УДК 537.322.2

Губко М. В. [1]

[1] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Минимизация максимального времени передачи информации по иерархии

Задачи поиска оптимальных иерархий часто возникают в разных областях человеческой деятельности – от организации производства [1] и управленческого консультирования [2] до разработки пользовательских интерфейсов [3] и кодирования информации [4]. Несмотря на существенные отличия в содержательных постановках, с точки зрения формальных моделей они имеют немало общего. На некотором множестве допустимых иерархий задается функция – критерий качества – и нужно найти допустимую иерархию, доставляющую минимум или максимум критерия.

Когда цель древовидной иерархии состоит в сборе информации из разных источников в одну точку или, наоборот, в распространении информации, в качестве критерия качества обычно берется время передачи информации от корня до листа дерева. Такие задачи возникают при организации отделений почтовой службы, построении систем сбора данных экомониторинга [5] или результатов выборов.

При решении подобных задач может минимизироваться либо среднее, либо максимальное время передачи информации. Критерий первого типа обычно сводится к т. н. однородной секционной функции затрат (см. определения в [4]), степень однородности которой равна единице. В [4] доказано, что в этом случае оптимальна однородная иерархия, в которой все нетерминальные вершины имеют одинаковое число исходящих дуг, и объемы информации по этим исходящим дугам также распределяются в одинаковой пропорции во всех вершинах.

В настоящем докладе показывается, что использованная в [4] техника может успешно применяться и для решения задач минимизации максимального времени.

Итак, пусть древовидная иерархия передает информацию от корневой вершины в листья. Предположим, что временная задержка в одной промежуточной вершине (или при передаче информации по одной из k исходящих из вершины дуг) равна $\beta(k)$, где $\beta(k)$ – неотрицательная неубывающая функция, определенная для всех действительных $k \geq 2$, причем $\beta(k)/\ln k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Информация считается переданной, когда она доходит до последнего листа дерева. Обозначим время передачи данных по иерархии H через $T(H)$. Задача состоит в том, чтобы над фиксированным множеством листьев $N = \{1, \ldots, n\}$ надстроить иерархию H, имеющую минимальное время передачи данных $T(H)$.

Через $T(n)$ обозначим время оптимальной иерархии над n листьями.

Теорема 1. Функция $T_L(n) = A{\cdot}\ln n$, где A – некоторая константа, зависящая от вида функции $\beta(\cdot)$, является нижней оценкой времени оптимальной иерархии $T(n)$. Время, равное нижней оценке, имеет однородная симметричная иерархия, норма управляемости которой также определяется видом функции $\beta(\cdot)$.

Доказательство. Идея доказательства аналогична доказательству аналогичного результата для однородных функций.

В любой иерархии H над $n > 1$ листьями есть корневая вершина. Пусть из нее выходит k дуг в поддеревья $H_1, \ldots, H_k$. Тогда $T(H)$ можно записать как $T(H) = \beta(k) + \max\limits_{i=1,\ldots,k} T(H_i)$.

Пусть существует некоторая монотонно возрастающая функция нижней оценки $T_L(n)$ (такая функция, очевидно, всегда существует, например, тождественный ноль). Заменим время поддеревьев нижними оценками времени оптимальных поддеревьев над $n_1, \ldots, n_k$, получим неравенство $T(H) \geq \beta(k) + \max\limits_{i=1,\ldots,k} T_L(n_i)$. Доопределим $T_L(n)$ неубывающим образом и для нецелых аргументов. В силу монотонности минимум правой части достигается при одинаковых $n_i = n/k$.

Таким образом, $T(H) \geq \beta(k) + T_L(n/k)$. Выберем действительное число $k \geq 2$, доставляющее минимум правой части. Неравенство, очевидно, сохранится: $T(H) \geq \min\limits_{k\geq 2}[\beta(k) + T_L(n/k)]$.

Потребуем, чтобы правая часть равнялась в точности $T_L(n)$ (тогда для произвольной иерархии H будет выполнено $T(H) \geq T_L(n)$, то есть $T_L(n)$ действительно будет нижней оценкой).

Получили для функции $T_L(n)$ функциональное уравнение:

(1) $$T_L(n) = \min_{k\geq 2}[\beta(k) + T_L(n/k)].$$

Если оно разрешимо, то его решение будет нижней оценкой времени иерархии. Будем искать решение в форме $T_L(n) = A{\cdot}\ln n$, где A – некоторая константа, не зависящая от n. Подставим это выражение в уравнение (1):

(2) $A\ln n = \min\limits_{k\ge 2}[\beta(k) + A\ln n - A\ln k]$, то есть

(3) $0 = \min\limits_{k\ge 2}[\beta(k) - A\ln k]$.

Очевидно, при любом неотрицательном A минимум достигается при некотором $k^*(A) \ge 2$, причем $k^*(0) = 2$ и $k^*(A)$ не убывает по A. Из (3) получаем уравнение уже относительно A:

(4) $\beta(k^*(A)) - A\cdot\ln k^*(A) = 0$.

По теореме об огибающей производная левой части (4) по A равна $-\ln k^*(A)$. Так как $k^*(A)$ не убывает по A, значит, левая часть вогнуто монотонно убывает по A, Так как, вдобавок, $k^*(0) = 2$, левая часть (4) положительна при $A = 0$, и уравнение (4) всегда имеет решение относительно A. Очевидно, решение уравнения (4) не зависит от n. ЧТД.

Пример 1. М. Керен и Д. Левхари [6] исследовали модель передачи информации в организации, в которой $\beta(k) = \beta + k$. Решением задачи минимизации (3) в этом случае будет $k^*(A) = \max[A, 2]$. Подставляя его в (4), в предположении, что $A \ge 2$, получаем другое уравнение, $\beta + A = A\cdot\ln A$. Его решение $A(\beta) = \beta / W(\beta / e)$ (где $W(\cdot)$ – это W-функция Ламберта). В частности, $A(0) = e$, $A(1) \approx 3.59$. Той же функцией описывается и ветвистость оптимального дерева. •

Стоит, однако, отметить, что Керен и Левхари в [6] не минимизировали в чистом виде время передачи сигнала иерархией. Вместо этого они использовали экономический критерий: записали доход, приносимый организацией, имеющей структуру в виде иерархии H, как функцию $F(n, T)$, возрастающую по количеству листьев (исполнителей) n и убывающую по времени T передачи информации иерархией. Прибыль компании состояла из дохода за вычетом затрат на содержание промежуточных вершин (менеджеров) и листьев (исполнителей). Для простоты они считали, что все менеджеры получают одинаковую зарплату. В [6] сначала искалась иерархия, минимизирующая затраты при фиксированных T и n, а затем оптимальная организация искалась варьированием T и n.

Однородной эта иерархия получалась только в случае нулевых затрат (как показано выше). Однако в настоящем докладе описывается еще один частный случай, также имеющий экономическую интерпретацию, в котором оптимальная иерархия однородна.

Литература

1. *Губко М.В.* Балансировка сборочной линии и задачи поиска оптимальных иерархий // II школа-семинар молодых ученых «Управление большими системами» Сборник трудов II конференции, том 1. – Воронеж: Научная книга. 2007. С. 7–13.
2. *Goubko M., Mishin S.* Optimal Hierarchies in Firms: a Theoretical Model // Proceedings of the 17th World Congress of the IFAC, Seoul, Korea, July 6-11, 2008. – P. 2962–2967.
3. *Goubko M., Danilenko A.* An automated routine for menu structure optimization // Proceedings of the 2nd ACM SIGCHI symposium on Engineering interactive computing systems, Berlin, Germany, June 19-23, 2010. – P. 67–76.
4. *Губко М.В.* Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: ЛЕНАНД, 2006.
5. *Горстко А.Б., Угольницкий Г.А.* Оптимизация структуры ориентированного графа как метод моделирования в экологии // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Т.17. – СПб.:, 2000. С. 68–81.
6. *Keren M., Levhari D.* The Internal Organization of the Firm and the Shape of Average Costs // The Bell Journal of Economics, Vol. 14, No. 2. 1983, – P. 474–486.