АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ ДРЕВОВИДНОЙ ИЕРАРХИИ

М.В. Губко[1], А.И. Даниленко[2]

[1] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет)
e-mail: doz@doz.dax.ru

Постановка задачи

Во многих областях науки и техники возникают задачи поиска оптимальных *иерархических структур*. Например, в задаче построения *организационной иерархии* необходимо при заданной технологии функционирования [4], определяющей множество $N = \{w_1, ..., w_n\}$ рядовых сотрудников (*исполнителей*), наилучшим образом надстроить над множеством исполнителей иерархию *менеджеров* – иерархию управления. Множество менеджеров обозначим через M.

Организационная иерархия [3] – это ориентированный ациклический граф H с множеством вершин $V = N \bigcup M$ (*сотрудников* организации) и множеством дуг $E \subseteq V \times M$, отражающих подчиненность сотрудников и направленных от подчиненного к начальнику. Если в графе есть цепочка ребер от сотрудника v_1 к сотруднику v_2, то v_2 *управляет* сотрудником v_1, а v_1 *подчинен* сотруднику v_2. В организационной иерархии каждый менеджер имеет, по меньшей мере, одного подчиненного и есть менеджер (т.н. *топ-менеджер*), управляющий всеми исполнителями. Исполнители же подчиненных не имеют. Иерархия называется *деревом*, если в ней только топ-менеджер не имеет начальников, а остальные сотрудники имеют одного непосредственного начальника.

Менеджер $m \in M$ в иерархии H *управляет группой исполнителей* $s_H(m) \subseteq N$, состоящей из исполнителей, для которых этот менеджер является начальником в иерархии H. Предположим, что каждому исполнителю $w \in N$ поставлена в соответствие положительная *мера* $\mu(w)$, описывающая сложность выполняемой им работы. Мера $\mu(s)$ группы исполнителей $s \subseteq N$ равна сумме мер входящих в нее исполнителей.

Содержание менеджеров требует расходов, и затраты $C(H)$ иерархии H равны сумме затрат менеджеров. Считаем [1], что затраты $c(m, H)$ менеджера m в иерархии H определяются мерами групп исполнителей, которыми управляют его непосредственные подчиненные. То есть если менеджер имеет r непосредственных подчиненных, управляющих группами исполнителей с мерами $\mu_1, \ldots, \mu_r$, то $c(m, H) = c(\mu_1, ..., \mu_r)$.

Задача поиска оптимальной древовидной иерархии [3] состоит в том, чтобы для заданного множества исполнителей N и функции затрат менеджера $c(\cdot)$ найти дерево H^*, имеющее минимальные затраты $C(H^*) = \sum_{m \in M} c(m, H^*)$.

Подход и результаты

В докладе исследуется введенная в [3] функция затрат менеджера, имеющая вид $c(\mu_1, ..., \mu_r) = (\mu_1^\alpha + ... + \mu_r^\alpha)^\beta$, где $\alpha \in [0, 1]$ и $\beta \in [1, +\infty)$ – некоторые параметры. Одна из возможных содержательных интерпретаций этой функции затрат состоит в следующем. Пусть работа менеджера заключается в том, чтобы принимать решения, касающиеся подчиненных ему исполнителей, причем затраты менеджера в зависимости от количества принимаемых им решений P описываются степенной функцией P^β. Решения принимаются для устранения проблем, которые отражаются в отчетах, предоставляемых его непосредственными подчиненными. Объем отчета, который готовит подчиненный для своего начальника, равен μ^α, где μ – мера управляемой этим подчиненным группы исполнителей. Количество решений пропорционально суммарному объему отчетов.

Доказано, что для множества исполнителей $N = \{w_1, ..., w_n\}$ с мерами $\mu(w)$, $w \in N$, затраты оптимального дерева с хорошей точностью описываются выражением

$$(1)\quad C_L(N) = \begin{cases} \left| \left[\sum_{w \in N} \mu(w)\right]^{\alpha\beta} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\alpha\beta} \right| \min\limits_{k=2...+\infty} \min\limits_{y \in D_k} \dfrac{(y_1^{\alpha} + ... + y_k^{\alpha})^{\beta}}{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^{k} y_i^{\alpha\beta}\right|}, \text{если } \alpha\beta \neq 1, \\ \left(\sum_{w \in N} \mu(w) \ln \sum_{w \in N} \mu(w) - \sum_{w \in N} \mu(w) \ln \mu(w) \right) \min\limits_{k=2...+\infty} \min\limits_{y \in D_k} \dfrac{(y_1^{\alpha} + ... + y_k^{\alpha})^{\beta}}{-\sum\limits_{i=1}^{k} y_i \ln y_i}, \text{если } \alpha\beta = 1, \end{cases}$$

где $D_k := \{y = (y_1, \ldots, y_k)\colon y_1 + \ldots + y_k = 1, y_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}$ – k-мерный симплекс.

Для определения затрат оптимального дерева необходимо найти число k^* (называемое *нормой управляемости*) и *пропорцию* $y^* = (y_1^*, ..., y_{k^*}^*) \in D_{k^*}$, доставляющие минимум в выражении (1). При этом можно показать, что в оптимальном дереве каждый менеджер должен по возможности иметь k^* непосредственных подчиненных, и должен стараться распределить между ними подчиненную ему группу исполнителей *в пропорции* y^* (то есть, если менеджер управляет группой исполнителей меры μ, то его непосредственные подчиненные должны управлять группами мер $\mu \cdot y_1, \ldots, \mu \cdot y_{k^*}$).

Было показано, что компоненты $y_1^*, ..., y_{k^*}^*$ оптимальной пропорции y^* могут принимать не более двух различных значений (обозначим их a и b), что позволило предложить эффективный алгоритм численного решения задачи минимизации (1).

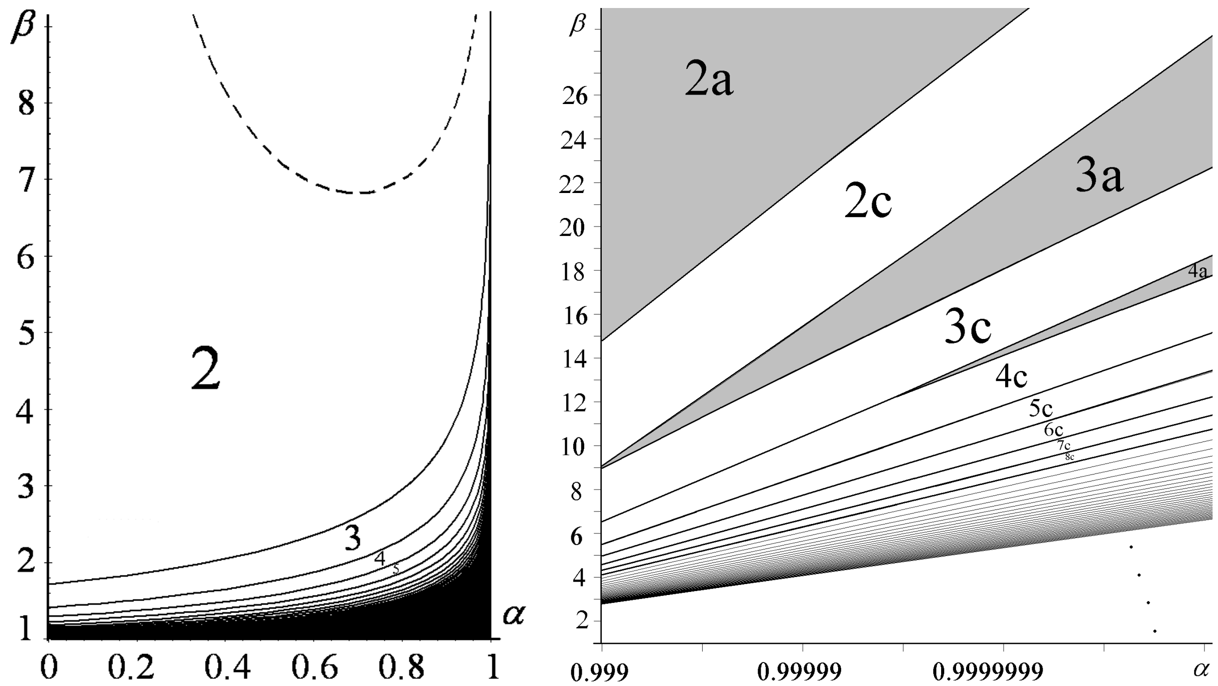

Рисунок 1. Норма управляемости оптимальных древовидных иерархий

Пусть m компонент пропорции равны a. Тогда, поскольку сумма компонент пропорции всегда равна единице, $b = (1 - ma)/(k - m)$, и для нахождения k^* и y^* необходимо выбором $k = 2, 3, \ldots, m = 1, \ldots, k - 1$ и $a \in (0, 1/m)$ минимизировать функцию

$$(2)\qquad \frac{(ma^{\alpha} + (k - m)[(1 - ma)/(k - m)]^{\alpha})^{\beta}}{|1 - ma^{\alpha\beta} - (k - m)[(1 - ma)/(k - m)]^{\alpha\beta}|}.$$

Ограничим область минимизации значениями k, не превышающими некоторой константы K (например, 100). Тогда для решения задачи необходимо для каждой из

$K(K-1)/2$ комбинаций k и m минимизировать функцию (2) по $a \in (0, 1/m)$. Для минимизации использовалась комбинация метода сетки и метода Ньютона: на интервале $(0, 1/m)$ выбиралось (с фиксированным шагом) заданное число точек и начальной точкой для метода Ньютона бралась точка, в которой достигался минимум функции.

Результаты расчета нормы управляемости приведены на рисунке 1 слева. Для больших значений параметра β оптимальны 2-деревья (с нормой управляемости 2). Область их оптимальности отмечена числом «2». С уменьшением β, а также со стремлением α к единице, последовательно становятся оптимальными 3-деревья, 4-деревья и т.д. (эти области обозначены «3», «4», …). При относительно малых β оптимальны *симметричные* 2-деревья с пропорцией (1/2, 1/2). Для $\beta > 6.8$ имеется область (выделенная на рисунке 1 слева пунктиром) оптимальности *асимметричных* 2-деревьев, в которых соотношение компонент пропорции варьируется в широких пределах.

Более подробные вычисления показывают, что при близких к единице α и больших β имеются и области оптимальности асимметричных 3-деревьев, 4-деревьев и т.д. На рисунке 1 справа приведен расчет для области $\alpha \in [0.999, 1)$, $\beta \in [1, 30]$ с нелинейным шагом по α. Области оптимальности асимметричных деревьев выделены серым цветом и обозначены «2a», «3a» и т.д., а симметричных деревьев – «2c», «3c» и т.д.

Таким образом, в наиболее важной с точки зрения практики области $\beta \in [1, 6]$ оптимальны симметричные деревья. В этой области легко найти и аналитическое выражение для границы между областями оптимальности соседних норм управляемости.

Интерпретация

Полученные результаты, в числе прочего, позволяют исследовать зависимость свойств оптимальной иерархии от параметров функции затрат. Из рисунка 1 слева видно, что уменьшение β (содержательно соответствующее обучению менеджеров, повышению их квалификации), приводит к увеличению нормы управляемости, уменьшению количества менеджеров и числа уровней иерархии. При этом затраты топ-менеджера и количество решаемых им проблем при убывании β сначала убывают, а затем начинают возрастать. Таким образом, обучение сотрудников уменьшает «высоту» и затраты иерархии, но не всегда приводит к «разгрузке» высшего руководства.

Что еще более интересно, уменьшение α, которое можно интерпретировать как снижение количества проблем организации за счет, скажем, повышения *уровня стандартизации* [2], приводит к уменьшению нормы управляемости и увеличению количества менеджеров при одновременной их «разгрузке». Значит, в более стабильных условиях оптимальны более «громоздкие» иерархии, возможно, состоящие из менее квалифицированных менеджеров. При этом уменьшение числа менеджеров с ростом α является следствием того, что промежуточные уровни не разгружают высшее руководство, лишь «транслируя» на него бо́льшую часть проблем. Таким образом, иерархии организаций, работающих в условиях большого количества нетипичных, уникальных проблем, состоят из небольшого количества чрезвычайно загруженных менеджеров.

Литература

1. Губко М.В. Структура оптимальной организации континуума исполнителей. Автоматика и телемеханика, 12, 2002. с. 116–130.
2. Минцберг. Г. Структура в кулаке: создание эффективной организации. СПб.: Питер, 2002.
3. Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в экономических системах. М.: ПМСОФТ, 2004.
4. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982.