PACS 89.75.Fb

© 2008 г. М.В. Губко, канд. техн. наук

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СУБОПТИМАЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ ИЕРАРХИЙ[1]

Задача управления организационной структурой (иерархией управления организацией) рассматривается как задача дискретной оптимизации – минимизации выбором допустимой иерархии суммарных затрат на содержание входящих в нее менеджеров. Для случая так называемых однородных функций затрат менеджеров ранее была получена формула нижней оценки затрат оптимальной иерархии, позволяющая, в числе прочего, приближенно находить основные характеристики оптимальной иерархии (количество менеджеров, их норму управляемости и др.). В настоящей статье исследуется качество этой нижней оценки и для ряда важных случаев предлагаются эффективные алгоритмы построения субоптимальных иерархий с затратами, ненамного превышающими оптимальные.

1. Введение

По различным оценкам на содержание системы управления приходится от 20 до 60% расходов современных производственных предприятий. Поэтому совершенствование системы управления является для них чрезвычайно важным. Огромная цена неверного решения сужает возможности экспериментирования при решении этой сложной задачи, поэтому большую роль играет разработка математических моделей, теоретически обосновывающих эффективность тех или иных решений, направленных на совершенствование системы управления.

Большинство имеющихся на данный момент математических моделей фирмы [1-3] описывают функционирование организации в рамках фиксированной *структуры системы управления* (состава и взаимной подчиненности подразделений организации), и получаемые рекомендации касаются наилучших способов функционирования

---

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-07-00078-а).

организации в рамках этой фиксированной структуры. Однако очевидно, что выбор той или иной структуры системы управления – *организационной структуры* – накладывает существенные ограничения на процессы ее функционирования, и, следовательно, на общую эффективность организации. Поэтому выбор рациональной организационной структуры является важным этапом в общем процессе организационного управления, а разработка математических методов построения оптимальной структуры – одним из наиболее перспективных направлений развития экономической теории предприятия.

В большинстве организаций система управления имеет иерархический вид [4, 5], поэтому для решения поставленной задачи необходимы методы, позволяющие моделировать *организационные иерархии*, сравнивать их между собой и осуществлять выбор наиболее рациональных организационных иерархий управления.

В рамках развития этих методов в [6] был исследован важный класс проблем – задачи поиска оптимальных древовидных иерархий управления при так называемых *однородных функциях затрат* менеджеров. В числе прочего, была предложена аналитическая формула *нижней оценки* затрат оптимальной древовидной иерархии, имеющая широкую область применения. Однако результаты [6] оставляют открытыми вопросы о качестве этой нижней оценки и о конкретных алгоритмах построения оптимальных или близких к ним организационных иерархий. Настоящая статья посвящена решению этих проблем.

2. Описание модели[2]

В [6] задача формирования организационной иерархии рассматривалась как задача дискретной оптимизации – минимизации на множестве допустимых иерархий заданного критерия, роль которого играют управленческие расходы (*затраты на содержание иерархии*). Считается, что организационная структура – иерархия менеджеров – надстраивается над фиксированным конечным множеством $N = \{1, \ldots, n\}$ *исполнителей* (рядовых рабочих и служащих). Иерархия H представляет собой *ориентированное дерево* [11], в листьях которого находятся все исполнители, а

---

[2] Принятая в [6] модель основывается на подходе и терминологии, впервые предложенных А.А. Ворониным и С.П. Мишиным [7-10].

остальные вершины занимают управляющие ими *менеджеры*. Дуги дерева описывают взаимную подчиненность сотрудников и направлены от подчиненного к его непосредственному начальнику. В корне дерева находится *топ-менеджер* – глава организации. Каждый менеджер имеет как минимум двух *непосредственных подчиненных*. Множество всех менеджеров иерархии обозначается через M.

Каждому менеджеру $m \in M$ иерархии H соответствует *группа исполнителей* $s_H(m) \subseteq N$ – множество исполнителей, которыми этот менеджер непосредственно или опосредованно (через своих подчиненных) управляет в иерархии H. Каждый исполнитель w из множества N характеризуется положительным числом $\mu(w)$ – его *мерой*, описывающей сложность управления данным исполнителем. Мера группы исполнителей равна суммарной мере входящих в нее исполнителей.

Содержание менеджера $m \in M$ иерархии H связано с *затратами* $c(m, H)$, зависящими в общем случае как от самого менеджера m, так и от места, которое он занимает в иерархии H. В [6] считается, что функция затрат $c(m, H)$ менеджера имеет вид $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$, где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ – меры групп исполнителей, которыми управляют r его непосредственных подчиненных[3]. Кроме того предполагается, что функция затрат является *однородной* степени $\gamma \geq 0$, т.е. одновременное увеличение мер всех групп $\mu_1, \ldots, \mu_r$ в A раз увеличивает затраты на содержание менеджера m в A^γ раз[4].

Определение 1. r-мерным симплексом D_r *называется такое множество r-мерных векторов* $x = (x_1, \ldots, x_r)$ *с неотрицательными компонентами, что* $x_1 + \ldots + x_r = 1$. *Элементы такого симплекса будем называть пропорциями.*

С учетом этого определения однородную функцию затрат менеджера можно представить в виде $c(\mu_1, \ldots, \mu_r) = \mu^\gamma c(x_1, \ldots, x_r)$, где $\mu := \mu_1 + \ldots + \mu_r$ – это мера управляемой менеджером группы исполнителей, а $x_1, \ldots, x_r$ $(x_i := \mu_i / \mu,\ i = 1, \ldots, r)$ –

---

[3] Таким образом, затраты на содержание менеджера зависят только от его нормы управляемости r (количества его непосредственных подчиненных) и от мер $\mu_1, \ldots, \mu_r$ групп исполнителей, которыми эти непосредственные подчиненные управляют.

[4] Подробное обоснование актуальности такой постановки задачи приведено в [6, 12].

пропорция, в которой μ делится между мерами групп исполнителей, управляемых непосредственными подчиненными менеджера.

Определение 2. Функция затрат менеджера называется нормальной, если для любого целого $r \geq 2$ выполняется $c(\mu_1, \ldots, \mu_r) \leq c(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0)$.

Иначе говоря, при нормальной функции затрат добавление непосредственного подчиненного, управляющего «группой» исполнителей нулевой меры, не уменьшает затрат менеджера. Ниже рассматриваются только нормальные функции затрат.

Затраты $C(H)$ иерархии H равны сумме затрат входящих в нее менеджеров. Задача состоит в том, чтобы среди всевозможных древовидных иерархий над множеством исполнителей N найти иерархию с минимальными затратами. Попутно решается задача поиска оптимального *r-дерева*, т.е. дерева, в котором каждый менеджер имеет не более r непосредственных подчиненных (множество r-деревьев является подмножеством множества всех деревьев).

3. Нижняя оценка затрат оптимального дерева

В рамках решения этой задачи в [6] было введено понятие *однородного дерева*.

Определение 3. Дерево называется (r, x)-однородным, если каждый его менеджер имеет ровно r непосредственных подчиненных и делит подчиненную ему группу исполнителей между ними на подгруппы в одинаковой пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$ с точки зрения мер этих подгрупп. Число r называется нормой управляемости однородного дерева.

В [6] доказано, что затраты однородного дерева H с нормой управляемости r и пропорцией $x = (x_1, \ldots, x_r)$ определяются выражением

$$(1) \qquad C(H) = \begin{cases} |\mu^\gamma - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^\gamma| \dfrac{c(x_1, \ldots, x_r)}{|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma|}, & \text{если } \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \dfrac{c(x_1, \ldots, x_r)}{-\sum_{i=1}^{r} x_i \ln x_i}, & \text{если } \gamma = 1, \end{cases}$$

где $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ – меры исполнителей, $\mu := \mu(N) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$ – их суммарная мера.

Из-за конечности множества исполнителей однородное дерево с заданными параметрами существует далеко не всегда[5], однако, имея аналитическую формулу (1), можно ставить вопрос о том, какое однородное дерево имело бы минимальные затраты, если бы оно существовало. В [6] показано, что затраты такого *наилучшего однородного дерева* определяются следующим выражением:

$$(2)\qquad C_L(N) = \begin{cases} |\,\mu^{\gamma} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\gamma}\,| \min\limits_{k=2,\dots,n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\dots,y_k)}{|\,1-\sum_{i=1}^{k} y_i^{\gamma}\,|}, & \gamma \neq 1, \\ (\mu \ln \mu - \sum_{j=1}^{n} \mu(j) \ln \mu(j)) \min\limits_{k=2,\dots,n} \min\limits_{y \in D_k(\varepsilon)} \dfrac{c(y_1,\dots,y_k)}{-\sum_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, & \gamma = 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon = \min_{i \in N} \mu(i)/\mu$ – отношение меры самого «мелкого» исполнителя к их суммарной мере μ, $D_k(\varepsilon)$ – часть k-мерного симплекса, на которой каждая компонента пропорции y больше или равна ε, а γ – степень однородности функции затрат менеджера. Параметры наилучшего однородного дерева – его норма управляемости $r(n, \varepsilon)$ и пропорция $x(n, \varepsilon)$ – доставляют минимумы функции в (2) и зависят лишь от количества исполнителей n и величины ε.

Основной результат [6] состоит в доказательстве того, что при однородных функциях затрат менеджеров оптимальная древовидная иерархия стремится быть однородным деревом[6] и затраты (2) наилучшего однородного дерева задают нижнюю оценку затрат оптимальной древовидной иерархии. Для получения нижней оценки затрат оптимального r-дерева (обозначим ее через $C_L^r(N)$) в (2) достаточно брать минимум по всем целым k от 2 до $\min[n, r]$.

В [12] исследовались методы нахождения параметров наилучшего однородного дерева. Вообще говоря, для каждого n и ε необходимо решать свою задачу, поскольку с ростом n (и с уменьшением ε) расширяется множество, по которому проводится минимизация в (2). В то же время, в [12] показано, что во многих случаях с ростом количества исполнителей n параметры наилучшего однородного дерева стабилизируются и не меняются при дальнейшем расширении множества

---

[5] Зачастую множество исполнителей с заданными мерами невозможно разделить на группы в нужной пропорции.

[6] Только дискретность задачи мешает этому стремлению реализоваться полностью.

исполнителей. Иначе говоря, при больших n и малых[7] ε имеем $r(n, \varepsilon) = r$, $x(n, \varepsilon) = x$.

В [12] была предложена классификация решений задачи поиска наилучшего однородного дерева. Решение называется *внутренним*, если при $\varepsilon = 0$ и больших значениях n все компоненты оптимальной пропорции x строго положительны, а оптимальная норма управляемости r конечна. Внутреннее решение называется *симметричным*, если все компоненты пропорции x равны $1/r$.

4. Качество нижней оценки и субоптимальные иерархии

Итак, формула (2) оценивает снизу затраты оптимальной древовидной иерархии. Возникает вопрос, насколько точно эта формула описывает затраты собственно оптимального дерева, т.е. каково *качество* этой нижней оценки.

Поиск оптимальной древовидной иерархии – это задача дискретной оптимизации, поиска в конечном множестве всевозможных иерархий наилучшего элемента, оптимальной иерархии. Дискретность является следствием конечности множества исполнителей, и именно это чрезвычайно осложняет поиск оптимальной иерархии. Нижняя оценка (2) основана на частичном отказе от дискретности. Она дает, по сути, затраты оптимального дерева в предположении, что при фиксированном количестве исполнителей и заданной их суммарной мере меры отдельных исполнителей могут быть подобраны наиболее «удобным» образом, так что любую группу исполнителей можно разделить на части в нужной пропорции. В реальности это, конечно, не так, однако по идее, чем больше в группе исполнителей, тем точнее можно из них «набрать» подгруппы нужной меры. Поэтому можно предположить, что с ростом количества исполнителей n дискретность задачи будет играть все меньшую роль и при большом количестве исполнителей нижняя оценка (2) будет близка к затратам оптимального дерева[8].

---

[7] Если меры исполнителей ограничены сверху наперед заданной константой, то увеличение n неизбежно приводит к уменьшению ε.

[8] Именно при большом количестве исполнителей (в крупных организациях), рассмотрение нижних оценок представляет основной интерес, так как для небольших n оптимальное дерево можно найти с помощью алгоритмов.

Будем считать, что нижняя оценка $C_L(N)$ имеет хорошее качество, если предел отношения затрат оптимального дерева к их нижней оценке $C_L(N)$ стремится к единице при стремлении количества исполнителей в множестве N к бесконечности[9].

Оказывается, что качество нижней оценки существенно зависит от того, является ли решение задачи поиска параметров наилучшего однородного дерева внутренним или граничным, симметричным или асимметричным. Ниже будет доказано, что если степень однородности функции затрат менеджера не меньше единицы и задача поиска параметров наилучшего однородного дерева имеет внутреннее решение, то нижняя оценка имеет хорошее качество (то же верно и для нижней оценки затрат оптимального r-дерева). Аналогичные результаты будут доказаны также для случая, когда степень однородности функции затрат меньше единицы, меры всех исполнителей одинаковы, а наилучшее однородное дерево симметрично.

5. Субоптимальные *TD*-иерархии

Итак, пусть степень однородности γ функции затрат больше или равна единицы, а наилучшее однородное дерево имеет норму управляемости r и пропорцию $x = (x_1, \ldots, x_r)$, причем все компоненты пропорции строго положительны.

Ниже описывается алгоритм построения «почти (r, x)-однородного» дерева над заданным множеством исполнителей N. Он состоит в многошаговом усложнении простейшей исходной иерархии с единственным менеджером. На первом этапе алгоритма на нижний уровень иерархии последовательно добавляются новые менеджеры так, чтобы меры управляемых ими групп исполнителей делились в пропорции, как можно более близкой[10] к «нормативной» пропорции x. На втором этапе

[9] Формально говоря, необходимо оговорить также некоторые ограничения на меры исполнителей. Это будет сделано ниже.

[10] Насколько это позволяет дискретность множества исполнителей N.

«низ» иерархии достраивается так, чтобы результирующая иерархия была r-деревом[11]. Шаги алгоритма будем иллюстрировать графически.

Рис. 1

Рис. 2

Итак, возьмем исходную иерархию с единственным менеджером (см. рис. 1). Отложим меры всех исполнителей множества N (в произвольном порядке) последовательно на прямой в виде отрезков соответствующей длины (см. рис. 2). Получим отрезок $[0, \mu(N)]$, где $\mu(N)$ – мера всего множества исполнителей[12]. Присвоим единственному менеджеру иерархии метку – отрезок $[0, \mu(N)]$, который назовем его «*нормативным*» отрезком. В процессе работы алгоритма менеджеры иерархии для удобства будут делиться на четыре класса – А, Б, В и Г. Отнесем единственного пока менеджера к классу А.

Рис. 3

Этап 1. Выберем из класса А любого менеджера m «нижнего звена»[13]. Пусть ему соответствует нормативный отрезок $[a, b]$.[14] Разделив этот отрезок на r частей в пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$, получим некоторые «нормативные» отрезки $[y_0, y_1],\ldots,[y_{r-1}, y_r]$, где $y_0 = a$, $y_r = b$ (на рис. 3, а границы нормативных отрезков изображены вертикальными пунктирными линиями).

В (r, x)-однородном дереве непосредственные подчиненные менеджера m должны были бы управлять группами мер $y_1 - y_0,\ldots, y_r - y_{r-1}$. Однако меры исполнителей могут не позволить разбить их на точно такие группы. Поэтому сдвинем все концы полученных нормативных отрезков к ближайшей к данному концу границе между исполнителями. Получим так называемые «*фактические*» отрезки

---

[11] Способ достраивания нижней части иерархии не так важен – из доказательства приводимого ниже утверждения 1 следует, что затраты составляющих ее менеджеров не играют существенной роли в совокупных затратах иерархии.

[12] На рис. 2 снизу на прямой изображены координаты, а сверху – номер исполнителя, к которому относится отрезок. Ниже будем отождествлять исполнителя и соответствующий ему отрезок.

[13] Менеджер нижнего звена – это менеджер, у которого в подчинении нет других менеджеров (на 1-й итерации им будет топ-менеджер).

[14] На первой итерации для единственного менеджера иерархии $a = 0$, $b = \mu(N)$.

$[y_0', y_1'],...,[y_{r-1}', y_r']$. На рис. 3, б границы фактических отрезков изображены вертикальными сплошными линиями, а стрелки показывают направление сдвига границ нормативных отрезков. Поскольку концы фактических отрезков совпадают с границами между исполнителями, каждому такому отрезку соответствует определенное множество исполнителей s_i, $i = 1, \dots, r$.[15] Некоторые (но не все) фактические отрезки могут иметь нулевую длину, и им соответствует пустое множество исполнителей. Некоторые фактические отрезки могут состоять из единственного исполнителя.

Если ненулевую длину имеет более одного фактического отрезка и $r' > 0$ отрезков состоят более чем из одного исполнителя, то добавим в иерархию r' менеджеров, подчиним им непосредственно соответствующие группы исполнителей s_i, а самих менеджеров непосредственно подчиним менеджеру m. Каждому добавленному менеджеру поставим в соответствие метку – его **нормативный** отрезок $[y_{i-1}, y_i]$ (см.

Рис. 4

рис. 4) и отнесем их к классу А.

Если все полученные фактические отрезки состоят не более чем из одного исполнителя, то добавление менеджеров не производится, а менеджер m переносится в класс Б. Если, наконец, лишь одному фактическому отрезку соответствует непустое множество исполнителей, то новые менеджеры также не добавляются, а менеджер m переносится в класс В.

Если в иерархии еще имеются менеджеры нижнего звена из класса А, то повторим этап 1. В противном случае перейдем на этап 2.

Этап 2. На первом этапе была сформирована иерархия, в которой менеджеры классов А и Б имеют не более r непосредственных подчиненных. Менеджеры же из класса В могут управлять более чем r исполнителями. Для доказательства приводимого ниже следствия 1 необходимо, чтобы результатом работы алгоритма была r-иерархия. Вид нижней части этой иерархии не играет особой роли. Для определенности поступим

---

[15] Легко проверить, что объединение этих множеств совпадает с группой исполнителей, которой управляет менеджер m.

следующим образом. Возьмем из класса В или Г[16] произвольного менеджера m нижнего звена, управляющего более чем двумя исполнителями. Добавим ему непосредственного подчиненного m' и переподчиним менеджеру m' всех управляемых менеджером m исполнителей кроме одного (любого). Отнесем менеджера m' к классу Г. Если в классах В или Г еще есть менеджеры нижнего звена, управляющие более чем двумя исполнителями, повторим этап 2. В противном случае алгоритм завершен.

Проиллюстрируем работу алгоритма, проведя еще несколько итераций его первого этапа. Рассмотрим менеджера нижнего звена, управляющего группой исполнителей {13, 14, 15} (см. рис. 4). Ему соответствует нормативный отрезок $[y_2,\ y_3]$. Разделим его в пропорции x и сдвинем границы новых нормативных отрезков (см. рис. 5, а). Заметим, что сдвигаются не только внутренние концы отрезков – точка y_2 также сдвигается влево на границу между исполнителями 12 и 13. Получили три фактических отрезка, первый из которых состоит из исполнителей 13 и 14, второй – из исполнителя 15, третий же фактический отрезок пустой. Тогда в иерархию добавляется один новый менеджер m', ему подчиняется группа {13, 14} (при попытке далее разделить группу менеджера m' получим две группы из одного исполнителя, а третью – пустую, поэтому менеджера m' можно сразу отнести к классу Б).

Рис. 5

Перейдем к следующей итерации. Возьмем менеджера с меткой $[y_1, y_2]$ (см. рис. 4). Границы нормативных отрезков, полученных в результате разбиения отрезка $[y_1,\ y_2]$, изображены на рис. 5, б пунктирными линиями. На том же рисунке сплошными линиями изображены границы фактических отрезков. Они соответствуют группам исполнителей {9, 10}, {11} и {12}. Следовательно, в иерархию добавляется один новый менеджер, которому непосредственно подчиняется группа исполнителей {9, 10}.

В процессе работы алгоритма иерархия строится «сверху вниз» – от верхних уровней к нижним. Будем называть результирующую иерархию *TD-деревом* (от английского top-down) и обозначать ее затраты через $C_{TD}^{r,x}(N)$, где r, x – параметры исходного однородного дерева, а N – множество исполнителей. Верхнюю часть

[16] По окончании первого этапа в иерархии могут присутствовать только менеджеры класса В. На втором этапе некоторые менеджеры могут быть отнесены в класс Г.

Рис. 6

TD-дерева формируют менеджеры класса А. Менеджеры класса В (если они есть) формируют прослойку между менеджерами классов А и Г. Менеджеры классов Б и Г составляют нижнюю часть дерева. В рассматриваемом примере с 15-ю исполнителями в результате работы алгоритма получается *TD*-дерево, изображенное на рис. 6.

Введем следующее техническое ограничение на функцию затрат менеджера.

Определение 4. Пусть наилучшее однородное дерево имеет внутреннюю пропорцию $x = (x_1, \ldots, x_r)$. *Однородная функция затрат менеджера* $c(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ *называется степенно-ограниченной на симплексе* D_r, *если найдутся такие положительные числа* A *и* λ, *что для любой точки* $y = (y_1, \ldots, y_r) \in D_r$ *выполняется неравенство*

$$c(y_1,\ldots,y_r) \le c(x_1,\ldots,x_r) + A\left(\sum_{i=1}^{r} | y_i - x_i |\right)^{\lambda}.$$

Степенно-ограниченность функции затрат означает, что функция не слишком быстро возрастает при движении по симплексу D_r в любом направлении от точки x.[17]

Утверждение 1. Пусть степень однородности функции затрат менеджера больше или равна единице, меры всех исполнителей лежат в некотором диапазоне от $\underline{\mu}$ *до* $\overline{\mu}$, *а наилучшее однородное дерево имеет норму управляемости* r *и внутреннюю пропорцию* x. *Если функция затрат степенно-ограничена на симплексе* D_r, *то отношение* $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N)$ *стремится к единице при стремлении количества исполнителей в множестве* $N = \{1, \ldots, n\}$ *к бесконечности. Иначе говоря, TD-дерево субоптимально при больших* n.[18]

Следствие 1. Если в условиях утверждения 1 наилучшее однородное R-дерево имеет норму управляемости r (*возможно,* $r < R$) *и внутреннюю пропорцию* x, *а функция затрат степенно-ограничена на симплексе* D_r, *то отношение* $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L^R(N)$ *стремится к единице при* $n \to \infty$, *т.е. TD-дерево с нормой управляемости, не*

---

[17] Условие степенной ограниченности является обобщением известного условия непрерывности по Липшицу. В частности, определенная на симплексе D_r гладкая функция степенно-ограничена, если она ограничена на этом симплексе.

[18] Доказательство см. в Приложении.

превышающей r, субоптимально при больших n на классе всех R-деревьев.

Доказательство этого следствия практически дословно повторяет доказательство утверждения 1.

Следствие 2. В условиях утверждения 1 (следствия 1) отношение затрат оптимального дерева (соответственно R-дерева) к их нижней оценке $C_L(N)$ (соответственно $C_L^r(N)$) стремится к единице при стремлении количества исполнителей к бесконечности.

Доказательство следует из того, что затраты оптимального дерева (R-дерева) лежат между их нижней оценкой и $C_{TD}^{r,x}(N)$.

Утверждение 1, а также следствия 1 и 2 говорят о том, что если при степени однородности функции затрат $\gamma \geq 1$ имеется внутреннее решение задачи поиска параметров наилучшего однородного дерева (r-дерева), то нижняя оценка $C_L(N)$ (соответственно $C_L^r(N)$) хорошо описывает затраты оптимального дерева (r-дерева) в больших организациях (при большом количестве исполнителей). Более того, можно построить субоптимальное дерево (r-дерево), затраты которого будут лишь ненамного превышать нижнюю оценку.

6. Субоптимальные *BU*-иерархии

Пусть теперь степень однородности функции затрат строго меньше единицы и все исполнители имеют одинаковую меру. Без ограничения общности считаем, что меры всех исполнителей равны единице. Зафиксируем некоторую норму управляемости r и рассмотрим следующий алгоритм построения дерева над множеством из n исполнителей.

1. Запишем число n в r-ичной системе исчисления, т.е. представим его в виде $n = a_0 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + \ldots + a_k \cdot r^k$, где k – ближайшее снизу целое к числу $\log_r n$.
2. Построим a_k симметричных однородных r-деревьев над множествами из r^k исполнителей, затем a_{k-1} симметричных однородных r-деревьев над множествами из r^{k-1} исполнителей, …, a_2 симметричных однородных r-деревьев над множествами из r^2 исполнителей, a_1 веерных r-иерархий и a_0 «деревьев», состоящих из единственного исполнителя (см. рис. 7). Если $n = r^k$, то искомая иерархия

Рис. 7

получена и алгоритм завершен. В противном случае получили граф, состоящий из $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ несвязанных между собой иерархий.

3. Из множества сотрудников графа, не имеющих начальников, выберем r сотрудников, управляющих группами исполнителей наименьшей меры (если менее r сотрудников не имеют начальников, выберем их всех). Добавим в граф нового менеджера и дадим ему этих сотрудников в непосредственное подчинение.
4. Будем повторять шаг 3 до тех пор, пока не останется только один сотрудник, не имеющий начальника, а граф соответственно не станет древовидной иерархией над множеством из n исполнителей (см. рис. 8).

Рис. 8

В процессе работы алгоритма иерархия строится «снизу-вверх» – от нижних уровней к верхним. Будем называть результирующую иерархию *BU-деревом* (от английского bottom-up) и обозначать ее затраты через $C^r_{BU}(n)$, где индекс r соответствует максимальной норме управляемости этого дерева.

Утверждение 2.[19] *Пусть степень однородности функции затрат меньше единицы, меры всех исполнителей одинаковы, а наилучшее однородное дерево симметрично и имеет норму управляемости r. Если при этом для всех* $r' \le r$ *функция затрат менеджера ограничена на симплексе* $D_{r'}$, *то отношение* $C^r_{BU}(n)/C_L(n)$ *стремится к единице при* $n \to \infty$, *т.е. BU-дерево субоптимально при больших n.*[20, 21]

Следствие 3. Пусть в условиях утверждения 2 наилучшее однородное R-дерево симметрично и имеет норму управляемости r. Если при этом для всех $r' \le r$ *функция затрат менеджера ограничена на симплексе* $D_{r'}$, *то отношение* $C^r_{BU}(n)/C^R_L(n)$ *стремится к единице при* $n \to \infty$, *т.е. BU-дерево с нормой управляемости, не большей*

---

[19] Доказательство варианта этого утверждения для случая так называемых *мультипликативных функций затрат* (см. [6]) было предложено к.ф-м.н. С.П. Мишиным в частной беседе.

[20] Поскольку меры всех исполнителей равны единице, можно считать, что нижние оценки зависят не от множества исполнителей N, а от их количества n.

[21] Доказательство см. в Приложении.

r, субоптимально при больших n на классе всех R-деревьев.

Доказательство этого следствия почти дословно повторяет доказательство утверждения 2.

Следствие 4. В условиях утверждения 2 (*следствия 3*) *отношение затрат оптимального дерева* (*соответственно R-дерева*) *к их нижней оценке* $C_L(n)$ (*соответственно* $C_L^r(n)$) *стремится к единице при стремлении количества исполнителей к бесконечности*.

Доказательство следует из того, что затраты оптимального дерева (R-дерева) лежат между их нижней оценкой $C_L(n)$ и $C_{BU}^r(n)$.

Таким образом, если при $\gamma < 1$ меры исполнителей одинаковы и наилучшее однородное дерево (r-дерево) симметрично, то нижняя оценка $C_L(n)$ хорошо описывает затраты оптимального дерева (r-дерева) в больших организациях – при больших n – и, кроме того, можно построить субоптимальное дерево (r-дерево), затраты $C_{BU}^r(n)$ которого будут не сильно отличаться от затрат оптимального дерева (r-дерева).

Условие одинаковости мер исполнителей можно несколько ослабить – до требования того, чтобы меры всех исполнителей были целыми неотрицательными степенями нормы управляемости r наилучшего однородного дерева.

В этом случае суммарная мера μ исполнителей является целым числом, и можно построить BU-дерево для μ исполнителей, а затем заменить некоторые поддеревья на нижних уровнях исполнителями соответствующей меры. На рис. 9 приведено построение такого модифицированного BU-дерева для восьми исполнителей с мерами 1, 1, 3, 3, 3, 3, 9, 27 и нормой управляемости $r = 3$. Сначала строится BU-дерево для $\mu = 50$ исполнителей, а затем некоторые поддеревья заменяются исполнителями мер 3, 9 и 27.

Рис. 9

Если исполнители имеют меры $\mu(1), \ldots, \mu(n)$, то затраты построенного BU-дерева равны

$$C_{BU}^r(\mu) - \sum_{i=1}^n \left[\mu(i) - \mu(i)^\gamma\right] \frac{c(1/r,...,1/r)}{r^{1-\gamma} - 1},$$

в то время как нижнюю оценку затрат оптимального дерева для такого множества исполнителей можно в соответствии с (1) записать в виде

$$C_L(\mu) - \sum_{i=1}^{n}\left[\mu(i) - \mu(i)^{\gamma}\right]\frac{c(1/r, ..., 1/r)}{r^{1-\gamma} - 1}.$$

В этих выражениях вычитается одинаковый член, и, поскольку $C_{BU}^{r}(\mu)/C_L(\mu)$ стремится к единице при $\mu \to \infty$, можно считать, что и в этом случае нижняя оценка имеет хорошее качество, а BU-дерево субоптимально.

Если при степени однородности функции затрат $\gamma < 1$ наилучшее однородное дерево асимметрично, то качество нижней оценки $C_L(n)$ может быть хуже. Однако даже в этом случае она дает верный порядок роста затрат оптимального дерева с ростом количества исполнителей n. Действительно, пусть наилучшее однородное дерево имеет норму управляемости r и асимметричную (но внутреннюю!) пропорцию x. Тогда при больших n нижняя оценка определяется выражением

$$C_L(n) = (n - n^{\gamma})\frac{c(x_1, ..., x_r)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma} - 1}.$$

Из доказательства утверждения 2 следует, что отношение затрат $C_{BU}^{r}(n)$ BU-дерева с максимальной нормой управляемости r к затратам симметричного однородного r-дерева стремится к единице. В соответствии с (1) затраты симметричного однородного r-дерева равны

$$(n - n^{\gamma})\frac{c(1/r, ..., 1/r)}{r^{1-\gamma} - 1}.$$

Следовательно, существует конечный предел отношения затрат BU-дерева к нижней оценке $C_L(n)$. Значение этого предела определяется выражением

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{BU}^{r}(n)}{C_L(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma} - 1}{r^{1-\gamma} - 1}\,\frac{c(1/r, ..., 1/r)}{c(x_1, ..., x_r)}, \tag{3}$$

и если пропорция x не сильно отличается от симметричной, а функция затрат менеджера ведет себя достаточно «хорошо» на симплексе D_r, то значение этого предела ненамного превышает единицу.

Поскольку затраты BU-дерева являются верхней оценкой затрат оптимального дерева, для заданного количества исполнителей n можно гарантировать, что затраты оптимального дерева лежат в диапазоне от $C_L(n)$ до $C_{BU}^{r}(n)$, т.е. при больших n затраты оптимального дерева превышают нижнюю оценку не более чем на процент, задаваемый значением предела (3).

7. Заключение

Задача поиска оптимальной организационной структуры была сведена к задаче дискретной оптимизации – минимизации выбором допустимой иерархии суммарных затрат на содержание входящих в нее менеджеров. Было показано, что в рамках предположений модели оптимальные иерархии стремятся быть однородными деревьями, все менеджеры которых имеют одинаковое количество непосредственных подчиненных и делят подчиненное подразделение между этими непосредственными подчиненными в одинаковой пропорции. Были предложены алгоритмы построения субоптимальных иерархий, затраты которых для больших организаций ненамного превышают затраты оптимальной иерархии[22].

Проведенный анализ показал, что субоптимальная иерархия имеет существенно различный вид при степени однородности функции затрат менеджеров больше и меньше единицы. В первом случае субоптимально так называемое *TD*-дерево, при построении которого особое внимание уделяется построению верхней части иерархии в смысле ее близости к «нормативному» однородному дереву. Во втором случае важны затраты нижней части иерархии, поэтому субоптимально *BU*-дерево, нижняя часть которого точно совпадает с «нормативным» однородным деревом.

В [12] было показано, что во многих содержательных моделях условия доказанных выше утверждений 1 и 2 выполняются, что позволяет говорить о задаче поиска оптимальной древовидной иерархии для однородных функций затрат менеджера как о фактически решенной.

Среди перспективных направлений исследований можно назвать рассмотрение неоднородных функций затрат менеджера, а также исследование других моделей формирования оптимальных иерархий, например моделей надстройки иерархии

---

[22] Стоит отметить, что, несмотря на некоторую громоздкость этих алгоритмов, они имеют полиномиальную вычислительную сложность и потому могут считаться эффективными.

менеджеров над *сетью технологических взаимодействий исполнителей* (подробнее см. в [9, 10, 12, 13]).

Доказательство утверждения 1. Без ограничения общности считаем, что меры исполнителей меньше или равны единице (т.е. $\overline{\mu} = 1$) и что компоненты оптимальной пропорции x упорядочены по возрастанию.

Затраты *TD*-дерева складываются из затрат C_T менеджеров класса А, формирующих верхнюю часть дерева, и затрат C_D менеджеров остальных классов, составляющих нижнюю часть дерева.

Важным свойством *TD*-дерева является то, что в нем по построению меры групп, управляемых менеджерами классов А, Б и В, отличаются от длин их нормативных отрезков не более чем на $\overline{\mu}$ (т.е. на единицу), поскольку при построении фактического отрезка каждый конец нормативного отрезка сдвигается к ближайшей границе между исполнителями, т.е. не более чем на $\overline{\mu}/2$.

Оценим сверху затраты C_D. Менеджер принадлежит классу Б, если при попытке разделить его нормативный отрезок длины y в пропорции $x = (x_1, \ldots, x_r)$ все фактические отрезки состоят не более чем из одного исполнителя. В этом случае верно неравенство $y{\cdot}x_r \le 2\overline{\mu}$, так как иначе фактический отрезок для последней компоненты пропорции не может состоять из одного исполнителя.

Менеджер относится к классу В, если при делении его нормативного отрезка длины y получается лишь один фактический отрезок ненулевой длины. Для такого менеджера $y{\cdot}x_1 \le \overline{\mu}$, так как иначе при делении нормативного отрезка y уже наименьшая компонента пропорции даст непустой фактический отрезок.

Следовательно, длина нормативного отрезка менеджера класса Б или В не превышает $y_D := \max[2\overline{\mu}/x_r,\ \overline{\mu}/x_1]$, а значит любой такой менеджер управляет группой меры не более $y_D + \overline{\mu}$. То же верно и для менеджеров класса Г, так как каждый из них подчинен некоторому менеджеру класса В, и, следовательно, управляет меньшей группой исполнителей.

Тогда из степенно-ограниченности и нормальности функции затрат следует, что затраты менеджера класса Б, В или Г ограничены сверху некоторой константой D, не зависящей от размера организации (количества исполнителей n). Количество таких менеджеров не превышает количества исполнителей n, следовательно, суммарные затраты C_D менеджеров классов Б, В и Г не превышают $D \cdot n$.

Оценим сверху затраты C_T менеджеров класса А. Пусть некоторый такой менеджер m управляет группой меры μ, а r' его непосредственных подчиненных управляют группами мер $\mu_1,...,\mu_{r'}$. По построению в TD-дереве любой менеджер имеет не более r непосредственных подчиненных, поэтому $r' \leq r$. Затраты менеджера m равны $c(\mu_1,...,\mu_{r'})$ и в силу нормальности функции затрат от добавления $r - r'$ нулевых компонент его затраты не уменьшатся: $c(\mu_1,...,\mu_{r'}) \leq c(\mu_1,...,\mu_{r'},0,...,0)$. Поэтому для простоты будем считать, что менеджер m имеет ровно r непосредственных подчиненных с мерами $\mu_1,...,\mu_r$, где некоторые меры могут равняться нулю.

Если нормативный отрезок менеджера m имеет длину y, то длины нормативных отрезков его непосредственных подчиненных равны $x_1 y, \ldots, x_r y$. Длины нормативных отрезков отличаются от длин фактических отрезков не более чем на единицу. Если ввести обозначения $\delta := \mu - y$, $\delta_i := \mu_i - x_i y$, $i = 1, ..., r$, то верны неравенства $|\delta| \leq 1$, $|\delta_i| \leq 1$, $i = 1, ..., r$.

В силу однородности функции затрат

$$c(\mu_1,...,\mu_r) = \mu^\gamma c\left(\frac{\mu_1}{\mu},...,\frac{\mu_r}{\mu}\right) = \mu^\gamma c\left(\frac{x_1 y + \delta_1}{y+\delta},...,\frac{x_r y + \delta_r}{y+\delta}\right) =$$

$$= \mu^\gamma c\left(\frac{x_1(y+\delta) + (\delta_1 - x_1\delta)}{y+\delta},...,\frac{x_r(y+\delta) + (\delta_r - x_r\delta)}{y+\delta}\right) = \mu^\gamma c\left(x_1 + \frac{\delta_1 - x_1\delta}{\mu},...,x_r + \frac{\delta_r - x_r\delta}{\mu}\right).$$

Поскольку функция затрат степенно-ограничена, найдутся такие числа A и $\lambda > 0$, что

$$\mu^\gamma c\left(x_1 + \frac{\delta_1 - x_1\delta}{\mu},...,x_r + \frac{\delta_r - x_r\delta}{\mu}\right) \leq \mu^\gamma \left[c(x_1,...,x_r) + A\left(\sum_{i=1}^{r}\left|\frac{\delta_i - x_i\delta}{\mu}\right|\right)^\lambda\right].$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda + 1 \leq \gamma$, поскольку при уменьшении степени λ условие степенной ограниченности становится более слабым.

Воспользовавшись тем, что $|\delta_i - x_i\delta| \leq 1 + x_i$, $\sum_{i=1}^{r} x_i = 1$, и огрубив далее неравенство, получаем, что

$$c(\mu_1,...,\mu_r) \leq \mu^\gamma (c(x_1,...,x_r) + A(r+1)^\lambda \mu^{-\lambda}).$$

Обозначая $E := A(r + 1)^\lambda$, $C := c(x_1,...,x_r)$, имеем, что затраты любого менеджера верхних уровней не превышают величины $C\mu^{\gamma} + E\mu^{\gamma-\lambda}$. Вспомним, что $\mu := y + \delta$, и еще огрубим верхнюю оценку затрат менеджера:

$$Cy^{\gamma}\left(1+\frac{\delta}{y}\right)^{\gamma} + Ey^{\gamma-\lambda}\left(1+\frac{\delta}{y}\right)^{\gamma-\lambda} \le Cy^{\gamma}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\gamma} + Ey^{\gamma-\lambda}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\gamma-\lambda}.$$

Длина y нормативного отрезка менеджера верхних уровней ограничена снизу величиной $y_T := \min\limits_{i=1,..,r} \underline{\mu}/x_i = \underline{\mu}/x_r$, поскольку как минимум один его непосредственный подчиненный управляет группой из двух и более исполнителей, а значит его нормативный отрезок имеет длину не меньше чем $\underline{\mu}$.

Следовательно, обратная к y величина $1/y$ ограничена сверху константой $1/y_T$, и функции $(1+1/y)^{\gamma}, (1+1/y)^{\gamma-\lambda}$ при $1/y \in [0, 1/y_T]$ можно мажорировать функциями вида $1 + D_1/y$, $1 + D_2/y$, где D_1, D_2 – некоторые положительные коэффициенты.

Таким образом, затраты любого менеджера m класса А не превышают величины

$$C \cdot y(m)^{\gamma} + C \cdot D_1 \cdot y(m)^{\gamma-1} + E \cdot y(m)^{\gamma-\lambda} + E \cdot D_2 \cdot y(m)^{\gamma-\lambda-1},$$

где через $y(m)$ обозначена длина нормативного отрезка менеджера m.

Обозначая через M_T множество менеджеров класса А, имеем, что их суммарные затраты C_T не превышают

$$C\sum_{m\in M_T} y(m)^{\gamma} + CD_1\sum_{m\in M_T} y(m)^{\gamma-1} + E\sum_{m\in M_T} y(m)^{\gamma-\lambda} + ED_2\sum_{m\in M_T} y(m)^{\gamma-\lambda-1}. \tag{П.1}$$

Рассмотрим множество сотрудников иерархии, которые являются непосредственными подчиненными менеджеров класса А, но сами этому классу не принадлежат[23]. Пусть количество таких сотрудников k и они имеют нормативные отрезки с длинами $Y_1, \ldots, Y_k$. Легко видеть, что $Y_1 + \ldots + Y_k = \mu(N)$. Значит, для любого числа η сумма вида $\sum_{m\in M_T} y(m)^{\eta}$ совпадает с затратами однородного r-дерева с пропорцией x для функции затрат менеджера вида $(\mu_1 + \ldots + \mu_r)^{\eta}$ и «множества исполнителей» с мерами $Y_1, \ldots, Y_k$. Заметим, что $Y_i \le y_D = \max[2\overline{\mu}/x_r, \overline{\mu}/x_1]$, $i = 1,\ldots,k$.

Для упрощения выкладок предположим, что числа γ, $\gamma-1$, $\gamma-\lambda$, $\gamma-\lambda-1$ отличны

---

[23] Они могут быть менеджерами классов Б и В или конечными исполнителями.

от единицы[24]. Тогда, заменяя по (1) суммы в (П.1) затратами соответствующих однородных деревьев, получаем, что

$$C_T \le \frac{|\mu(N)^{\gamma} - \sum_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma}|\,C}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma}|} + \frac{|\mu(N)^{\gamma-1} - \sum_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma-1}|\,CD_1}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-1}|} + \tag{П.2}$$
$$+ \frac{|\mu(N)^{\gamma-\lambda} - \sum_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma-\lambda}|\,E}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-\lambda}|} + \frac{|\mu(N)^{\gamma-\lambda-1} - \sum_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma-\lambda-1}|\,ED_2}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-\lambda-1}|}.$$

Вспомним, что затраты $C_{TD}^{r,x}(N)$ *TD*-дерева равны $C_D + C_T$. Наша цель – показать, что отношение $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N)$ стремится к единице с ростом количества исполнителей n, т.е. что к единице стремится отношение $(C_D + C_T)/C_L(N)$, где

$$C_L(N) = |\mu(N)^{\gamma} - \sum_{j=1}^{n} \mu(j)^{\gamma}|\frac{C}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma}|}.$$

Поскольку $C_L(N)$ – это нижняя оценка затрат древовидной иерархии для множества исполнителей N, очевидно, что $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N) \ge 1$, и значит если предел существует, то он не меньше единицы. Докажем, что он также не превышает единицу.

Так как мера любого исполнителя не превышает $\overline{\mu}$, а количество исполнителей n не превышает $\mu(N)/\underline{\mu}$, верно неравенство

$$C_L(N) \ge C_L' := |\mu(N)^{\gamma} - \mu(N)\overline{\mu}^{\gamma}/\underline{\mu}|\frac{C}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma}|},$$

и значит $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N) = (C_D + C_T)/C_L(N) \le (C_D + C_T)/C_L'$.

Как показано выше, $C_D \le D \cdot n$. С учетом того, что $n \le \mu(N)/\underline{\mu}$, справедливо неравенство $C_D \le \mu(N)D/\underline{\mu}$. Следовательно, так как $\gamma > 1$, C_D/C_L' стремится к нулю с ростом $\mu(N)$, а следовательно и с ростом n. Поэтому искомый предел $C_{TD}^{r,x}(N)/C_L(N)$ не превышает предела отношения C_T/C_L'. Воспользовавшись (П.2), получаем:

[24] Случай, когда некоторые из этих чисел равны единице, рассматривается аналогично.

$$
C_T / C_L' \le \frac{|\mu(N)^\gamma - \sum_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma}|}{|\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma / \underline{\mu}|} + \frac{|\mu(N)^{\gamma-1} - \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma-1}| CD_1}{|1-\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-1}| C_L'} +
$$

(П.3)

$$
+\frac{|\mu(N)^{\gamma-\lambda} - \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma-\lambda}| E}{|1-\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-\lambda}| C_L'} + \frac{|\mu(N)^{\gamma-\lambda-1} - \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma-\lambda-1}| ED_2}{|1-\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-\lambda-1}| C_L'}.
$$

Первое слагаемое в правой части (П.3) не превышает

$$
\frac{\mu(N)^\gamma}{\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma / \underline{\mu}},
$$

а это выражение стремится к единице с ростом $\mu(N)$ (а значит, и с ростом n).

Покажем, что остальные три слагаемых в правой части (П.3) стремятся к нулю с ростом n. Рассмотрим второе слагаемое

$$
\frac{|\mu(N)^{\gamma-1} - \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma-1}| CD_1}{|1-\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-1}| C_L'} = \frac{|\mu(N)^{\gamma-1} - \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j^{\gamma-1}|}{|\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma / \underline{\mu}|} \frac{D_1 |1-\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{\gamma}|}{|1-\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-1}|}.
$$

Если $\gamma - 1 > 1$, то это выражение не превышает

$$
\frac{\mu(N)^{\gamma-1}}{\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma / \underline{\mu}} \cdot \frac{D_1 |1-\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{\gamma}|}{|1-\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-1}|}
$$

и с ростом $\mu(N)$ ведет себя как $\mu(N)^{-1}$, т.е. стремится к нулю.

Если же $\gamma - 1 < 1$, то в силу того, что Y_i ($i = 1,\dots,k$) не превышает y_D и верно неравенство $k \le n \le \mu(N)/\underline{\mu}$, второе слагаемое не превышает

$$
\frac{\mu(N) y_D^{\gamma-1} / \underline{\mu}}{|\mu(N)^\gamma - \mu(N)\overline{\mu}^\gamma / \underline{\mu}|} \cdot \frac{D_1 |1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma}|}{|1-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma-1}|}
$$

и с ростом $\mu(N)$ ведет себя как $\mu(N)^{1-\gamma}$, т.е. также стремится к нулю. Третье и четвертое слагаемые в правой части (П.3) рассматриваются аналогично.

Таким образом, показано, что предел C_T / C_L' при $n \to \infty$ не превышает единицы. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} C_{TD}^{r,x}(N) / C_L(N) = 1$, и утверждение 1 доказано. •

Доказательство утверждения 2. Оценим сверху затраты BU-дерева. Его затраты складываются из затрат $a_0 + a_1 + \dots + a_k$ однородных r-деревьев и суммарных затрат C_T объединяющих эти деревья менеджеров. Затраты однородного дерева определяются (1), поэтому

$$C^r_{BU}(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i (r^i - (r^i)^\gamma) C_0 + C_T \text{, где } C_0 := \frac{c(1/r,...,1/r)}{r^{1-\gamma} - 1}.$$

Поскольку $n = \sum_{i=0}^{k} a_i r^i$, получаем, что

$$C^r_{BU}(n) \le nC_0 + C_T .$$

Оценим сверху затраты C_T. Они складываются из затрат не более чем $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ менеджеров. Поскольку $a_i < r$, $i = 1, \ldots, k$, а $k \le \log_r n$, верно неравенство

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_k \le r \cdot k \le r \cdot \log_r n.$$

Каждый менеджер *BU*-дерева имеет не более r непосредственных подчиненных и управляет группой меры не более n. По условию утверждения для всех $r' \le r$ функция затрат менеджера на симплексе $D_{r'}$ ограничена константой. Если обозначить ее через C, то затраты любого менеджера не будут превышать величины $n^\gamma \cdot C$. Следовательно, $C_T \le n^\gamma \cdot C \cdot r \cdot \log_r n$ и $C^r_{BU}(n) \le nC_0 + n^\gamma C \cdot r \cdot \log_r n$.

Нижняя оценка затрат оптимального дерева определяется формулой

$$C_L(n) = (n - n^\gamma) \frac{c(1/r,...,1/r)}{r^{1-\gamma} - 1} = (n - n^\gamma) C_0 ,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C^r_{BU}(n)}{C_L(n)} \le \lim_{n\to\infty} \frac{nC_0 + n^\gamma Cr \log_r n}{(n - n^\gamma)C_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - n^{\gamma - 1}} + \frac{Cr}{C_0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log_r n}{n^{1-\gamma} - 1} .$$

Поскольку степень однородности функции затрат γ по условию строго меньше единицы, а $\log_r n$ растет медленнее, чем $n^{1-\gamma}$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C^r_{BU}(n)}{C_L(n)} \le 1 .$$

В то же время поскольку $C_L(n)$ – нижняя оценка затрат дерева, $C^r_{BU}(n) \ge C_L(n)$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{C^r_{BU}(n)}{C_L(n)} \ge 1$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \frac{C^r_{BU}(n)}{C_L(n)} = 1$, и утверждение 2 доказано. •

Список литературы

1. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
2. *Милгром П., Робертс Дж.* Экономика, организация и менеджмент: В 2-х т. СПб.: Экономическая школа, 2004.
3. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. – Cambridge and London: MIT Press, 2005.
4. *Цвиркун А.Д.* Структура сложных систем. М.: Радио и связь, 1975.
5. *Цвиркун А.Д.* Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982.
6. *Губко М.В.* Поиск оптимальных организационных иерархий при однородных функциях затрат менеджеров // АиТ. 2008. № 1. С. 97-113.
7. *Воронин А.А., Мишин С. П.* Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева // Вестн. Волг. ун-та. Сер. 1: Математика. Физика. 2001. С. 78–98.
8. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003.
9. *Мишин С.П.* Оптимальные иерархии управления в экономических системах. М.: ПМСОФТ, 2004.
10. *Мишин С.П.* Оптимальность древовидной иерархии управления симметричной производственной линией // Проблемы управления. 2006. №6. С. 36-42.
11. *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А.* Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.
12. *Губко М.В.* Математические модели оптимизации иерархических структур. М.: ЛЕНАНД, 2006.
13. *Губко М.В., Мишин С.П.* Оптимальная структура системы управления технологическими связями // Матер. межд. конф. «Современные сложные системы управления». 2002. Старый Оскол: СТИ. С. 50-54.

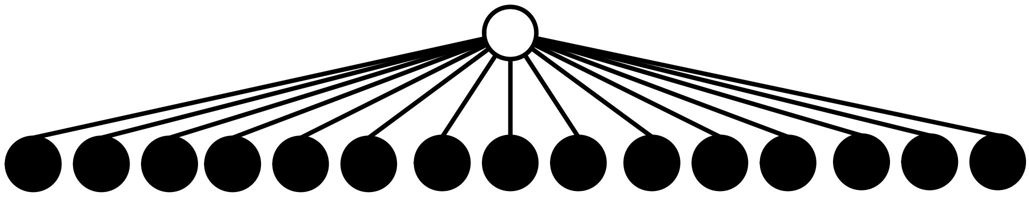

Рис. 1. Пример веерной иерархии для множества исполнителей $N = \{1, \ldots, 15\}$.

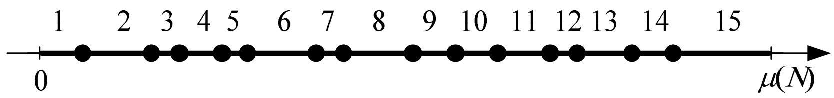

Рис. 2. Пример графического представления

множества исполнителей $N = \{1, \ldots, 15\}$.

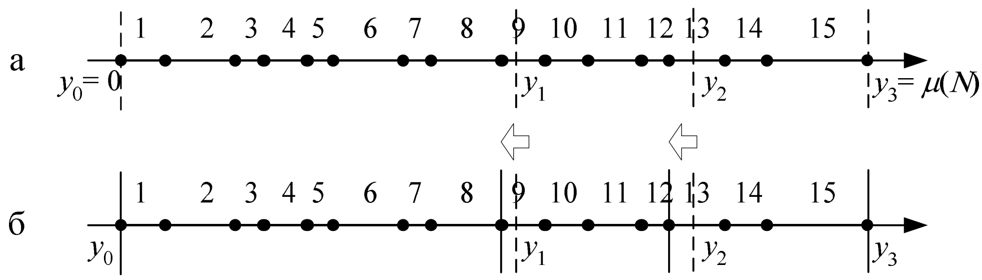

Рис. 3. Пример нормативных (а) и фактических (б) отрезков

для первой итерации алгоритма, $r = 3$, $x = (1/2, 1/4, 1/4)$.

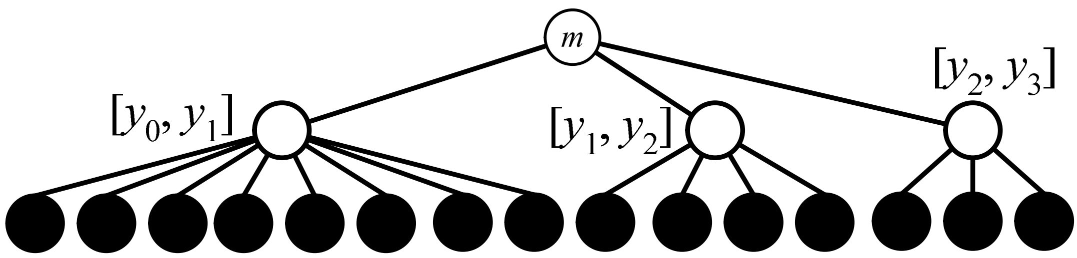

Рис. 4. Пример добавления новых менеджеров на первой итерации алгоритма.

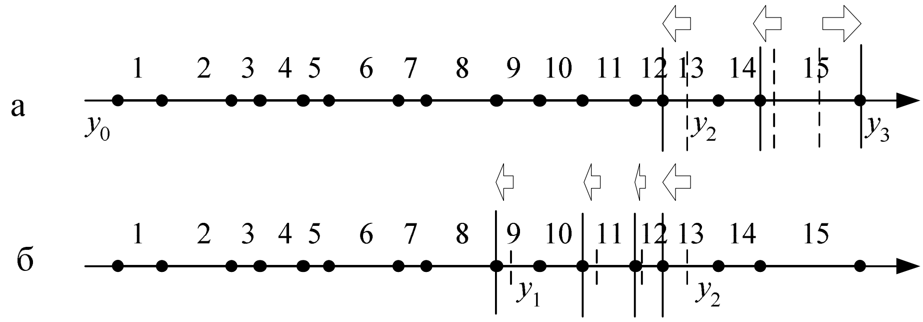

Рис. 5. Пример фактических отрезков для второй (а) и третьей (б) итерации алгоритма, $r = 3$, $x = (1/2, 1/4, 1/4)$.

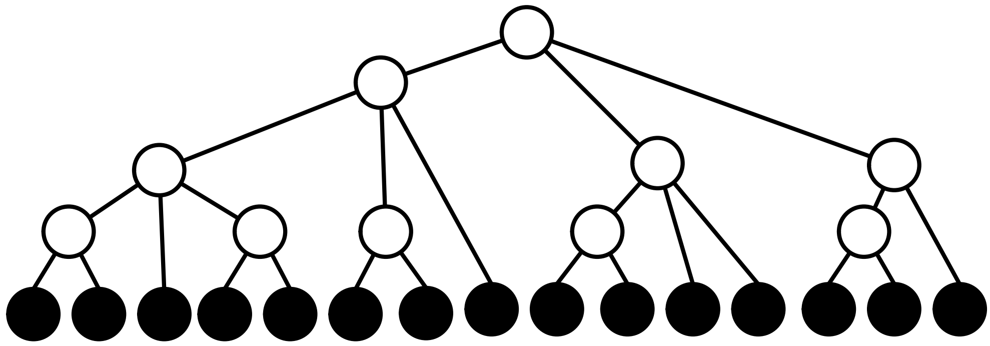

Рис. 6. Пример *TD*-дерева.

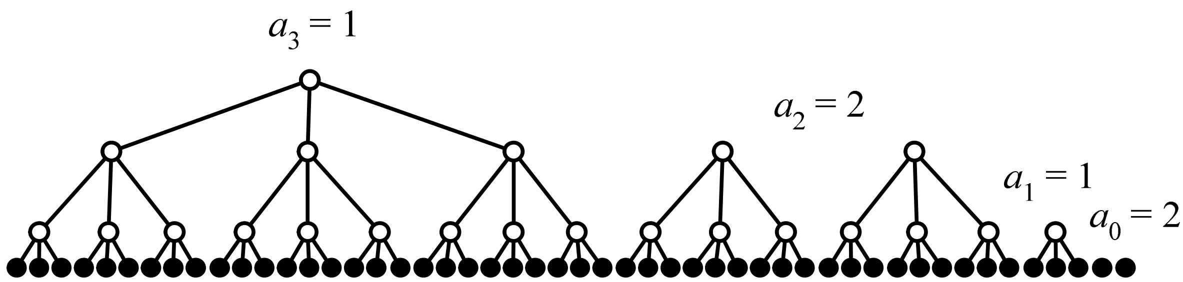

Рис. 7. Пример построения дерева для 50 исполнителей и нормы управляемости $r = 3$.

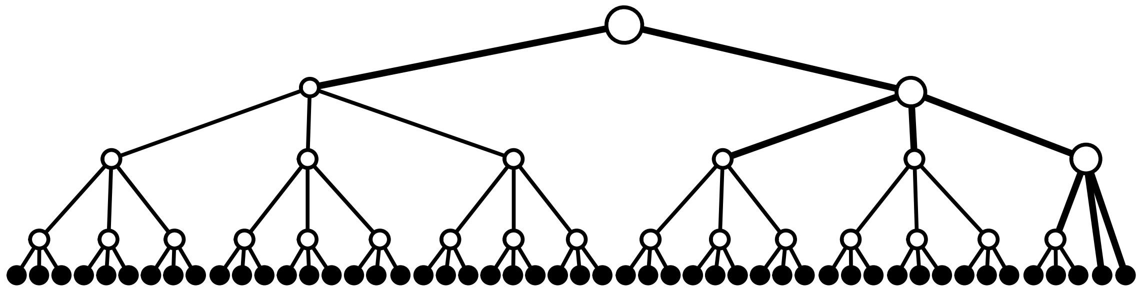

Рис. 8. Пример дерева для 50 исполнителей и $r = 3$ (добавляемые на шаге 3 менеджеры и связи отмечены более жирно).

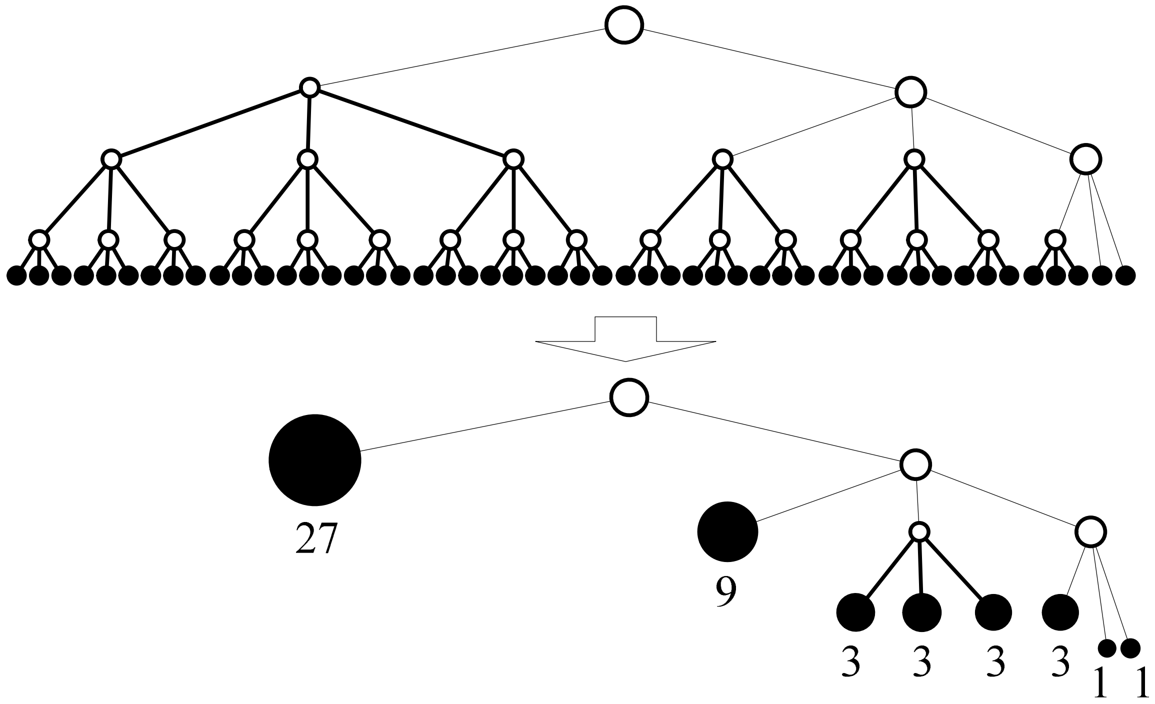

Рис. 9. Пример построения *BU*-дерева для множества исполнителей, имеющих различные меры.

Рис. 1. Пример веерной иерархии для множества исполнителей $N = \{1, \ldots, 15\}$

Рис. 2. Пример графического представления
множества исполнителей $N = \{1, \ldots, 15\}$

Рис. 3. Пример нормативных (а) и фактических (б) отрезков
для первой итерации алгоритма, $r = 3$, $x = (1/2, 1/4, 1/4)$

Рис. 4. Пример добавления новых менеджеров на первой итерации алгоритма

Рис. 5. Пример фактических отрезков для второй (а) и третьей (б)
итерации алгоритма, $r = 3$, $x = (1/2, 1/4, 1/4)$

Рис. 6. Пример *TD*-дерева

Рис. 7. Пример построения дерева для 50 исполнителей
и нормы управляемости $r = 3$

Рис. 8. Пример дерева для 50 исполнителей и $r = 3$ (добавляемые на шаге 3 менеджеры и связи отмечены более жирно)

Рис. 9. Пример построения *BU*-дерева для множества
исполнителей, имеющих различные меры