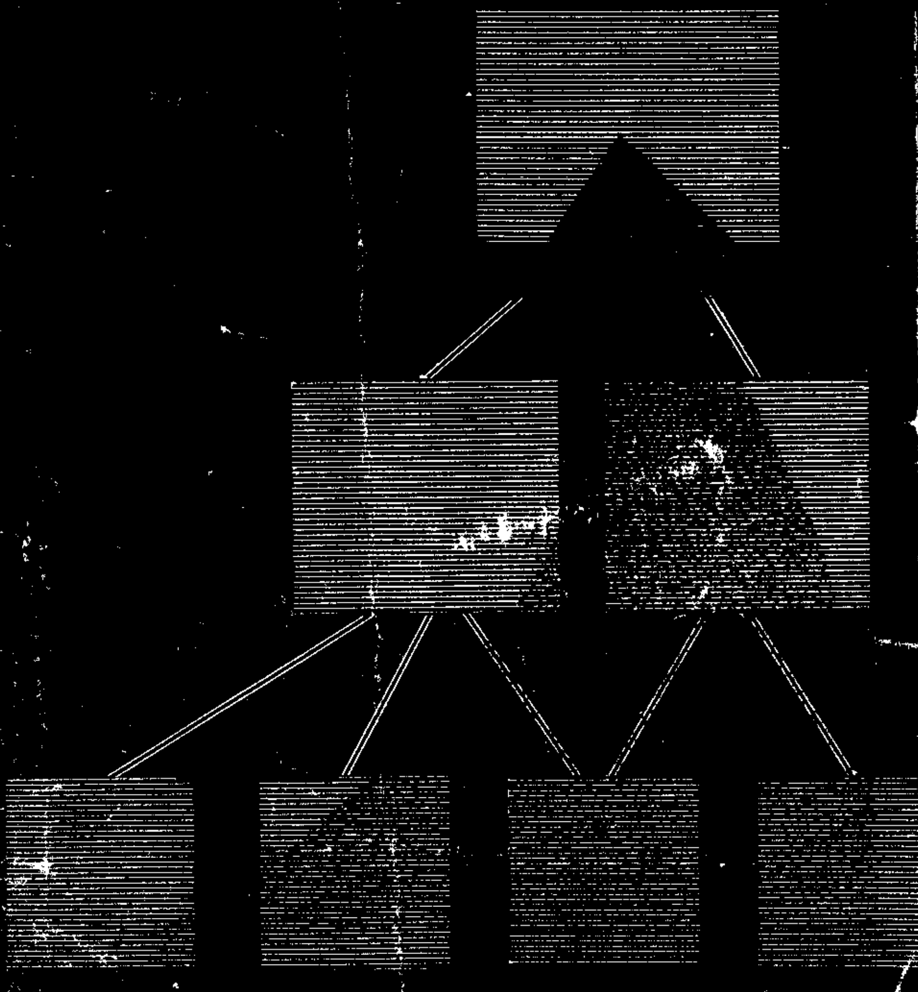
ПРИНЦИП ОТКРЫТОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. Н. БУРКОВ
А. Я. ЛЕРНЕР



ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ
УПРАВЛЕНИЯ

В. Н. БУРКОВ
А. Я. ЛЕРНЕР

ПРИНЦИП ОТКРЫТОГО УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ

МОСКВА
1971

Рассматривается задача управления активными системами (системами, включающими людей и коллективы людей, преследующих собственные цели). Задача управления ставится как задача формирования оптимального плана системы таким образом, чтобы плановые задания оказались оптимальными также и для отдельных подсистем. Предлагается принцип управления активными системами, названный принципом открытого управления (ПОУ), в существенной степени учитывающий и использующий отмеченное выше свойство активности подсистем.

Сектор Общих Вопросов Автоматики

Характерной особенностью больших систем является наличие человеко-машинных подсистем, имеющих свои цели, не совпадающие, в общем случае, с целью системы. Присутствие человека и коллективов людей приводит к определенной активности подсистем. Смысл этой активности заключается в том, что подсистема, во-первых, использует для максимизации своей целевой функции такую возможность, как выдача информации о своей модели (иначе говоря, о своих возможностях), а во-вторых, подсистема имеет определенную информацию о стратегии внешнего для нее управляющего органа и остальных подсистем и использует эту информацию в своих интересах. В предлагаемой работе рассматривается задача управления такими "активными" системами.

1. АКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Многоуровневая система определена, если:

а) определена структура системы, т.е. для каждой подсистемы известна управляющая подсистема и множество управляемых подсистем;

б) определена модель каждой подсистемы, т.е. способ представления множества возможных планов и целевая функция, зависящая от плана данной подсистемы, планов, подчиненных ей подсистем, управления установленного управляющей подсистемой и управления, устанавливаемого данной подсистемой для управляющих подсистем;

в) определена связь планов подсистем нижнего уровня иерархии с планами подсистем верхнего уровня, т.е. каждому набору $w^{i}=(w^{i1}, w^{i2}, \ldots, w^{is})$ возможных планов подсистем, подчиненных подсистеме i, ставится в соответствие определенный план $z^{i}(w^{i})$ подсистемы i. При этом происходит "сжатие" информации, т.е. число параметров, описывающих план z^{i}, меньше числа параметров, описывающих совокупность планов w^{i}. В дальнейшем управляющая подсистема первого уровня иерархии называется центральным органом (ЦО), а подсистемы, не имеющие подчиненных подсистем, называются элементами (Э).

На рис. 1 приведена структура трехуровневой системы из 9 элементов.

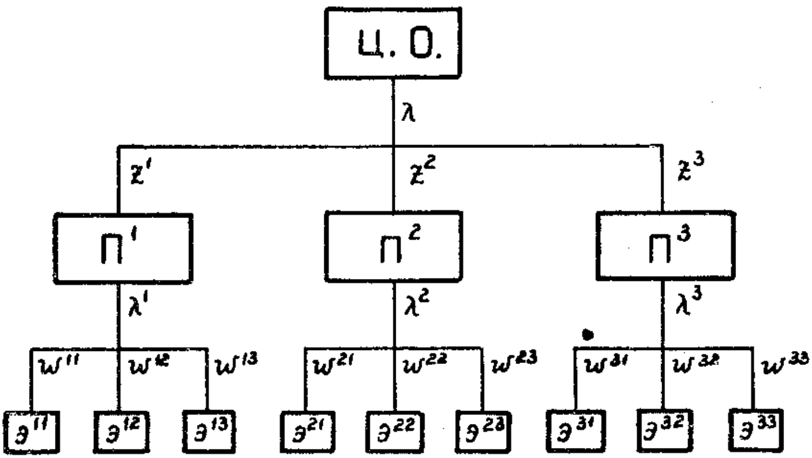


Рис. 1. Структура трехуровневой системы из 9 элементов.

Пусть множество A^{ij} возможных планов каждого элемента описывается неравенством

$$\sum_{k=1}^{k=n} w_k^{ij}\, b_k^{ij} \leqslant T, \tag{1}$$

где b_k^{ij} и T – положительные числа,

w_k^{ij} – неотрицательные числа.

Такая модель может, например, описывать предприятие, выпускающее продукцию n различных видов в течение рассматриваемого периода T. В этом случае

b_k^{ij} – время, затрачиваемое на выпуск единицы продукции k-го вида,

w_k^{ij} – плановое задание на выпуск продукции k-го вида.

Целевая функция элемента может иметь вид

$$\eta^{ij}(w^{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^i w_k^{ij},$$

где λ^i – управление, устанавливаемое подсистемой i (вектор цен на продукцию).

В данном случае множество возможных планов определяется заданием n параметров b_k^{ij}. Планом подсистемы i (отрасли) будем называть $z^i = \sum_{j=1}^{s} w^{ij}$ (суммарный выпуск продукции различных видов всеми предприятиями отрасли). В этом случае множество возможных планов отрасли есть $\sum_{j=1}^{s} A^{ij}$ (рис. 2).

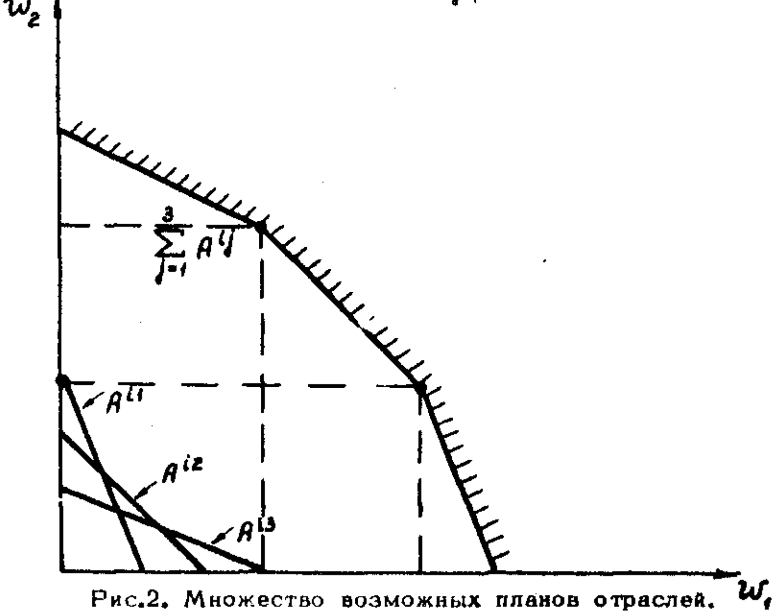


Рис.2. Множество возможных планов отраслей.

Пусть множество A^i возможных планов отрасли i также описывается неравенством типа (1)

$$\sum_{k=1}^{k=n} z_k^i b_k^i < T, \qquad (2)$$

т.е. отрасль выступает как одно большое предприятие. Поскольку точное описание множества $\sum_{j=1}^{j=n} A^{ij}$ в виде (2) невозможно, возникает задача приближенного представления множества возможных планов. Например, если каждый план множества должен быть реализуем, т.е. $A^i \subseteq \sum_{j=1}^{j=n} A^{ij}$, то наиболее точному представлению соответствует $b_k^i = \sum_{j=1}^{j=S} b_k^{ij}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. (S – число предприятий отрасли).

Предположим, что множества возможных планов Э, а также операторы преобразования совокупности w^i планов, получаемых каждой подсистемой от подчиненных ей подсистем, в множество A^i возможных планов z^i каждой подсистемы определены однозначно в рассматриваемый период. В этом случае задача управления многоуровневой системой не представляет принципиальных трудностей. Действительно, функционирование системы в рассматриваемый период включает три этапа: сообщение (передача) информации, планирование и реализация плана.

На этапе сообщения информации каждый Э сообщает в управляющую подсистему множество возможных планов. Каждая подсистема, получив множество возможных планов, подчиненных ей подсистем (или Э), формирует множество своих возможных планов и передает его в управляющую подсистему. Получив всю информацию, ЦО решает задачу планирования (этап планирования), определяя управление λ и планы z^i каждой подсистемы 2-го уровня, максимизирующие (или минимизирующие) целевую функцию системы. Получив план z^i, i-я подсистема определяет, в свою очередь, управление λ^i и планы w^{ij} для подчиненных ей подсистем, максимизируя свою целевую функцию, и т.д. Наконец, на этапе реализации плана каждый Э реализует плановое задание. Из реализаций планов Э однозначно определяются реализации планов подсистем и всей системы.

Заметим, что в рассмотренной схеме каждая подсистема выполняет на этапе сообщения информации пассивную роль преобразования и передачи информации. Такое допущение является необоснованным для человеко-машинных подсистем. Более реально допустить, что, сообщая информацию о множестве своих возможных планов, каждая подсистема действует в своих интересах (разумеется, в пределах установленных форм представления информации и ограничений). Естественно, что в этом случае каждая подсистема будет сообщать только "выгодные" планы. Таким образом, планы, которые не могут быть оптимальными ни при одном из возможных управлений, в любом случае не будут сообщены. Труднее обстоит дело с планами, которые могут быть оптимальными для подсистемы при некоторых управлениях. Дело в том, что в рассмотренной выше схеме функционирования каждая подсистема, решая задачу планирования, не учитывает целевых функций подчиненных ей подсистем. Это приводит к определенной неустойчивости функционирования системы. Пусть, например, подсистема i имеет информацию об управлении λ, которое будет установлено на этапе планирования. Естественно, желая получить "выгодный" план, подсистема не сообщает планов, неоптимальных при предполагаемом управлении (такая ситуация вполне реальна в экономических системах, использующих цены как управляющие воздействия, в силу определенной инерционности в изменениях цен). Это приведет к существенному сокращению множества возможных планов в ЦО и, как следствие, к получению неоптимального плана. Поэтому для устойчивого функционирования системы необходимо, чтобы при решении задачи планирования каждая подсистема учитывала целевые функции подчиненных подсистем, т.е. план, определяемый подсистемой, должен быть <u>взаимовыгодным</u> (выгодным и данной подсистеме и подчиненным ей подсистемам). Итак, отличительной особенностью человеко-машинных подсистем является использование для оптимизации своей целевой функции такой возможности, как сообщение информации с учетом имеющейся информации о действиях управляющих подсистем, включая ЦО. Подсистемы, обладающие такой особенностью, будем называть <u>активными</u> (АП), а систему, содержащую хотя бы одну активную подсистему (за исключением ЦО),-

активной системой (АС). Как было показано выше, необходимым условием устойчивости функционирования АС является условие взаимовыгодности планов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дальнейшее рассмотрение проводится на примере двухуровневых систем, состоящих из ЦО и конечного числа активных элементов (АЭ). Однако результаты легко обобщаются и на многоуровневые системы. Введем следующие обозначения:

A^i – множество возможных планов i-го АЭ (замкнутое множество);

z^i – план i-го АЭ, полученный на этапе планирования от ЦО;

$z = (z^1, z^2, \ldots, z^m)$ – план АС (совокупность планов АЭ);

λ – управляющий вектор;

$\mathcal{L}$ – множество возможных управлений (замкнутое множество);

$\mathcal{Z}$ – множество возможных планов АС (замкнутое множество);

$\eta^i(z^i, \lambda)$ – целевая функция i-го АЭ;

$\Phi(z, \lambda)$ – целевая функция АС.

Каждый АЭ знает множество A^i и свою целевую функцию

$$\eta^i(z^i, \lambda).$$

В свою очередь ЦО знает целевую функцию системы, множество возможных управлений $\mathcal{L}$ и ограничения $\mathcal{Z}$, связывающие планы различных АЭ (заметим, что эта информация может быть известной и каждому АЭ).

Постановка задачи: определить план $z \in \mathcal{Z}$, $z^i \in A^i$, $i = 1, \ldots, m$ и управление $\lambda \in \mathcal{L}$, удовлетворяющие ограничениям

$$\eta^i(z^i, \lambda) = \max_{y^i \in A^i} \eta^i(y^i, \lambda), \quad i = 1, \ldots, m \qquad (3)$$

(y^i – произвольный план из множества A^i)
и обеспечивающие максимальное значение целевой функции системы $\Phi(z, \lambda)$. Условия (3) являются условиями взаимовыгодности плана z. Поскольку условия взаимовыгодности плана определяют добавочные ограничения на множество возможных планов, то в общем случае значение целевой функции оптимального взаимовыгодного плана меньше значения целевой функции АС для оптимального плана без требования взаимовыгодности.

Обозначим:

Φ_0 – максимальное значение целевой функции АС без требования взаимовыгодности плана;

$\Phi_в$ – значение целевой функции АС при оптимальном взаимовыгодном плане (без ограничения общности примем Φ_o, $\Phi_в > 0$).

Отношение

$$\frac{\Phi_в}{\Phi_0} = \rho \leqslant 1$$

называется коэффициентом согласования АС. Коэффициент согласования показывает, насколько согласованы цели АЭ с целью всей системы. Значение $\rho = 1$ свидетельствует о полном согласовании АС.

Обозначим $z(\lambda)$ – оптимальное решение задачи планирования при управлении $\lambda \in \mathcal{L}$. Задача сводится к определению $\lambda \in \mathcal{L}$, при котором $\Phi(z(\lambda), \lambda)$ принимает максимальное значение.

Пример 1. Рассмотрим задачу планирования работы двух предприятий, каждое из которых может выпустить продукцию двух видов. Примем планируемый период T равным 1. Пусть производительность первого предприятия по любому виду продукции равна 1, производительность второго равна 1 по первому виду продукции $\frac{1}{2}$ – по второму. Обозначим z_j^i – продолжительность работы i -го предприятия по выпуску j -го вида продукции $i, j = 1, 2$, λ_1 – относительную прибыль, получаемую предприятиями за выпуск единицы продукции первого вида, λ_2 – второго вида, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Имеем:

множество возможных планов первого предприятия

$$A^1 : z_1^1 + z_2^1 \leq 1 ; \qquad z_1^1, \; z_2^1 \geq 0 .$$

Целевая функция (прибыль с точностью до постоянного множителя) равна

$$\eta^1 (z^1, \lambda) = \lambda_1 z_1^1 + \lambda_2 z_2^1 .$$

Множество возможных планов второго предприятия

$$A^2 : z_1^2 + z_2^2 \leq 1 ; \quad z_1^2, \; z_2^2 \geq 0 .$$

Целевая функция второго предприятия

$$\eta^2 (z^2, \lambda) = \lambda_1 z_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 z_2^2 .$$

Множество возможных управлений

$$\mathcal{L} : \lambda_1 + \lambda_2 = 1 ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 .$$

Пусть целевая функция АС имеет вид

$$\Phi (z) = 4 z_1^1 + 2 z_2^1 + z_1^2 + 2 z_2^2 .$$

Определим функцию $\Phi[z(\lambda)]$:

а) $0 \leq \lambda_2 \leq \frac{1}{2}$.

Оптимальный взаимовыгодный план:

$$z_1^1 = 1 , \quad z_2^1 = 0 , \quad z_1^2 = 1 , \quad z_2^2 = 0;$$

$$\Phi[z(\lambda)] = 5 ;$$

б) $\frac{1}{2} < \lambda_2 < \frac{2}{3}$.

Оптимальный взаимовыгодный план:

$$z_1^1 = 0 ; \quad z_2^1 = 1 ; \quad z_1^2 = 1 ; \quad z_2^2 = 0 ;$$

$$\Phi[z(\lambda)] = 3 ;$$

в) $\frac{2}{3} \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$.

Оптимальный взаимовыгодный план;

$$z_1^1 = 0 \; ; \; z_2^1 = 1 \; ; \quad z_1^2 = 0 \; ; \quad z_2^2 = 1 \; ;$$

$$\Phi\left[z(\lambda)\right] = 4.$$

Отметим здесь, что функция $\Phi\left[z(\lambda)\right]$ является многоэкстремальной функцией λ .
Оптимальный план без требования взаимовыгодности:

$$z_1^1 = 1 \; ; \quad z_2^1 = 0 \; ; \quad z_1^2 = 0 \; ; \quad z_2^2 = 1 \; ;$$

$$\Phi_0 = 6 \; , \quad \Phi_B = 5 \; .$$

Коэффициент согласования системы равен $\rho = \frac{5}{6}$.

Пример 2. Данные из примера 1, но целевая функция системы

$$\Phi(z) = \min\left(4 z_1^1 + z_1^2 \; ; \; 2 z_2^1 + 2 z_2^2\right) \to \max .$$

а) $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

Оптимальный взаимовыгодный план:

$$z_1^1 = 1 \; ; \quad z_2^1 = 0 \; ; \quad z_1^2 = 1 \; ; \quad z_2^2 = 0 \; ;$$

$$\Phi\left[z(\lambda)\right] = 0 \; ;$$

б) $\lambda_2 = \frac{1}{2} \; , \; \lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Оптимальный взаимовыгодный план:

$$z_1^1 = \frac{1}{6} \, , \quad z_2^1 = \frac{5}{6} \; ; \quad z_1^2 = 1 \; ; \quad z_2^2 = 0 \; ;$$

$$\Phi\left[z(\lambda)\right] = 1\frac{2}{3} \; ;$$

в) $\frac{1}{3} \leqslant \lambda_2 \leqslant \frac{2}{3}$.

Оптимальный взаимовыгодный план:

$$z_1^1 = 0 \; ; \quad z_2^1 = 1 \; ; \quad z_1^2 = 1 \; ; \quad z_2^2 = 0$$

$$\Phi\left[z(\lambda)\right] = 1;$$

г) $\frac{2}{3} < \lambda_2 \leqslant 1$.

Оптимальный взаимовыгодный план:

$$z_1^1 = 0 \; ; \quad z_2^1 = 1 \; ; \quad z_1^2 = 0 \; ; \quad z_2^2 = 1 \; ;$$

$$\Phi[z(\lambda)] = 0 \, .$$

В этом примере оптимальное значение $\Phi_в = 1\frac{2}{3}$ достигается в точке $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, в которой функция $\Phi[z(\lambda)]$ не имеет производной.

Оптимальный план без требования взаимовыгодности:

$$z_1^1 = \frac{2}{3} \; ; \quad z_2^1 = \frac{1}{3} \; ; \quad z_1^2 = 0 \; ; \quad z_2^2 = 1 \; ;$$

$$\Phi_0 = 2\frac{2}{3} \, .$$

Коэффициент согласования в данном примере $\rho = \frac{5}{8}$.

Основная трудность решения задачи планирования, как уже отмечалось выше, заключается в том, что множества A^i и целевые функции $\gamma^i(z^i, \lambda)$ активных элементов не известны в ЦО (или известны приближенно). Поэтому необходима определенная процедура сообщения в ЦО информации о множествах взаимовыгодных планов АЭ.

Одним из подходов, который предлагается некоторыми авторами [1–6] для решения задачи планирования, является использование принципа декомпозиции. Идея заключается в организации итерационной процедуры. На каждой итерации ЦО сообщает активным элементам управление $\lambda_к$, а каждый АЭ сообщает план $y_к^i$ ($к$ – номер итерации). При этом управление $\lambda_{к+1}$ на $(к+1)$-й итерации определяется в зависимости от управления $\lambda_к$ и плана $y_к$ на предыдущей итерации по определенному закону $\lambda_{к+1} = \Psi_{к+1}(y_к, \lambda_к)$. Заметим, что λ могут входить и в целевые функции, и в ограничения каждого АЭ.

Очевидно, что в ЦО должны быть определены условия, при выполнении которых процедура заканчивается (условия остановки).

Если процедура оканчивается на s -й итерации, то в качестве решения задачи планирования принимается

$$\lambda = \lambda_s \; , \quad z = y_s \, .$$

В рассматриваемой схеме этап сообщения информации и этап планирования объединены. Заметим теперь, что в силу свойства активности АЭ может знать условия остановки и тем самым предсказывать номер последней итерации. Здесь нам потребуется предположение о слабом влиянии каждого АЭ на условия остановки, которое сформулировано в следующем виде: при любом $y_k^i \in A^i$ для i-го АЭ имеется конечная вероятность того, что k-я итерация является последней $i = 1,2,\ldots,m$; $k = 1,2,\ldots$ Если теперь принять, что каждый АЭ максимизирует гарантированное значение целевой функции, то, очевидно, при справедливости предположения слабого влияния он будет сообщать на каждой итерации одно из y_k^i максимизирующих $\eta^i(y_k^i, \lambda_k)$. При определенных предположениях на вид множеств A^i, Z, $\mathcal{L}$ и функций $\eta^i(z^i, \lambda)$ и $\Phi(z, \lambda)$ в ряде работ доказывается сходимость последовательности $\{\lambda_k, y_k\}$ к оптимальному решению задачи планирования [1-4]. Нетрудно обобщить описанный подход и на многоуровневые системы. Иногда применяются более сложные схемы, в которых на каждой итерации АЭ сообщает не один план, а множество близких планов с соответствующими управлениями [7]. Не вдаваясь в подробное рассмотрение методов, заметим, что в общем случае они не дают оптимального решения задачи взаимовыгодного планирования ввиду ее многоэкстремального характера (см. примеры 1 и 2).

Кроме того, возможно существование нескольких оптимальных для АЭ планов при выбранном управлении, и неясно, какой из них будет сообщен в ЦО. Этот факт для линейных моделей был показан в работе [8].

Ниже рассматривается новый подход к задаче управления АС, основанный на принципе открытого управления.

3. ОПИСАНИЕ ПРИНЦИПА

Принцип открытого управления заключается в том, что каждый АЭ сообщает множество возможных планов B^i и функцию предпочтения $S^i(z^i, \lambda)$, заданную на этом множестве, в ЦО, который, получив эту информацию от каждого АЭ, решает задачу планирования,используя функцию предпочтения в качестве целевой функции[x]. Прием $S^i(z^i, \lambda) = -\infty$ для $z^i \notin B_i$. Теперь можно считать, что каждый АЭ сообщает только функцию предпочтения на заданном множестве A^i.

Условие (3) взаимовыгодного планирования в этом случае принимает вид

$$S^i(z^i, \lambda) = \max_{y^i \in A^i} S^i(y^i, \lambda). \qquad (4)$$

Условия (4) будем называть условиями согласованного планирования, а планы, удовлетворяющие этим условиям, согласованными планами. Заметим, что согласованные планы не являются, в общем случае, взаимовыгодными. Будем считать, что в системе установлена форма представления функции предпочтения (например, функция предпочтения может определяться заданием конечного числа параметров). Тем самым выделен некоторый класс H^i возможных функций предпочтения. Вообще говоря, этот класс может и не содержать целевой функции $\eta^i(z^i, \lambda)$. Примем сначала, что $\eta^i(z^i, \lambda) \in H^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Обозначим $A(\lambda)$ – множество взаимовыгодных планов.

$A_s^i(\lambda)$ – множество согласованных планов при функции предпочтения $S^i(z^i, \lambda) \in H^i$, $\lambda \in \mathcal{L}$. Для дальнейших выводов нам потребуется предположение о слабом влиянии информации, сообщаемой каждым АЭ на будущее управление $\lambda \in \mathcal{L}$, которое запишем в следующем виде:

для любых $S^i(z^i, \lambda) \in H^i$, $z^i \in A_s^i(\lambda)$ и $\lambda \in \mathcal{L}$ существуют $S^j(\lambda) \in H^j$ для всех $j \neq i$ такие, что в оптимальном решении задачи согласованного

---

[x] Термин "открытое управление" использован для того, чтобы подчеркнуть две особенности принципа:

а) правила принятия решений в ЦО известны (открыты) для каждой подсистемы,

б) каждая подсистема сообщает (раскрывает) о своих возможностях и предпочтениях в ЦО.

планирования управлением является λ, а планом i-го АЭ является z^i. Смысл условия слабого влияния состоит в том, что АЭ, независимо от сообщаемой им информации, может ожидать любое управление λ из $\mathcal{L}$ и любой согласованный план из $A_S^i(\lambda)$.

Отсюда следует, что необходимым условием взаимовыгодности согласованного плана является $A_S^i(\lambda) \subseteq A^i(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathcal{L}$. Простым достаточным условием взаимовыгодности согласованного плана является равенство функции предпочтения и целевой функции (с точностью до положительного множителя). Для того чтобы оптимальный согласованный план был оптимальным взаимовыгодным, необходимо и достаточно, чтобы из условия $A_S^i(\lambda) \subseteq A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$ следовало $A_S^i(\lambda) = A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$ (это требование необходимо в том смысле, что если $A_S^i(\lambda) \subset A^i(\lambda)$, хотя бы для одного $\lambda \in \mathcal{L}$, то существует задача согласованного планирования, в которой оптимальный согласованный план не является оптимальным взаимовыгодным планом).

Теорема 1. Для того, чтобы при любой целевой функции $\eta^i(z^i, \lambda) \in H^i$ из условия $A_S^i(\lambda) \subseteq A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$ следовало, что $A_S^i = A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух функций предпочтения $S_1^i(z^i, \lambda)$ и $S_2^i(z^i, \lambda)$ из класса H^i (таких, что $A_{S1}(\lambda) \neq A_{S2}(\lambda)$, хотя бы для одного $\lambda \in \mathcal{L}$) выполнялось условие: $A_{S1}(\lambda) \not\subseteq A_{S2}(\lambda)$, хотя бы для одного $\lambda \in \mathcal{L}$.

Необходимость. Пусть существуют $S_1^i(z^i, \lambda)$ и $S_2^i(z^i, \lambda)$ из H^i, такие, что $A_{S1}^i(\lambda) \neq A_{S2}^i(\lambda)$, хотя бы для одного $\lambda \in \mathcal{L}$ и в то же время $A_{S1}^i(\lambda) \subseteq A_{S2}^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$. Примем $\eta^i(z^i, \lambda) = S_2^i(z^i, \lambda)$.
Тогда $A_{S1}^i(\lambda) \subseteq A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$ и в то же время $A_{S1}(\lambda) \neq A^i(\lambda)$, что противоречит условиям теоремы.

Достаточность. Из условий теоремы следует, что если $A_S^i(\lambda) \neq A^i(\lambda)$ хотя бы для одного $\lambda \in \mathcal{L}$, то имеет место $A_S^i(\lambda) \not\subseteq A^i(\lambda)$, хотя бы для одного $\lambda \in \mathcal{L}$. Поэтому, если $A_S^i(\lambda) \subseteq A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$, то обязательно $A_S^i(\lambda) = A^i(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathcal{L}$.

Теорема 1 накладывает определенные ограничения на выбор формы представления функций предпочтения (т.е. класса H^i). Поэтому проверка выполнения условий теоремы для конкретных классов H^i, а, следовательно, обоснование того факта, что принцип открытого управления решает задачу взаимовыгодного планирования, требует специального исследования.

Проведем такое обоснование для случая, к которому сводятся рассматриваемые ниже примеры.
Пусть

$$A^i : \sum_{j=1}^{n} z_j^i = T_i \quad , \ T_i > 0 \ , \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\eta^i(z^i, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j^i z_j^i \ , \quad s_j^i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\mathcal{L} : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , \quad \lambda_j \geq 0 \ , \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Примем, что функция предпочтения $S^i(z^i, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tau_j^i z_j^i$. Поэтому каждый АЭ сообщает вектор предпочтений τ^i такой, что $\tau_j^i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, m$. Без ограничения общности можно принять, что

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^i = 1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} \tau_j^i = 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{5}$$

Таким образом, класс H^i определяется множеством τ^i, удовлетворяющих (5).

Теорема 2. Для того чтобы согласованный план был взаимовыгодным, необходимо и достаточно, чтобы $\tau_j^i = s_j^i$,

$$i = 1, 2, \dots, m, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть для некоторого j_1 имеет место $\tau_{j_1}^i > s_{j_1}^i$. Следовательно, существует j_2, для которого $\tau_{j_2}^i < s_{j_2}^i$. Возьмем управление λ, удовлетворяющее условиям:

а) $\lambda_j \tau_j^i < \max\limits_{j \neq j_1, j_2}(\lambda_{j_1} \tau_{j_1}^i ; \lambda_{j_2} \tau_{j_2}^i)$; б) $\dfrac{\tau_{j_2}^i}{\tau_{j_1}^i} < \dfrac{\lambda_{j_1}}{\lambda_{j_2}} < \dfrac{s_{j_2}^i}{s_{j_1}^i}$.

При этом в согласованном плане $z_{j_1}^i = T_i$, $z_j^i = 0$, $j \neq j_1$, а во взаимовыгодном плане $z_{j_2}^i = T_i$, $z_j^i = 0$, $j \neq j_2$, то есть согласованный план не является взаимовыгодным. Таким образом, в данном случае необходимым и достаточным условием взаимовыгодности согласованного плана является равенство функции предпочтения и целевой функции.

Замечание. Предположение о том, что целевая функция содержится в классе H^i, в общем случае может не иметь места, поскольку целевая функция АЭ может быть достаточно сложной и зависеть от целого ряда параметров (включая психологический и социальный факторы). Однако, поскольку АЭ может называть предпочтения только из класса H^i, то он вынужден приспосабливаться к условиям функционирования системы. Поэтому АЭ выбирает из класса H^i функцию предпочтения, наиболее отражающую его действительные интересы, которую и принимает за целевую функцию в данных условиях. Конечно, такое предположение допустимо, если в классе H^i действительно имеется функция предпочтения, достаточно отражающая цели АЭ. Иначе возможны противоречия в системе и как следствие неустойчивость ее функционирования. В этом случае следует изменить класс H^i.

4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

Пусть реализация каждого плана z^i определяется значениями вектора параметров x^i, который является случайной величиной с распределением $F^i(x^i)$. В этом случае в качестве множества A^i будем рассматривать множество планов, соответствующих определенным оценкам случайных параметров. В качестве таких оценок принимаются обычно либо средние значения параметров, либо такие значения, вероятность превышения которых равна заданной величине. Будем предполагать, что требуемые оценки случайных параметров известны АЭ, но не известны (или известны приближенно) в ЦО. Обозначим a^i — вектор оценок случайных параметров, сообщаемый i - м АЭ в ЦО. Для того чтобы судить о достоверности сообщаемых оценок, необходимы определенные предположения о целевых функциях АЭ. Примем, что целевые функции АЭ $\varphi^i(x^i, a^i, z^i, \lambda)$ зависят от реализации вектора параметров x^i, вектора оценок a^i, плана z^i и управления λ, причем вид этой зависимости известен. Такой случай соответствует задачам управления в экономических системах ($\varphi^i(x^i, a^i, z^i, \lambda)$ определяет, например, прибыль предприятия). На этапе сообщения информации в качестве целевой функции АЭ примем среднее значение φ^i:

$$M^i(a^i, z^i, \lambda) = \int \cdots \int \varphi^i(x^i, a^i, z^i, \lambda)\, dF^i(x^i).$$

Оценки a^i параметров, сообщаемые АЭ в ЦО, в случае критерия максимума гарантированного значения M^i определяются из условия максимума

$$\xi^i(a^i) = \min_{\lambda \in \mathcal{L}} \max_{z^i \in A^i} M^i(a^i, z^i, \lambda).$$

Рассмотрим два частных случая, важные для дальнейших приложений:

а) $$\varphi^i(x^i, a^i, z^i, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[x_j^i - \alpha_j^i (x_j^i - a_j^i)^2 \right] z_j^i, \qquad (6)$$

где $\alpha_j^i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ – постоянные числа. Максимизируя среднее значение φ^i по a_j^i, легко получаем

$$a_j^i = \int \cdots \int x_j^i\, dF^i(x^i), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

то есть каждый АЭ сообщает в ЦО средние значения параметров. При этом

$$M^i(a^i, z^i, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_j^i - \alpha_j^i D_j^i) z_j^i,$$

где $$D_j^i = \int \cdots \int (x_j^i - a_j^i)^2\, dF^i(x^i).$$

Обозначим $S_j^i = a_j^i - \alpha_j^i D_j^i$. Тогда в силу теоремы 2 функция предпочтения, сообщаемая АЭ в ЦО, равна (с точностью до положительного множителя)

$$S^i(z^i, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_j^i z_j^i; \qquad (7)$$

б)
$$\begin{aligned} \varphi^i(x^i, a^i, z^i, \lambda) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[x_j^i - \alpha_j^i (a_j^i - x_j^i) \right] z_j^i, \text{ если } x_j^i \le a_j^i, \\ \varphi^i(x^i, a^i, z^i, \lambda) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[x_j^i - \beta_j^i (x_j^i - a_j^i) \right] z_j^i, \text{ если } x_j^i \ge a_j^i, \end{aligned} \qquad (8)$$

где α_j^i, β_j^i – положительные числа.

Максимизируя среднее значение φ^i по a_j^i, получаем, что сообщаемая в ЦО оценка a_j^i удовлетворяет уравнению

$$F_j^i(a_j^i) = \frac{\beta_j^i}{\alpha_j^i + \beta_j^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (9)$$

где $F_j^i(x_j^i)$ – функция распределения x_j^i. Соответственно функция предпочтения, сообщаемая в ЦО, будет также иметь вид (7), где

$$S_j^i = \int_{-\infty}^{a_j^i}\left[x_j^i - \alpha_j^i(a_j^i - x_j^i)\right]dF_j^i(x_j^i) + \int_{a_j^i}^{+\infty}\left[x_j^i - \beta_j^i(x_j^i - a_j^i)\right]dF_j^i(x_j^i).$$

Эти два вида целевых функций АЭ будут рассматриваться в дальнейших приложениях. В разбираемых ниже моделях ставится задача согласованного планирования. Однако в силу теоремы 2 решение этой задачи определяет оптимальный взаимовыгодный план.

5. МОДЕЛИ СОГЛАСОВАННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Ниже рассматривается ряд простых моделей экономических систем. Под АЭ понимаются в зависимости от задачи либо элементы системы, производящие (потребляющие) определенные виды продукции, либо элементы системы, способные выполнять определенные работы. При этом предполагается, что модели АЭ заданы с точностью до конечного числа неизвестных параметров. Планирование производится на заданный период. Неизвестными параметрами в зависимости от модели является производительность элементов по различным видам продукции либо по различным работам, урожайность сельхозкультур и т.д. Предполагаем, что прибыль АЭ определяется по законам (6) либо (8) и, следовательно, каждый АЭ сообщает в ЦО соответствующие оценки параметров и коэффициенты S_j^i функции предпочтения.

5.1. <u>Планирование производства продукции</u>

Рассмотрим систему, состоящую из m производителей, способных выпускать n различных видов продукции.

Обозначим T_i – продолжительность работы i-го производителя в планируемом периоде. Пусть a_j^i соответствует оценке производительности i-го АЭ по j-му виду продукции, τ_j^i – продолжительность работы i-го производителя по выпуску j-го вида продукции. Обозначим также c_j – ценность единицы j-го вида продукции (например, ее цена на мировом рынке), b^i_{jk} – количество продукции вида k, необходимое для производства единицы продукции вида j производителем i. Для упрощения модели примем, что любое количество продукции любого вида может быть куплено по цене c_j за единицу ($j = 1, 2, \ldots, n$). Задача заключается в определении согласованного плана z и управления λ, обеспечивающих максимальную прибыль системы, которая равна

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} z^i_j \, a^i_j \, (c_j - \sum_{k=1}^{n} c_k b^i_{jk}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c^i_j \, z^i_j ,$$

где

$$c^i_j = a^i_j \, (c_j - \sum_{k=1}^{n} c_k b^i_{jk}),$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} z^i_j \leqslant T_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$(\max_k \lambda_k s^i_k - \lambda_j s^i_j)\, z^i_j = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, m , \quad j = 1, 2, \ldots, n .$$

Заметим, что оптимальное решение задачи без учета условия согласования определяется очень просто: пусть $c^i_{j_1} = \max_j c^i_j$, тогда

$$z^i_j = \begin{cases} T_i , & \text{если } j = j_1 , \\ 0 , & \text{если } j \neq j_1 \end{cases}$$

(если максимальных c^i_j несколько, то берется любое). Обозначим Q_j – множество АЭ, выпускающих j-й вид продукции в оптимальном плане (для определенности примем, что оптимальный план единственный). Вычислим

$$\varepsilon_{kj} = \max_{i \in Q_j} \frac{s^i_k}{s^i_j}$$

и определим полный граф G, усиление на дуге (k, j) которого равно ε_{kj} (вершины графа соответствуют выпускаемым видам продукции). Усилением контура называется произведение усилений дуг контура.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием полного согласования является отсутствие в графе G контуров с усилением, большим 1.

Доказательство. Пусть выпускаются виды продукции с номерами 1,2,..., p. Условия согласования для оптимального плана имеют вид

$$\lambda_j \geqslant \lambda_k \varepsilon_{kj} , \qquad k, j = 1, 2, \ldots, p .$$

Обозначим

$$\mu_j = \ln \lambda_j \ , \qquad \xi_{kj} = \ln \varepsilon_{kj} \ .$$

Тогда условия примут вид

$$\mu_j \geq \mu_k + \xi_{kj} \ .$$

Это условия задачи о потенциалах вершин графа с длинами ξ_{kj}. Как известно, задача о потенциалах имеет решение, если в графе отсутствуют контуры положительной длины. Следовательно, в первоначальном графе должны отсутствовать контуры с усилением, большим 1.

Пример. Пусть матрицы (C_j^i) и (S_j^i) имеют вид:

$(C_j^i)=$

j \ i	1	2	3
1	2	3	1
2	5	0	3
3	1	6	4
4	0	1	5

$(S_j^i)=$

j \ i	1	2	3
1	1	1	5
2	2	0	6
3	4	1	2
4	0	6	1

Оптимальное решение без требования согласования:
$z_2^1 = z_3^2 = z_4^3 = 1$, остальные $z_j^i = 0$, $\Phi_0 = 16$.
Вычисляем

$$\varepsilon_{32} = \frac{S_3^1}{S_2^1} = 2 \ , \qquad \varepsilon_{23} = \frac{S_2^2}{S_2^3} = 0 \ , \qquad \varepsilon_{24} = \frac{S_2^3}{S_4^3} = 6 \ ,$$

$$\varepsilon_{42} = \frac{S_4^1}{S_2^1} = 0 \ , \qquad \varepsilon_{43} = \frac{S_4^2}{S_3^2} = 6 \ , \qquad \varepsilon_{34} = \frac{S_3^3}{S_4^3} = 2 .$$

Контур (3, 2, 4, 3) имеет усиление 72. Следовательно, условия полного согласования не выполняются.

Оптимальное согласованное решение: $z_2^1 = z_3^2 = z_2^3 = 1$, остальные $z_j^i = 0$, $\Phi_6 = 14$.
Коэффициент согласования $\rho = 7/8$.

5.2. Планирование посевов сельхозкультур

Пусть АС состоит из m совхозов. Обозначим T_i – площадь посевных земель i -го совхоза, a_j^i – оценку урожайности культуры j -го вида в i -м совхозе, A_j – относительная потребность народного хозяйства в продукции j -го вида, z_j^i – площадь, отведенная в совхозе i под культуру j. Задача заключается в определении λ и z, максимизирующих выпуск продукции в заданном отношении. Обозначим β – минимальное отношение количества выпускаемой продукции некоторого вида к соответствующей относительной потребности. Постановка задачи планирования:

максимизировать β

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^i \leq T_i \;, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_j^i \, z_j^i \geq \beta A_j \;, \qquad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$(\max_k \lambda_k s_k^i - \lambda_j s_j^i)\, z_j^i = 0 \,, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \; j = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что условия согласования в данном случае совпадают с условиями предыдущей задачи. Если обозначить Q_j – множество совхозов, планирующих посев культуры j ($Q_j = \{ i : z_j^i > 0 \}$) в оптимальном решении задачи без требования согласования, то условия теоремы 3 будут необходимыми и достаточными условиями полного согласования для данной задачи. Простыми достаточными условиями полного согласования являются равенства (с точностью до положительного множителя) оценок a_j^i и предпочтений s_j^i [9].

5.3. Задача снабжения

Рассмотрим АС, состоящую из m поставщиков и q потребителей. Потребитель k заказывает B^k единиц продукции и сообщает предпочтения τ_j^k по каждому виду. Предполагается, что виды продукции, для которых $\tau_j^k > 0$, взаимозаменяемы для потребителя в равных количествах (то есть суммарное количество продукции различных видов равно B^k). Обозначим, как и ранее, a_j^i – оценку производительности поставщика i по j – му виду продукции, s_j^i – его предпочтения, z_j^i – время его работы по выпуску j -го вида продукции. Обозначим далее u^k – количество продукции вида j, поставляемое потребителю k, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – вектор управлений для поставщиков, $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_q)$ – вектор управлений для потребителей. Наконец, обозначим c_j – стоимость единицы продукции j-го вида на внешнем для системы рынке, $\Delta_j \geq 0$ – количество продукции вида j, поставляемое со склада.

Постановка задачи:

определить λ, π, z, u, минимизирующие

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j \Delta_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^k = B^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, q, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_j^i z_j^i + \Delta_j \geq \sum_{k=1}^{q} u_j^k, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^i \leq T_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{11}$$

$$(\max_p \lambda_p s_p^i - \lambda_j s_j^i) z_j^i = 0, \tag{12}$$

$$(\max_p \pi_p \tau_p^k - \pi_j \tau_j^k) u_j^k = 0, \tag{13}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, q$.

Если в оптимальном решении задачи $C = 0$, то возможно удовлетворение потребностей только за счет производства. В этом случае Δ_j обозначим излишки производства продукции j-го вида, а C_j – прибыль от продажи единицы продукции j-го вида.
Получаем задачу максимизации

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j \Delta_j$$

при ограничениях (10), (11), (12), (13) и

$$\Delta_j = \sum_{l=1}^{m} a_j^l z_j^l - \sum_{k=1}^{q} u_j^k \geq 0 .$$

Заметим, что необходимые и достаточные условия полного согласования также определяются теоремой 3, причем они должны выполняться как для предпочтения потребителей, так и для предпочтений поставщиков. Простыми достаточными условиями являются следующие:

$$z_j^k > 0 , \qquad a_j^l = \delta s_j^l$$

(δ -положительный множитель)
для всех $l = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, q$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Понятие "активная система" позволяет отразить существенные черты человеко-машинных систем (наличие у таких систем "собственных" целевых функций, сообщение информации о своих возможностях с учетом этих целевых функций, использование информации об управляющих подсистемах и др.).

Отсутствие в управляющей подсистеме достаточно полной информации о возможностях и целях управляемых подсистем является основной трудностью при решении задачи управления. Принцип открытого управления позволяет в определенной степени преодолеть эту трудность. Возникающие при этом проблемы (выбор классов H^i и влияние этого выбора на функционирование АС, применение ПОУ к различным моделям АС, оптимальный синтез многоуровневых АС и др.) открывают возможности интересных постановок ряда задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.Kulikowski. Optimization of Large-Scale Systems, IV Congress IFAC, Warszawa, 1969.

2. Полтерович В.М. Блочные методы вогнутого программирования и их экономическая интерпретация. Экономика и математические методы, 1969, т.V, вып.6.

3. Волконский В.А. Оптимальное планирование в условиях большой размерности. Итеративные методы и принципы декомпозиции. Экономика и математические методы, 1965, т.I, вып.2.

4. M.D.Mesarovic, D.Macko, Y.Takahara. Two Coordination Principles and Their Application in Large Scale System Control, IV Congress IFAC, Warszawa, 1969.

5. Каценелинбойген А.И., Лахман И.А., Овсиенко Ю.В. Оптимальное управление и ценностной механизм. Экономика и математические методы, 1969, т.V, вып.4.

6. Плискин Л.Г. Декомпозиционная динамическая оптимизация производства. Автоматика и телемеханика, 1969, № 3, 4.

7. Новожилов В.В., Гдалевич С.С. Хозрасчетная система планирования. – Оптимальное планирование и совершенствование управления народным хозяйством, М., изд-во "Наука", 1969.

8. Аганбегян А.Г., Багриновский К.А. О соотношении народнохозяйственного оптимума и локальных оптимумов в экономической системе социализма (там же [7]).

9. Бурков В.Н., Ивановский А.Г., Лернер А.Я. О методах стимулирования достоверности спроса и размещения заказов в условиях оптовой торговли. Труды Международного симпозиума по материально-техническому снабжению. Тбилиси, 1969.

Т 03854 от 4.8 70 г.
Заказ 292. Тираж 350
Москва, ГСП-312, Профсоюзная, 81, ИАТ.