А.К. Еналеев

СОГЛАСОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ АКТИВНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНЫХ ШТРАФОВ ЗА ОТКЛОНЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ОТ ПЛАНА

Одним из основных требований, которые предъявляются к экономическим объектам в планируемой экономике, является выполнение утвержденных вышестоящими органами плановых показателей. В связи с этим процедура планирования должна быть увязана с процедурой стимулирования производственных звеньев за реализацию установленных планов, иначе говоря, требование выполнения плана должно обеспечиваться соответствующими экономическими стимулами. Если система стимулирования выбрана, то обеспечение выполнения планов сводится к построению согласованных законов планирования, т.е. таких процедур планирования, при которых назначаются "выгодные" для производстведных звеньев планы.

В работе для двухуровневых активных систем [I] устанавливается оптимальный закон согласованного планирования и показывается, что при штрафах, зависящих линейно от величины отклонения реализации от плана, этот закон планирования обеспечивает вместе с выполнением планов максимально возможную эффективность функционирования системы. Кроме этого в работе определяются необходимые и достаточные условия того, что план будет выполнен.

Описание активной системы

В описание активной системы входят описание структуры системы, переменных, ограничений, целевых функций и описание процесса её функционирования.

Будем рассматривать систему, состоящую из управляющего органа (центра) и n подчиненных ему активных элементов (АЭ). Состояние каждого АЭ определяется вектором y_i из множества Y_i возможных состояний, где $Y_i \subset E_i^{N_i}$, $E_i^{N_i}$ – N_i-мерное евклидово пространство, $i \in I = \{i/i = 1,2,...,n\}$. Состояние всей системы задается совокупностью $y=\{y_i\}$ из множества $Y=(\bigcap_{i\in I} Y_i)\cap Y^{гл}$, где $Y^{гл}$ – глобальные ограничения. При выборе состояния y_i каждый i-й элемент стремится максимизировать свой критерий $W_i=f_i(\rho,x_i,y_i)$, где ρ – вектор общих для всех АЭ управлений, x_i – план, т.е. требуемое центром значение вектора состояния y_i. Будем рассматривать случай информированности центра о множествах Y_i и целевых функциях W_i элементов.

С целью организации функционирования активной системы центр устанавливает механизм функционирования $\sum$ системы путем задания процедуры стимулирования и закона управления. Процедура стимулирования определяется целевыми функциями $W_i=f_i(\rho,x_i,y_i)=\mu_i(\rho,y_i)-\eta_i(x_i,y_i)$,

где $\mu_i(\rho,y_i)$ — известная центру функция "дохода" элемента, а $\eta_i(x_i,y_i)$ — устанавливаемая центром функция штрафа за отклонение состояния y_i от плана x_i. В работе рассматривается случай, когда $\eta_i(x_i,y_i)=(\alpha_i,|y_i-x_i|)$, α_i – вектор с компонентами $\alpha_{ij}>0$, $|y_i-x_i|$ – вектор с компонентами $|y_{ij}-x_{ij}|$, $j=1,2,\dots,N_i$. Закон управления $\mathcal{F}$ выбирается центром как процедура вычисления управляющих параметров $\mathcal{F}=(\rho,x)$, где $x=\{x_i\}$ – план системы.

В условиях полной информированности центра о моделях элементов процесс функционирования состоит из двух этапов: назначения центром управляющих параметров $\mathcal{F}=(\rho,x)$ и выбора элементами рациональных состояний $\{y_i^*\}$.

Обозначим $R(\rho,x)$ множество рациональных состояний элементов $y^*=\{y_i^*\}$ и рассмотрим множество H таких механизмов функционирования, при которых рациональные стратегии y_i^* являются локально оптимальными, т.е. определяются условиями $y_i^*\in R_i(\rho,x_i)=\operatorname{Arg}\max\limits_{y_i\in Y_i} f_i(\rho,x_i,y_i)$.

Такой выбор является рациональным только тогда, когда любое состояние $y^*=\{y_i^*\}$ удовлетворяет глобальным ограничениям

$$\prod_{i\in I} R_i(\rho,x_i) \subset Y^{\text{гл}}. \qquad (1)$$

В этом случае $R(\rho,x)=\prod_{i\in I} R_i(\rho,x_i)$. При выполнении условия реализуемости (1) элементы выбирают свои состояния y_i^* независимо. В случае полной независимости элементов, т.е. $\prod_{i\in I} Y_i \subset Y^{\text{гл}}$ условие (1) имеет место.

Эффективность механизма функционирования будем оценивать величиной

$$K(\Sigma)=\min_{y\in R(\rho,x)} \Phi(\rho,x,y), \qquad (2)$$

т.е. гарантированным на множестве рациональных состояний значением целевой функции центра $\Phi(\rho,x,y)$, в целевой функции центра будем предполагать наличие потерь при невыполнении плана $(y\neq x)$ таких, что

$$\Phi(\rho,x,y)\leq \Phi(\rho,y,y). \qquad (3)$$

Синтез оптимального закона управления

Задача синтеза оптимального механизма функционирования ставится следующим образом: найти механизм Σ^* такой, что

$$K(\Sigma^*)=\max_{\Sigma\in G} K(\Sigma), \qquad (4)$$

где G – заданное множество механизмов, причем $G\subset H$. При фиксированных целевых функциях W_i элементов задача (4) является задачей синтеза оптимального закона управления.

В случае полной информированности центра о моделях элементов решением задачи синтеза оптимального закона управления на множестве G является закон оптимального планирования с прогнозом (ОПП):

$$(\rho^{опп}, x^{опп}) \in \underset{(\rho,x)\in\mathcal{E}}{Arg\, max} \left[\min_{y\in R(\rho,x)} \Phi(\rho,x,y) \right], \qquad (5)$$

где $\mathcal{E}$ – множество управляющих параметров, при которых имеет место (I). Значение критерия эффективности (2) в этом случае равно $\hat{K} = \max_{(\rho,x)\in\mathcal{E}} \min_{y\in R(\rho,x)} \Phi(\rho,x,y)$.

При законе ОПП, если не вводить ограничений на вид целевых функций элементов, выбираемое состояние системы y^* может не совпадать с планом $x^{опп}$. В связи с этим представляет интерес задача синтеза оптимального закона управления на H, при котором реализация y^* совпадает с планом. Предположим наличие "благожелательности" элементов по отношению к центру при выборе своих состояний. "Благожелательность" определим как выбор i-м элементом состояния $y_i^* = x_i$, если $x_i \in R_i(\rho, x_i)$, $i \in I$.

Решение этой задачи даёт следующая теорема.

<u>Теорема I.</u> Если $x \in P^{\alpha}(\rho)$, то $y^* = x$ и $K(\Sigma_\alpha) = \hat{K}$, где $P^{\alpha}(\rho) = \bigcup_{x\in Y} R(\rho,x)$ – объединение по всем возможным планам всех рациональных стратегий y^* системы, а Σ_α – механизм функционирования с законом управления (5) и дополнительным условием $x \in P^{\alpha}(\rho)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $y^* = x$, если $x \in P^{\alpha}(\rho)$. Предположим противное: $\exists i \in I$, $y_i^* = x_i$. Тогда

$$\mu_i(\rho, y_i^*) - (\alpha_i, |y_i^* - x_i|) > \mu_i(\rho, x_i). \qquad (6)$$

По определению множества $P^{\alpha}(\rho)$ имеем, что

$$\begin{aligned} \exists x_i': \ & \mu_i(\rho, x_i) - (\alpha_i, |x_i - x_i'|) \geq \\ & \geq \mu_i(\rho, y_i^*) - (\alpha_i, |y_i^* - x_i'|). \end{aligned} \qquad (7)$$

Складывая (6) с (7), имеем противоречивое неравенство

$$(\alpha_i, |y_i^* - x_i'|) > (\alpha_i, |x_i - x_i'|) + (\alpha_i, |y_i^* - x_i|).$$

Следовательно, предположение, что $y_i^* \neq x_i$ – неверно.

Покажем, что $K(\Sigma_\alpha) = \hat{K}$. Пусть $y^*_{опт}$ – состояние, выбранное в системе при законе управления (5). По определению множества $P^\alpha(\rho)$ имеем: $y^*_{опт} \in P^\alpha(\rho^{опт})$. Обозначим $x^\alpha = y^*_{опт}$. Учитывая (3), можно записать

$$\hat{K} = \max_{(\rho,x)\in\mathcal{E}} \min_{y\in R(\rho,x)} \Phi(\rho,x,y) = \Phi(\rho^{опт}, x^{опт}, y^*_{опт}) \leqslant$$

$$\leqslant \Phi(\rho\ , y^*_{опт}, y^*_{опт}) = \Phi(\rho^{опт}, x^\alpha, x^\alpha) \leqslant .$$

$$\leqslant \max_{(\rho,x)\in\mathcal{E},\ x\in P_\alpha(\rho)} \Phi(\rho,x,x) = K(\Sigma^\alpha).$$

Но поскольку закон управления (5) оптимален, то $\hat{K} \geqslant K(\Sigma^\alpha)$, следовательно $\hat{K} = K(\Sigma_\alpha)$.

Замечание. Из теоремы I, в частности, следует, что при "благожелательности" элементов $R(\rho,x) = \{x\}$ как только $x \in P^\alpha(\rho)$. Это позволяет предотавить оптимальный закон управления в механизме Σ_α как решение задачи:

$$\max_{x,\rho} \Phi(\rho,x,x), \text{ где } (\rho,x)\in\mathcal{E},\ x\in P^\alpha(\rho).$$

При конструировании таких законов управления, в которых планы удовлетворяют условию $x\in P^\alpha(\rho)$ (будем называть эти законы "правильными"), возникает математическая задача построения множеств $P^\alpha(\rho)$ "правильных" планов. Приводимая ниже теорема 2 дает необходимые условия того, что $x \in P_\alpha(\rho)$ и, таким образом, может оказаться полезной при определении множества $P^\alpha(\rho)$.

Пусть множества Y_i возможных состояний элементов заданы с помощью неравенств: $Y_i = \{y_i / g_{ij}(y_i) \geqslant 0,\ j\in J_i\}$, где $g_{ij}(y_i)$ – дифференцируемые функции $i\in I$, $j\in J_i$. Кроме того, для ограничений Y_i удовлетворяются условия регулярности. Будем использовать формулировку этих условий, приведенную в [2]. Введем понятие множества возможных направлений $\mathcal{D}_i(y_i) = \{d_i / \exists\, \sigma_i > 0$ такое, что из $\sigma_i \geqslant \tau_i \geqslant 0$ следует $y_i + \tau_i d_i \in Y_i\}$ в множестве Y_i из точки y_i. Обозначим $\bar{\mathcal{D}}_i(y_i)$ замыкание множества $\mathscr{D}_i(y_i)$. Условие регулярности выполнено, если $\bar{\mathscr{D}}_i(y_i) \supset \tilde{\mathscr{D}}_i(y_i)$, где $\tilde{\mathscr{D}}_i(y_i) = \{d_i / \nabla g_{ij}(y_i)\, d_i \geqslant 0, \quad j \in K_i(y_i)\}$, $K_i(y_i)$ множество индексов j, для которых $g_{ij}(y_i) = 0$ ж).

<u>Теорема 2.</u> Если выполняются условия регулярности, функции $\mu_i(\rho, y_i)$ и $g_{ij}(y_i)$ дифференцируемы $(i \in I, j \in J_i)$, то

$$P^{\alpha}(\rho) \subset X^{\alpha}(\rho) , \tag{8}$$

где $X^{\alpha}(\rho)$–множество планов x таких, что справедливы следующие утверждения:

$$x \in Y^{ГА} ; \tag{9}$$

существуют множители $\lambda_{ij} \geqslant 0$ $(i \in I, j \in J_i)$, что

$$\lambda_{ij}\, g_{ij}(x_i) = 0 ; \tag{I0}$$

$$|\nabla \mu_i(\rho, x_i) + \sum_{j \in J_i} \lambda_{ij} \nabla g_{ij}(x_i)| \leqslant \alpha_i . \tag{II}$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$P^{\alpha}(\rho) = Y^{ГА} \cap \prod_{i \in I} P_i^{\alpha}(\rho) , \tag{I2}$$

где $P_i^{\alpha}(\rho) = \bigcup_{x_i \in Y_i} R_i(\rho, x_i)$. На самом деле, из определения $P^{\alpha}(\rho)$ следует, что если $x \in P^{\alpha}(\rho)$, то $x \in Y^{ГА}$ и, кроме того, в силу (I) $x \in \prod_{i \in I} R_i(\rho, x_i)$, откуда следует $x \in Y^{ГА} \cap \prod_{i \in I} \bigcup_{x_i \in Y_i} R_i(\rho, x_i) = Y^{ГА} \cap \prod_{i \in I} P_i^{\alpha}(\rho)$. Наоборот, из $x \in Y^{ГА} \cap \prod_{i \in I} P_i^{\alpha}(\rho)$ следует, что $x \in Y$, $x \in R(\rho, x)$,

---

ж) В [2] доказано, что всегда $\bar{\mathscr{D}}_i(y_i) \subset \tilde{\mathscr{D}}_i(y_i)$, т.е. при выполнении условий регулярности имеет место $\bar{\mathscr{D}}_i(y_i) = \tilde{\mathscr{D}}_i(y_i)$.

поскольку из $x_i \in P_i^{\alpha}(\rho)$ по теореме I следует, что $R_i(\rho, x_i) = \{x_i\}$, а из (I) – что $R(\rho, x) = \prod_{i \in I} R_i(\rho, x_i)$. Соотношение (I2) доказано.

Из (9), (I0), (II) следует, что

$$X^{\alpha}(\rho) = Y^{n} \cap \prod_{i \in I} X_i^{\alpha}(\rho), \qquad (I3)$$

где $X_i^{\alpha}(\rho)$ определяется для каждого i условиями (I0), (II). Сравнивая (I2) и (I3), получаем, что $P^{\alpha}(\rho) \subset X^{\alpha}(\rho)$, когда

$$P_i^{\alpha}(\rho) \subset X_i^{\alpha}(\rho). \qquad (I4)$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать справедливость (I4). Ниже для сокращения записи индекс i будем опускать.

I.° Так как $y = x$ для $x \in P^{\alpha}(\rho)$, имеем

$\max_{y \in Y} (\mu(\rho, y) - (\alpha, |y - x|) = \mu(\rho, x)$, или

$\max_{y \in Y} (\mu(\rho, y) - \mu(\rho, x) - (\alpha, |y - x|)) = 0$, что может иметь место только, когда

$$\forall y : \mu(\rho, y) - \mu(\rho, x) \leq (\alpha, |y - x|). \qquad (I5)$$

Условие (I5) можно переписать также в виде

$$\forall d \in \mathcal{D}(x) : \mu(\rho, x + d) - \mu(\rho, x) \leq (\alpha, |d|), \qquad (I6)$$

где $d = y - x$, а $|d|$ – вектор с компонентами $|d_s|$, $s = 1, 2, \ldots, N$. Справедлива следующая лемма.

Лемма. $\forall d \in \mathcal{D}(x) : (\nabla \mu(\rho, x), d) \leq (\alpha, |d|)$.
Доказательство. Положим, что $\exists\, d$ такое, что

$(\nabla\mu(\rho,x),d) > (\alpha,|d|)$, тогда $\exists\sigma$ такое, что $\forall 0<\tau\leq\sigma$:

$$\mu(\rho,x+\tau d)-\mu(\rho,x) > (\alpha,|d|)\tau ,$$

что противоречит (I6).

Более того, справедливо следующее неравенство

$$\forall d\in\bar{\mathcal{D}}(x):\ (\nabla\mu(\rho,x),d) \leq (\alpha,|d|). \tag{I7}$$

На самом деле, направление $\bar{d}\in\bar{\mathcal{D}}(x)$ может быть рассмотрено как предел последовательности направлений $d^{\rho}\in\mathcal{D}(x)$, $\bar{d}=\lim_{\rho\to\infty} d^{\rho}$. Так как (I7) справедливо для всех $d^{\rho}\in\mathcal{D}(x)$, то

$$(\alpha,|\bar{d}|)=(\alpha,\lim_{\rho\to\infty}|d^{\rho}|)\geq \lim_{\rho\to\infty}(\nabla\mu(\rho,x),d^{\rho})=(\nabla\mu(\rho,x),\bar{d}),$$

т.е. (I7) верно.

Представим множество Y как объединение его внутренности $Y'=\{y/g_j(y)>0\ ,j\in J\}$ и границы Γ_y . $\Gamma_y=Y\setminus Y'$.

2°. Положим $x\in Y'$, т.е. $g_j(x)>0$, $j\in J$ и покажем, что

$$|\nabla\mu(\rho,x)|\leq\alpha , \tag{I8}$$

где $|\nabla\mu(\rho,x)|=|\nabla\mu|$ – вектор с компонентами $\left|\frac{\partial\mu}{\partial x_s}\right|$, $s=1,2,\dots,N$.

Из $x\in Y'$ следует, что $\exists$ замкнутый шар $B_\varepsilon(x)\subset Y'$ радиуса ε с центром в точке x . Пусть (I8) не выполняется, т.е. $|\nabla\mu|>\alpha$, тогда из (I7) следует, что $(\nabla\mu,d)\leq(\alpha,|d|)<(|\nabla\mu|,|d|)$. Выберем $d=d_1=\varepsilon_1\nabla\mu=\frac{\varepsilon}{\|\nabla\mu\|}\nabla\mu\in B_\varepsilon(x)$, тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{\|\nabla\mu\|}(\nabla\mu,\nabla\mu)=\frac{\varepsilon}{\|\nabla\mu\|}(|\nabla\mu|,|\nabla\mu|)\leq\frac{\varepsilon}{\|\nabla\mu\|}(|\nabla\mu|,\alpha)<\frac{(|\nabla\mu|,|\nabla\mu|)\varepsilon}{\|\nabla\mu\|} ,$$ т.е.

$\|\nabla\mu\|^2=(\nabla\mu,\nabla\mu)<(|\nabla\mu|,|\nabla\mu|)=\|\nabla\mu\|^2$, что приводит к противоречию, следовательно (I8) справедливо.

3°. Пусть теперь $x\in\Gamma_y$, т.е. $g_k(x)=0$ хотя бы для одного $k\in K(x)\subset J$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $(\nabla\mu, d) \leq 0$ для $\forall d \in \bar{\mathscr{D}}(x) = \{d / \nabla g_i(x) d \geq 0,\ i \in K(x)\}$, тогда по лемме Фаркаша [2] найдутся множители $\lambda_j \geq 0$ такие, что

$$\nabla\mu(\rho, x) + \sum_{j \in K(x)} \lambda_j \nabla g_j(x) = 0 .$$

б) Пусть, наконец, предположение пункта а) не выполняется, но

$$\exists d:\ 0 < (\nabla\mu, d) \leq (\alpha, |d|). \qquad (19)$$

Определим вектор $d^* \in \bar{\mathscr{D}}(x)$ такой, что

$$\frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|} = \max_{d \in \bar{\mathscr{D}}(x)} \frac{(\nabla\mu(x), d)}{\|d\|} .$$

Такое направление d^* существует, так как в силу (19) $0 < \frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|} \leq \frac{(\alpha, |d^*|)}{\|d^*\|} \leq const$. Рассмотрим вектор $b = \nabla\mu - \frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|} d^*$ и покажем, что в $(b, \nabla g_j(x)) \leq 0$, $j \in K(x)$, т.е.

$$(\nabla\mu, \nabla g_j(x)) - \frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|^2} (d^*, \nabla g_j) \leq 0 ,\ j \in K(x) . \qquad (20)$$

Заметим, что $\frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|} (d^*, \nabla g_j) \geq 0$, так как $(\nabla\mu, d^*) > 0$ в силу (19), а $(d^*, \nabla g_j) \geq 0$ в силу $d^* \in \bar{\mathscr{D}}(x)$. Таким образом, если $(\nabla\mu, \nabla g_j(x)) \leq 0$, то (20) справедливо. Если же $(\nabla\mu, \nabla g_j(x)) > 0$, то справделиво следующее неравенство:

$$(\nabla\mu, \nabla g_j) - \frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|} (d^*, \nabla g_j) \leq$$

$$\leq (\nabla\mu, \nabla g_j) - \frac{(\nabla\mu, \nabla g_j)}{\|\nabla g_j\|^2} (\nabla g_j, \nabla g_j) = 0 , \qquad \text{т.е.}$$

имеет место (20).

Из $(b, \nabla g_j) \leq 0$, $j \in K(x)$ следует, что вектор b можно представить в виде

$$b = -\sum_{j\in K(x)} \lambda_j \nabla g_j(x) \ , \ \lambda_j > 0$$

или $$\nabla\mu + \sum_{j\in K(x)} \lambda_j \nabla g_j(x) = \frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|} d^*.$$

Отсюда следует $\left|\nabla\mu + \sum_{j\in K(x)} \lambda_j \nabla g_j\right| - |d^*| \frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|}$. Покажем, что

$$\frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|^2} |d^*| \leq \alpha. \qquad (21)$$

Пусть (21) не справедливо, т.е. $\frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|^2} |d^*| > d$, тогда, умножив это неравенство скалярно на $|d^*|$ и учитывая (17), получим цепочку неравенств

$\frac{(\alpha, |d^*|)}{\|d^*\|^2}(|d^*|, |d^*|) \geq \frac{(\nabla\mu, d^*)}{\|d^*\|^2}(|d^*|, |d^*|) > (\alpha, |d^*|)$, которые приводят к противоречивому неравенству $\alpha|d^*| > \alpha|d^*|$. Таким образом

$$\left|\nabla\mu + \sum_{j\in K(x)} \lambda_j \nabla g_j(x)\right| < \alpha. \qquad (22)$$

Объединяя доказанные неравенства (18), (19), (22), получим справедливость (14), и, следовательно, справедливость теоремы.

<u>Замечание</u>. Теорема 2 является в определенном смысле аналогом теоремы Куна – Таккера для рассматриваемой задачи. На самом деле, при $\alpha_i = 0$, т.е. отсутствии штрафов, а также независимости элементов $\prod_{i\in I} Y_i \subset Y^{гл}$, она дает условия Куна – Таккера для оптимального состояния y_i^* каждого i-го элемента.

Достаточные условия того, что $x \in P^\alpha(\rho)$ дает следующая теорема.

<u>Теорема 3</u>. Если функции $\mu_i(\rho, y_i)$ строго вогнуты, а функции $g_{ij}(y_i)$ вогнуты, $i \in I$, $j \in J_i$, то в предположениях теоремы 2 $P^\alpha(\rho) = X^\alpha(\rho)$.

Доказательство. Заметим, что Y_i —выпуклые множества, так как $g_{ij}(x_i)$—вогнутые функции.

Предположим, что $\exists\, x_i \in X_i^{\alpha}(\rho)$, но $x_i \notin P_i^{\alpha}(\rho)$, т.е. $\exists\, y_i$ такое, что

$$\mu_i(\rho, x_i + d_i) - \mu_i(\rho, x_i) > (\alpha_i, |d_i|)\,, \qquad (23)$$

где $d_i = y_i - x_i$. Заметим, что $d_i \in \mathcal{D}_i(x_i)$, так как , $x_i, y_i \in Y_i$, Y_i – выпукло. В силу $d_i \in \mathcal{D}_i(x_i)$ условия (10) и (11) эквивалентны неравенству $|\nabla \mu_i| \leqslant \alpha_i$, что приводит к $(|\nabla \mu_i|, |d_i|) \leqslant (\alpha_i, |d_i|)$. Так как функция $\mu_i(\rho, y_i)$ вогнута, то $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $\mu_i(\rho, x_i + \varepsilon d_i) < \mu_i(\rho, x_i) + \varepsilon(\nabla \mu_i(\rho, x_i), d_i)$, откуда получаем $\mu_i(\rho, x_i + \varepsilon d_i) < \mu_i(\rho, x_i) + \varepsilon(\alpha_i, |d_i|)$. С другой стороны из вогнутости $\mu_i(\rho, y_i)$ имеем неравенство

$$\mu_i(\rho\, x_i + \varepsilon d_i) = \mu_i(\rho, x_i + \varepsilon(y_i - x_i)) > \varepsilon \mu_i(\rho, y_i) + (1 - \varepsilon)\mu_i(\rho, x_i),$$

которое можно записать в виде

$\mu_i(\rho, x_i) + \varepsilon(\alpha_i, |d_i|) > \varepsilon \mu_i(\rho, x_i + d_i) + (1 - \varepsilon)\mu_i(\rho, x_i)$ или $\mu_i(\rho, x_i + d_i) - \mu_i(\rho, x_i) < (\alpha_i, |d_i|)$, что противоречит (23).

Литература

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М., "Наука", 1977.
2. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. М., "Сов. радио", 1973.