ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ НИЖНИХ ОЦЕНОК ЗАТРАТ СВЯЗЫВАЮЩЕЙ СЕТИ[1]

Беляев А.[2]
(*Московский физико-технический институт, Долгопрудный*)
Губко М.В.[3]
(*Институт проблем управления РАН*, *Москва*)

Дается краткое описание модели связывающей сети с аддитивной функцией затрат и существующие методы получения нижних оценок функции затрат оптимальных связывающих сетей. Приводятся параметры и результаты эксперимента, направленного на экспериментальную проверку качества имеющихся теоретических нижних оценок функции затрат оптимальных сетей.

Ключевые слова: связывающая сеть, оптимизация структуры, нижние оценки функции затрат.

Введение

В [1] была предложена модель оптимальной связывающей сети, позволяющая описать довольно широкий класс прикладных проблем. Такая сеть состоит из двух типов узлов: основных вершин, которые испытывают потребность в связи, и дополнительных, которые осуществляют коммутацию потоков между основными вершинами. Задача состоит в поиске оптимальной топологии связывающей сети, обеспечивающей связи между

[1] *Работа выполнена при поддержке РФФИ* (13-07-00389).
[2] *Александр Беляев*, *бакалавр*, *студент* (*aw.belyaev@gmail.com*).
[3] *Михаил Владимирович Губко*, *кандидат технических наук*, *с.н.с.* (*mgoubko@mail.ru*).

основными вершинами и, притом, минимизирующей функцию затрат сети.

В модели связывающей сети затраты сосредоточены только в дополнительных вершинах и определяется протекающими через них потоками. Важным частным случаем является аддитивная функция затрат – состоящая из двух слагаемых, одно из которых зависит от проходящих через вершину потоков, а второе – от количества инцидентных ребер.

Для отыскания решения этой задачи важно получить качественные нижние оценки функций затрат связывающей сети. Эти оценки используются в алгоритме ветвей и границ поиска оптимальной сети. Также возможны применения нижних оценок в эвристических алгоритмах.

1. Модель

Пусть задано некоторое множество вершин $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ – *множество основных вершин*. Потребность в связях между вершинами можно задать связным ориентированным графом $\langle W, E_R \rangle$ с множеством вершин W и множеством дуг $E_R \subseteq W \times W$ – *графом связей*.

Через $M = \{m_1, \ldots, m_q\}$ обозначим множество *дополнительных* вершин. Ориентированный граф $H = \langle V, E_H \rangle$ с множеством вершин $V = W \cup M$ и множеством дуг E_H назовем *связывающей сетью* над множеством основных вершин W с графом связей $\langle W, E_R \rangle$, если из того что дуга ww' принадлежит E_R следует, что в H есть (направленный) путь из w в w'.

Положим, что основные вершины W неспособны к коммутации, т.е. имеют суммарно не более одной входящей и не более одной исходящей дуги.

Пусть затраты сети включают только затраты дополнительных вершин $m \in M$, а затраты вершины определяются только локальной структурой сети в окрестности этой вершины, а именно, потоками, протекающими по входящим дугам $E^{in}(m) = \{u_1 m, \ldots, u_k m\}$ и исходящим дугам $E^{out}(m) = \{m v_1, \ldots, m v_r\}$ вершины m. Таким образом, функции затрат зависят от количества входящих и исходящих дуг, протекающих по этим дугам потоков и объема работы по коммутации потоков, которой занимаются дополнительные вершины.

Предположим, что функция затрат является аддитивной, т.е. она представима в виде двух слагаемых $c(m, H) = c_1(d_H(m)) + c_2(\rho_H(m))$, где $d_H(m)$ – степень вершины m в сети H, $\rho_H(m)$ – объем потока, протекающего через вершину m в сети H, и $c_1(\cdot)$, $c_2(\cdot)$ – неотрицательные функции.

2. Постановка задачи

Исследуем задачу поиска оптимальной неориентированной для множества основных вершин W, матрицы объемов потоков $R = \rho(w,w')$ и функции затрат $c(m, H) = c_1(d_H(m)) + c_2(\rho(m))$.

Поиск оптимальной структуры такой связывающей сети состоит из четырех этапов:

1. Определение оптимального количества дополнительных вершин q.
2. Определение структуры связей H_M между дополнительными вершинами.
3. Определение количества $k(m)$ основных вершин, инцидентных каждой дополнительной вершине $m \in M$.
4. Определение разбиения $W_1, \ldots, W_q$ ($\cup_{m=1,..q} W_m = W, W_m \cap W_{m'} = \varnothing$, $|W_m| = k_m$) основных вершин по инцидентным им дополнительным вершинам, которое также задает множество остальных ребер сети $E_W := (w,m): w \in W_m, m = 1,...,q$.

Полностью эта задача пока не решена, однако в [1] был исследован четвертый этап. В этом случае фиксированы степени дополнительных вершин, а, следовательно, первые слагаемые функции затрат $c_1(k(m))$ всех вершин $m \in M$ постоянны.

В [1] были предложены нижние оценки для различных видов функции затрат и топологии сети дополнительных вершин:

1. Нижние оценки для двухуровневой сети в условиях выпуклой функции затрат,

2. Нижние оценки для древовидной сети в условиях выпуклой функции затрат,
3. Нижние оценки для древовидной сети в условиях вогнутой функции затрат,
4. Нижние оценки для древовидной сети в условиях линейной функции затрат.

Для изучения качества этих нижних оценок был поставлен численный эксперимент.

3. Постановка эксперимента

Целью поставленного эксперимента являлось получение среднестатистических значений качества $\varepsilon_{\underline{C}_2} = \underline{C}_2 / C_2$, определяемых как отношения оценки функции затрат оптимальной сети к найденному точному значению этой функции, а также проверка следующих гипотез:

1. Нижние оценки получались при помощи линеаризации. Таким образом, нижние оценки выпуклых функций затрат должны быть качественными, а вогнутых – в лучшем случае – удовлетворительными.
2. В ходе получения нижних оценок производилась релаксация условий частной задачи минимизации для перехода от матриц к их спектральным значениям. Тем не менее, погрешность, вносимая такой аппроксимацией невелика, т.е. для линейной функции затрат качество будет велико.
3. Оценки имеют хорошее качество не при всех возможных k, т.е. существует k^*, для которого качество оценок существенно выше, чем их среднее значение по k.
4. Качество всех оценок зависит от плотности заполнения матрицы R.

В ходе эксперимента для фиксированного количества дополнительных вершин q, матрицы связей R и топологии H_M вычислялись оценки функции затрат для всех допустимых k и их точные значения. На основе полученных данных вычислялось два типа значений качества оценок – качество

$\varepsilon^*_{C_2} = \dfrac{\underline{C}_2(R,q,H_M,k^*)}{C_2(R,q,H_M,k^{**})}$, максимальное по всем допустимым векторам k (для краткости ниже будем его называть «оптимальное качество») и «среднее» качество $\bar{\varepsilon}_{C_2} = \langle \dfrac{\underline{C}_2(R,q,H_M,k)}{C_2(R,q,H_M,k)} \rangle$, где усреднение бралось по всем допустимым векторам k.

Определялось качество следующих оценок:

1. случай выпуклой функции затрат для древовидной сети: «оптимальное» качество $\varepsilon^*_{\underline{C}_2^{\cup}}$ и «среднее» качество $\bar{\varepsilon}_{\underline{C}_2^{\cup}}$,
2. случай вогнутой функции затрат для древовидной сети: «оптимальное» качество $\varepsilon^*_{\underline{C}_2^{\cap}}$ и «среднее» качество $\bar{\varepsilon}_{\underline{C}_2^{\cap}}$,
3. случай линейной функции затрат для древовидной сети: «оптимальное» качество $\varepsilon^*_{\underline{C}_2^{-}}$ и «среднее» качество $\bar{\varepsilon}_{\underline{C}_2^{-}}$,
4. случай выпуклой функции затрат для двухуровневой сети: «оптимальное» качество $\varepsilon^*_{\underline{C}_2}$ и «среднее» качество $\bar{\varepsilon}_{\underline{C}_2}$.

Было поставлено несколько серий экспериментов с различными фиксированными параметрами, результатом которых являлись усреднения названных типов оценок по экспериментам – $\bar{\varepsilon}^*_{C_2} = \langle \varepsilon^*_{C_2} \rangle$ и $\bar{\bar{\varepsilon}}_{C_2} = \langle \bar{\varepsilon}_{C_2} \rangle$.

Все эксперименты проводились для фиксированной топологии сети дополнительных вершин.

4. Результаты эксперимента

1. В ходе эксперимента подтвердилась гипотеза о более высоком качестве нижних оценок для оптимального вектора k по сравнению со «средним» качеством нижних оценок для случайных векторов k.

2. Качество полученных оценок для линейной, выпуклой и вогнутой функции затрат древовидной сети совпало с ожиданиями. Качество нижних оценок для линейной и выпуклой функции древовидной сети оказались достаточно высоким (выше 90%), в то время как для выпуклой – ожидаемо низкими (около 70%). Однако качество оценок для двухуровневой сети оказалось значительно хуже ожидаемого.
3. Линеаризация дала достаточно качественные значения оценок в случае выпуклых функций затрат.
4. С уменьшением плотности матрицы *R* качество нижних оценок существенно падает.

5. Заключение

В результате эксперимента было установлено, что при большой плотности матрицы связей качество оценок выпуклой функции затрат достаточно велико.

Для вогнутой же функции основную часть погрешности вносит ошибка линеаризации в силу того, что невозможно построение касательной.

Однако для всех случаев погрешность спектральной оценки быстро растет с падением плотности матрицы, что и определяет перспективы дальнейших исследований.

Литература

1. ГУБКО М.В. *Модели и методы оптимизации структуры иерархических систем обработки информации*. дисс. на соиск. степени д.ф.-м.-н. – М.: ИПУ РАН, 2014.
2. ГУБКО М.В. *Спектральные нижние оценки затрат связывающей сети* // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014), Москва, 16-19 июня 2014 г. С. 1959-1970.

Abstract: *We briefly survey the basic model of communication network topology optimization and report numeric results on the* *quality of recently developed lower-bound estimates of the optimal communication network with the fixed topology of routers.*

Ключевые слова: communication network, structure optimization, lower-bound estimates of network cost.