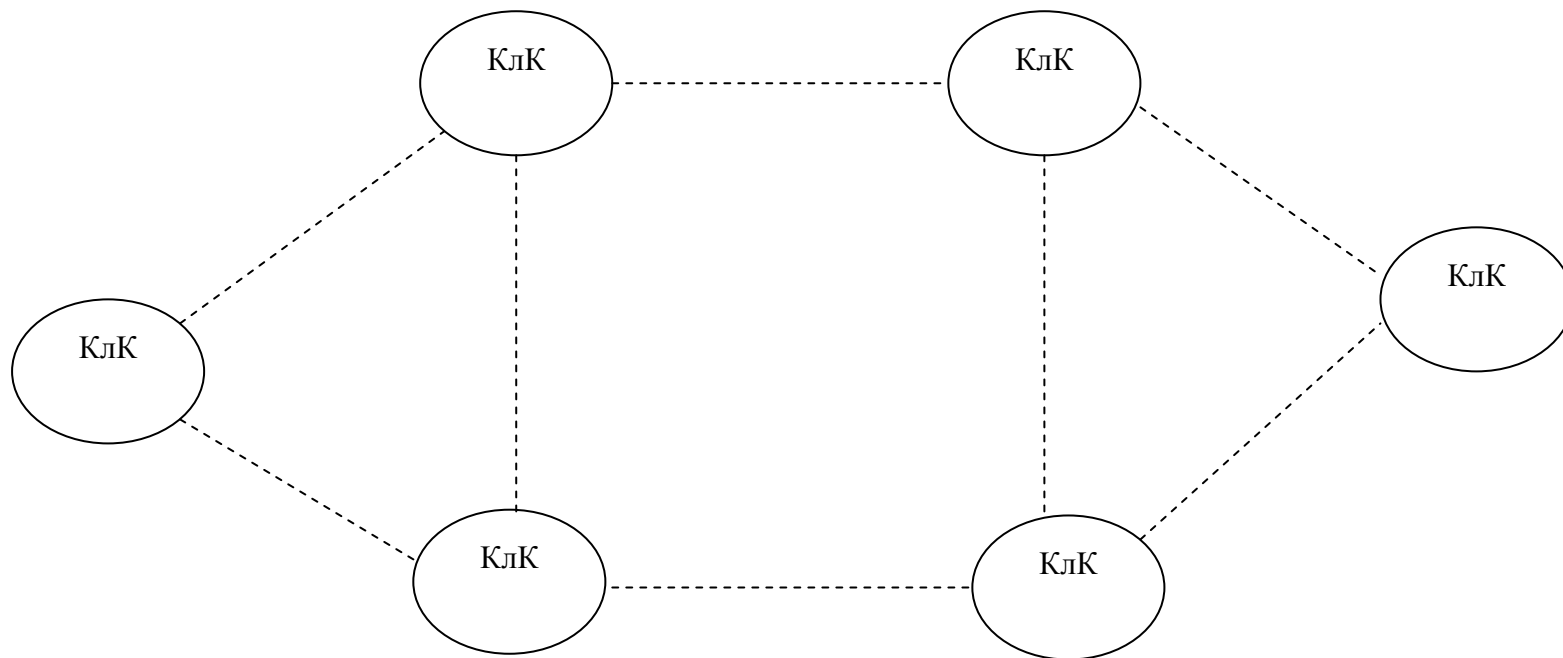


Рисунок 6.4. Сеть классических компьютеров на базе классических и квантовых каналов связи



КлК Классический компьютер
----- Квантовый канал связи

Рисунок 6.5. Сеть классических компьютеров на базе квантовых каналов связи

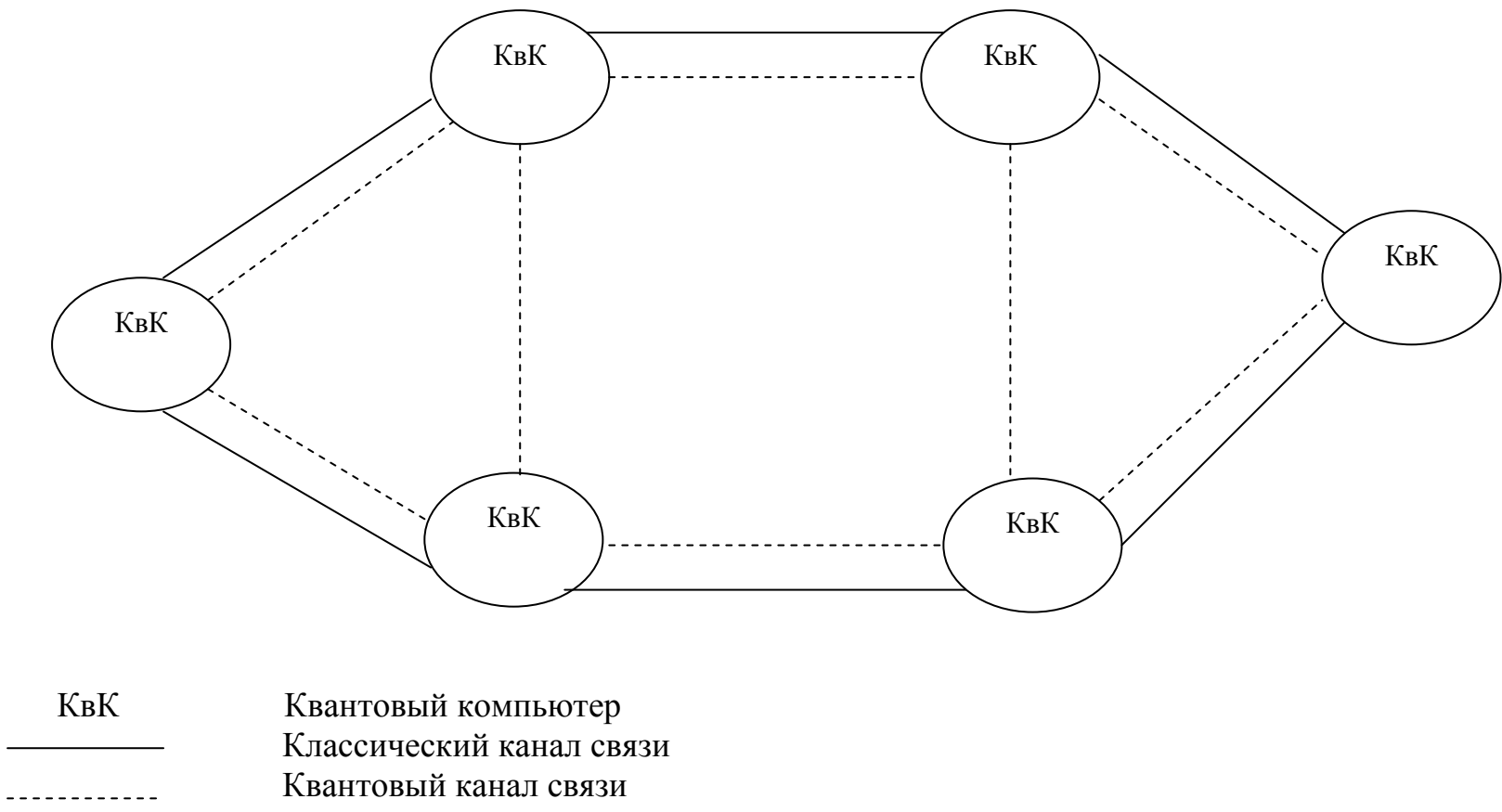


Рисунок 6.6. Сеть квантовых компьютеров на базе классических и квантовых каналов связи

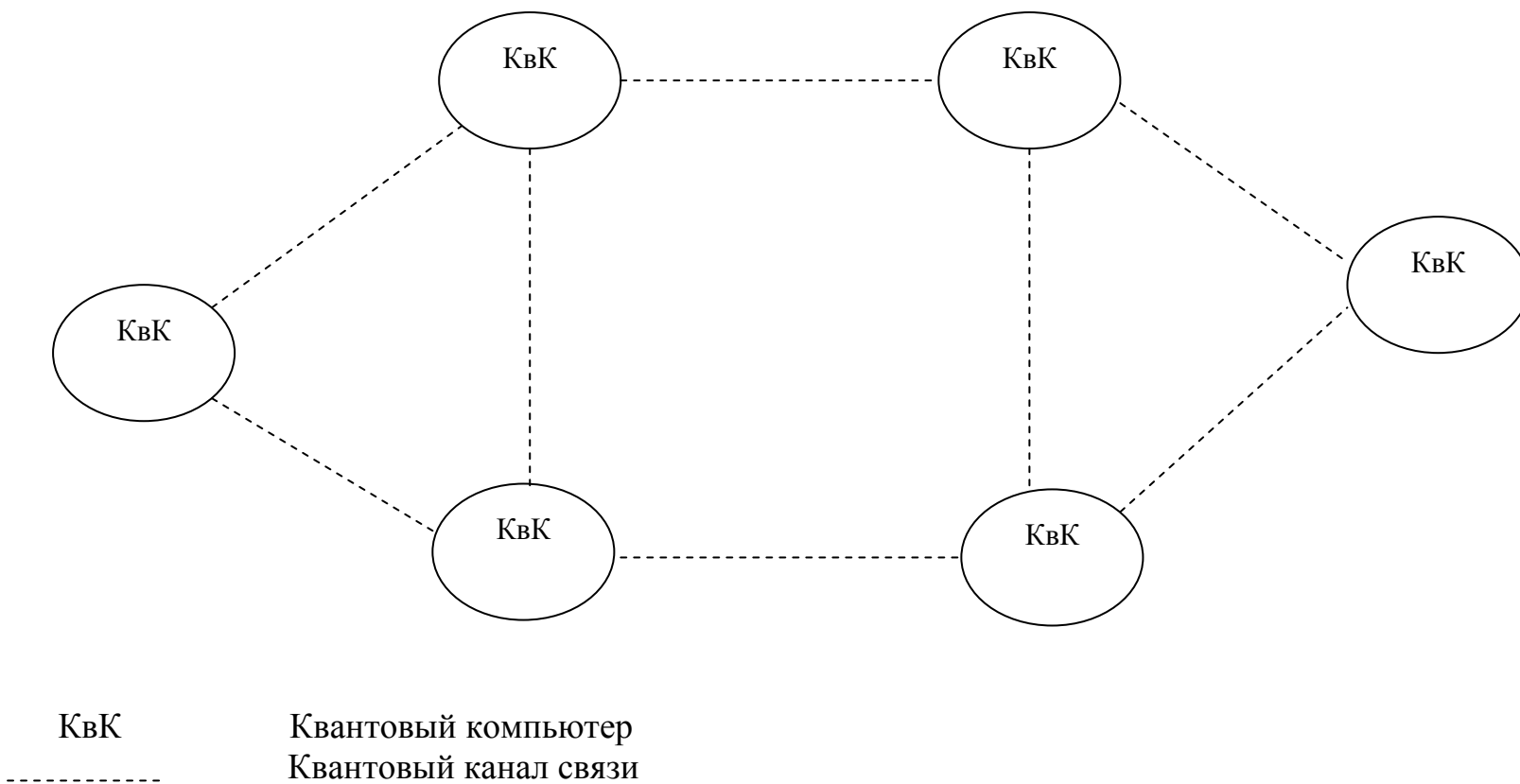
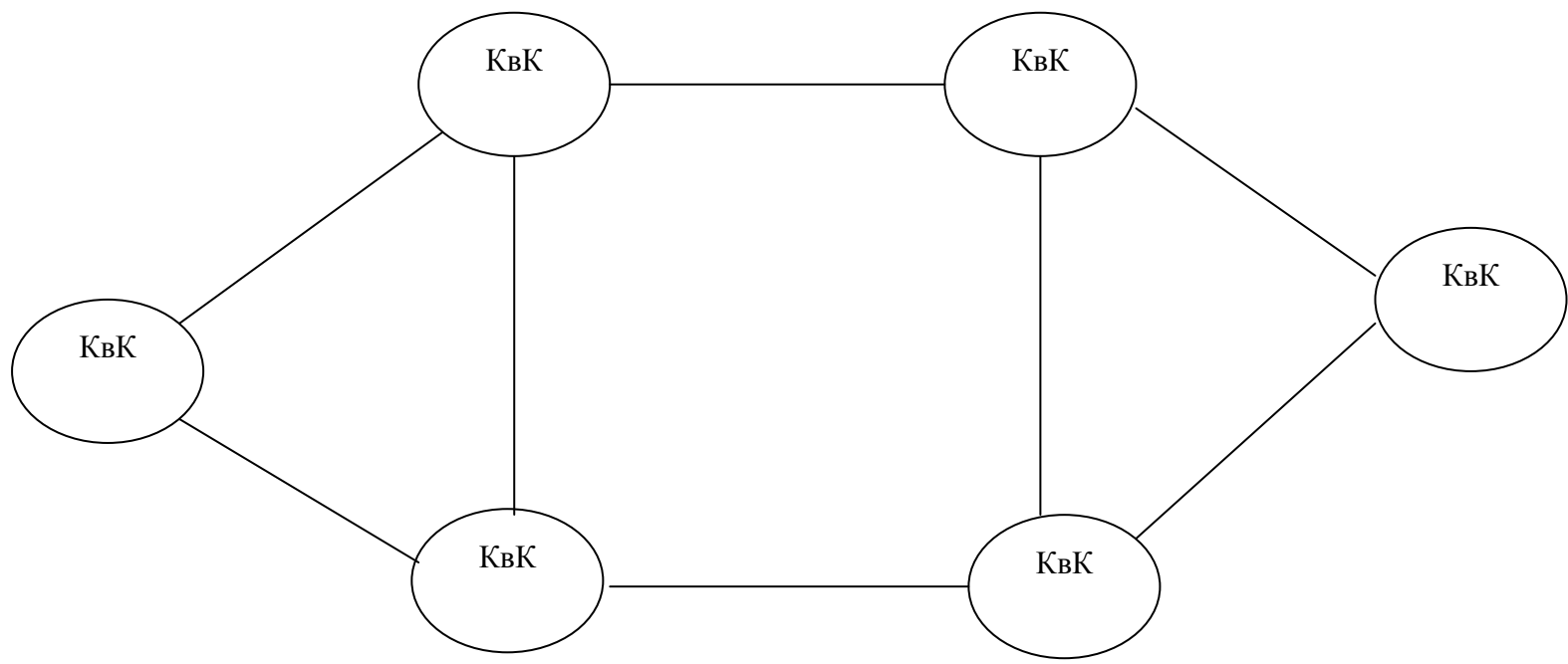
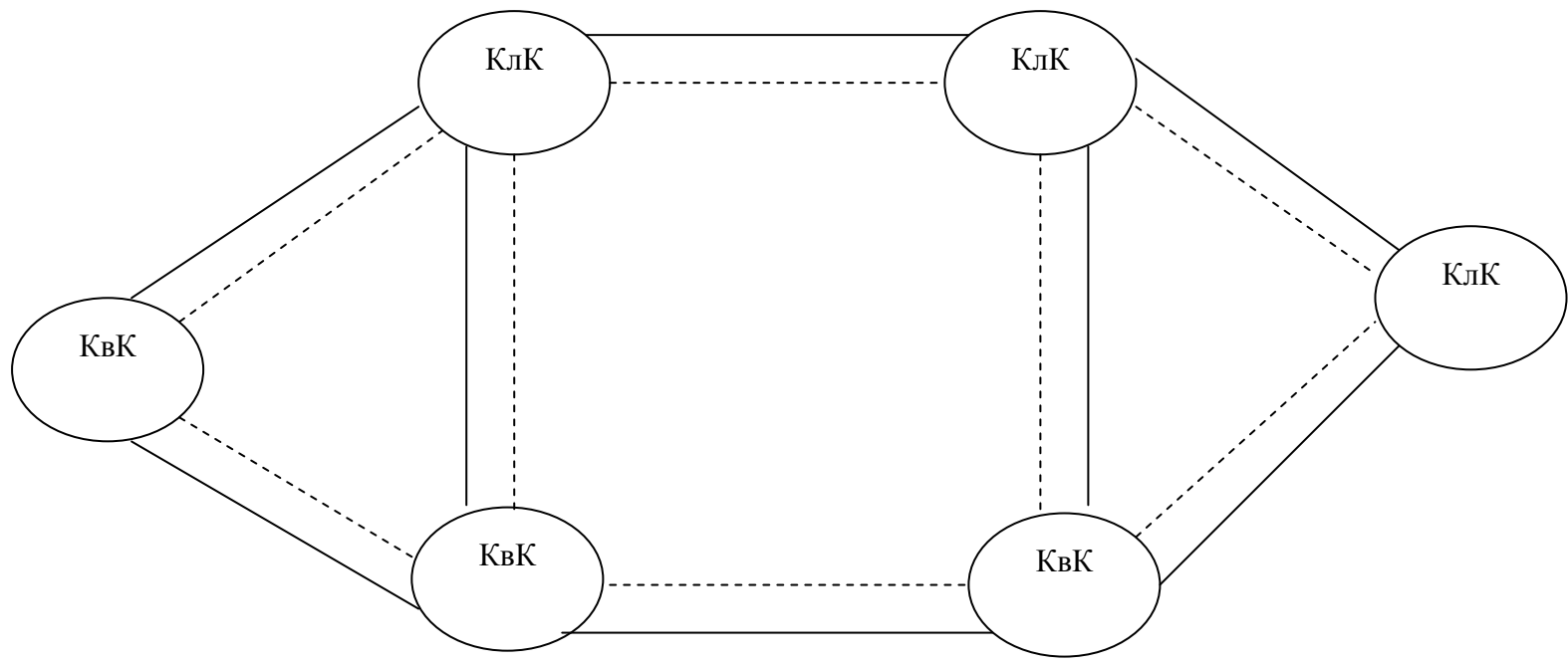


Рисунок 6.7. Сеть квантовых компьютеров на базе квантовых каналов связи



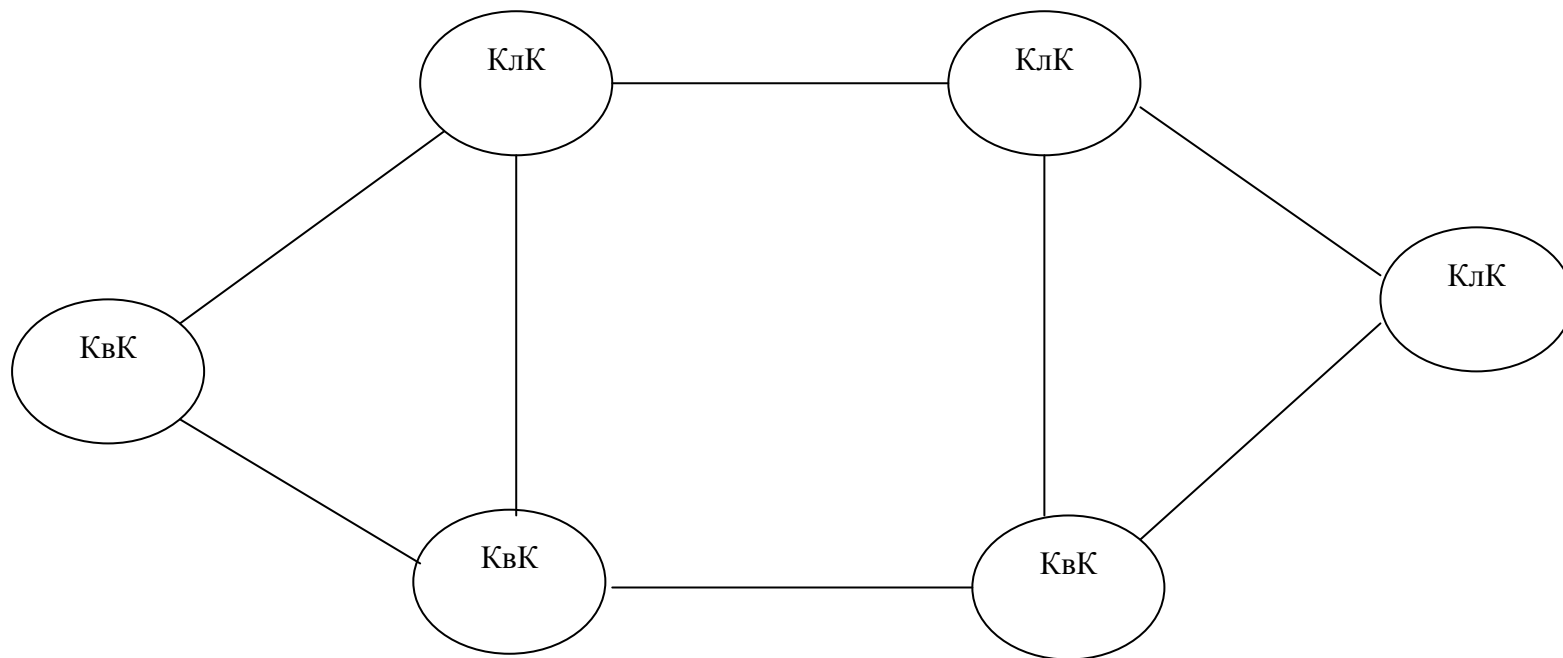
КвК Квантовый компьютер
————— Классический канал связи

Рисунок 6.8. Сеть квантовых компьютеров на базе классических каналов связи



КлК	Классический компьютер
КвК	Квантовый компьютер
—————	Классический канал связи
-----	Квантовый канал связи

Рисунок 6.9. Сеть классических и квантовых компьютеров на базе классических и квантовых каналов связи



КлК	Классический компьютер
КвК	Квантовый компьютер
_____	Классический канал связи

Рисунок 6.10. Сеть классических и квантовых компьютеров на базе классических каналов связи

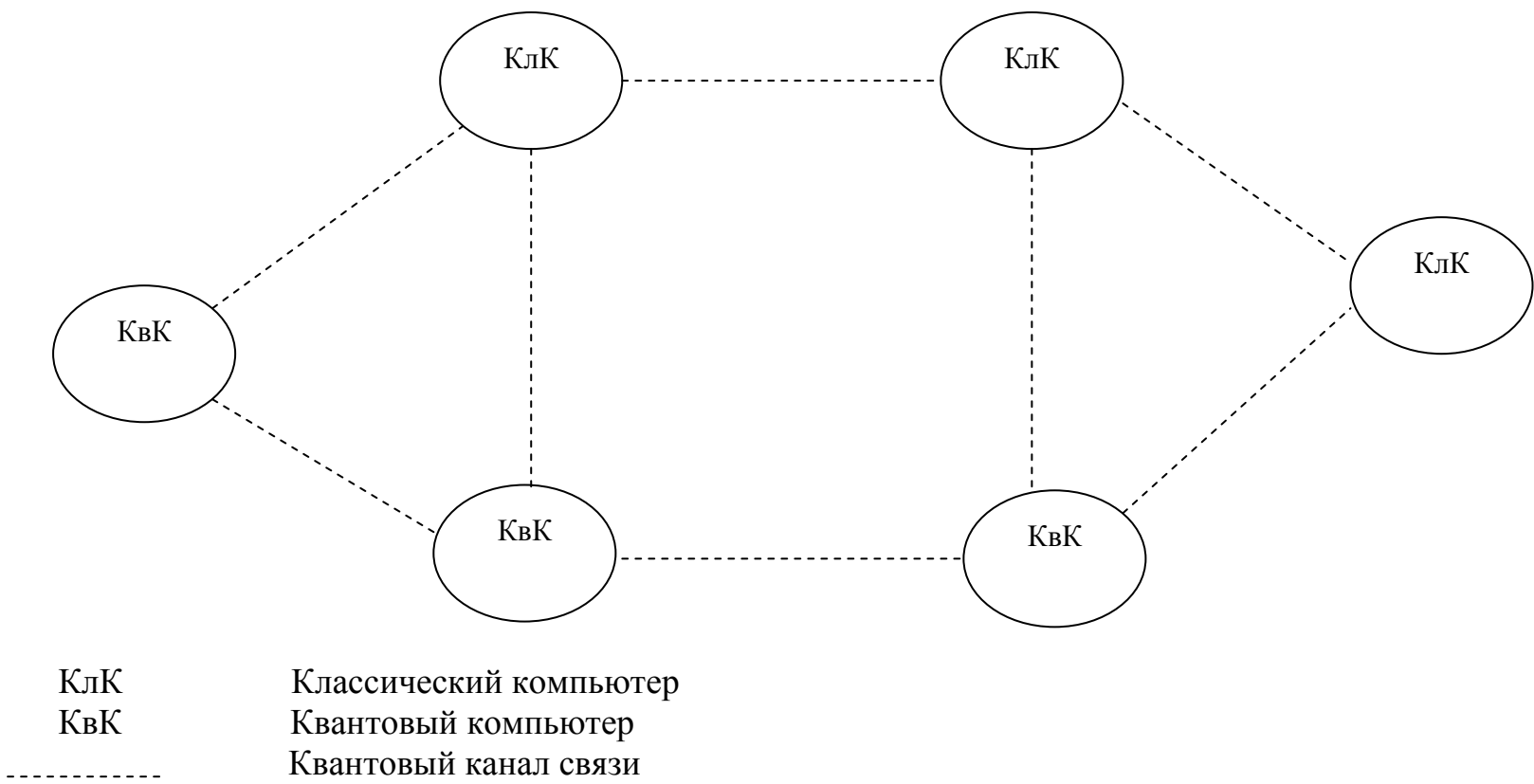


Рисунок 6.11. Сеть классических и квантовых компьютеров на базе квантовых каналов связи

Сети классических компьютеров самодостаточны. В принципе, они не требуют использования квантовых каналов и сетей связи.

Сети квантовых компьютеров, использующие эффект квантовой телепортации, требуют передачи классических битов информации и тем самым использования классических каналов и сетей связи.

Сети квантовых компьютеров, не использующие эффект квантовой телепортации, не требуют передачи классических битов информации и тем самым использования классических каналов и сетей связи.

Гибридные сети необходимы при использовании квантовых компьютеров для решения задач комбинаторной сложности. Взаимодействие между сетями классических компьютеров и сетями квантовых компьютеров требует осуществления преобразований классических битов в q -биты и наоборот, поэтому представляется целесообразным при построении сетей минимизировать количество преобразований – свести их при прохождении произвольных сообщений к двум.

В промежуточном отчете начато исследование сетей квантовых компьютеров и гибридных сетей. При выполнении дальнейших исследований необходимо:

- исследовать и разработать эффективные методы преобразования классической информации в квантовую и обратно;
- исследовать и разработать эффективные методы повышения пропускной способности канала телепортации состояний квантовых объектов;
- провести исследование характеристик и общих свойств сетей квантовых компьютеров и гибридных сетей;
- определить области эффективного использования классических и квантовых каналов связи;
- предложить методы использования сетей квантовых компьютеров и гибридных сетей для повышения эффективности вычислений.

ПРИЛОЖЕНИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ И ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ СЕТЕВЫХ СИСТЕМ

Приложение 1.

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЦЕНТРЕ

1. Введение

В статье «Зачем бизнесу нужна виртуализация ИТ-ресурсов?» В.С. Ефремов обосновывает эффективность виртуализации ИТ-ресурсов компании, необходимость создания пластичного вычислительного центра как набора специально подобранных и проверенных системных решений для управления гранулированными и объединенными в соответствующие пулы вычислительными ресурсами (ЦП, память, ввод/вывод). Это, в частности, обеспечит возможность автоматического управления вычислительными ресурсами для достижения следующих целей: эффективного использования имеющихся вычислительных ресурсов; повышения надежности («живучести») работы приложений, включая катастрофоустойчивость; экономию электроэнергии за счет сокращения количества серверов, а также путем перевода избыточных ресурсов (энергопотребителей) в «спящий режим».

Внедрение пластичного ВЦ позволяет сократить количество серверов, необходимых для эксплуатации имеющихся приложений, повысить надежность («живучесть») приложений при возникновении отказов, аварийных ситуаций (катастроф) и проведении плановых отключений аппаратуры ВЦ.

Повышается эффективность капитальных вложений в ИТ-инфраструктуру, обоснованность бюджетирования ВЦ, и оптимизируется модель лицензирования программного обеспечения, экономятся энергоресурсы за счет оптимизации конфигурации вычислительных средств ВЦ и эффективного их использования, снижения арендной платы за счет сокращения площадей для размещения избыточного количества серверов [1].

Построение и функционирование пластичного вычислительного центра требует разработки системы моделей, связывающей характеристики решения задач пользователями с характеристиками собственно вычислительного центра и его составляющих. В настоящей работе предлагается модель минимизации времени решения задач пользователей путем определения для каждой задачи оптимальной пропускной способности каналов ввода/вывода и оптимальной производительности вычислительных средств. Модель построена для транзакционного класса задач (прикладных систем, приложений).

Излагаемая постановка задачи и предлагаемое решение возникли при организации вычислительного центра ООО «ГЕТНЕТ Консалтинг». Полученные результаты полезны для ВЦ предприятий и, особенно для коммерческих ВЦ коллективного пользования.

2. Обозначения и определения

Введем необходимые обозначения и определения.

Задача (прикладная система, приложение) – это функционально законченная система, имеющая определенный набор входных данных, определенный набор выходных данных, фиксированный алгоритм преобразования входных данных в выходные. Примеры задач: система бронирования и продажи авиационных билетов «Сирена-2000», система бронирования и продажи авиационных билетов «Сейбр», система бронирования и продажи железнодорожных билетов «Экспресс», система управления информацией, система разработки радиоданных, бухгалтерия предприятия.

n - количество решаемых на вычислительном центре задач.

C - полная (суммарная) пропускная способность каналов ввода/вывода вычислительного центра. Единица измерения – бит в секунду.

P - полная (суммарная) производительность вычислительного центра, используемая для решения всех задач. Единица измерения – число выполняемых элементарных операций в секунду или число тактов вычислений в секунду.

V - полная (суммарная) память вычислительного центра. Единица измерения – бит (байт).

C_i - пропускная способность каналов ввода/вывода вычислительного центра, используемая для решения i -ой задачи. Единица измерения – бит в секунду.

P_i - производительность вычислительного центра, используемая для решения i -ой задачи. Единица измерения – число выполняемых элементарных операций в секунду или число тактов вычислений в секунду.

λ_i - интенсивность поступления информации (транзакций) в вычислительный центр в ходе решения i -ой задачи. Единица измерения – 1/секунда.

L_i - средний объем порции информации (транзакции). Единица измерения – бит (байт).

$\lambda_i L_i$ - объем информации, поступающей в единицу времени в вычислительный центр в ходе решения i -ой задачи. Единица измерения – бит(байт) в секунду.

O_i - средний объем вычислений в ходе решения i -ой задачи, порождаемый поступившей информацией (транзакцией). Единица измерения – число элементарных операций или число тактов вычислений, которых необходимо выполнить при поступлении транзакции.

$\lambda_i O_i$ - объем вычислений в единицу времени в ходе решения i -ой задачи, порождаемый поступившей информацией (транзакциями). Единица измерения – число элементарных операций или число тактов вычислений в секунду.

$T_{i\text{ пер}}$ - время передачи данных при решении i -ой задачи.

$T_{i\text{ реш}}$ - время работы вычислительных средств при решении i -ой задачи.

T_i - время решения i -ой задачи. Единица измерения – секунда.

$$T_i = T_{i \text{ пер}} + T_{i \text{ реш}}.$$

$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ - среднее время решения задач в вычислительном центре.

α_i - коэффициент важности i -ой задачи – безразмерная величина.

$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i$ - среднее время решения задач в вычислительном центре с учетом важности задач.

При $\alpha_i = 1$ среднее время решения задач на вычислительном центре с учетом

важности задач равно среднему времени решения задач

$$T(1, 1, \dots, 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = T.$$

3. Постановка задачи оптимизации

Критерий оптимизации:

T_i - среднее время решения задач в вычислительном центре $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$;

$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - среднее время решения задач в вычислительном центре с учетом

важности задач $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i$.

Ограничения

$\sum_{i=1}^n C_i = C$ - полная (суммарная) пропускная способность каналов ввода/вывода

вычислительного центра.

$\sum_{i=1}^n P_i = P$ - полная (суммарная) производительность вычислительного центра.

Управляемые переменные

C_i - пропускные способности каналов ввода/вывода вычислительного центра, используемые для решения задач.

P_i - производительности вычислительного центра, используемые для решения задач.

Формулировка задачи оптимизации

Требуется найти значения пропускных способностей каналов ввода/вывода $C_{i\ opt}$ вычислительного центра и значения производительностей вычислительных средств $P_{i\ opt}$, используемых для решения задач, при которых среднее время решения задач минимально (среднее время решения задач с учетом их важности минимально).

4. Решение задачи оптимизации

Решим задачу методом неопределенных множителей Лагранжа [2]. Составим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{i\ nep} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{i\ resh} - \beta_1 (C - \sum_{i=1}^n C_i) - \beta_2 (P - \sum_{i=1}^n P_i).$$

Для оценки среднего времени передачи и среднего времени решения задачи используем модель теории массового обслуживания для одноканальной системы с бесконечной очередью [3]

$$T_{i\ nep} = \frac{\frac{L_i}{C_i}}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}}, \quad T_{i\ resh} = \frac{\frac{O_i}{P_i}}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}}.$$

Такой вид зависимостей справедлив для задач имеющих транзакционную форму решения. (Транзакция — в информатике, группа последовательных операций, которая представляет собой логическую единицу работы с данными. Транзакция может быть выполнена целиком либо успешно, соблюдая целостность данных и независимо от параллельно идущих других транзакций, либо не выполнена вообще, и тогда она не должна произвести никакого эффекта) [4]. Типичные транзакционные задачи (системы) это, например, системы бронирования и продажи билетов, банковские системы, базы данных, системы управления бизнес-процессами, системы управления в реальном масштабе времени,

Тогда функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{L_i}{C_i}}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{O_i}{P_i}}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}} - \beta_1 (C - \sum_{i=1}^n C_i) - \beta_2 (P - \sum_{i=1}^n P_i).$$

Для получения оптимальных значений необходимо составить и решить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_j} = 0.$$

Сначала вычислим

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = C - \sum_{i=1}^n C_i = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_2} = P - \sum_{i=1}^n P_i = 0.$$

Определение оптимальной пропускной способности каналов ввода/вывода
Вычислим

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = \frac{1}{n} \frac{\left(-\frac{L_i}{C_i^2} (1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}) - \frac{L_i}{C_i} \left(-\lambda_i \frac{L_i}{C_i^2}\right)\right)}{\left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2} + \beta_1 = \frac{1}{n} \frac{-\frac{L_i}{C_i^2}}{\left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2} + \beta_1 = 0.$$

Откуда

$$\frac{1}{n} \frac{\frac{L_i}{C_i^2}}{\left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2} = \beta_1,$$

и

$$\frac{L_i}{C_i^2} = n\beta_1 \left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2,$$

$$C_i^2 - 2\lambda_i L_i C_i + \lambda_i^2 L_i^2 - \frac{L_i}{n\beta_1} = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем

$$C_i = \lambda_i L_i \pm \sqrt{\frac{L_i}{n\beta_1}}.$$

Поскольку пропускная способность каналов ввода/вывода вычислительного центра, используемая для решения i -ой задачи, должна быть не меньше объема информации $\lambda_i L_i$, поступающей в единицу времени в вычислительный центр в ходе решения i -ой задачи ($C_i \geq \lambda_i L_i$), то остается решение со знаком плюс перед корнем

$$C_i = \lambda_i L_i + \sqrt{\frac{L_i}{n\beta_1}}.$$

Или

$$C_i - \lambda_i L_i = \frac{\sqrt{L_i}}{\sqrt{n\beta_1}}$$

Суммируя по всем задачам

$$\sum_{i=1}^n C_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{L_i}}{\sqrt{n\beta_1}},$$

получаем

$$C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{L_i}}{\sqrt{n\beta_1}}.$$

Пропускная способность каналов ввода/вывода вычислительного центра, используемая для решения всех задач, должна быть не меньше объема информации $\sum \lambda_i L_i$, поступающей в единицу времени в вычислительный центр в ходе решения всех задач ($C \geq \sum \lambda_i L_i$),

Определяем множитель Лагранжа

$$\beta_1 = \frac{1}{n} \frac{(\sum_{i=1}^n \sqrt{L_i})^2}{(C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i)^2},$$

и оптимальные значения пропускных способностей каналов ввода-вывода

$$C_{i\text{opt}} = \lambda_i L_i + \sqrt{\frac{L_i}{n\beta_1}} = \lambda_i L_i + \frac{\sqrt{L_i} (C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{L_i}}.$$

Определение оптимальной производительности вычислительных средств

Вычислим

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = \frac{1}{n} \frac{(-\frac{O_i}{P_i^2} (1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}) - \frac{O_i}{P_i} (-\lambda_i \frac{O_i}{P_i^2}))}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}} + \beta_2 = \frac{1}{n} \frac{-\frac{O_i}{P_i^2}}{(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i})^2} + \beta_2 = 0.$$

Проводя вычисления аналогичные предыдущим, получим

Имеем

$$\frac{1}{n} \frac{\frac{O_i}{P_i^2}}{(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i})^2} = \beta_2.$$

Вычисляем множитель Лагранжа

$$\beta_2 = \frac{1}{n} \frac{(\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i})^2}{(P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i)^2}$$

и оптимальные производительности для задач

$$P_{i\text{opt}} = \lambda_i O_i + \sqrt{\frac{O_i}{n\beta_2}} = \lambda_i O_i + \frac{\sqrt{O_i} (P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}}.$$

Рассмотрим примеры

1) Исходные данные:

$$\lambda_i = \lambda, L_i = L, O_i = O, i = 1, \dots, n.$$

$$C_{i\text{opt}} = \lambda L + \frac{\sqrt{L}(C - \sum_{i=1}^n \lambda L)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{L}} = \lambda L + \frac{\sqrt{L}(C - L \sum_{i=1}^n \lambda)}{n\sqrt{L}} = \lambda_i L + \frac{(C - nL\lambda)}{n} = \frac{C}{n}.$$

$$P_{i\text{opt}} = \lambda O + \frac{\sqrt{O}(P - \sum_{i=1}^n \lambda O)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{O}} = \lambda O + \frac{(P - n\lambda O)}{n} = \frac{P}{n}.$$

При одинаковых характеристиках задач, как и следовало ожидать, оптимальное распределение ресурсов равномерно.

2) Исходные данные:

$$\lambda_1, \lambda_2, L_1 = L, L_2 = 4L; O_1 = 9O, O_2 = O,$$

$$\text{Ограничения: } C \geq \lambda_1 L + 4\lambda_2 L, P \geq 9\lambda_1 O + \lambda_2 O.$$

Вычислим оптимальные пропускные способности каналов ввода/вывода, выделяемые для двух задач.

$$C_{1\text{opt}} = \lambda_1 L + \frac{\sqrt{L}(C - \lambda_1 L - 4\lambda_2 L)}{\sqrt{L} + \sqrt{4L}} = \lambda_1 L + \frac{(C - \lambda_1 L - 4\lambda_2 L)}{1+2} = \frac{C}{3} + \frac{2}{3}\lambda_1 L - \frac{4}{3}\lambda_2 L,$$

$$C_{2\text{opt}} = 4\lambda_2 L + \frac{\sqrt{4L}(C - \lambda_1 L - 4\lambda_2 L)}{\sqrt{L} + \sqrt{4L}} = 4\lambda_2 L + \frac{2(C - \lambda_1 L - 4\lambda_2 L)}{1+2} = \frac{2C}{3} - \frac{2}{3}\lambda_1 L + \frac{4}{3}\lambda_2 L.$$

В сумме это пропускная способность вычислительного центра в целом

$$C_{1\text{opt}} + C_{2\text{opt}} = \frac{C}{3} + \frac{2}{3}\lambda_1 L - \frac{4}{3}\lambda_2 L + \frac{2C}{3} - \frac{2}{3}\lambda_1 L + \frac{4}{3}\lambda_2 L = C$$

Вычислим оптимальные производительности, выделяемые для двух задач

$$P_{1\text{opt}} = 9\lambda_1 O + \frac{\sqrt{9O}(P - 9\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{\sqrt{9O} + \sqrt{O}} = 9\lambda_1 O + \frac{3(P - 9\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{3+1} = \frac{3P}{4} + \frac{9}{4}\lambda_1 O - \frac{3}{4}\lambda_2 O,$$

$$P_{2opt} = \lambda_2 O + \frac{\sqrt{O}(P-9\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{\sqrt{9O} + \sqrt{O}} = \lambda_2 O + \frac{(P-9\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{3+1} = \frac{P}{4} - \frac{9}{4}\lambda_1 O + \frac{3}{4}\lambda_2 O.$$

В сумме это производительность вычислительного центра в целом

$$P_{1opt} + P_{2opt} = \frac{3P}{4} + \frac{9}{4}\lambda_1 O - \frac{3}{4}\lambda_2 O + \frac{P}{4} - \frac{9}{4}\lambda_1 O + \frac{3}{4}\lambda_2 O = P.$$

3) Исходные данные:

$$\lambda_1, \lambda_2 = 100\lambda_1, \quad L_1 = L, \quad L_2 = 4L; \quad O_1 = 9O, \quad O_2 = O,$$

$$\text{Ограничения: } C \geq \lambda_1 L + 4 \cdot 100\lambda_1 L = 401\lambda_1 L, \quad P \geq 9\lambda_1 O + 100\lambda_1 O = 109\lambda_1 O.$$

Вычислим оптимальные пропускные способности каналов ввода/вывода, выделяемые для двух задач.

$$C_{1opt} = \lambda_1 L + \frac{\sqrt{L}(C - \lambda_1 L - 400\lambda_1 L)}{\sqrt{L} + \sqrt{4L}} = \lambda_1 L + \frac{(C - 401\lambda_1 L)}{1+2} = \frac{C}{3} - \frac{398}{3}\lambda_1 L,$$

$$C_{2opt} = 400\lambda_1 L + \frac{\sqrt{4L}(C - \lambda_1 L - 400\lambda_1 L)}{\sqrt{L} + \sqrt{4L}} = 400\lambda_1 L + \frac{2(C - 401\lambda_1 L)}{1+2} = 400\lambda_1 L + \frac{2C}{3} - \frac{802}{3}\lambda_1 L = \frac{2C}{3} + \frac{398}{3}\lambda_1 L.$$

В сумме это пропускная способность вычислительного центра в целом

$$C_{1opt} + C_{2opt} = \frac{C}{3} - \frac{398}{3}\lambda_1 L + \frac{2C}{3} + \frac{398}{3}\lambda_1 L = C$$

Вычислим оптимальные производительности, выделяемые для двух задач

$$P_{1opt} = 9\lambda_1 O + \frac{\sqrt{9O}(P-9\lambda_1 O - 100\lambda_1 O)}{\sqrt{9O} + \sqrt{O}} = 9\lambda_1 O + \frac{3(P-109\lambda_1 O)}{3+1} = 9\lambda_1 O + \frac{3P}{4} - \frac{327}{4}\lambda_1 O = \frac{3P}{4} - \frac{291}{4}\lambda_1 O,$$

$$P_{2opt} = 100\lambda_1 O + \frac{\sqrt{O}(P-9\lambda_1 O - 100\lambda_1 O)}{\sqrt{9O} + \sqrt{O}} = 100\lambda_1 O + \frac{(P-109\lambda_1 O)}{3+1} = \frac{P}{4} + \frac{291}{4}\lambda_1 O.$$

В сумме это производительность вычислительного центра в целом

$$P_{1opt} + P_{2opt} = \frac{3P}{4} - \frac{291}{4}\lambda_1 O + \frac{P}{4} + \frac{291}{4}\lambda_1 O = P.$$

4) Исходные данные:

$$\lambda_1, \lambda_2, \quad L_1 = L, \quad L_2 = 100L; \quad O_1 = 81O, \quad O_2 = O,$$

$$\text{Ограничения: } C \geq \lambda_1 L + 100\lambda_2 L = 101\lambda_2 L, \quad P \geq 81\lambda_1 O + \lambda_2 O.$$

Вычислим оптимальные пропускные способности каналов ввода/вывода, выделяемые для двух задач.

$$C_{1opt} = \lambda_1 L + \frac{\sqrt{L}(C - \lambda_1 L - 100\lambda_2 L)}{\sqrt{L} + \sqrt{100L}} = \lambda_1 L + \frac{(C - \lambda_1 L - 100\lambda_2 L)}{1+10} = \frac{C}{11} + \frac{10}{11}\lambda_1 L - \frac{100}{11}\lambda_2 L$$

$$C_{2opt} = 100\lambda_2 L + \frac{\sqrt{100L}(C - \lambda_1 L - 100\lambda_2 L)}{\sqrt{L} + \sqrt{100L}} = 100\lambda_2 L + \frac{10(C - \lambda_1 L - 100\lambda_2 L)}{1+10} = \frac{10C}{11} - \frac{10}{11}\lambda_1 L + \frac{100}{11}\lambda_2 L.$$

В сумме это пропускная способность вычислительного центра в целом

$$C_{1opt} + C_{2opt} = \frac{C}{11} + \frac{10}{11} \lambda_1 L - \frac{100}{11} \lambda_2 L + \frac{10C}{11} - \frac{10}{11} \lambda_1 L + \frac{100}{11} \lambda_2 L = C$$

Вычислим оптимальные производительности, выделяемые для двух задач

$$P_{1opt} = 81\lambda_1 O + \frac{\sqrt{81O}(P - \lambda_1 O - 81\lambda_2 O)}{\sqrt{81O} + \sqrt{O}} = 81\lambda_1 O + \frac{9(P - 81\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{9+1} = 81\lambda_1 O + \frac{9P}{10} - \frac{729\lambda_1 O}{10} - \frac{9\lambda_2 O}{10} = \frac{9P}{10} + \frac{81}{10} \lambda_1 O - \frac{9}{10} \lambda_2 O$$

$$P_{2opt} = \lambda_2 O + \frac{\sqrt{O}(P - 9\lambda_1 O - 81\lambda_2 O)}{\sqrt{81O} + \sqrt{O}} = \lambda_2 O + \frac{(P - 81\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{9+1} = \lambda_2 O + \frac{P}{10} - \frac{81\lambda_1 O}{10} - \frac{\lambda_2 O}{10} = \frac{P}{10} - \frac{81}{10} \lambda_1 O + \frac{9}{10} \lambda_2 O$$

В сумме это производительность вычислительного центра в целом

$$P_{1opt} + P_{2opt} = \frac{9P}{10} + \frac{81}{10} \lambda_1 O + \frac{9}{10} \lambda_2 O + \frac{P}{10} - \frac{81}{10} \lambda_1 O + \frac{9}{10} \lambda_2 O = P.$$

Учет важности задач

С учетом важности задач функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \frac{L_i}{C_i}}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \frac{O_i}{P_i}}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}} - \beta_1 (C - \sum_{i=1}^n C_i) - \beta_2 (P - \sum_{i=1}^n P_i).$$

Для получения оптимальных значений необходимо составить и решить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_j} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = C - \sum_{i=1}^n C_i = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_2} = P - \sum_{i=1}^n P_i = 0.$$

Определение оптимальной пропускной способности каналов ввода/вывода

Далее вычисления аналогичны предыдущим, поэтому приводим их без комментариев.

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = \alpha_i \frac{\left(-\frac{L_i}{C_i^2} (1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}) - \frac{L_i}{C_i} (- - \lambda_i \frac{L_i}{C_i^2}) \right)}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}} + \beta_1 = \alpha_i \frac{-\frac{L_i}{C_i^2}}{(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i})^2} + \beta_1 = 0.$$

$$\alpha_i \frac{\frac{L_i}{C_i}}{(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i})^2} = \beta_1.$$

$$C_i = \lambda_i L_i + \sqrt{\frac{\alpha_i L_i}{\beta_1}}.$$

$$\beta_1 = \frac{(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i})^2}{(C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i)^2}.$$

$$C_{i \text{ opt}} = \lambda_i L_i + \sqrt{\frac{\alpha_i L_i}{\beta_1}} = \lambda_i L_i + \frac{\sqrt{\alpha_i L_i} (C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i}}.$$

Как и следовало ожидать, суммарная пропускной способности каналов ввода/вывода, отводимая под задачи с учетом их важности, равна производительности ВЦ:

$$\sum_{i=1}^n C_{i \text{ opt}} = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i L_i + \frac{\sqrt{\alpha_i L_i} (C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i}} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i L_i + (C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i) \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i}} \right) = C.$$

Аналогично оценивается оптимальная производительность вычислительных средств.

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = \alpha_i \frac{(-\frac{O_i}{P_i^2} (1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}) - \frac{O_i}{P_i} (-\lambda_i \frac{O_i}{P_i^2}))}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}} + \beta_2 = \alpha_i \frac{-\frac{O_i}{P_i^2}}{(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i})^2} + \beta_2 = 0.$$

$$\alpha_i \frac{\frac{O_i}{P_i^2}}{(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i})^2} = \beta_2.$$

$$\beta_2 = \frac{(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i O_i})^2}{(P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i)^2}.$$

$$P_{i \text{ opt}} = \lambda_i O_i + \sqrt{\frac{\alpha_i O_i}{\beta_2}} = \lambda_i O_i + \frac{\sqrt{\alpha_i O_i} (P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i O_i}}.$$

Как и следовало ожидать, суммарная производительность, отводимая под задачи с учетом их важности, равна производительности ВЦ:

$$\sum_{i=1}^n P_{i\ opt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i + \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i O_i} \frac{(P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i O_i}} = P$$

5. Заключение

1. В настоящей работе предложена модель минимизации времени решения задач пользователей путем определения для каждой задачи (системы, приложения) оптимальной пропускной способности каналов ввода/вывода и оптимальной производительности вычислительных средств.
2. Исходными данными для модели являются характеристики задач (систем, приложений): интенсивность потока транзакций, объем информации в транзакции, объем вычислений, порождаемый транзакцией; характеристики вычислительного центра: суммарная пропускная способность каналов ввода-вывода, суммарная производительность вычислительного центра.
3. Модель построена для транзакционного класса задач (систем, приложений), включая системы бронирования и продажи билетов, банковские системы, базы данных, системы управления бизнес-процессами.
4. Использование предложенной модели для управления вычислительным центром обеспечивает минимальное время решения задач пользователей, балансировку ресурсов для достижения заданного уровня обслуживания для каждого приложения; эффективное использование имеющихся вычислительных ресурсов; экономию электроэнергии за счет сокращения количества серверов, а также путем перевода избыточных ресурсов (энергопотребителей) в "спящий режим".
5. В ходе дальнейших исследований необходимо рассмотреть другие классы задач, многоканальные модели обслуживания, учесть зависимость времени решения задач от выделяемой памяти.

6. Используемые источники

1. Ефремов В.С. Зачем бизнесу нужна виртуализация ИТ-ресурсов?
<http://www.hetnet.ru/si/articles>.
2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию, "Наука", М., 1983.
3. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. Пер. с англ. Под ред. Б.С. Цыбакова. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
4. <http://ru.wikipedia.org/wiki>.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные материалы позволяют сделать следующие основные выводы.

1. Развитие классических компьютеров, сетей классических компьютеров и разработка теоретических основ квантовых вычислений и компьютеров, создание первых образцов квантовых компьютеров делают возможной и актуальной задачу преподавания основ построения сетей классических и квантовых компьютеров.

2. Среди методов исследования СККК следует отметить законы Информатики и, прежде всего, закон сохранения неопределенности, методы квантовой механики, многоуровневую статическую модель и динамическую модель сетевой системы.

3. Изложенные модели отображают основные факторы, влияющие на процесс передачи информации:

- структуру сети;
- сетевые алгоритмы (процедуры выбора маршрута и управления потоками);
- правила обслуживания очередей в узлах сети;
- правила резервирования элементов сети;
- параметры элементов сети: канальные емкости ребер сети, пропускные способности каналов связи, объемы памяти, выделяемые для организации очередей, коэффициенты готовности каналов связи;
- параметры входных потоков (интенсивность, изменение интенсивности, приоритеты, длина сообщения и т.п.).

Динамическая модель сетевой системы формируется на базе статической модели и, соответственно, отражает все основные параметры сетевых систем, учитываемые статической моделью, и дополнительно учитывает динамику изменений интенсивностей входных потоков сообщений в узлах сети.

4. Описанные модели дают возможность оценивать следующие характеристики сетей связи:

- аддитивные по пути, проходимому информацией – время доставки информации, время установления соединений, длину пути, проходимого сообщением, число переприемов, длину циклов, стоимость передачи сообщений, величину помех и т.п.;
- вероятностные – надежность доставки сообщений, вероятность доставки сообщений по неправильному адресу, вероятность установления соединений, вероятность установления соединений по неправильному адресу, вероятность образования циклов, вероятность передачи сообщения из одного узла сети в другой;
- изменения интенсивностей потоков, характеристик переходных процессов в нестационарных сетях, текущих вероятностно-временных характеристик сетей;

- служат основой для исследований общих динамических свойств сетевых систем.

5. Статическая трехуровневая модель базируется на аппарате конечных цепей Маркова, теории вероятностей и теории массового обслуживания. Динамическая модель сетевой системы представляется в виде системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода, ядрами которых являются плотности распределения времен обслуживания сообщений в узлах или очередях сети.

6. Использование многоуровневой конструкции для описания стационарной сети и системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода для описания динамики сети приводит к полиномиальной сложности модели сетевой системы. Это делает реальным исследование и проектирование сетевых систем большой размерности.

7. Модели обеспечивают целостное, единообразное, адекватное, точное и эффективное представление процессов передачи информации в сетях с различными способами коммутаций, различными процедурами выбора маршрутов и управления потоками, дают возможность исследования общих свойств сетей - существования и единственности распределения потоков в узлах и ребрах сети, существования и единственности значений сетевых характеристик, их непрерывной зависимости от входных потоков.

8. Область адекватного использования статической и динамической моделей сетевой системы для расчетов характеристик сетевых систем ограничивается требуемой точностью расчетов. Использование моделей сетевой системы для теоретических исследований, в частности, исследование общих свойств сетей, вопросов устойчивости, управляемости, наблюдаемости носит абсолютный характер.

9. Проведенные исследования показывают, что при правильном построении (без «неустойчивых» очередей) и правильном использовании (без размножения сообщений, без циклов, при ограничении внешней нагрузки, ограничении времени пребывания сообщений) сети являются «хорошими» объектами – устойчивыми, с однозначной непрерывной, монотонной зависимостью интенсивностей потоков и характеристик от интенсивности внешней нагрузки.

10. Динамические модели сетевых систем могут быть положены в основу методов и алгоритмов оптимального управления. Они обеспечивают привлечение в теорию и практику систем связи, вычислительных и информационных сетей классического аппарата теории оптимального управления.

11. Дополнительные возможности для передачи и обработки информации открывает использование новых физических принципов, в частности, процесса телепортации квантовых состояний, большая по сравнению с классическими битами информационная емкость q -битов.

12. Начатое изучение сетей квантовых компьютеров и гибридных сетей позволило определить возможные методы исследований, получить некоторые начальные результаты и уточнить направления дальнейших исследований.

13. Использование для передачи информации выделенных состояний q -битов и процесса телепортации квантовых состояний позволяет повысить пропускную способность канала связи.

14. Наибольшие информационные потери происходят при преобразованиях классической информации в квантовую (при приготовлении заданных квантовых состояний) и, наоборот, при преобразованиях квантовую информацию в классическую (при измерениях), поэтому в гибридных сетях целесообразно минимизировать переходы из сети классических компьютеров в сеть квантовых компьютеров и обратно.

15. Анализ характеристик Бозе- частиц и Ферми-частиц показывает, что для хранения информации целесообразно использовать Ферми-частицы, для передачи – Бозе- частицы.

16. Следует отметить, что в учебнике приведены материалы, полезные для дальнейшего изучения методов и процессов вычислений в сетях квантовых компьютеров и гибридных сетях, использующих ряд новых физических принципов обработки и передачи информации, в том числе для:

- построения моделей и исследования свойств и оценка характеристик процессов вычислений в сетях квантовых компьютеров и в гибридных сетях классических и квантовых компьютеров;
- сравнительного анализа характеристик и свойств процессов вычислений в сетях классических компьютеров, сетей квантовых компьютеров, гибридных сетях классических и квантовых компьютеров;
- разработки принципов эффективной организации процессов вычислений в сетях классических компьютеров, сетей квантовых компьютеров, гибридных сетях классических и квантовых компьютеров, включая распределение задач вычислений между сетями классических и квантовых компьютеров, классическими и квантовыми компьютерами, организацию взаимодействия в ходе вычислений, организацию параллельных вычислений, анализ возможной архитектуры, интерфейсов и протоколов сетей классических и квантовых компьютеров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Клейнрок Л. Коммуникационные сети. – М.: Наука, 1970.
2. Мартин Дж. Системный анализ передачи данных. Проектирование систем передачи данных. – М.: Мир, 1975.
3. Клейнрок Л. вычислительные системы с очередями. Пер. с англ./ Под ред. Б.С. Цыбакова. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
4. Мизин И.А., Сидоров А.А. Алгоритмические процедуры синтеза структуры сетей связи. /Сб.: Вопросы кибернетики. – М.; 1979, вып. 57.
5. Мизин И.А., Богатырёв В.А., Кулешов А.Л. Сети коммутации пакетов. - М.: Радио и связь, 1986.
6. Давыдов Г.Б., Рогинский В.Н., Толчан А.Я. Сети электросвязи. – М.: Связь, 1977. – 380 с.
7. Самойленко С.И. Субоптимальные алгоритмы поиска решений в вычислительных сетях./ Сб.: Вопросы кибернетики. – М.: 1979. – вып. 57.
8. Сети ЭВМ./ Под ред. В.М. Глушкова. - М.: Связь, 1977.
9. Шнепс-Шнеппе М.А. Системы распределения информации. Методы расчета. - М.: Связь, 1979 - 344 с.
10. Теория сетей связи. Под ред. В.И. Рогинского - М.: Радио и связь, 1981.
11. Бутрименко А.В. Разработка и эксплуатация сетей ЭВМ. - М.: Финансы и статистика, 1981.
12. Лифшиц Б.С., Фидлин Я.В., Харкевич А.Д. Теория телефонных и телеграфных сообщений. - М.: Связь, 1981.
13. Захаров Г.П. Методы исследования систем передачи данных. - М.: Радио и связь, 1982.
14. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Спесивцев С.С. Об алгоритмическом и программном обеспечении методов аналитического моделирования информационно-вычислительных систем и их компонентов. Предпринт АН СССР, научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика". - М.: ВИНТИ, 1983.
15. Пранявичюс Г.И. Модели и методы исследования вычислительных систем. – Вильнюс: Мокслас, 1982.
16. Дэвис Д., Барбер Д., Прайс Ч., Соломонидес С. Вычислительные сети и сетевые протоколы. – М.: Мир, 1982.
17. Протоколы и методы управления в сетях передачи данных. Под ред. Ф.Ф. Куо. - М.: Радио и связь, 1985.
18. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связь и потоки./Пер. с англ./Под ред. Д.А.Поспелова. – М.: Связь, 1978. – 448 с.
19. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1969.
20. Гуревич И. М. Определение среднего времени и дисперсии времени передачи информации в сетях связи. – В кн. Модели информационных

- сетей систем и коммуникационных сетей систем. – Москва, «Наука», 1982.
21. Гуревич И. М. Расчет характеристик сетей со случайной процедурой выбора маршрута. – Сб. Вопросы кибернетики. Проблемы теории вычислительных сетей. – АН СССР, Москва, 1983.
 22. Гуревич И. М. Многоуровневая модель сети связи. – Сб. Вопросы кибернетики. Протоколы и методы коммутации в вычислительных сетях. – АН СССР, Москва, 1986.
 23. Гуревич И. М. Автоматизированные системы управления связью. Сети связи в системах управления. Учебное пособие. Части 1, 2. ИПК МПСС, Москва, 1985-1986.
 24. Гуревич И. М., Медриш М.А. Автоматизированный расчет характеристик сетевых систем с использованием многоуровневой модели. Методическое пособие. ЦОНТИ «ЭКОС», Москва, 1987.
 25. Гуревич И. М. Проектирование специальных систем связи. Динамические модели управления связью. Учебное пособие. ИПК МПСС, Москва, 1989.
 26. Гуревич И. М. Динамическая модель сети связи. – В сб. Теория телеграфика в системах информатики. – Москва, «Наука», 1989.
 27. Гуревич И. М. Динамические свойства сетевых систем. – Сб. Вопросы кибернетики. Архитектура и протоколы вычислительных сетей. – АН СССР, Москва, 1990.
 28. Гуревич И. М. Самосогласованная система многоуровневых статических и динамических моделей сетевых систем. – В кн. Методы доступа и архитектура локальных информационно-вычислительных сетей. – Москва, «Наука», 1992.
 29. Кадомцев Б.Б. Динамика и информация. Успехи физических наук, Москва, 1999.
 30. Валиев К.А., Кокин А.А. Квантовые компьютеры: Надежда и реальность. Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика». Москва-Ижевск. 2001.
 31. Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления. Москва: МЦНМО, ЧеРо, 1999.
 32. Белокуров В.В., Тимофеевская О.Д., Хрусталева О.А. Квантовая телепортация – обыкновенное чудо », Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика». Москва-Ижевск. 2000.
 33. Стин Э. «Квантовые вычисления», Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика». Москва-Ижевск. 2000.
 34. Bennet C.H., Brassard G., Crepeau C., Jorsra R., Peres A., Wootters W.K. Phis. Rev.Lett. 70 1985 (1993)
 35. Bennet C.H., Bernstein H.J., Popescu S., Schumacher B. Phis. Rev.Lett. A 53 2046 (1996).
 36. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М., «Мир», 1970.
 37. Королюк В.С., Турбин А.Р. Фазовое укрупнение сложных систем. «Высшая школа», Киев, 1978.

38. Бессекерский В. А., Попов Б. Л. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1972.
39. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
40. Теория автоматического управления. Ч. II. Под редакцией Воронова А. Л. М.: Высшая школа, 1977.
41. Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др. Интегральные уравнения. Справочник. М.: Наука, 1968.
42. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1974.
43. Дирак П. Принципы квантовой механики. Физматгиз, Москва, 1960.
44. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс Э. «Фейнмановские лекции по физике», т. 8, 9, «Мир», Москва, 1967, 1968.
45. Ландау Л.Д. Лившиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Наука. Москва, 1974.
46. Гуревич И.М. Об основных законах информатики. Тезисы докладов отраслевого научно-технического Семинара 16-20 ноября 1987. Проблемы, методы и опыт создания автоматизированных систем управления связью. Ч.1.- ЦООНТИ «Экос». Москва, 1987.
47. Гуревич И.М. Законы информатики – основа исследований и проектирования сложных систем связи и управления. Методическое пособие. ЦООНТИ «Экос». Москва, 1989.
48. Гуревич И.М. Законы информатики – основа исследований и проектирования сложных систем. Рукопись. Москва, 2002.
49. Гуревич И.М. Физическая информатика. Закон сохранения неопределенности. Рукопись. Москва, 2002.
50. Шеннон К. Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетики. Издательство иностранной литературы, Москва, 1963 – с. 243 – 332.
51. Стратанович Теория информации
52. Биллингсгей П. Эргодическая теория и информация. Мир. Москва, 1969.
53. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977.
54. Новиков О.А., Петухов С.И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. - М.: Советское радио, 1969.
55. Ивченко Т.И., Каштанов Б.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1972.
56. Кокс Д., Смит У. Теория очередей. – М.: Мир, 1966.
57. Эшби У. Росс. Несколько замечаний. Общая теория систем. Мир. Москва, 1966 – с. 171 – 178.
58. Шварц Л. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1972. – т.1.
59. Boutumeester D., Pan J. W., Mattle K., Eibl M., Weinfurer H., Zeihnger A. Experimeneal Quantum Teleportation // Nature, 1997, v. 390, № 6660, Dec., pp. 575 579.

60. Plencho M. B., Vedral V. Teleportation, Entanglement and Thermodynamics the Quantum World // Contemporary Phys., 1998, v. 39, № 6, pp. 431-446.
61. Gottesman D., Chuang I. Quantum Teleportation is a Universal Computational Primitive // Nature, 1999, v. 402, pp. 390.
62. Zhou X., Leung D. W., Chuang I.L. Quantum Logic Gate Construction with One-Bit «Teleportation» // 2000, LANL E-print LANL arXiv: quant-ph/0002039, 11 p.
63. Jonathan D., Plenio M.B. Entanglement-Assisted local Manipulation of Pure Quantum States. // Phys. Rev. Lett, 1999, v. 83, pp. 3566 — 3570.
64. Nielsen M. F. Conditions for a Class of Entanglement Transformations // Phys. Rev. Lett., 1999, ч. 83, # 2, pp. 436-439.
65. Jonathan D., Plenio M.B. Minimal Conditions for Local Pure-State Entanglement Manipulation // Phys. Rev. Lett., 1999, v. 83, № 7, pp. 1455- 1458.
66. Vidal G. Entanglement of Pure States for a Single Copy // Phys. Rev. Lett., 1999, v. 83, № 5, pp. 1046 — 1049.
67. Loyd S., Shor P. W., Bennett P. R. Teleportation and the Quantum Internet // 2000, LANL, E-print arXiv: quant-ph/0003147, 11 p.
68. Гоппа В.Д. Введение в алгебраическую теорию информации. “Наука”. Москва, 1995.

Приложение 1.

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЦЕНТРЕ

1. Введение

В статье «Зачем бизнесу нужна виртуализация ИТ-ресурсов?» В.С. Ефремов обосновывает эффективность виртуализации ИТ-ресурсов компании, необходимость создания пластичного вычислительного центра – как набора специально подобранных и проверенных системных решений для управления гранулированными и объединенными в соответствующие пулы вычислительными ресурсами (ЦП, память, ввод/вывод). Это, частности, обеспечит возможность автоматического управления вычислительными ресурсами для достижения следующих целей: эффективного использования имеющихся вычислительных ресурсов; повышения надежности (живучести) работы приложений, включая катастрофоустойчивость; экономию электроэнергии за счет сокращения количества серверов, а также путем перевода избыточных ресурсов (энергопотребителей) в "спящий режим".

Внедрение пластичного ВЦ позволяет сократить количество серверов, необходимых для эксплуатации имеющихся приложений, повысить надежность (живучесть) приложений при возникновении отказов, аварийных ситуаций (катастроф) и проведении плановых отключений аппаратуры ВЦ. Повышается эффективность капитальных вложений в ИТ-инфраструктуру, обоснованность бюджетирования ВЦ и оптимизируется модель лицензирования программного обеспечения, экономятся энергоресурсы за счет оптимизации конфигурации вычислительных средств ВЦ и эффективного их использования, снижения арендной платы за счет сокращения площадей для размещения избыточного количества серверов» [1].

Построение и функционирование пластичного вычислительного центра требует разработки системы моделей, взаимосвязывающей характеристики решения задач пользователями с характеристиками собственно вычислительного центра и его составляющих. В настоящей работе предлагается модель минимизации времени решения задач пользователей путем определения для каждой задачи оптимальной пропускной способности каналов ввода/вывода и оптимальной производительности вычислительных средств. Модель построена для транзакционного класса задач (прикладных систем, приложений).

2. Обозначения и определения

Ведем необходимые обозначения и определения.
Задача (прикладная система, приложение) – это, функционально законченная система, имеющая определенный набор входных данных, определенный набор выходных данных, фиксированный алгоритм преобразования входных данных в выходные. Примеры задач: система бронирования и продажи авиационных

билетов «Сирена-2000», система бронирования и продажи авиационных билетов «Сейбр», система бронирования и продажи железнодорожных билетов «Экспресс», система управления информацией, система разработки радиоданных, бухгалтерия предприятия.

n - количество решаемых на вычислительном центре задач.

C - полная (суммарная) пропускная способность каналов ввода/вывода вычислительного центра. Единица измерения – бит в секунду.

P - полная (суммарная) производительность вычислительного центра, используемая для решения всех задач. Единица измерения – число выполняемых элементарных операций в секунду или число тактов вычислений в секунду.

V - полная (суммарная) память вычислительного центра. Единица измерения – бит (байт).

C_i - пропускная способность каналов ввода/вывода вычислительного центра, используемая для решения i -ой задачи. Единица измерения – бит в секунду.

P_i - производительность вычислительного центра, используемая для решения i -ой задачи. Единица измерения – число выполняемых элементарных операций в секунду или число тактов вычислений в секунду.

λ_i - интенсивность поступления информации (транзакций) в вычислительный центр в ходе решения i -ой задачи. Единица измерения – 1/секунда.

L_i - средний объем порции информации (транзакции). Единица измерения – бит (байт).

O_i - средний объем вычислений в ходе решения i -ой задачи, порождаемый поступившей информацией (транзакцией). Единица измерения – число элементарных операций или число тактов вычислений, которых необходимо выполнить при поступлении транзакции.

$T_{i\text{ пер}}$ - время передачи данных при решении i -ой задачи.

$T_{i\text{ реш}}$ - время работы вычислительных средств при решении i -ой задачи.

T_i - время решения i -ой задачи. Единица измерения – секунда.

$$T_i = T_{i\text{ пер}} + T_{i\text{ реш}}$$

$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ - среднее время решения задач на вычислительном центре.

α_i - коэффициент важности i -ой задачи. Единица измерения – безразмерная величина.

$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i$ - среднее время решения задач на вычислительном центре с учетом важности задач.

При $\alpha_i = 1$ среднее время решения задач на вычислительном центре с учетом важности задач равно среднему времени решения задач

$$T(1,1,\dots,1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = T.$$

3. Постановка задачи оптимизации

Критерий оптимизации:

T_i - среднее время решения задач на вычислительном центре $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$;

$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - среднее время решения задач на вычислительном центре с учетом важности задач $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i$.

Ограничения

$\sum_{i=1}^n P_i = P$ - полная (суммарная) производительность вычислительного центра.

$\sum_{i=1}^n C_i = C$ - полная (суммарная) пропускная способность каналов ввода/вывода вычислительного центра.

Управляемые переменные

P_i - производительности вычислительного центра, используемые для решения задач.

C_i - пропускные способности каналов ввода/вывода вычислительного центра, используемые для решения задач.

Требуется найти значения производительностей вычислительных средств $P_{i \text{ opt}}$ и значения пропускных способностей каналов ввода/вывода

$C_{i \text{ opt}}$ вычислительного центра, используемых для решения задач, при которых среднее время решения задач минимально (среднее время решения задач с учетом их важности) минимально.

5. Решение задачи оптимизации

Решим задачу методом неопределенных множителей Лагранжа [2]. Составим функцию Лагранжа.

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{i \text{ пер}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{i \text{ реш}} - \beta_1 (C - \sum_{i=1}^n C_i) - \beta_2 (P - \sum_{i=1}^n P_i).$$

Для оценки среднего времени передачи и среднего времени решения задачи используем модель теории массового обслуживания для одно-канальной системы с бесконечной очередью [3]

$$T_{i \text{ пер}} = \frac{\frac{L_i}{C_i}}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}}, \quad T_{i \text{ реш}} = \frac{\frac{O_i}{P_i}}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}}.$$

Такой вид зависимостей справедлив для задач имеющих транзакционную форму решения. (Транзакция — в информатике, группа последовательных операций, которая представляет собой логическую единицу работы с данными. Транзакция может быть выполнена целиком либо успешно, соблюдая целостность данных и независимо от параллельно идущих других транзакций, либо не выполнена вообще и тогда она не должна произвести никакого эффекта) [5]. Типичные транзакционные задачи (системы) это, например, системы бронирования и продажи билетов, банковские системы, базы данных, системы управления бизнес-процессами, системы управления в реальном масштабе времени,

Тогда функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{L_i}{C_i}}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{O_i}{P_i}}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}} + \beta_1 (C - \sum_{i=1}^n C_i) + \beta_2 (P - \sum_{i=1}^n P_i).$$

Для получения оптимальных значений необходимо составить и решить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_j} = 0.$$

Сначала вычислим

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = C - \sum_{i=1}^n C_i = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_2} = P - \sum_{i=1}^n P_i = 0.$$

Определение оптимальной пропускной способности каналов ввода/вывода
Вычислим

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = \frac{1}{n} \frac{\left(-\frac{L_i}{C_i^2} (1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}) - \frac{L_i}{C_i} \left(-\lambda_i \frac{L_i}{C_i^2}\right)\right)}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}} + \beta_1 = \frac{1}{n} \frac{-\frac{L_i}{C_i^2}}{\left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2} + \beta_1 = 0.$$

Откуда

$$\frac{1}{n} \frac{\frac{L_i}{C_i^2}}{\left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2} = \beta_1,$$

и

$$\frac{L_i}{C_i^2} = n\beta_1 \left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2,$$

$$C_i^2 - 2\lambda_i L_i C_i + \lambda_i^2 L_i^2 - \frac{L_i}{n\beta_1} = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем

$$C_i = \lambda_i L_i + \sqrt{\frac{L_i}{n\beta_1}}.$$

Или

$$C_i - \lambda_i L_i = \frac{\sqrt{L_i}}{\sqrt{n\beta_1}}$$

Суммируя по всем задачам

$$\sum_{i=1}^n C_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{L_i}}{\sqrt{n\beta_1}},$$

получаем

$$C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{L_i}}{\sqrt{n\beta_1}}.$$

Определяем множитель Лагранжа

$$\beta_1 = \frac{1}{n} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{L_i}\right)^2}{\left(C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i\right)^2},$$

и оптимальные значения пропускных способностей каналов ввода-вывода

$$C_{i\text{opt}} = \lambda_i L_i + \sqrt{\frac{L_i}{n\beta_1}} = \lambda_i L_i + \frac{\sqrt{L_i} \left(C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i\right)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{L_i}}.$$

Определение оптимальной производительности вычислительных средств

Вычислим

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = \frac{1}{n} \frac{\left(-\frac{O_i}{P_i^2} \left(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}\right) - \frac{O_i}{P_i} \left(-\lambda_i \frac{O_i}{P_i^2}\right)\right)}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}} + \beta_2 = \frac{1}{n} \frac{-\frac{O_i}{P_i^2}}{\left(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}\right)^2} + \beta_2 = 0.$$

Имеем

$$\frac{1}{n} \frac{\frac{O_i}{P_i^2}}{\left(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}\right)^2} = \beta_2.$$

Или

$$\frac{O_i}{P_i^2} = n\beta_2 \left(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}\right)^2.$$

Получаем квадратное уравнение

$$P_i^2 - 2\lambda_i O_i P_i + \lambda_i^2 O_i^2 - \frac{O_i}{n\beta_2} = 0.$$

Откуда имеем

$$P_i = \lambda_i O_i + \sqrt{\frac{O_i}{n\beta_2}}.$$

Или

$$P_i - \lambda_i O_i = \frac{\sqrt{O_i}}{\sqrt{n\beta_2}}.$$

Суммируя по всем задачам

$$\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}}{\sqrt{n\beta_2}}$$

получаем

$$P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}}{\sqrt{n\beta_2}}.$$

Вычисляем множитель Лагранжа

$$\beta_2 = \frac{1}{n} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}\right)^2}{\left(P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i\right)^2}$$

и оптимальные производительности для задач

$$P_{i\text{opt}} = \lambda_i O_i + \sqrt{\frac{O_i}{n\beta_2}} = \lambda_i O_i + \frac{\sqrt{O_i}(P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}}.$$

Рассмотрим примеры

1) Исходные данные:

$$\lambda_i = \lambda, \quad L_i = L, \quad O_i = O, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$C_{i\text{opt}} = \lambda L + \frac{\sqrt{L}(C - \sum_{i=1}^n \lambda L)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{L}} = \lambda L + \frac{\sqrt{L}(C - L \sum_{i=1}^n \lambda)}{n\sqrt{L}} = \lambda_i L + \frac{(C - nL\lambda)}{n} = \frac{C}{n}.$$

$$P_{i\text{opt}} = \lambda O + \frac{\sqrt{O}(P - \sum_{i=1}^n \lambda O)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{O}} = \lambda O + \frac{(P - n\lambda O)}{n} = \frac{P}{n}.$$

При одинаковых характеристиках задач, как и следовало ожидать, оптимальное распределение ресурсов равномерно.

2) Исходные данные:

$$\lambda_1, \lambda_2, \quad L_1 = L, \quad L_2 = 4L; \quad O_1 = 9O, \quad O_2 = O,$$

Вычислим оптимальные пропускные способности каналов ввода/вывода, выделяемые для двух задач.

$$C_{1\text{opt}} = \lambda_1 L + \frac{\sqrt{L}(C - \lambda_1 L - 4\lambda_2 L)}{\sqrt{L} + \sqrt{4L}} = \lambda_1 L + \frac{(C - \lambda_1 L - 4\lambda_2 L)}{1+2} = \frac{C}{3} + \frac{2}{3}\lambda_1 L - \frac{4}{3}\lambda_2 L,$$

$$C_{2\text{opt}} = 4\lambda_2 L + \frac{\sqrt{4L}(C - \lambda_1 L - 4\lambda_2 L)}{\sqrt{L} + \sqrt{4L}} = 4\lambda_2 L + \frac{2(C - \lambda_1 L - 4\lambda_2 L)}{1+2} = \frac{2C}{3} - \frac{2}{3}\lambda_1 L + \frac{4}{3}\lambda_2 L.$$

В сумме это пропускная способность вычислительного центра в целом

$$C_{1\text{opt}} + C_{2\text{opt}} = \frac{C}{3} + \frac{2}{3}\lambda_1 L - \frac{4}{3}\lambda_2 L + \frac{2C}{3} - \frac{2}{3}\lambda_1 L + \frac{4}{3}\lambda_2 L = C$$

Вычислим оптимальные производительности, выделяемые для двух задач

$$P_{1\text{opt}} = 9\lambda_1 O + \frac{\sqrt{9O}(P - 9\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{\sqrt{9O} + \sqrt{O}} = 9\lambda_1 O + \frac{3(P - 9\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{3+1} = \frac{3P}{4} + \frac{9}{4}\lambda_1 O - \frac{3}{4}\lambda_2 O,$$

$$P_{2\text{opt}} = \lambda_2 O + \frac{\sqrt{O}(P - 9\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{\sqrt{9O} + \sqrt{O}} = \lambda_2 O + \frac{(P - 9\lambda_1 O - \lambda_2 O)}{3+1} = \frac{P}{4} - \frac{9}{4}\lambda_1 O + \frac{3}{4}\lambda_2 O.$$

В сумме это производительность вычислительного центра в целом

$$P_{1opt} + P_{2opt} = \frac{3P}{4} + \frac{9}{4}\lambda_1 O - \frac{3}{4}\lambda_2 O + \frac{P}{4} - \frac{9}{4}\lambda_1 O + \frac{3}{4}\lambda_2 O = P.$$

Учет важности задач

С учетом важности задач функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \frac{L_i}{C_i}}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \frac{O_i}{P_i}}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}} + \beta_1 (C - \sum_{i=1}^n C_i) + \beta_2 (P - \sum_{i=1}^n P_i).$$

Для получения оптимальных значений необходимо составить и решить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_j} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = C - \sum_{i=1}^n C_i = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_2} = P - \sum_{i=1}^n P_i = 0.$$

Определение оптимальной пропускной способности каналов ввода/вывода

Здесь и далее вычисления аналогичны предыдущим, поэтому приводим их без комментариев.

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = \alpha_i \frac{\left(-\frac{L_i}{C_i^2} (1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}) - \frac{L_i}{C_i} \left(-\lambda_i \frac{L_i}{C_i^2}\right)\right)}{1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}} + \beta_1 = \alpha_i \frac{-\frac{L_i}{C_i^2}}{\left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2} + \beta_1 = 0.$$

$$\alpha_i \frac{\frac{L_i}{C_i^2}}{\left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2} = \beta_1.$$

$$\frac{L_i}{C_i^2} = \frac{\beta_1}{\alpha_i} \left(1 - \lambda_i \frac{L_i}{C_i}\right)^2$$

$$C_i^2 - 2\lambda_i L_i C_i + \lambda_i^2 L_i^2 - \frac{\alpha_i L_i}{\beta_1} = 0$$

$$C_i = \lambda_i L_i + \sqrt{\frac{\alpha_i L_i}{\beta_1}}$$

$$C_i - \lambda_i L_i = \frac{\sqrt{\alpha_i L_i}}{\sqrt{\beta_1}}$$

$$\sum_{i=1}^n C_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i}}{\sqrt{\beta_1}}$$

$$C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i}}{\sqrt{\beta_1}}$$

$$\beta_1 = \frac{(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i})^2}{(C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i)^2}$$

$$C_{i\ opt} = \lambda_i L_i + \sqrt{\frac{\alpha_i L_i}{\beta_1}} = \lambda_i L_i + \frac{\sqrt{\alpha_i L_i} (C - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i L_i}}$$

Определение оптимальной производительности вычислительных средств

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = \frac{1}{n} \frac{(-\frac{O_i}{P_i^2} (1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}) - \frac{O_i}{P_i} (-\lambda_i \frac{O_i}{P_i^2}))}{1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i}} + \beta_2 = \frac{1}{n} \frac{-\frac{O_i}{P_i^2}}{(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i})^2} + \beta_2 = 0$$

$$\frac{1}{n} \frac{\frac{O_i}{P_i^2}}{(1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i})^2} = \beta_2$$

$$\frac{O_i}{P_i^2} = n \beta_2 (1 - \lambda_i \frac{O_i}{P_i})^2$$

$$P_i^2 - 2\lambda_i O_i P_i + \lambda_i^2 O_i^2 - \frac{O_i}{n \beta_2} = 0$$

$$P_i = \lambda_i O_i + \sqrt{\frac{O_i}{n \beta_2}}$$

$$P_i - \lambda_i O_i = \frac{\sqrt{O_i}}{\sqrt{n \beta_2}}$$

$$\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}}{\sqrt{n\beta_2}}$$

$$P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}}{\sqrt{n\beta_2}}$$

$$\sqrt{n\beta_2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}}{P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{n} \frac{(\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i})^2}{(P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i)^2}$$

$$P_{i\ opt} = \lambda_i O_i + \sqrt{\frac{O_i}{n\beta_2}} = \lambda_i O_i + \frac{\sqrt{O_i} (P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i)}{\sum_{i=1}^n \sqrt{O_i}}.$$

6. Заключение

1. В настоящей работе предложена модель минимизации времени решения задач пользователей путем определения для каждой задачи (системы, приложения) оптимальной пропускной способности каналов ввода/вывода и оптимальной производительности вычислительных средств.
2. Исходными данными для модели являются характеристики задач (систем, приложений): интенсивность потока транзакция, объем информации в транзакции, объем вычислений, порождаемый транзакцией; характеристики вычислительного центра: суммарная пропускная способность каналов ввода-вывода, суммарная производительность вычислительного центра.
3. Модель построена для транзакционного класса задач (систем, приложений), включая системы бронирования и продажи билетов, банковские системы, базы данных, системы управления бизнес-процессами.
4. Использование предложенной модели для управления вычислительным центром обеспечивает минимальное время решения задач пользователей, балансировку ресурсов для достижения заданного уровня обслуживания

для каждого приложения; эффективное использование имеющихся вычислительных ресурсов; экономию электроэнергии за счет сокращения количества серверов, а также путем перевода избыточных ресурсов (энергопотребителей) в "спящий режим".

5. В ходе дальнейших исследований необходимо рассмотреть другие классы задач, многоканальные модели обслуживания, учесть зависимость времени решения задач от выделяемой памяти.

6. Используемые источники

1. Ефремов В.С. Зачем бизнесу нужна виртуализация ИТ-ресурсов? <http://www.hetnet.ru/si/articles>.
2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию, "Наука", М., 1983.
3. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. Пер. с англ. Под ред. Б.С. Цыбакова. – М.: Мир, 1979. – 600 с.

Приложение 2.

ОЦЕНКА ОБЪЕМА ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВХОДНОМ ПОТОКЕ

1. Введение

Проблема управления жизненным циклом информации является в настоящее время одной из основных проблем развития информационных технологий и общества [1-3]. Это связано с экспоненциальным ростом объемов информации в корпоративных системах и в современной цивилизации в целом, ограниченностью возможностей человека по восприятию и переработке информации. Неконтролируемый рост объемов информации при существенных физиологических ограничениях на возможность ее обработки (восприятия, осмысления) может привести к информационному коллапсу [4]. Поэтому полезны модели, позволяющие оценивать и прогнозировать объемы информации, подлежащей хранению и обработке. В стационарном случае такой моделью является формула Литтла. В настоящей работе предлагается модель на случай нестационарного входного потока и фиксированной функции распределения (плотности вероятности) времени пребывания информации в системе.

2. Оценка объемов информации при стационарном входном потоке

Формула Литтла [5, 6] позволяет установить взаимосвязь между средней продолжительностью жизненного цикла информации τ_{IC} и объемом информации I в системе при стационарном входном потоке.

Объем информации в системе при стационарном входном потоке равен произведению интенсивности входного потока, среднего объема порции информации и среднего времени пребывания информации в системе

$$I = \lambda \cdot \nu \cdot \tau_{IC}.$$

Здесь формула Литтла приведена в виде, удобном для расчета объемов данных в системе.

λ – интенсивность поступления информации в систему извне и/или создаваемой в системе – количество порций (сообщений, файлов,...) в единицу времени;

ν – средний объем порции информации в байтах;

τ_{IC} – средняя продолжительность жизненного цикла информации;

I – объем информации в системе в байтах.

При копировании, добавлении служебной, метаинформации или сжатии информации объем информации в системе следует уточнить с учетом коэффициентов увеличения и/или сжатия. Для этого объем информации, определенный по формуле Литтла, следует умножить на соответствующий коэффициент k .

Объем информации в системе пропорционален интенсивности формирования (поступления) информации, среднему объему порции информации и средней продолжительности жизненного цикла информации.

Память системы P должна быть не меньше объема информации, находящегося в системе

$$P \geq I = \lambda \cdot v \cdot \tau_{IC}.$$

Объем памяти системы пропорционален интенсивности формирования (поступления) информации, среднему объему порции информации и средней продолжительности жизненного цикла информации.

3. Оценка объемов информации при нестационарном входном потоке

При нестационарном входном потоке объем информации в системе в момент времени t равен начальному объему информации в момент времени 0 плюс объем информации, поступившей в систему за рассматриваемый период от 0 до t , минус объем информации, вышедшей из системы за рассматриваемый период от 0 до t .

Выражение для объема информации в системе в момент времени t в общем случае имеет вид

$$I(t) = I_0 + v \left(\int_0^t \lambda_{\text{вх}}(\tau) d\tau - \int_0^t \lambda_{\text{вых}}(\tau) d\tau \right).$$

Здесь I_0 - объем информации в системе в начальный момент времени 0 . Первый интеграл определяет объем информации, поступившей в систему за интервал времени $[0, t]$, второй интеграл определяет объем информации, покинувшей систему за интервал времени $[0, t]$.

Пусть $\Phi(\bullet), \varphi(\bullet)$ - функция, плотность вероятности времени пребывания информации в системе. Для оценки интенсивности выходного потока при нестационарном входном потоке будем использовать выражение, ранее полученное автором [7-9].

Если интенсивность входного информационного потока в систему, является функцией времени $\lambda_{\text{вх}}(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq t$) и плотность вероятности времени пребывания информации в системе равна $\varphi(\tau)$ (не зависит от времени), то интенсивность выходного информационного потока из системы равна

$$\lambda_{\text{вых}}(\tau) = \int_0^{\tau} \varphi(\tau - \theta) \cdot \lambda_{\text{вх}}(\theta) d\theta.$$

$\Phi(\bullet), \varphi(\bullet)$ обладают следующими свойствами.

Функция распределения:

Неотрицательность

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0 \\ 0 < \Phi(\tau) \leq 1 & \text{при } \tau > 0 \end{cases}.$$

Монотонность

$$\Phi(\tau_1) \leq \Phi(\tau_2) \quad \text{при } \tau_1 \leq \tau_2.$$

Стремление к единице

$$\Phi(\tau) \rightarrow 1 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty.$$

Плотность распределения:

Неотрицательность

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0 \\ \geq 0 & \text{при } \tau \geq 0 \end{cases}.$$

Полнота системы событий (равенство единице интеграла)

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau = 1.$$

$\Phi(\bullet), \varphi(\bullet)$ в общем случае, могут быть получены при моделировании системы, из априорных соображений, экспериментальными оценками.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих связь между интенсивностями выходного и входного потоков.

1) Если $\varphi(\tau) = \delta(\tau - \tau_{IC})$, то $\lambda_{\text{вых}}(\tau) = \int_0^{\tau} \varphi(\tau - \theta) \cdot \lambda_{\text{вх}}(\theta) d\theta = \int_0^{\tau} \delta(\tau - \theta) \cdot \lambda_{\text{вх}}(\theta) d\theta = \lambda_{\text{вх}}(\tau - \theta)$.

2) Если $\lambda_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ \lambda_{\text{вх}} & \text{при } t > 0 \end{cases}$, функция (плотность) распределения времени пребывания сообщений в системе $\Phi(\bullet), \varphi(\bullet)$ произвольна, то интенсивность выходного потока равна

$$\lambda_{\text{вых}}(\tau) = \int_0^{\tau} \varphi(\tau - \theta) \cdot \lambda_{\text{вх}}(\theta) \cdot d\theta = \lambda_{\text{вх}} \int_0^{\tau} \varphi(\tau - \theta) d\theta = \lambda_{\text{вх}} \Phi(\tau).$$

3) Если $\lambda_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ \lambda_{\text{вх}} & \text{при } t > 0 \end{cases}$, а плотность вероятности времени пребывания ин-

формации в системе равна $\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0 \\ \beta \cdot e^{-\beta\tau} & \text{при } \tau \geq 0 \end{cases}$, то

$$\lambda_{\text{вых}}(\tau) = \int_0^{\tau} \varphi(\tau - \theta) \cdot \lambda_{\text{вх}}(\theta) \cdot d\theta = \lambda_{\text{вх}} \int_0^{\tau} \beta \cdot e^{-\beta(\tau - \theta)} d\theta = \lambda_{\text{вх}} (1 - e^{-\beta\tau}).$$

Учитывая связь между интенсивностями выходного и входного потоков, получаем выражение для оценки объема информации в системе при нестационарном входном потоке

$$I(t) = I_0 + \nu \left(\int_0^t \lambda_{\text{ex}}(\tau) d\tau - \int_0^t \left(\int_0^\tau \varphi(\tau - \theta) \cdot \lambda_{\text{ex}}(\theta) d\theta \right) d\tau \right).$$

Итак, доказана

Теорема

Если

- a) в начальный момент времени $\tau = 0$ в системе храниться объем информации I_0 ;
- b) в интервал времени $[0, t]$ на вход системы поступает информационный поток, интенсивность которого является функцией времени $\lambda(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq t$);
- c) плотность вероятности времени пребывания информации в системе равна $\varphi(\tau)$, то объем информации $I(t)$ в системе в конечный момент времени t равен

$$I(t) = I_0 + \nu \left(\int_0^t \lambda_{\text{ex}}(\tau) d\tau - \int_0^t \left(\int_0^\tau \varphi(\tau - \theta) \cdot \lambda_{\text{ex}}(\theta) d\theta \right) d\tau \right).$$

Рассмотрим важные частные случаи.

- 1) В случае заданного, фиксированного времени пребывания информации в системе τ_{IC}

$\varphi(\tau) = \delta(\tau - \tau_{IC})$, объем информации в системе равен

$$I(t) = I_0 + \nu \left(\int_0^t \lambda_{\text{ex}}(\tau) d\tau - \int_0^t \int_0^\tau \delta(\tau - \tau_{IC} - \theta) \cdot \lambda_{\text{ex}}(\theta) d\theta d\tau \right) = I_0 + \nu \left(\int_0^t \lambda_{\text{ex}}(\tau) d\tau - \int_0^t \lambda_{\text{ex}}(\tau - \tau_{IC}) d\tau \right).$$

- 2) При стационарном входном потоке $\lambda_{\text{ex}}(t) = \lambda_{\text{ex}} = \text{const}$

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ I_0 + \nu \cdot \lambda_{\text{ex}} \cdot t & \text{при } 0 < t < \tau_{IC} \\ I_0 + \nu \cdot \lambda_{\text{ex}} \cdot \tau_{IC} & \text{при } t \geq \tau_{IC} \end{cases}.$$

При $t \geq \tau_{IC}$ и $I_0 = 0$ то получаем при формулу Литтла

$$I(t) = \nu \cdot \lambda_{\text{ex}} \cdot \tau_{IC}.$$

- 3) При входном потоке

$$\lambda_{\text{ex}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ \lambda_{\text{ex}} & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

и произвольной функции (плотности) распределения $\Phi(\bullet)$, $\varphi(\bullet)$ времени пребывания сообщений в системе выражение для оценки объема информации в системе имеет вид

$$I(t) = I_0 + \nu \cdot \lambda_{\text{ex}} t - \nu \cdot \lambda_{\text{ex}} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau.$$

- 4) Если интенсивность входного потока возрастает экспоненциально

$$\lambda_{\text{ex}}(t) = \lambda_0 \cdot e^{\alpha t},$$

а плотность вероятности времени пребывания информации в системе равна

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0 \\ \beta \cdot e^{-\beta\tau} & \text{при } \tau \geq 0 \end{cases},$$

то объем информации в системе равен

$$I(t) = I_0 + \nu \left(\int_0^t \lambda_0 \cdot e^{\alpha\tau} d\tau - \int_0^t \left(\int_0^\tau \beta \cdot e^{-\beta(\tau-\theta)} \cdot \lambda_0 \cdot e^{\alpha\theta} d\theta \right) d\tau \right).$$

Произведя вычисления, имеем

$$I(t) = I_0 + \frac{\nu \cdot \lambda_0}{\alpha + \beta} (e^{\alpha t} - e^{-\beta t}).$$

Выражение для оценки объемов информации в системе в нестационарных случаях, как и формула Литтла, может быть также применено для оценки объемов информации в отдельных частях информационной системы, например в дисковых системах хранения данных, в ленточных накопителях.

Если плотность вероятности времени пребывания информации в системе зависит от интенсивности входного потока (от времени)

$$\lambda_{\text{вых}}(\tau) = \int_0^\tau \varphi(\lambda_{\text{вх}}(\tau - \theta), \tau - \theta) \cdot \lambda_{\text{вх}}(\theta) d\theta,$$

то дополнительно к интегральному выражению, связывающему интенсивности входного и выходного потоков следует использовать интегродифференциальные уравнения Колмогорова [5, 10], которые учитывают зависимость функции распределения и плотности вероятности времени пребывания информации в системе от интенсивности входного потока. Для одноканальных систем M/G/1 уравнение Колмогорова получено Такачем и носит его имя [5].

$$\frac{\partial \Phi(\omega, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(\omega, t)}{\partial \omega} - \lambda(t) \cdot \Phi(\omega, t) + \lambda(t) \cdot \int_0^t B(\omega - x) d_x \Phi(\omega, x).$$

Здесь:

$\Phi(\omega, t)$ – текущая функция распределения времени пребывания сообщений в очереди (в системе хранения).

$B(\omega)$ – функция распределения времени обслуживания сообщений в очереди (в системе хранения).

$\lambda(t)$ – интенсивность потока сообщений на входе очереди в момент времени t . Определяется

с помощью динамической модели сетевой системы.

Приведенное уравнение связывает изменение во времени функции (плотности) распределения времени пребывания сообщения, поступившего в оче-

редь (систему) в момент t , с интенсивностью потока сообщений, поступающего на вход очереди (системы).

Если в систему поступают несколько типов информационных потоков и времена пребывания в системе информации каждого типа информации различны, то следует рассчитать объемы памяти для каждого типа информационного потока и полученные значения сложить.

Если в систему поступают несколько типов информационных потоков и информация храниться на нескольких уровнях, и времена пребывания на каждом уровне, для каждого типа потока различны, то следует рассчитать объемы памяти для каждого типа информационного потока и каждого уровня и полученные значения сложить.

Рассмотрим пример одноуровневой системы хранения с экспоненциально растущим входным потоком и экспоненциальной плотностью вероятности времени пребывания информации в системе.

$$I_0 = 12\,000 \text{ Мбайт.}$$

$$\lambda_0 = 240 \text{ проектов в год.}$$

$$\nu = 100 \text{ Мбайт.}$$

$$\text{Среднее время хранения } \tau_{xp} = 0.5 \text{ года: } \beta = 2 \text{ [1/год].}$$

$$\text{Прирост информации} - 60\% \text{ в год: } \alpha = 1.6 \text{ [1/год].}$$

$$\text{Время, на которое осуществляется расчет } t = 5 \text{ лет.}$$

Используя полученное ранее выражение для объема информации в системе, получаем оценки объема информации в системе, приведенные в таблице 1.

Таблица 1.

$I(t)$ (МБ)	I_0 (МБ)	ν (МБ)	λ_0 (МБ/ год)	α (1/год)	β (1/го д)	t (год)	αt	$-\beta t$	$\exp(\alpha t)$	$\exp(-\beta t)$
44.117.98	12000	100	240	1.6	2	1	1.6	-2	4.953032	0.135335
175.428.1	12000	100	240	1.6	2	2	3.2	-4	24.53253	0.018316
822.052.9	12000	100	240	1.6	2	3	4.8	-6	121.5104	0.002479
4.024.298	12000	100	240	1.6	2	4	6.4	-8	601.845	0.000335
19.885.05										
3	12000	100	240	1.6	2	5	8	-10	2980.958	4.54E-05

4. О других приложениях

Необходимо отметить, что полученное выражение для оценки и прогнозирования объемов информации при нестационарных входных потоках

$$I(t) = I_0 + \nu \left(\int_0^t \lambda_{ex}(\tau) d\tau - \int_0^t \left(\int_0^\tau \varphi(\tau - \theta) \cdot \lambda_{ex}(\theta) d\theta \right) d\tau \right),$$

как и формула Литтла, носит универсальный характер и может быть использовано во многих приложениях.

Общая постановка задачи выглядит следующим образом.

На вход системы (склад, магазин, завод, финансовая система страны, армия, водохранилище, ...) может подаваться произвольный нестационарный поток определенных объектов (товаров, изделий, полуфабрикатов, денег, новобранцев, воды, ...).

Время пребывания объектов в системе должно задаваться функцией (плотностью) распределения $\Phi(\bullet), \varphi(\bullet)$. Функция (плотность) распределения может быть получена с учетом предметной специфики из априорных соображений, экспериментальными оценками, теоретическими моделями.

Результатом расчета является оценка, прогноз объема рассматриваемых объектов в системе, требования к емкости системы.

Автор благодарит И.Н. Сеницына за полезные замечания.

5. Заключение

Изложенное позволяет сделать следующие основные выводы.

1. Предложенные модели дают возможность оценивать и прогнозировать объемы информации в произвольных информационных системах, их частях с учетом реальной нестационарности входных потоков и произвольной величине жизненного цикла информации.
2. Их использование является основой для создания хранилищ данных и разработки методов управления жизненным циклом информации.
3. Полученное выражение для оценки и прогнозирования объемов информации в нестационарном случае, как и формула Литтла, носит универсальный характер и может быть использовано для расчета произвольных систем с нестационарными входными потоками.

6. Используемые источники

1. Рузайкин Г.И. Жизненный цикл хранимых данных. Мир ПК, № 12. 2004.
2. Тараканов П. Жизнь информации. «Директор», № 5. Май. 2005.
3. Шаров В. Управление жизненным циклом информации. <http://www.bytemag.ru>.
4. Анисимов В. А. О законе возрастания сложности эволюционирующих систем, или что день грядущий нам готовит. <http://www.aicomunity.org>.
5. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. Пер. с англ./Под ред. Б.С. Цыбакова. – Мир. Москва. 1979.
6. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. Издательство Российского университета дружбы народов. Москва. 1995.

7. Гуревич И. М. Проектирование специальных систем связи. Динамические модели управления связью. Учебное пособие. ИПК МПСС, Москва. 1989.
8. Гуревич И. М. Динамическая модель сети связи. – В сб. Теория телетрафика в системах информатики. – «Наука». Москва. 1989.
9. Гуревич И. М. Динамические свойства сетевых систем. – Сб. Вопросы кибернетики. Архитектура и протоколы вычислительных сетей. – АН СССР, Москва. 1990.
10. Гуревич И. М. Самосогласованная система многоуровневых статических и динамических моделей сетевых систем. – В кн. Методы доступа и архитектура локальных информационно-вычислительных сетей. – «Наука». Москва. 1992.