

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК**  
**Институт проблем управления**

**Д.А. Новиков**

**МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ  
В МОДЕЛЯХ АКТИВНЫХ СИСТЕМ  
С НЕЧЕТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ**

**Москва 1997**

УДК 519.876.2

НОВИКОВ Д.А.

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В МОДЕЛЯХ АКТИВНЫХ СИСТЕМ С  
НЕЧЕТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ. - М.: Институт проблем  
управления РАН, 1997. - 101 с.

Рецензент: д.т.н., проф. Трахтенгерц Э.А.

Формулируется и решается задача синтеза оптимального механизма стимулирования в моделях активных систем с нечеткими предпочтениями активных элементов и нечеткой информацией о состоянии природы.

Работа адресована специалистам по теории управления социально-экономическими системами, а также может быть использована студентами, аспирантами и преподавателями соответствующих специальностей ВУЗов.

Утверждено Редакционным Советом Института

Сентябрь 1997

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| 1. Введение .....   | 4   |
| 2. Механизмы стимулирования в активных системах с четкими предпочтениями элементов .....  | 7   |
| 3. Механизмы стимулирования в активных системах с нечеткими предпочтениями элементов .....  | 25  |
| 3.1. Нечеткие отношения предпочтения активных элементов и определение рационального выбора ..                                       | 25  |
| 3.2. Синтез оптимальной функции стимулирования в активной системе с нечеткими предпочтениями элементов .....                        | 32  |
| 3.3. Задача стимулирования в активной системе с нечеткой функцией дохода активного элемента .....                                   | 43  |
| 3.4. Задача стимулирования в активной системе с нечеткими предпочтениями элементов и асимметричной информированностью участников .. | 50  |
| 4. Механизмы стимулирования в активных системах с нечеткой информацией о состоянии природы .....                                    | 55  |
| 4.1. Определение индуцированного нечеткого отношения предпочтения на множестве возможных действий активного элемента .....          | 55  |
| 4.2. Синтез оптимальной функции стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы .....                  | 64  |
| 4.3. Свойства оптимального решения задачи стимулирования .....  | 78  |
| 5. Некоторые обобщения и перспективы .....  | 89  |
| 6. Заключение .....   | 98  |
| Литература .....  | 100 |

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Разработка и исследование механизмов стимулирования в активных системах с неопределенностью является одной из актуальных задач, стоящих на сегодняшний день перед теорией управления социально-экономическими системами.

Изучению детерминированных активных систем посвящено значительное число работ, создающих достаточно, целостную картину возможных механизмов и методов управления в условиях полной информированности (см., например, [1,4]). Относительно же систем с неопределенностью можно сказать, что такая картина только начинает складываться совместными усилиями исследователей в области теории активных систем, теории контрактов, теории реализуемости и др.

Если следовать общепринятым разделению неопределенности на интервальную, вероятностную и нечеткую, то с нашей точки зрения моделям управления активными системами с последним типом неопределенности исследователями уделялось незаслуженно малое внимание, даже по сравнению с недостаточно изученными на сегодняшний день первыми двумя [2,3].

Начиная с момента ее появления, в теории нечетких множеств [19] многие разделы и модели "четкой" математики, в том числе и прикладные – например – теория принятия решений, были обобщены на нечеткий случай [5, 7, 11, 18, 20 и др.].

В то же время, если попытаться провести обзор работ по механизмам управления социально-экономическими системами,

функционирующими в условиях нечеткой неопределенности, то такой обзор получится на удивление кратким. В работе [15] предпринята попытка (не получившая, к сожалению, дальнейшего развития) перевести на язык нечетких множеств некоторые модели из классической монографии [13]. В [4] раздел, посвященный недетерминированным прогрессивным механизмам, содержит представление механизмов такого рода в виде набора детерминированных механизмов с различными степенями принадлежности. Ряд результатов (широко используемых, в том числе и в настоящей работе) исследования проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации изложен в [7]. Работы [10, 12, 17, 20] можно отнести, скорее, к "размытию" моделей теории группового выбора.

Конечно, приведенный "обзор" не является исчерпывающим, но он достаточно хорошо характеризует состояние дел (для сравнения см. обзор по вероятностной неопределенности и моделям теории контрактов [2]). Поэтому необходимо начать заполнение существующих пробелов: в настоящей работе предпринята попытка систематического рассмотрения моделей активных систем с нечеткой неопределенностью (в том числе - с нечеткими предпочтениями активных элементов и нечеткой информацией относительно состояний природы).

Для истории теории нечетких множеств характерна одна черта - в большинстве случаев ее развитие повторяло развитие математики и многие ее результаты имеют "четкие" аналоги. Настоящая работа не является исключением. Модель активной системы с нечеткими предпочтениями элементов (раздел 3)

является обобщением детерминированной модели [1,4], основные свойства которой, используемые в дальнейшем, рассмотрены во втором разделе. Аналогом активной системы с нечеткой информацией о состояниях природы (раздел 4) является вероятностная активная система [1,2].

## 2. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ЧЕТКИМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящем разделе приведены некоторые результаты теории активных систем (ТАС) по синтезу механизмов стимулирования в детерминированных активных системах (АС) [1]. Необходимость их хотя бы краткого рассмотрения в настоящей работе обусловлена, во-первых, тем, что при исследовании АС с нечеткой неопределенностью мы постоянно будем "оглядываться" на классические модели и результаты детерминированной теории и, во-вторых, знание эффективности механизмов стимулирования в детерминированных системах позволяет оценить степень влияния неопределенности на эффективность механизмов стимулирования в соответствующих нечетких АС (то есть в АС с нечеткой неопределенностью).

Рассмотрим активную систему, состоящую из управляющего органа - центра и управляемого объекта - активного элемента (АЭ). Отметим, что на протяжении настоящей работы мы ограничимся, в основном, рассмотрением одноэлементных статических АС (в соответствии с классификацией, введенной в [2]), лишь кратко обсудив в пятом разделе перспективы обобщения полученных результатов на случай многоэлементных и динамических активных систем.

Стратегией активного элемента является выбор действия (совпадающего в детерминированной модели с результатом деятельности) у из допустимого множества  $A$ . Относительно  $A$  обычно предполагается, что это либо конечное множество, либо

отрезок  $\mathbb{R}^1$ , либо вся числовая прямая, либо компактное подмножество конечномерного евклидова пространства [1] (в каждом конкретном случае, если это потребуется, требования к множеству  $A$  будут конкретизироваться).

Под стимулированием в общем случае мы будем понимать изменение предпочтений АЭ центром, достигаемое путем поощрения или наказания АЭ за выбор тех или иных действий. В рамках рассматриваемой модели предположим, что стимулирование заключается либо в прибавлении к целевой функции АЭ функции стимулирования (задача стимулирования I рода), либо в одновременном прибавлении к целевой функции АЭ функции стимулирования и вычитании этой функции из целевой функции центра (задача стимулирования II рода).

Если выполнена гипотеза благожелательности, то эффективностью стимулирования является максимальное (гарантированное, если гипотеза благожелательности не выполнена) значение целевой функции центра на множестве решений игры АЭ [1]. Оптимальной является допустимая система стимулирования, имеющая максимальную эффективность.

Прямой задачей стимулирования назовем задачу поиска оптимальной функции стимулирования, удовлетворяющей заданным ограничениям. Обратной задачей стимулирования назовем задачу поиска "минимальных" в определенном смысле ограничений механизма стимулирования (как правило, это - ограничения сверху и снизу на функцию стимулирования), обеспечивающих либо максимально возможное (на множестве  $A$ ), либо заданное гарантированное значение целевой функции центра.

Будем считать, что стратегией центра является выбор механизма стимулирования (функции стимулирования, системы стимулирования, функции штрафов)  $x(\cdot)$  из допустимого множества  $M$ . Относительно  $M$  мы будем предполагать, что это множество неотрицательных, равномерно ограниченных сверху положительной константой  $C$  кусочно-непрерывных функций  $x: A \rightarrow [0, C]$ , имеющих не более конечного числа разрывов.

Интересы центра и АЭ выражены их целевыми функциями

$$(2.1) \Phi(y)$$

и

$$(2.2) f(y, x(y)) = h(y) - x(y),$$

соответственно, где  $\Phi(y)$  – доход центра,  $h(y)$  – доход АЭ. Будем считать, что  $\Phi(y)$  – неубывающая функция  $y$ ,  $h(y)$  – квазиоднотоновая функция (то есть полунепрерывная сверху, ограниченная сверху функция, неубывающая при  $y \leq p^-$ , постоянная при  $p^- \leq y \leq p^+$  и невозрастающая при  $y \geq p^+$ , где  $p^-, p^+ \in A$ ,  $p^- \leq p^+$  – точки пика или плато [6]).

В предположении рационального поведения множество решений игры определяется как

$$(2.3) P(x) = \operatorname{Arg} \max_{y \in A} f(y, x(y)),$$

а эффективность механизма стимулирования имеет вид:

$$(2.4a) K(x) = \min_{y \in P(x)} \Phi(y),$$

а при введении гипотезы благожелательности эффективность определяется следующим выражением:

$$(2.4b) K(x) = \max_{y \in P(x)} \Phi(y).$$

Соответственно, задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске системы стимулирования максимальной эффективности [1,4]:

$$(2.5) K(x) \rightarrow \max_{x \in M}$$

В дальнейшем мы будем, в основном, вести изложение на языке отношений предпочтения, поэтому переформулируем задачу (2.5) в следующем виде.

Функция дохода активного элемента  $h(\cdot)$  индуцирует на множестве возможных действий  $A$  отношение предпочтения  $R_h$  [8,9]:

$$x R_h y \Leftrightarrow h(x) \geq h(y) \quad \forall x, y \in A.$$

Отношение предпочтения  $R_h$  является полным транзитивным и рефлексивным бинарным отношением и отражает предпочтения АЭ в отсутствии стимулирования.

Выбирая различные системы стимулирования из множества  $M$ , центр имеет возможность влиять (в определенных пределах) на предпочтения элемента. Отношение предпочтения  $R_f$ , индуцируемое целевой функцией АЭ (2.2), то есть задаваемое

$$x R_f y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \quad \forall x, y \in A,$$

также является линейным транзитивным и рефлексивным бинарным отношением и отражает предпочтения АЭ с учетом стимулирования со стороны центра [8]. Для отражения зависимости предпочтений АЭ от используемого стимулирования удобно использовать обозначение  $R_f(x)$ .

Множество выбора  $C(R_f(x))$  определяется следующим образом:

$$C(R_f(x)) = \{ y \in A \mid L(y, R_f(x)) = A \},$$

где  $L(y, R_f(x)) = \{ x \in A \mid y R_f(x) x \}$  - нижний срез отношения  $R_f(x)$  [8,9]. Легко видеть, что в рамках введенных предположений множество выбора всегда непусто, а  $C(R_h) = \{ p^-, p^+ \}$ .

Задачу стимулирования теперь можно записать в виде

$$(2.6) K(x) = \max_{y \in C(R_f(x))} \min \Phi(y) \rightarrow \max_{x \in M}$$

Понятно, что задачи (2.5) (с учетом (4.4a) и (2.4б)) и (2.6) эквивалентны. Например, известный результат детерминированной теории о том, что в рамках введенных предположений для любой системы стимулирования найдется система стимулирования С-типа не меньшей эффективности [1,6] (напомним, что системой стимулирования С-типа называется функция, принимающая нулевое (максимальные) значения при действии, меньшем плана, и максимальные (нулевые) при действии, большем плана) может быть записан в виде

$$\forall x \in M, \forall y \in C(R_f(x)) \exists x' \in M_x : y \in C(R_f(x')),$$

где  $M_x \subseteq M$  - множество систем стимулирования С-типа (с параметром - планом  $x \in A$ ).

Использование терминологии отношений предпочтения, с одной стороны, несколько усложняет задачу (точнее, "загромождает" ее), а с другой - позволяет более ясно и

тонко представлять и исследовать переход от  $R_h$  к  $R_f(x)$  при введении стимулирования.

Отношения предпочтения  $R_h$  и  $R_f$  являются по определению подмножествами  $A^2 = A \times A$ . Обозначим  $\mathcal{B}(A)$  - булев  $A$ . Пусть  $\mathcal{M}$  - класс всех отображений вида

$$m : \mathcal{B}(A^2) \rightarrow \mathcal{B}(A^2).$$

Выбор центром той или иной системы стимулирования, фактически, соответствует выбору конкретного отображения  $m$  заданного отношения предпочтения  $R_h$ . Рассмотрим какое множество допустимых отображений  $\mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}$  порождает введение ограничений на функцию стимулирования (понятно, что если на систему стимулирования не наложено ограничений, то центр может побудить АЭ выбрать любое действие, иначе говоря, в этом случае  $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}$  и

$$(2.7) \forall R_h \quad \{ R_f \mid R_f = m(R_h), m \in \mathcal{M}_h \} = \mathcal{B}(A^2).$$

Задачу (2.6) можно записать в виде

$$(2.8) K(x) = \max_{y \in C(m(R_h))} \Phi(y) \rightarrow \max_{m \in \mathcal{M}_h}$$

Удобство использования одной из эквивалентных формулировок (2.5)-(2.6)-(2.8) зависит от конструктивности определения  $\mathcal{M}$ .

Обозначим  $h = \max_{y \in A} h(y) - \min_{y \in A} h(y)$  и предположим, что величина  $h$  конечна. Введем в рассмотрение функции  $\tilde{h}(y) = h(y) / h$ ,  $\tilde{x}(y) = x(y) / h$ . Мы будем рассматривать АС, в которых  $h > 0$ , иначе задача стимулирования вырождается и

имеет место (2.7). Обозначим  $f(y) = h(y) - \bar{x}(y)$ . Очевидно, что предпочтения  $R_h$  и  $R_{\bar{x}}$ , равно как  $R_f$  и  $R_{\bar{f}}$ , совпадают.

Исследование множества допустимых отображений  $\mathcal{M}_n$  в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу (даже при  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ). Поэтому мы ограничимся рассмотрением конечного множества допустимых действий, то есть  $A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Тогда каждому отношению предпочтения АЭ будет соответствовать некоторая бинарная матрица  $R$  (для отношений предпочтения и соответствующих им матриц, в тех случаях, когда это не приводит к путанице, мы будем использовать одно и то же обозначение) размера  $n \times n$ , элементы которой

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{при } y_i R y_j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Отношению предпочтения  $R_h$  соответствует матрица, обладающая следующими свойствами:

1h)  $r_{i,i}^h = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$  в силу рефлексивности  $R_h$ ;

2h)  $R_h = \bar{R}_h$ , где  $\bar{R}_h$  – транзитивное замыкание, в силу транзитивности  $R_h$ ;

3h)  $r_{i,j}^h = 1$ ,  $i = \overline{k, l}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , (где  $y_k$  соответствует  $p^-$ , а  $y_l$  соответствует  $p^+$ ) в силу квазиоднотипичности функции  $h(\cdot)$ ;

4h)  $r_{i,j}^h = 1$ , при  $i \geq j$ ,  $i, j = \overline{1, k}$  и  $i \leq j$ ,  $i, j = \overline{l, n}$  в силу неубывания  $h(y_i)$  при  $i = \overline{1, k}$  и невозрастания  $h(y_j)$  при  $i = \overline{l, n}$ , соответственно (если функция  $h(\cdot)$  строго возрастает "до"  $p^-$  и строго убывает "после"  $p^+$ , то  $r_{i,j}^h = 0$ , при  $i < j$ ,  $i, j = \overline{1, k}$  и  $i > j$ ,  $i, j = \overline{l, n}$ ).

Обозначим  $h_i = h(y_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ . Отношению предпочтения  $R_f$  соответствует матрица, обладающая следующими свойствами:

1f)  $r_{ii}^f = 1$ ,  $i=1, \dots, n$  в силу рефлексивности  $R_f$ ;

2f)  $R_f = \tilde{R}_f$ , где  $\tilde{R}_f$  – транзитивное замыкание, в силу транзитивности  $R_f$ ;

3f)  $\{y_i R_h y_j, y_j R_h y_i\}$  имеет место только если  $h_i \leq h_j \leq C$ .

Свойство 3f), фактически, учитывает ограничения механизма стимулирования и может быть записано в виде  $r_{ii}^h r_{jj}^f = 1$  только если  $h_i \leq h_j \leq C$ .

Отметим, что в рассматриваемом случае конечного множества допустимых действий множество выбора определяется через соответствующую матрицу следующим образом:

$$(2.9) C(R) = \{ y_i \in A \mid \sum_{j=1}^n r_{ij} = n \}.$$

Влияние центра на предпочтения активного элемента можно условно представить следующим образом:

$$R_f = T_x R_h,$$

где  $T_x$  – некоторый оператор, определенный на множестве матриц, удовлетворяющих свойствам 1h-4h и принимающий значения на множестве матриц 1f-2f. "Допустимость" того или иного конкретного оператора  $T_x$  означает, что результатом его действия на предпочтения АЭ является отношение предпочтения, матрица которого удовлетворяет свойствам 1f)-3f). Понятно, что наиболее критическим является именно условие 3f), тогда как 1-2f) соответствуют рефлексивности и транзитивности  $R_f$ .

Таким образом, задача синтеза оптимальной функции стимулирования, сводится к поиску допустимого оператора, приводящего к такому отношению предпочтения элемента, при котором его выбор, определяемый в соответствии с (2.9), максимизирует целевую функцию центра.

Введем в рассмотрение бинарную квадратную матрицу  $R_A$  размерности  $n \times n$ , элементы которой определяются следующим образом

$$r_{i,j}^A = \begin{cases} 1, & \text{если } h_i - h_j \leq C \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Фиксируем  $m$  ( $m=1, n$ ) и рассмотрим задачу

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Найти } \{r_{i,j}^f\}_{1,i=1,n} : \\ \sum_{j=1}^n r_{i,j}^f = n, \quad r_{i,j}^h \in \{0, 1\}, \quad i,j=1,n \\ \text{если } r_{i,j}^h = 1, \text{ то } r_{i,j}^f = 0 \text{ только если } r_{i,j}^A = 1 \\ \text{если } r_{i,j}^h = 0, \text{ то } r_{i,j}^f = 1 \text{ только если } r_{i,j}^A = 1 \end{array} \right.$$

Решение задачи (2.10) ищется достаточно просто и вовсе не требует полного перебора всех возможных бинарных матриц  $n \times n$ . Достаточно положить  $r_{i,j}^f = 1$ ,  $j=1, n$  и проверить выполнение ограничений (2.10). Забегая вперед, отметим, что решение аналогичной задачи в АС с нечеткими отношениями предпочтения элементов будет далеко не столь тривиально (см. (3.14) и анализ сложности алгоритмов решения задачи синтеза ниже).

Определим множество реализуемых действий (множество согласованных планов, множество достижимости):

$$P = \{ y_m \mid \text{существует решение задачи (2.10)} \}.$$

При решении задачи (2.10) центр ищет систему стимулирования, реализующую действие  $y_m$  [2]. Множество  $P = \bigcup_{x \in M} P(x)$  есть множество тех действий, которые центр может реализовать, используя системы стимулирования из класса  $M$ . Из анализа "классической" задачи можно сделать вывод, что

$$P = \bigcup_{q=k}^1 \{ i \mid r_{q_1}^A = 1 \}.$$

Далее, центр определяет оптимальное для себя реализуемое действие:

$$y^* = \arg \max_{y \in P} \Phi(y).$$

В рамках рассматриваемой модели центр, фактически, выбирает не штрафы, а "формирует" отношение предпочтения (ОП) активного элемента (см. задачу (2.10)). При известном  $\Phi$  явный вид функции штрафов восстанавливается тривиально. Отметим, что описанный подход к решению детерминированной задачи стимулирования, вряд ли, обладает какими-то преимуществами по сравнению с традиционным и существенно использует результаты последнего. В то же время, анализ детерминированной задачи на языке отношений предпочтения позволит следующем разделе предложить подходы к решению задаче стимулирования в АС с нечеткими отношениями предпочтения АЭ.

Приведенная выше постановка задачи стимулирования существенно использует результаты анализа задачи (2.5), так как допустимость того или иного оператора зависит от того, насколько одно действие предпочитается элементом другому (по  $R_h$ ). Информация только лишь о матрице  $R_h$  оказывается недостаточной для определения множества допустимых операторов, то есть существенным оказывается "сила" предпочтения с учетом ограничений на функцию штрафов (см. условие 3f).

Поясним последнее утверждение, рассмотрев следующую модель.

Пусть множество возможных действий конечно:

$$A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

Пусть  $R \subseteq A^2$  – линейное, рефлексивное и транзитивное отношение предпочтения АЭ. В силу транзитивности множество выбора определим следующим образом:

$$c(R, A) = \{y \in A \mid L(y, R) = A\},$$

где  $L(y, R) = \{x \in A \mid y R x\}$  – нижний срез отношения  $R$ ;

или  $c(R, A) = \{y_i \in A \mid \sum_{j=1}^n r_{ij} = n\}$ , где  $r_{ij}$  – элементы

матрицы смежности графа  $G_R$ , соответствующего отношению  $R$ ;

или  $c(R, A) = \{y_i \in A \mid d_i^- = n\}$ , где  $d_i^-$  – полустепень исхода  $i$ -ой вершины (при этом полустепень захода этой вершины может быть отлична от нуля, если существуют несколько эквивалентных принадлежащих множеству выбора действий). В

силу свойств ОП при использовании любого из приведенных определений множество выбора (выбор АЭ) непусто.

Приведенное выше описание предпочтений и рационального выбора АЭ является достаточно традиционным для теории выбора и теории полезности, однако, информации о бинарном ОП АЭ  $R$  на множестве  $A$ , недостаточно для решения задачи стимулирования, так как необходима информация о "силе" предпочтения (отметим, что при переходе от функции полезности к индуцированному бинарному ОП эта информация теряется). Этот недостаток исчезает при использовании следующего подхода к описанию интересов АЭ.

Предположим, что каждой паре вершин  $(i, j)$  графа  $G_R$  поставлено в соответствие некоторое действительное число  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , интерпретируемое как величина полезности (денег и т. д.), которую надо добавить АЭ, чтобы действия  $u_i$  и  $u_j$  стали эквивалентными. Иначе говоря, величина  $\sigma_{ij}$  показывает насколько действие  $u_i$  предпочтительнее, чем действие  $u_j$  (положим, что  $\sigma_{ii}$  тождественно равно нулю,  $i = \overline{1, n}$ ). Обозначим  $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ , а соответствующий граф —  $G_\sigma$ . Предположим, что выполнено условие внутренней согласованности предпочтений АЭ:

$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  имеет место

$$\sigma_{ij} + \sigma_{jk} = \sigma_{ik} \quad (\text{в частности, при } k = i \quad \sigma_{ii} = -\sigma_{jj}).$$

Следует признать, что предположение о том, что ОП АЭ внутренне согласованно, является достаточно сильным. Однако, в случае, например, "нетранзитивного" ОП, пришлось бы

вводить менее "естественное" определение рационального выбора, исследование свойств которого превратилось бы в отдельную задачу, выходящую за рамки настоящей работы.

Если предпочтения АЭ внутренне согласованы, то  $\Sigma = -\Sigma^T$  и информация о всех элементах матрицы  $\Sigma$  является избыточной. Действительно,  $\Sigma$  однозначно задается вектором

$$\sigma = (\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{34} \dots \sigma_{n-1,n}).$$

Остальные элементы матрицы определяются (с автоматическим обеспечением свойств ОП и внутренней согласованности) следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{1-j-1} \sigma_{1-k, 1-k-1}, & \text{если } j < i \\ \sum_{k=0}^{j-1-i} \sigma_{1+k, 1+k+1}, & \text{если } j > i \end{cases}$$

Использование приведенной процедуры достаточно привлекательно, так как требует гораздо меньшей информации и существенно облегчает работу по выявлению и обработке предпочтений АЭ.

Для определения матрицы предпочтений  $\Sigma$  можно использовать и другую процедуру. Определим

$$q_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}, \quad \alpha_i = -q_i/n, \quad i=1, n.$$

Величины  $\{q_i\}$  могут интерпретироваться как "веса" вершин (действий АЭ) графа  $G_\sigma$ , а величины  $\{\alpha_i\}$  являются потенциалами вершин графа  $G_\sigma$ . Действительно, имеет место

$$\sigma_{ij} = \alpha_j - \alpha_i = \frac{1}{n} (q_j - q_i), \quad i, j = 1, n.$$

Последнее выражение применимо при условии  $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ .

Если известны веса ( $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n$ ), такие, что  $\sum_{i=1}^n \bar{q}_i \neq 0$ , то в предположении, что полезность АЭ определена с точностью до аддитивной константы, определим  $q_1 = \bar{q}_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{q}_i$ .

Таким образом,  $G_\sigma$  является полным симметрическим потенциальным графом,  $R_\Sigma$  – потенциальным ОП.

Использование приведенных выше процедур формирования матрицы  $\Sigma$  облегчает задачу создания прикладных систем управления в реальных организационных системах. Действительно, в классической формулировке задачи стимулирования [1], в том числе и в дискретных задачах, требуется знание функции дохода или функции затрат активного элемента. Получить эту информацию достаточно затруднительно, даже если субъект идет навстречу исследователю операций и пытается сформулировать свои предпочтения в виде "функций". Зачастую человеку гораздо проще производить либо попарные сравнения, либо приписывать альтернативам веса и т.д.

Под рациональным выбором АЭ в рассматриваемой модели будем понимать выбор действия  $u_1$ , для которого  $\sigma_{1j} \geq 0$  для всех  $j \in I, p$ . Легко видеть, что в случае внутренне согласованного ОП множество выбора непусто. Более того, множеству выбора будут принадлежать те и только те альтернативы (действия АЭ), которые имеют максимальный вес (таких действий может быть одно или несколько – в случае равных весов).

Перейдем теперь к решению задачи синтеза оптимальной системы стимулирования в рамках рассматриваемой модели. Для этого определим для произвольных  $i$  и  $j$  ( $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ ) операцию ( $i \rightarrow j$ ):

$$\sigma_{ijk} := \sigma_{jik} + \sigma_{ij}, \quad k=1, n, \quad \sigma_{jj} := 0.$$

Совокупность операций ( $i \rightarrow j$ ) определяют некоторый оператор  $T_x \circ T_\sigma$ . Допустимость оператора соответствует возможности воздействия только на те пары вершин, вес дуги между которыми не превосходит ограничения механизма стимулирования. При этом, очевидно, действия  $u_i$  и  $u_j$ , становятся эквивалентными ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = 0$ ), а внутренняя согласованность предпочтений АЭ, очевидно, сохраняется. "Стоимость" (затраты на стимулирование) проведения операции ( $i \rightarrow j$ ) равна  $\sigma_{ij}$ .

Легко показать, что последовательно применяя операцию ( $i \rightarrow j$ ), можно сделать эквивалентными любые две вершины. При этом затраты на стимулирование будут равны длине пути из одной вершины в другую. В силу внутренней согласованности, для фиксированных вершин  $u_k$  и  $u_l$  длина всех путей одинакова и равна  $\sigma_{kl}$ .

Иследуем в рамках рассматриваемой модели прямую задачу стимулирования I рода. Пусть заданы ограничения на стимулирование: центр имеет право платить АЭ не больше, чем некоторая положительная константа  $C$ . Пусть  $u_k \in \mathbf{c}(R, A)$ . Определим множество (множество согласованных планов в терминологии [1]):

$$A' = \{ u_i \in A \mid \sigma_{ki} \leq C \}.$$

Если  $R'$  - отношение предпочтения центра на множестве  $A$  (сужение ОП  $R'$  на любое непустое подмножество  $A' \subseteq A$  является внутренне согласованным, так как подграф потенциального графа является потенциальным графом), то решение прямой задачи стимулирования первого рода имеет вид:

$$y_m^* \in C(R', A'),$$

где  $y_m^*$  - наиболее выгодное для центра реализуемое действие АЭ. Затраты на стимулирование при этом равны  $\sigma_{km}$ .

Решение обратной задачи стимулирования первого рода оказывается еще более простым. Действительно, если  $y_m \in C(R', A)$  - наиболее выгодное для центра действие АЭ, то минимальные затраты на стимулирование по реализации этого действия равны  $\sigma_{km}$ .

Исследуем теперь в рамках рассматриваемой дискретной модели задачу стимулирования второго рода. Действуя в соответствии с правилами типа ( $i \rightarrow j$ ), центр, увеличивая предпочтительность некоторого действия с точки зрения активного элемента, уменьшает предпочтительность этого действия со своей точки зрения. Прямая задача стимулирования II рода может быть сформулирована как задача поиска такого вектора  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R_n$ , удовлетворяющего заданным ограничениям, чтобы выбор АЭ был в некотором смысле максимально близок к выбору центра. При этом выбор определяется по предпочтениям  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  центра и АЭ (определяемым в свою очередь по  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $s$ ) следующим

образом:

$$\begin{cases} \sigma_{1k}^1 := \sigma_{1k}^1 - s_i \\ \sigma_{1k}^2 := \sigma_{1k}^2 + s_i \end{cases}, k = \overline{1, n}, \sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^2 = 0, i = \overline{1, n}.$$

Выражение "в некотором смысле" означает, что для решения задачи стимулирования второго рода информации о сравнительной предпочтительности альтернатив  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  оказывается недостаточно — нужна единая "точка отсчета" — например, функция дохода центра, позволяющая сравнивать выгодность реализации различных действий. При этом для численного решения задачи синтеза можно использовать, например, двухшаговый алгоритм [1].

При решении обратной задачи стимулирования второго рода ищется минимальное ограничение на вектор  $s$ , такое, что индуцированные предпочтения центра и АЭ, построенные в единой "системе отсчета", совпадают.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий использование языка ОП при решении задач стимулирования.

**Пример 2.1.** Пусть  $n = 5$ , а допустимые действия имеют следующие веса:  $Q = (10, 40, 25, 5, 45)$ . Определяем вектор  $Q = (-15, 15, 0, -20, 20)$ . Строим матрицу  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -3 & 1 & -7 \\ 6 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 4 & -4 \\ 7 & 1 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Легко проверить, что ОП АЭ, задаваемое матрицей  $\Sigma$ , является

внутренне согласованным. Выбор АЭ в отсутствии стимулирования - действие  $y_5$ . Если ограничение механизма стимулирования С = 6, то множество реализуемых действий  $A' = \{y_2, y_3\}$ .

Следует почеркнуть, что использование описанного подхода к представлению интересов элементов с помощью бинарных отношений предпочтения окажется эффективным в дальнейшем - при рассмотрении задач стимулирования активных системах с нечеткими предпочтениями элементов.

### 3. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С НЕЧЕТКАМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ ЭЛЕМЕНТОВ

При рассмотрении детерминированных активных систем предполагается, что центр и АЭ имеют полную и точную информацию о предпочтениях активного элемента в отсутствии стимулирования (см. раздел 2 настоящей работы). Однако, зачастую, информация о предпочтениях АЭ носит нечеткий характер или сам элемент не в состоянии четко описать свои предпочтения. Рассмотрению задач стимулирования в таких АС посвящен настоящий раздел.

#### 3.1. Нечеткие отношения предпочтения активных элементов и определение рационального выбора

Предположим, что центру известно бинарное нечеткое отношение предпочтения (НП)  $R_h$  АЭ на множестве допустимых действий А. Это НП определяется функцией принадлежности

$$\mu_{R_h}^n : A \times A \rightarrow [0,1].$$

Содержательно  $\mu_{R_h}^n(x,y)$  означает степень с которой  $x$  и  $y$  находятся в отношении  $R_h$ .

Так как для НП не существует однозначных и общепринятых условий рефлексивности, транзитивности, линейности и т.д. (как для "обычных" отношений предпочтения [8,9]), то приведем ряд определений, которые будут использоваться в дальнейшем изложении (взаимосвязь между

различными определениями достаточно подробно рассмотрена в [5, 7, 16-18]).

$\forall x, y, z \in A$

Рефлексивность:

P1.  $\mu_{\underline{R}}(x, x) = 1$ .

P2.  $\mu_{\underline{R}}(x, x) = 0.5$ .

Антирефлексивность (для рефлексивности P1):  $\mu_{\underline{R}}(x, x) = 0$ .

Симметричность:  $\mu_{\underline{R}}(x, y) = \mu_{\underline{R}}(y, x)$ .

Антисимметричность:  $\mu_{\underline{R}}(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_{\underline{R}}(y, x) = 0$ .

Линейность (полнота):

J1.  $\max [\mu_{\underline{R}}(x, y), \mu_{\underline{R}}(y, x)] > \lambda$ , где  $\lambda \in [0, 1]$ .

Если  $\max [\mu_{\underline{R}}(x, y), \mu_{\underline{R}}(y, x)] = 1$ , то НОП называется сильно линейным, при  $\lambda = 0$  - слабо линейным.

J2.  $\mu_{\underline{R}}(x, y) = 1 - \mu_{\underline{R}}(y, x)$ .

Дополнение (отрицание) НОП  $\underline{R}$  и обратное НОП  $\underline{R}^{-1}$  определяются "обычным" образом:

$$\mu_{\underline{R}^c}(x, y) = 1 - \mu_{\underline{R}}(x, y) \text{ и } \mu_{\underline{R}^{-1}}(x, y) = \mu_{\underline{R}}(y, x).$$

Композиция отношений:

- максминное произведение:

$$\mu_{\underline{R}_1 \cdot \underline{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in A} \min [\mu_{\underline{R}_1}(x, z), \mu_{\underline{R}_2}(z, y)].$$

- минмаксное произведение:

$$\mu_{\underline{R}_1 \cdot \underline{R}_2}(x, y) = \inf_{z \in A} \max [\mu_{\underline{R}_1}(x, z), \mu_{\underline{R}_2}(z, y)].$$

- максмультипликативное произведение:

$$\mu_{\underline{R}_1 \cdot \underline{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in A} (\mu_{\underline{R}_1}(x, z) \mu_{\underline{R}_2}(z, y)).$$

Транзитивность:  $\underline{R} \cdot \underline{R} \subseteq \underline{R}$ . Соответственно трем типам композиций НОП, определяются максминная транзитивность (T1), минмаксная транзитивность (T2) и максмультипликативная транзитивность (T3). Очевидно  $T2 \rightarrow T1 \rightarrow T3$  [7]. Нам потребуется еще один вид транзитивности:

#### T4. Аддитивная транзитивность:

$$[\mu_{\underline{R}}(x,y) - 0.5] = [\mu_{\underline{R}}(x,z) - 0.5] + [\mu_{\underline{R}}(z,y) - 0.5].$$

Следуя подходу, предложенному С.А.Орловским [7], определим, что мы будем понимать под множеством выбора при заданном НОП  $\underline{R}$ . Нечеткое отношение строгого предпочтения (НОСП), соответствующее НОП  $\underline{R}$ , задается функцией принадлежности:

$$\mu_{\underline{P}}(x,y) = \max [\mu_{\underline{R}}(x,y) - \mu_{\underline{R}}(y,x), 0].$$

Если исходное НОП рефлексивно (P1), то соответствующее НОСП антирефлексивно и антисимметрично. Если НОП  $\underline{R}$  транзитивно, то НОСП  $\underline{P}$  также транзитивно (в соответствующем смысле) [7].

Определенную на  $A$  (при фиксированном  $y \in A$ ) функцию  $\mu_{\underline{P}}(y,x)$  можно рассматривать как функцию принадлежности всех альтернатив (действий)  $x$ , которые строго доминируются альтернативой  $y$ . Тогда множество альтернатив  $x$ , не доминируемых альтернативой  $y$  (дополнение к нечеткому множеству с функцией принадлежности  $\mu_{\underline{P}}(y,x)$ ) определяется как нечеткое множество с функцией принадлежности

$$1 - \mu_{\underline{P}}(y,x), x \in A.$$

Нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив есть подмножество альтернатив, не доминируемых ни одной другой допустимой альтернативой. Согласно определению функции принадлежности пересечения нечетких множеств, функция принадлежности нечеткого подмножества недоминируемых альтернатив имеет вид [?]:

$$(3.1) \mu_{\underline{R}}^{\text{НД}}(x) = 1 - \sup_{y \in A} \mu_{\underline{R}}(y, x).$$

Величину  $\mu_{\underline{R}}^{\text{НД}}(x)$  можно рассматривать как степень недоминируемости альтернативы  $x \in A$ , поэтому рациональным будем считать выбор элементом действий, имеющих по возможности большую степень принадлежности нечеткому множеству недоминируемых альтернатив, то есть действий, для которых значение функции  $\mu_{\underline{R}}^{\text{НД}}(x)$  по возможности наиболее близко к

$$\sup_{x \in A} \mu_{\underline{R}}^{\text{НД}}(x) = 1 - \inf_{x \in A} \sup_{y \in A} \mu_{\underline{R}}(y, x).$$

#### Альтернативы из множества

$$(3.2) A^{\text{НД}}(\underline{R}) = \{ x \in A \mid \mu_{\underline{R}}^{\text{НД}}(x) = \sup_{z \in A} \mu_{\underline{R}}^{\text{НД}}(z) \}$$

называются максимально недоминируемыми альтернативами множества  $A$  при НОП  $\underline{R}$  [?]. Альтернативы, степень недоминируемости которых равна единице получили название четко недоминируемых альтернатив (ЧНД). Множество четко недоминируемых альтернатив определяется следующим образом

$$(3.3) A^{\text{ЧНД}}(\underline{R}) = \{ x \in A \mid \mu_{\underline{R}}^{\text{НД}}(x) = 1 \},$$

причем в случае сильно линейного НОП все ЧНД альтернативы эквивалентны с точки зрения АЭ.

Множество  $A^{ЧНД}$  получило название множества Орловского. Условия его непустоты рассмотрены в [7,14]. В частности, необходимым и достаточным условием того, что  $x_0 \in A^{ЧНД}$  является то, что пара  $(x_0, x_0)$  является седловой точкой (максимум по x, минимум по y) функции

$$\mu_{\underline{R}}(x, y) - \mu_{\underline{R}}(y, x).$$

В частном случае – если множество A конечно, а НОП  $\underline{R}$  транзитивно (T1), то множество Орловского непусто.

Будем считать, что выбор активного элемента при НОП  $\underline{R}$  на множестве допустимых действий A определяется следующим образом:

$$(3.4) C(\underline{R}) = A^{НД}(\underline{R}).$$

#### Множество

$$\{ x \in A \mid \mu_{\underline{R}}^{НД}(x) \geq \alpha \},$$

где  $\alpha \in (0, 1]$ , при фиксированном НОП  $\underline{R}$ , будем называть множеством  $\alpha$ -недоминируемых альтернатив и обозначать  $A^{НД}(\alpha)$ .

Сформулируем теперь в общем виде задачу стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о предпочтениях активных элементов.

Будем считать, что допустимое множество A – четкое (в случае, когда существуют различия в степени допустимости альтернатив, производя свертку критериев в соответствии с [7], получим задачу, рассматриваемую ниже). Центру известно

рефлексивное и транзитивное (тип рефлексивности и транзитивности конкретизируется ниже при рассмотрении частных случаев) НОП  $R_h$  активного элемента на множестве А (предложения относительно множества возможных действий также конкретизируются ниже) без учета стимулирования. Предпочтения центра заданы четко и определяются (2.1). Выбором системы стимулирования центр имеет возможность влиять на предпочтения АЭ, которые, с учетом стимулирования, мы обозначим  $R_f(x)$ .

Задача центра заключается в поиске системы стимулирования, побуждающей элемент выбрать наиболее выгодное для центра действие. Более конкретно, если выполнена гипотеза благожелательности (при заданной системе стимулирования АЭ выбирает из множества максимально недоминируемых альтернатив  $A^{ND}(R)$  действие, наиболее выгодное для центра), то эффективность механизма стимулирования  $x \in M$  равна

$$K(x) = \max_{y \in C(R_f(x))} \Phi(y),$$

где  $C(R_f(x))$  определяется в соответствии с (3.4). Если гипотеза благожелательности не выполнена, то, как и в детерминированном случае, центр расчитывает на гарантированный результат по множеству решений игры. Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

$$(3.5) K(x) \rightarrow \max_{x \in M}$$

Отметим, что формально задачи (3.5) и (2.6) отличаются лишь способом определения множества выбора. При этом, если НОП является четким, то множество Орловского есть не что иное, как множество решений игры (2.3).

Исследуем методы решения задачи (3.5).

### 3.2. Синтез оптимальной функции стимулирования в активной системе с нечеткими предпочтениями элементов

В отличие от детерминированной задачи, при решении которой в рамках введенных во втором разделе предположений достаточно найти множество реализуемых действий (см. условие 3f) [1,6], в задаче стимулирования в АС с нечеткой неопределенностью, по крайней мере в том виде, в котором она сформулирована выше, пока отсутствует явный вид функции дохода, функции штрафов и ограничений на  $\tilde{R}_f$ , порождаемых условием  $x \in M$ . В то же время, как мы видели при исследовании детерминированной задачи, сформулированной в терминах отношений предпочтения, информация о "силе" предпочтения  $R_h$  в сравнении с "силой" штрафов является существенной.

Существуют несколько путей конкретизации задачи (3.5). Первый путь предполагает введение предположения о том, что центр использует "классические" функции штрафов  $x: A \rightarrow [0, C]$ . При этом необходимо на основании сравнения "силы" предпочтений  $R_h$  и  $x$  конструктивно определить  $R_f$  и множество допустимых преобразований  $R_h \xrightarrow{x} R_f$ , что, как будет видно из дальнейшего изложения, потребует достаточно жестких ограничений на допустимые множества и НОП. Второй путь связан с определением понятия штрафов, более соответствующего с нашей точки зрения рассматриваемой модели.

Пусть для НОП АЭ выполнено одно из следующих условий

(3.6) Р2, Л2, Т4

или

(3.7) Р1, сильная линейность и

$$\{ \mu_{\underline{R}}(x, z) = 1, \mu_{\underline{R}}(z, y) = 1 \} \Rightarrow \{ \mu_{\underline{R}}(x, y) = 1 \text{ и}$$

$$\mu_{\underline{R}}(y, x) = \mu_{\underline{R}}(y, z) + \mu_{\underline{R}}(z, x) - 1. \}$$

Определим класс U функций полезности АЭ:

(3.8)  $\forall x, y \in A \mid u(x) - u(y) \mid \leq 1.$

В соответствии с леммой 1 работы [17] (3.6) имеет место тогда и только тогда, когда существует единственная с точностью до аддитивной константы функция полезности из класса U, такая, что выполнено:

(3.9)  $\mu_{\underline{R}}(x, y) = \frac{1}{2} [ u(x) - u(y) + 1 ].$

В соответствии с теоремой 2 работы [17], (3.7) имеет место тогда и только тогда, когда существует единственная с точностью до аддитивной константы функция полезности из класса U, такая, что выполнено:

(3.10)  $\mu_{\underline{R}}(x, y) = \min [ u(x) - u(y) + 1, 1 ].$

Эти два результата позволяют рассмотреть два практических важных класса нечетких активных систем, определив для них конструктивные методы решения задачи стимулирования.

Пусть известно НОП АЭ  $R_h$ . Если  $R_h$  удовлетворяет (3.6), то фиксируем произвольное  $x_0 \in A$  и определим

$$(3.11) \quad u_h(y) = 2 \mu_{\tilde{R}_h}(y, x_o).$$

Легко видеть, что  $\forall x_o \in A$  функция  $u_h(y)$  единственна с точностью до аддитивной константы в силу Т4.

Если  $\tilde{R}_h$  удовлетворяет (3.7), то определим

$$(3.12) \quad (\bar{\mu}_{\tilde{R}_h})x, y = \begin{cases} \mu_{\tilde{R}_h}(x, y) / 2, & \text{если } \mu_{\tilde{R}_h}(x, y) < 1, \\ \frac{1}{2} [1 - \mu_{\tilde{R}_h}(y, x)], & \text{если } \mu_{\tilde{R}_h}(x, y) = 1. \end{cases}$$

после чего функция полезности строится по  $\bar{\mu}_{\tilde{R}_h}(x, y)$  в соответствии с (3.11). Целевая функция АЭ может быть записана в виде (см. раздел 2):

$$(3.13) \quad \bar{f}(y) = u_h(y) - \bar{x}(y),$$

где  $\bar{x}(y) = x(y) / h$ . При фиксированном  $x \in M$ , (3.13) порождает в соответствии с (3.9)-(3.10) НОП  $\tilde{R}_r$ . Множество выбора АЭ при известном НОП определено выше.

Назовем НОП  $\tilde{R}_h$  квазиоднотиповым, если:

1)  $\exists p^-, p^+ \in A$ , такие, что  $\forall p \in [p^-, p^+]$

$$\forall y \in A \quad \mu_{\tilde{R}_h}(p, y) = \sup_{z \in A} \mu_{\tilde{R}_h}(z, y);$$

2)  $\forall p \in [p^-, p^+]$  имеет место

$$\mu_{\tilde{R}_h}(p^\pm, y) = \begin{cases} 1, & \text{если НОП } \tilde{R}_h \text{ удовлетворяет P1,} \\ 1/2, & \text{если НОП } \tilde{R}_h \text{ удовлетворяет P2;} \end{cases}$$

$$3) \quad \forall y_1, y_2 \in A \quad y_1 * y_2 * p^- \quad \mu_{\tilde{R}_h}(y_1, y_2) * \mu_{\tilde{R}_h}(y_2, y_1),$$

$$4) \quad \forall y_1, y_2 \in A \quad p_1^+ * y_2 * y_1 \quad \mu_{\tilde{R}_h}(y_1, y_2) * \mu_{\tilde{R}_h}(y_2, y_1).$$

Квазиоднотиповое НОП в соответствии с (3.11), (3.12) при  $x_0 = p^\pm$  порождает квазиоднотиповую функцию  $\psi_h(y)$ . Из результатов работы [6] и (3.11) следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. Если выполнено (3.6) или (3.7) и НОП  $R_h$  квазиоднотиповое, то  $\forall x \in M \exists \tilde{x} \in M_x$ , такое, что  $K(x) = K(\tilde{x})$ .

Значит при квазиоднотиповых НОП АЭ можно без потери эффективности ограничиться рассмотрением систем стимулирования С-типа.

Отметим, что при предельном переходе от рассматриваемой модели к детерминированной, описанный выше алгоритм не переходит в алгоритм решения детерминированной задачи. Для этого факта можно привести следующее объяснение. Во-первых, при четком отношении предпочтения на множестве  $A$  в соответствующей матрице  $R_h$  не заложена информация о "силе предпочтения", а, как было показано во втором разделе, эта информация необходима для решения задачи стимулирования. При НОП можно условно считать, что информация о "силе предпочтения" заложена в матрице  $R_h$ . Во-вторых, к сожалению, четкое отношение предпочтения на множестве  $A$  не удовлетворяет условиям (3.6), (3.7).

Таким образом, (3.11)-(3.13) позволяют решать задачу стимулирования в нечетких активных системах, удовлетворяющих условиям (3.6) и (3.7). Однако, эффективность алгоритма решения, равно как и другие его характеристики, вряд ли можно признать удовлетворительными.

Второй путь решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в активных системах с НОП АЭ связан с введением нового определения допустимых штрафов и обобщением подходов, описанных в конце второго раздела настоящей работы. Содержательно, реализуемую ниже идею можно представить следующим образом. Пусть центру известно НОП АЭ  $R_h$ . Используя те или иные функции штрафов, центр действует на предпочтения АЭ. Ограниченностю возможностей такого воздействия обусловлена существующими в АС ограничениями механизма стимулирования. Представим эти ограничения не как ограничения непосредственно на функцию штрафов, а как ограничения на возможность изменения попарной предпочтительности действий. Например, как это было в рассматриваемой во втором разделе детерминированной модели, может существовать множество пар действий, предпочтительность которых друг относительно друга могла изменяться произвольным образом, или, например, может быть оговорено, что центр может в нечеткой АС изменять предпочтительности действий не более, чем на фиксированное число (не более, чем в определенное число раз) и т.д.

Рассмотрим в качестве примера АС со следующими ограничениями: пусть множество допустимых действий конечно  $A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  и пусть известна матрица  $R_A$ , элементы которой принимают неотрицательные значения. Ограничения механизма стимулирования определим следующим образом: если  $R_h$  матрица, соответствующая НОП АЭ  $R_h$  в отсутствии стимулирования,  $R_s$  — матрица, соответствующая НОП

АЭ  $R_f$  с учетом стимулирования со стороны центра, то все элементы матрицы  $R_f$  должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$(3.14) \quad r_{ij}^f \in [\max\{r_{ij}^h - r_{ij}^A, 0\}, \min\{r_{ij}^h + r_{ij}^A, 1\}].$$

Если априори известно, что множество Орловского непусто, то для решения задачи стимулирования может быть использован алгоритм, приведенный ниже. Понятно, что вместо (3.14) можно использовать любую другую "разумную" конструкцию ограничений механизма стимулирования.

Пусть НОП АЭ линейно (Л2), рефлексивно (Р2) и транзитивно (Т1), при этом множество Орловского непусто. Приведем алгоритм решения прямой задачи стимулирования для рассматриваемой модели.

### Алгоритм 3.1.

1.  $A^{ЧНД} = \emptyset$ .

2. Положим  $i=1$ .

3. Если существует набор  $\{r_{ij}^f\}$ , удовлетворяющий (3.14) и условию  $r_{ij}^f \geq 1/2, \forall j=1..n$ , то существует функция штрафов  $x \in M$ , реализующая действие  $y_i$  и

$$A^{ЧНД} := A^{ЧНД} + \{y_i\}.$$

4. Если  $i < n$ , то  $i := i + 1$  и переходим к шагу 3.

5. Оптимальной системой стимулирования является система стимулирования, реализующая действие, которое максимизирует целевую функцию центра на множестве Орловского, то есть

$$y_* = \arg \max_{y \in A^{ЧНД}} \Phi(y).$$

Понятно, что для конструктивного и эффективного использования алгоритма 3.1 необходимо вводить дополнительные предположения, иначе решение задачи третьего шага может оказаться достаточно трудоемким.

Приведем качественные рассуждения о еще одном возможном подходе к формулировке и решению задач стимулирования в такого рода активных системах.

Пусть допустимые множества конечны и мы умеем решать задачу синтеза оптимальной функции стимулирования при известных центру четких отношениях предпочтения АЭ на множестве допустимых действий (см. второй раздел). Пусть  $R_h$  – НОП АЭ на множестве А. Рассмотрим решение, опирающееся на множества уровня НОП  $R_h$ .

Множеством уровня  $\lambda$  НОП  $R_h$  называется четкое отношение предпочтения  $R_h(\lambda)$  АЭ на множестве А, элементы матрицы которого определяются следующим образом:

$$(3.15) \quad r_{i,j}^h(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{при } r_{i,j}^h \geq \lambda \\ 0, & \text{при } r_{i,j}^h < \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in (0,1).$$

Назовем оптимальным  $\lambda$ -решением (не путать с оптимальным  $\alpha$ -решением, вводимым ниже в четвертом разделе) оптимальное решение детерминированной задачи стимулирования с предпочтениями АЭ, задаваемыми в отсутствии стимулирования матрицей  $\| r_{i,j}^h(\lambda) \|_{1, j=1..n}$ . В отличие от задачи нечеткого математического программирования [7], величину  $\lambda$ , вряд ли, можно рассматривать как значение функции принадлежности  $\lambda$ -решения нечеткому оптимальному решению.

Вопрос о возможностях использования предложенного метода решения требует дальнейших исследований (ср. с результатом теоремы 3.1).

Рассмотрим возможные пути обобщения полученных во втором разделе для детерминированных активных систем результатов на случай активных систем с нечеткими предпочтениями элементов. Пусть множество возможных действий, по-прежнему, конечно и на нем задано нечеткое отношение предпочтения (НП) АЭ  $R$  с функцией принадлежности  $\mu_R: A \times A \rightarrow [0,1]$ . Определим  $n$ -вершинный полный граф  $G_\sigma$ , вершины которого соответствуют действиям АЭ, а веса дуг определяются НП, то есть вес дуги  $(i,j)$  равен  $\mu_{R,i} = \mu_R(y_i, y_j)$ .

Если НП  $R$  является рефлексивным, полным и транзитивным, то рациональный выбор АЭ определим следующим образом. Величина

$$\mu_i^{\text{НД}} = 1 - \max_j \bar{\mu}_{ji}$$

может рассматриваться как степень недоминируемости альтернативы  $y_i$ .

Вычислим  $\delta = \max_i \mu_i^{\text{НД}} = 1 - \min_i \max_j \bar{\mu}_{ji}$ . Будем считать, что АЭ выбирает максимально недоминируемые альтернативы, то есть такие альтернативы, степень недоминируемости которых равна  $\delta$ . Если  $\delta = 1$ , то выбирается множество четко недоминируемых альтернатив – множество Орловского.

Можно показать, что для того, чтобы  $y_i \in C(R, A)$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_{i,j} \geq 1/2, \quad \forall j = 1..n.$$

Последнее утверждение позволяет предложить методы решения задачи стимулирования в активной системе с НОП элементов. Предположим, что центру известны: НОП  $\{\mu_{i,j}\}$  активного элемента в отсутствии стимулирования и зависимости  $\mu_{i,j}(\sigma_{i,j})$  ( $\mu_{i,j}(0) = \mu_{i,j}$ ) функций принадлежности от стимулирования со стороны центра или задана матрица  $\Sigma = \{\sigma_{i,j}\}$ , элементы которой соответствуют затартам на единичное изменение соответствующей функции принадлежности.

Теперь остается для каждой пары действий  $y_i$  и  $y_j$ , таких, что  $\mu_{i,j} > 1/2$ , определить операцию  $(i \rightarrow j)$  (по аналогии с рассмотренной выше детерминированной задачей), изменяющую НОП АЭ таким образом, чтобы новое значение  $\mu_{i,j}$  стало равным  $1/2$ . При этом, естественно, изменяются и остальные элементы матрицы  $\{\mu_{i,j}\}$ , причем изменение должно происходить таким образом, чтобы сохранялись свойства НОП. Не вдаваясь в детали, отметим, что, как правило, наибольшие трудности возникают при анализе сохранения транзитивности нечеткого отношения предпочтения: в отличие от детерминированного случая (когда при проведении операции  $(i \rightarrow j)$  изменяются веса только вершин  $i$  и  $j$ ), в нечеткой АС соответствующий граф может не быть потенциальным, поэтому при изменении  $\mu_{i,j}$  для сохранения транзитивности может потребоваться изменение всех элементов матрицы  $\{\mu_{i,j}\}$ .

Обозначая  $y_k$  - действие, выбираемое АЭ в отсутствии стимулирования, находим затраты на реализацию действия  $y_1 \in A$ :

$$\tilde{\sigma}_{k1} = \min \{ \sigma \mid \mu_{k1}(\sigma) = 1 \},$$

или

$$\tilde{\sigma}_{k1} = \sigma_{k1} (0.5 - \mu_{j1}).$$

Решение прямой задачи стимулирования в активной системе с НОП элементов будет заключаться в поиске множества  $B \subseteq A$ , такого, что  $\forall y_1 \in B \quad \tilde{\sigma}_{k1}$  удовлетворяет заданным ограничениям и выборе элемента множества  $B$ , на котором максимизируется целевая функция центра. При этом предлагаемый подход не исключает возможности нечеткого описания предпочтений центра.

Отметим, что в случае нечетких предпочтений АЭ информация о сравнительной предпочтительности ("силе предпочтения") действий заложена в функциях принадлежности. Поэтому в некоторых нечетких АС, в отличие от систем с бинарными четкими ОП АЭ, информация об одном лишь НОП оказывается достаточной для решения задачи стимулирования.

В результате рассмотрения задач стимулирования в активных системах с нечеткими предпочтениями активных элементов можно сделать следующий качественный вывод. Формулировка задачи стимулирования (описание АС) в терминах отношений предпочтения требует использования во многих случаях достаточно громоздких алгоритмов ее решения. В то же время, интерпретация стимулирования, как влияния на предпочтения (интересы) АЭ представляется достаточно перспективной.

Проведенный выше анализ модели с нечетким бинарным отношением предпочтения АЭ на множестве допустимых действий свидетельствует, что в этом случае при решении задачи стимулирования исследователь сталкивается со значительными как методологическими, так и вычислительными трудностями. Альтернативой, в некотором смысле, модели с бинарным НОП АЭ является рассматриваемая ниже модель нечеткой АС, в которой центру известна нечеткая функция дохода активного элемента.

### 3.3. Задача стимулирования в активной системе с нечеткой функцией дохода активного элемента

Пусть функция дохода АЭ - нечеткая, то есть  $\underline{h}: A \times \mathbb{R}^1 \rightarrow [0,1]$ . Величина  $\underline{h}(y,u)$  при фиксированном действии  $y \in A$  может интерпретироваться как функция принадлежности нечеткого дохода  $u \in \mathbb{R}^1$  от выбора действия  $y$ . При введении четких штрафов  $x(y)$  нечеткая целевая функция АЭ, в соответствии с принципом обобщения [7, 11, 19], примет вид

$$(3.16) \underline{f}(y, u, x(y)) = \underline{h}(y, u + x(y)).$$

Величину  $\underline{f}(y, u, x(y))$  при фиксированном  $y \in A$  можно рассматривать как функцию принадлежности нечеткого значения целевой функции АЭ (как результат выбора конкретного действия). Тогда сравнивать два допустимых действия  $y_1$  и  $y_2$  можно по следующему НОП (см. [7] и четвертый раздел настоящей работы):

$$(3.17) \mu_{\underline{x}_r}(y_1, y_2) = \sup_{z \geq z} \min \{ \underline{h}(y_1, t+x(y_1)), \underline{h}(y_2, z+x(y_2)) \}.$$

Степень недоминируемости действия  $x \in A$  при этом определяется выражением:

$$(3.18) \mu_{\underline{x}_r}^{ND}(x) = 1 - \sup_{y \in A} [ \sup_{t \geq z} \min \{ \underline{h}(y, t+x(y)), \underline{h}(x, z+x(x)) \} - \sup_{z \geq t} \min \{ \underline{h}(x, z+x(x)), \underline{h}(y, t+x(y)) \} ].$$

Рациональным, как и ранее, будем считать выбор элементом действия, принадлежащего множеству максимально недоминируемых действий.

Более общим является понятие  $\beta$ -рационального выбора, при котором АЭ выбирает действия, принадлежащие множеству  $\beta$ -недоминируемых действий. Если априори неизвестно, пусто или нет множество Орловского, то множество выбора можно определить следующим образом:

$$C(R) = \bigcap_{\beta \in (0,1]} Q^{ND}(\beta),$$

где

$$Q^{ND}(\beta) = \begin{cases} A^{ND}(\beta), & \text{если } A^{ND}(\beta) \neq \emptyset \\ A, & \text{если } A^{ND}(\beta) = \emptyset \end{cases}$$

Пусть  $\forall y \in A \quad h(y,u)$  - нормальные функции [5]. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Если пара  $(y_0, u_0)$  - решение следующей задачи:

$$(3.19) \quad \begin{cases} u \rightarrow \max \\ h(y, u + \chi(y)) = 1, \\ u \in R^1, y \in A \end{cases}$$

то  $y_0$  - четко недоминируемое действие.

Теорема 3.2 является частным случаем доказываемой ниже теоремы 4.1 и ее доказательство не приводится.

Следует отметить, что (3.19) исчерпывает все ЧНД действия: легко видеть, что если функция дохода АЭ квазиоднотоновая, а  $h$  - 1-нормальна, то не существует ЧНД

действий АЭ, не являющихся решением соответствующей задачи четкого математического программирования.

Теорема 3.2 позволяет конструктивно определять множество выбора АЭ при известной функции штрафов. Отметим, что при предельном переходе к соответствующей детерминированной АС определенное выше множество Орловского переходит в множество решений игры.

Приведем алгоритм решения задачи стимулирования в АС с нечеткой функцией дохода АЭ.

### Алгоритм 3.2.

1.  $Q = \emptyset$ .

2. Положим  $i=1$ .

3. Используя функцию штрафов  $\chi_0(y_1, y)$  [1], определяем множество решений соответствующей задачи (3.19):  $\{(\bar{y}, \bar{y})\}$ .

Если это множество непусто, то положим  $Q := Q + \{\bar{y}\}$ .

4. Если  $i < n$ , то  $i := i + 1$  и переходим к шагу 3.

5. Ищем оптимальное для центра действие АЭ, принадлежащее множеству  $Q$ .

Пусть  $h(y)$  – четкая функция дохода АЭ. Будем говорить, что нечеткая функция дохода АЭ  $\underline{h}(y, u)$  согласована с функцией  $h(y)$ , если  $\forall y \in A$  выполнено:

1)  $\underline{h}(y, h(y)) = 1$ ;

2)  $\forall u_1, u_2: u_1 \leq u_2 \leq h(y) \quad \underline{h}(y, u_1) \leq \underline{h}(y, u_2)$ ;

3)  $\forall u_1, u_2: h(y) \leq u_1 \leq u_2 \quad \underline{h}(y, u_1) \geq \underline{h}(y, u_2)$ .

Нечеткую функцию дохода, согласованную с квазиоднотиповой четкой функцией дохода назовем квазиоднотиповой. Каждой детерминированной АС можно поставить в соответствие нечеткую АС с функцией дохода  $\underline{h}(y, u)$ , согласованной с функцией дохода  $h(y)$ .

Из структуры задачи (3.19) видно, что для любого действия и для любой системы стимулирования из класса  $M$ , реализующей это действие, найдется система стимулирования С-типа, реализующая то же действие. То есть справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. В активной системе с нечеткой квазиоднотиповой функцией дохода АЭ система стимулирования С-типа оптимальна.

Доказательство. Известно, что в детерминированной задаче множество достижимости при использовании функций штрафа С-типа (класс  $M_x$ ) совпадает с множеством достижимости функций стимулирования из всего класса  $M$ . Поэтому  $\forall x \in M$  найдется такой план  $x \in A$ , что при использовании центром функции штрафов  $x_c(x, y)$  максимумы в (3.19) совпадут. При выборе

$$x^* = \arg \max_{t \in P} \Phi(t),$$

максимум целевой функции АЭ  $f(y) = h(y) - x(x^*, y)$  достигается в точке  $x^*$ .

В силу квазиоднотипичности  $\underline{h}(y, u)$ , имеем:

$$\underline{h}(x^*, u + x(x^*, x^*)) = 1,$$

то есть  $x^*$  - ЧНД действие. В силу принципа благожелательности, АЭ выберет  $y = x^*$ . Если отказаться от гипотезы благожелательности, то АЭ может выбрать ЧНД действие, отличное от  $x^*$ . Однако,  $\forall x \in M \quad \forall x \in A^{ЧНД}(x)$   $\exists x_c \in M_x : x \in A^{ЧНД}(x_c)$ . Теорема доказана.

Пусть  $\underline{h}(y, u)$  - нечеткая функция дохода АЭ, согласованная с квазиоднопиковой функцией  $h(y)$ ,  $y \in A$ . Обозначим

$$Q(x) = \{ y \in A \mid (y, f(x, y)) \text{ - решение (3.19)} \}.$$

Множество достижимости при этом равно:

$$Q = \bigcup_{x \in P} Q(x).$$

При этом, очевидно,  $Q \supseteq P$ . Таким образом, мы доказали следующую теорему.

#### Теорема 3.4.

а) эффективность стимулирования в АС с нечеткой квазиоднопиковой функцией дохода АЭ не выше, чем эффективность стимулирования в соответствующей детерминированной АС;

б) если выполнена гипотеза благожелательности, то эффективность стимулирования в АС с нечеткой квазиоднопиковой функцией дохода АЭ не выше, чем эффективность стимулирования в соответствующей детерминированной АС;

Следствие 3.5. Если  $\underline{h}(y, u)$  такова, что  $\forall y \in A \quad \underline{h}(y, u) = 1$  тогда и только тогда, когда  $u = h(y)$  и  $\underline{h}(y, u)$  согласована с квазиоднотиповой функцией дохода  $h(y)$ , то эффективность стимулирования в нечеткой АС равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной АС.

Если отказаться от квазиоднотиповости функции дохода АЗ, ее согласованности и гипотезы благожелательности (то есть при определении эффективности стимулирования вычислять максимальный гарантированный результат по множеству четко недоминируемых действий), то эффективность стимулирования в АС с нечеткой функцией дохода АЗ может оказаться строго меньше, чем в соответствующей детерминированной активной системе.

Теорема 3.4 позволяет сравнивать эффективности стимулирования в детерминированных и нечетких АС. Введем теперь критерий сравнения эффективностей стимулирования в двух нечетких АС, различающихся величинами неопределенности.

Пусть  $\underline{h}_1(y, u)$  и  $\underline{h}_2(y, u)$  - две нечеткие функции дохода, согласованные с одной и той же квазиоднотиповой четкой функцией  $h(y)$ . Будем говорить, что первая АС обладает меньшей неопределенностью, если

$$(3.20) \quad \forall y \in A, \forall u \in \mathbb{R}^1 \quad \underline{h}_1(y, u) \leq \underline{h}_2(y, u).$$

В силу определений множеств  $Q(x)$  (см. выше) с увеличением неопределенности эти множества не сужаются. Значит не сужается и множество  $Q$ . Таким образом, справедливо следующее утверждение:

### Теорема 3.6.

- а) с ростом неопределенности эффективность стимулирования в АС с нечеткой квазиоднотиповой функцией дохода АЭ не увеличивается;
- б) если выполнена гипотеза благожелательности, то с ростом неопределенности эффективность стимулирования в АС с нечеткой квазиоднотиповой функцией дохода АЭ не уменьшается.

Содержательные обсуждения этих результатов отложим до четвертого раздела.

Для решения задачи стимулирования второго рода в АС с нечеткой функцией дохода АЭ достаточно использования методов, аналогичных изложенных в [1] для решения подобной задачи в детерминированных активных системах.

В заключение настоящего раздела отметим, что рассмотренная выше модель активной системы с нечеткой функцией дохода АЭ более "удобна" для анализа, нежели чем модель АС с НОП АЭ. Объяснение этого явления достаточно прозрачно: функция  $\hat{h}$  порождает НОП (3.17) на множестве A (и в этом случае использование результатов детерминированной теории или их неосредственных "аналогов", совместно с теоремой 3.2, дает мощный инструмент для анализа нечетких АС), а при заданном НОП однозначное восстановление функции дохода возможно не всегда.

### 3.4. Задача стимулирования в активной системе с нечеткими предпочтениями элементов и асимметричной информированностью участников

При рассмотрении задач стимулирования в АС с НОП активного элемента и в АС с нечеткой функцией дохода АЭ предполагалось, что и центр, и активный элемент обладают одинаковой информацией о предпочтениях элемента, то есть имела место симметричная информированность. Можно возразить, что этот случай соответствует не задаче с неопределенностью, а альтернативному по сравнению с детерминированным способу описания АС, и именно симметричная информированность служит объяснением роста эффективности с увеличением неопределенности в случае справедливости ГБ. Все это, отчасти, действительно, так. Поэтому для получения более полной картины рассмотрим нечеткие АС с асимметричной информированностью. Как обычно [1], будем предполагать, что АЭ информирован лучше, чем центр.

Возможны несколько путей обобщения полученных выше в третьем разделе результатов на случай асимметричной информированности.

Активный элемент может иметь четкое бинарное отношение предпочтения  $R_h$  на конечном множестве  $A$ , а центр может иметь информацию о НОП  $R_h$ , согласованном в том или ином смысле с "истинным" предпочтением АЭ. Рассмотрение этой модели выходит за рамки настоящей работы.

Ниже исследуется следующая модель. Пусть АЭ известна его квазиоднотиповая функция дохода  $h(y)$ , а центр имеет информацию о  $\underline{h}(y,u)$  – нечеткой функции дохода, согласованной с  $h(y)$  (см. раздел 3.3).

В случае асимметричной информированности оказывается, что с ростом неопределенности (в смысле (3.20)) эффективность стимулирования уменьшается. Действительно, если выполнены условия следствия 3.5, то эффективность стимулирования в нечеткой АС с асимметричной информированностью равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной АС. Содержательно, этот факт можно объяснить следующим образом. Ограничение задачи (3.19) выполнено в единственной точке – при  $u = h(y)$ . Следовательно, если функция штрафов такова, что максимум целевой функции АЭ достигается в некоторой точке  $x \in P$ , то  $(x, f(x))$  – решение задачи (3.19), и, следовательно,  $x$  – ЧНД действие. То есть в этом случае центр может, без потери общности (и, что более важно – эффективности), "забыть" про неопределенность и по информации о  $\underline{h}(y,u)$  однозначно восстановить  $h(y)$  из условия

$$\underline{h}(y,u) = 1 \rightarrow h(y) = u.$$

Ситуация меняется, если для некоторого  $y \in A$  существуют  $u_1$  и  $u_2$ ,  $u_1 \neq u_2$ , такие, что  $\underline{h}(y,u_1) = \underline{h}(y,u_2) = 1$ . В этом случае центр не знает, какое из значений  $u_1$  или  $u_2$  (или какое-либо еще) соответствует "истинной" функции дохода АЭ.

Определим следующие функции

$$(3.21) \quad h_{\min}(y) = \min \{ u \mid h(y, u) = 1 \}, \quad y \in A.$$

$$(3.22) \quad h_{\max}(y) = \max \{ u \mid h(y, u) = 1 \}, \quad y \in A.$$

Из согласованности функций  $\underline{h}$  и  $\bar{h}$  следует, что для любого  $y \in A$   $h_{\min}(y) \leq h_{\max}(y)$ , но функции  $h_{\min}(y)$  и  $h_{\max}(y)$  могут оказаться не квазиоднотиповыми. В силу согласованности, центр знает, что "истинная" функция дохода АЗ удовлетворяет:

$$(3.23) \quad \forall y \in A \quad h_{\min}(y) \leq h(y) \leq h_{\max}(y).$$

Неравенство (3.23) демонстрирует, что требование согласованности является достаточно сильным. В то же время, если оно нарушено, то центр может решать задачу стимулирования не для "той" АС.

Обозначим  $V$  - множество квазиоднотиповых функций, удовлетворяющих (3.23),  $v(\cdot)$  - элемент множества  $V$ . Тогда множество решений игры определяется следующим образом:

$$P(v, x) = \operatorname{Arg} \max_{y \in A} \{ v(y) - x(y) \}.$$

Эффективность стимулирования:

$$(3.24) \quad K(x) = \min_{v \in V} \min_{y \in P(v, x)} (\max) \Phi(y).$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования формулируется, как и ранее, как задача поиска функции стимулирования  $x^* \in M$ , максимизирующей эффективность (3.24):

$$(3.25) \quad K(x) \rightarrow \max_{x \in M}.$$

Видно, что задача (3.25) гораздо сложнее соответствующей детерминированной задачи (добавился гарантированный результат по множеству  $V$ ).

Исследуем влияние неопределенности на эффективность стимулирования.

Теорема 3.7. С увеличением неопределенности в нечетких АС с асимметричной информированностью эффективность стимулирования уменьшается (не возрастает).

Справедливость теоремы 3.7 следует из того, что с ростом неопределенности (3.20) множество  $V$  не сужается и, следовательно, не увеличивается эффективность (3.24).

Как отмечалось выше, поиск решения (3.25) представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому рассмотрим один практически важный частный случай. Пусть  $h_{\max}(y)$  — квазиоднотиповая функция,  $\operatorname{Arg} \max h(y, u)$  не зависит от  $u \in \mathbb{R}^1$  и выполнено:

$$(3.26) \forall y \in A \quad h_{\max}(y) - h_{\min}(y) = \Delta > 0,$$

то есть "диапазон неопределенности" относительно функции дохода не зависит от выбранного АЭ действия. Из введенных предположений следует, что  $h_{\max}(y)$  — квазиоднотиповая функция. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.8. Пусть выполнено (3.26). Тогда:

- если  $\Delta \geq C$ , то  $x^* = 0$ ;
- если  $\Delta < C$ , то правая граница гарантированного множества достижимости определяется как

$$\max [x \in A \mid h_{\max}(x) \geq h_{\max}(p^\pm) - C + \Delta].$$

Доказательство очевидно. Результат теоремы 3.8 находится в соответствии с утверждением теоремы 3.7 - с ростом неопределенности (увеличением  $\Delta$ ) эффективность стимулирования уменьшается, а при "предельном" переходе к соответствующей детерминированной активной системе (3.27) совпадает с (2.3) для квазиоднотиповой функции дохода [6].

## 4. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ О СОСТОЯНИИ ПРИРОДЫ

В настоящем разделе рассмотрена модель одноэлементной статической активной системы с нечеткой информацией о состоянии природы и предложены подходы к формулировке и решению соответствующей задачи стимулирования. Следует отметить, что описываемая ниже модель достаточно близка к модели вероятностной активной системы [1, 2].

### 4.1. Определение индуцированного нечеткого отношения предпочтения на множестве возможных действий активного элемента

Рассмотрим активную систему, состоящую из центра и одного активного элемента. Стратегией элемента является выбор действия  $y \in A$ . Под природой понимается внешняя для рассматриваемой системы среда [1, 2]. Соответственно, состояние природы – значения параметров окружающей среды, существенных для функционирования АС. Выбираемое АЭ действие, совместно с реализацией состояния природы  $\theta \in \Omega$ , приводит к некоторому результату деятельности  $z \in A_o$ ,  $z = z(y, \theta)$ . Как правило, предполагается, что множество возможных результатов  $A_o$  совпадает с множеством возможных действий  $A$  (хотя, конечно, это предположение не обязательно – например, множество  $A_o$  может быть конечным, а  $A$  – отрезком  $\mathbb{R}^1$  и т.д.).

Как и в модели теории контрактов (вероятностные активные системы [2]), предположим, что целевая функция АЭ представляет собой разность между доходом и штрафами, причем и доход, и штрафы зависят от результата деятельности. Действие АЭ известно только ему самому и не наблюдается центром. Целевая функция центра определяется доходом (2.1), зависящим от действия АЭ.

Предположим, что на момент выбора стратегий участниками АС значение состояния природы им неизвестно, следовательно их целевые функции оказываются зависящими от неопределенного параметра  $\theta$ . Для определения рационального выбора стратегий необходимо задать процедуру устранения неопределенности. Используемая процедура устранения неопределенности, естественно, зависит от имеющейся у участников активной системы информации о неопределенном параметре. Так, если известно только множество его возможных значений  $\Omega$ , то игроки могут расчитывать, например, на максимальный гарантированный результат. Если игрокам известно распределение вероятностей  $p(\theta)$ , то рациональным целесообразно считать выбор, максимизирующий ожидаемую полезность (как это делается в теории контрактов [2]) и т.д.

Мы будем считать, что и центр, и активный элемент имеют одинаковую нечеткую информацию о состоянии природы. Необходимо определить, что понимать под рациональным выбором с учетом этой информации и определить равновесные стратегии. Перейдем к формальному описанию модели.

Как и в предыдущем разделе мы будем считать, что АЭ имеет собственные (в отсутствии стимулирования) предпочтения на множестве  $A_o$ , выраженные НОП  $R_h$ . Центр, выбором системы стимулирования  $x \in M$  "трансформирует"  $R_h$  в НОП  $R_f$ . Отметим, что, в отличие от рассматриваемой в третьем разделе модели, исходные отношения предпочтения заданы на множестве возможных результатов деятельности АЭ, а не на множестве возможных действий. Так как результат деятельности зависит и от действия АЭ, и от состояния природы, то для определения рационального выбора на множестве  $A$ , необходимо, с учетом имеющейся у АЭ информации о состоянии природы, определить, какое НОП индуцируется на множестве возможных действий нечетким отношением предпочтения  $R_f$ , определенным на множестве  $A_o$ . Для решения этой задачи мы используем подход, предложенный в [7].

Предположим, что и центр, и активный элемент имеют следующую нечеткую информацию о состоянии природы, точнее о влиянии состояния природы на результат деятельности АЭ (см. для сравнения различные методы учета вероятностной неопределенности [1]): известна нечеткая функция  $P : A_o \times A \rightarrow [0,1]$ . Если  $y \in A$  - некоторое фиксированное действие, то определенная на  $A_o$  функция  $P(z,y)$  есть функция принадлежности соответствующего результата деятельности  $z$ . Поставленная выше задача может быть сформулирована как задача поиска НОП на множестве  $A$ , индуцированного нечетким отношением предпочтения  $R_f$ , заданным на множестве  $A_o$ , и нечеткой функцией  $P$ , то есть мы должны научиться сравнивать

результаты деятельности АЭ (как последствия его действий) и на основании этого сравнения определить предпочтения АЭ на множестве возможных действий.

Нечеткое отношение предпочтения  $\underline{R}$  ( $\underline{R}_h$  или  $\underline{R}_r$ ) можно интерпретировать как нечеткое отображение множества  $A_o$  в класс всех его нечетких подмножеств. Функция  $\mu_{\underline{R}}(x, z)$  описывает нечеткое множество элементов  $z \in A_o$ , связанных с  $x$  отношением  $\underline{R}$ , то есть  $\{ z \in A_o \mid x \underline{R} z \}$  – нижний срез НОП  $\underline{R}$ . Зафиксируем  $y \in A$ , тогда  $P(z, y)$  определяет нечеткое подмножество в  $A_o$ , которое мы обозначим  $P(z)$  (ниже иногда мы будем в целях удобства обозначений идентифицировать нечеткое множество с его функцией принадлежности). Тогда, согласно принципу обобщения [5, 7, 19], образом  $P(z)$  при нечетком отображении  $\mu_{\underline{R}}(x, z)$  является нечеткое подмножество множества  $A_o$  с функцией принадлежности:

$$\tau(\underline{P}, z) = \sup_{x \in A_o} \min [ P(x), \mu_{\underline{R}}(x, z) ].$$

Величина  $\tau(\underline{P}, z)$  есть степень, с которой нечеткое множество  $P$  предпочтительнее элемента  $z$ .

Применяя опять принцип обобщения, получим, что

$$\beta(\underline{P}, \underline{P}') = \sup_{z \in A_o} \min [ P'(z), \tau(\underline{P}, z) ]$$

есть степень предпочтительности нечеткого результата деятельности АЭ  $\underline{P}$  по сравнению с нечетким результатом  $\underline{P}'$ .

Комбинируя последние два выражения, получим, что

$$(4.1) \quad \beta(\underline{P}, \underline{P}') = \sup_{z, x \in A_o} \min [ P(x), P'(z), \mu_{\underline{R}}(x, z) ].$$

Выражение (4.1) позволяет сравнивать различные результаты деятельности АЭ. Вспомним, что  $\underline{P}(x)$  - нечеткая функция при фиксированном действии. Значит, подставив в (4.1)  $\underline{P}(x,y_1)$  вместо  $\underline{P}(x)$  и  $\underline{P}(z,y_2)$  вместо  $\underline{P}(z)$ , получим НОП  $\underline{R}_A$  на множестве возможных действий:

$$(4.2) \quad \mu_{\underline{R}_A}(y_1, y_2) = \sup_{z, x \in A_0} \min [\underline{P}(x, y_1), \underline{P}(z, y_2), \mu_{\underline{R}}(x, z)].$$

Будем говорить, что нечеткое множество  $\underline{P}(z, y)$  нормально, если

$$(4.3) \quad \forall y \in A \quad \sup_{z \in A_0} \underline{P}(z, y) = 1.$$

Будем говорить, что нечеткое множество  $\underline{P}(z, y)$   $\alpha$ -нормально, если  $\forall y \in A \quad \sup_{z \in A_0} \underline{P}(z, y) = \alpha$  и

$$\forall z \in A_0 \quad \exists y \in A: \underline{P}(z, y) = \alpha.$$

Класс  $\alpha$ -нормальных множеств достаточно широк. Ему, например, принадлежат нормальные нечеткие множества, функция принадлежности которых достигает максимума при  $z = y$  и зависит от модуля разности  $z$  и  $y$  (ср. с требованиями к распределениям вероятности в [1]).

Исследуем свойства индуцированного НОП (4.2).

Если нечеткое множество  $\underline{P}$  нормально, то НОП  $\mu_{\underline{R}_A}(y_1, y_2)$  рефлексивно (в смысле Р1). Справедливость этого утверждения доказывается рассмотрением  $\mu_{\underline{R}_A}(y, y)$  с учетом (4.3).

Если нечеткое множество  $\underline{P}$  нормально и НОП  $\mu_{\underline{R}}(x, z)$  сильно линейно, то и НОП  $\mu_{\underline{R}_A}(y_1, y_2)$  также сильно линейно.

Частным случаем рассмотренной выше модели является активная система, в которой НОП АЭ  $\mu_{\underline{R}_A}$  на множестве  $A_0$  является обычным отношением предпочтения  $R$ , порожденным, например, функцией дохода АЭ или его целевой функцией. Тогда (4.2) примет вид:

$$(4.4) \quad \mu_{\underline{R}_A}(y_1, y_2) = \sup_{z, x \in A_0} \min_{zRx} [\underline{P}(z, y_1), \underline{P}(x, y_2)].$$

Обычное линейное отношение является сильно линейным в смысле Л1. Поэтому индуцируемое им на множестве  $A = A_0 = \mathbb{R}^1$  НОП (4.4) также является сильно линейным.

Еще более частным случаем является АС, в которой предпочтения АЭ совпадают с естественным порядком ( $\leq$ ) на  $A_0$  (чем больше — тем лучше). В этом случае, если нечеткие подмножества  $\underline{P}$  выпуклые (для  $A_0 \subseteq \mathbb{R}^1$  это требование эквивалентно связности всех множеств уровня нечеткой функции  $\underline{P}(z, y)$  для любого  $y \in A$ ), то НОП  $\mu_{\underline{R}_A}$  удовлетворяет:

$\forall y_1, y_2 \in A$  либо  $\mu_{\underline{R}_A}(y_1, y_2) = 1$ , либо

$$(4.5) \quad \mu_{\underline{R}_A}(y_1, y_2) = \sup_{z \in A_0} \min [\underline{P}(z, y_1), \underline{P}(z, y_2)].$$

Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством теоремы 4.2.5 в работе [7] и не приводится.

Если  $h(z)$  — невозрастает, а  $\underline{P}$  — выпукло, то функция дохода порождает на  $A_0$  отношение ( $\leq$ ), а на  $A$  — НОП, которое, в соответствии с (4.5), можно представить в виде:

$$\mu_{\underline{R}_A}(y_1, y_2) = \begin{cases} 1 - \sup_{z \in A_0} \min [\underline{P}(z, y_1), \underline{P}(z, y_2)], & y_1 \leq y_2 \\ \sup_{z \in A_0} \min [\underline{P}(z, y_1), \underline{P}(z, y_2)], & y_1 \geq y_2 \end{cases}$$

Подставляя в (4.6), получим, что в рассматриваемом частном случае

$$\mu_{\underline{R}_A}(x) = 1 - \max [ 1 - 2 \sup_{y \in A} \sup_{z \in A_0} \min \{ P(z,y), P(z,x) \};$$

$$2 \sup_{y \in A} \sup_{z \in A_0} \min \{ P(z,y), P(z,x) \} - 1 ].$$

Имея заданное на множестве возможных действий НОП  $\mu_{\underline{R}_A}$  (4.2), определим, как это делалось в третьем разделе настоящей работы, в  $A$  нечеткое подмножество недоминируемых действий:

$$(4.6) \mu_{\underline{R}_A}^{\text{НД}}(x) = 1 - \sup_{y \in A} [ \mu_{\underline{R}_A}(y,x) - \mu_{\underline{R}_A}(x,y) ].$$

Из (4.2) и (4.6) получаем

$$(4.7) \mu_{\underline{R}_A}^{\text{НД}}(x) = 1 - \sup_{y \in A} [ \sup_{z,t \in A_0} \min \{ P(z,y), P(t,x), \mu_{\underline{R}}(z,t) \} - \\ - \sup_{z,t \in A_0} \min \{ P(t,x), P(z,y), \mu_{\underline{R}}(t,z) \} ].$$

Если нечеткие функции  $P$  не являются нормальными, то необходимо скорректировать выражение (4.7), например, по аналогии с тем, как это делается в работе [7]. Рациональным будем считать выбор активным элементом действий, для которых функция (4.7) принимает возможно большие значения, то есть действия из множества максимально недоминируемых действий (или просто недоминируемых действий).

Прежде чем перейти к рассмотрению условий непустоты множества недоминируемых действий и построению множества

выбора, обсудим кратко некоторые возможные модификации описываемой модели.

Если предположить, что множество допустимых действий описано нечетко - задана функция принадлежности  $\mu_A(x)$ , то при определении рационального выбора АЭ следует учитывать оба отношения предпочтения - индуцированного НОП  $\mu_B^{НД}(x)$  и отношения предпочтения, отражающего степени допустимости тех или иных действий АЭ. В этом случае рациональным можно считать, например, выбор действий из множества

$$\operatorname{Arg} \max_{x \in A} \min_{\alpha} [\mu_B^{НД}(x), \mu_A(x)].$$

Более подробное обсуждение возможных методов учета нескольких различных НОП можно найти, например, в [?].

Другим возможным расширением рассматриваемой модели является следующая конструкция. Пусть относительно состояния природы центр и активный элемент (или один из них) имеет информацию в виде: 1) нечеткого сигнала  $s \in S$  с функцией принадлежности  $\mu_s(s, \theta)$ ; и 2) распределения вероятностей  $p(\theta)$ ; а выбираемое действие зависит от полученного сигнала. Назовем функцией принятия решения отображение  $\alpha: S \rightarrow A$ . Целевая функция АЭ определяется как ожидаемая полезность от выбора конкретного действия (усреднение производится по распределению  $p(\theta)$ , умноженному на соответствующее значение функции принадлежности). Понятно, что если рассматривается задача стимулирования, то усредняемая полезность АЭ должна зависеть от стратегии центра (интересно отметить, что в аналогичной задаче, приведенной в [15] эта зависимость

отсутствует, равно как и центр). Выбор АЭ в этом случае можно определить как такую функцию принятия решения, которая максимизирует его целевую функцию. Формулировка задачи стимулирования совпадет с описанными выше. С одной стороны, такое описание является усложнением рассматриваемой модели, а с другой стороны, с нашей точки зрения, качественно новых эффектов при этом не появляется.

Вернемся к построению множества выбора. На основании (4.7) и определенного выше множества недоминируемых действий, множество выбора в активной системе с нечеткой информацией относительно состояний природы определяется следующим выражением:

$$(4.8) \quad C(\underline{R}, \underline{P}) = A^{ЧНД}.$$

Если  $A^{ЧНД} = \emptyset$ , то естественно считать, что

$$C(\underline{R}, \underline{P}) = A^{ЧНД}.$$

#### 4.2. Синтез оптимальной функции стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы

Понятно, что множество недоминируемых альтернатив зависит как от НОП активного элемента на множестве результатов деятельности, так и от нечеткой функции  $P$ , отражающей влияние неопределенного параметра на результат функционирования активной системы. Если предпочтения АЭ на множестве  $A_0$  (в присутствии стимулирования) зависят от выбранной центром системы стимулирования, то, естественно, от стимулирования зависит и выбор элементом действия, то есть можно записать, что  $C = C(R(x); P)$ .

В предположении благожелательного отношения активного элемента к центру, эффективность механизма стимулирования определим как (см. также (2.4), (2.8), (3.5))

$$(4.9) K(x) = \max_{y \in C(R(x), P)} \Phi(y),$$

где множество выбора определяется (4.8) (точнее (4.2)-(4.7)-4.8)).

Если гипотеза благожелательности не выполнена, то эффективность механизма стимулирования определяется как гарантированное значение целевой функции центра на соответствующем множестве выбора (решений игры), то есть:

$$(4.10) K(x) = \min_{y \in C(R(x), P)} \Phi(y).$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования формулируется как задача поиска механизма стимулирования,

имеющего максимальную эффективность:

$$K(x) \rightarrow \max_{x \in M}$$

Возможно определение множества выбора, альтернативное (4.8): АЭ выбирает наиболее благоприятное для центра  $\vartheta$ -недоминируемое действие (см. ниже).

Рассмотрим следующий практически важный случай. Если отношение предпочтения АЭ  $R_f$  на множестве  $A_0$  четкое (индуцированное четкой функцией  $f(z)$ ), то воспользовавшись (4.4), получим, что  $R_f$  индуцирует на множестве возможных действий следующее НОП

$$(4.11) \mu_{R_A}(y_1, y_2) = \sup_{\substack{z, x \in A_0 \\ f(z) \geq f(x)}} \min \{ P(z, y_1), P(x, y_2) \}.$$

Если выполнено предположение (4.3), то множество недоминируемых альтернатив (4.7) принимает вид

$$(4.12) \mu_{R_A}^{ND}(x) = 1 - \sup_{y \in A} \{ \sup_{\substack{z, t \in A_0 \\ f(z) \geq f(t)}} \min \{ P(z, y), P(t, x) \} -$$

$$- \sup_{\substack{z, t \in A_0 \\ f(t) \geq f(z)}} \min \{ P(t, x), P(z, y) \} \}.$$

Если для некоторого действия  $x \in A$  выполнено  $\mu_{R_A}^{ND}(x) \geq \alpha$ , где  $\alpha \in (0, 1)$ , то в множестве  $A$  не существует действия, доминирующего действие  $x$  со степенью, большей  $(1-\alpha)$ .

Введем в рассмотрение задачу четкого математического программирования:

$$(4.13) \left\{ \begin{array}{l} f(z) \rightarrow \max \\ P(z, y) \geq \alpha \\ y \in A, z \in A_0 \end{array} \right.$$

Справедлива следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 4.3.1 работы [7]:

Теорема 4.1. Пусть выполнено

$$(4.14) \forall y \in A \sup_{z \in A_0} P(z, y) \geq \alpha$$

и НОП  $\mu_{R_A}(x)$  индуцировано на  $A$  отношением предпочтения  $R_f$  и нечеткой функцией  $P(z, y)$ . Если  $(z_0, y_0)$  – решение задачи (4.13), то

$$(4.15) \mu_{R_A}^{ND}(y_0) \geq \alpha,$$

то есть действие  $y_0$  является  $\alpha$ -недоминируемым.

Доказательство. Пусть пара  $(z_0, y_0)$  – решение задачи (4.13). Из (4.12) следует, что достаточно показать, что

$$\sup_{y \in A} [\sup_{f(z) \geq f(t)} \min \{P(z, y), P(t, y_0)\}] =$$

$$= \sup_{f(t) \leq f(z)} \min \{P(t, y_0), P(z, y)\} \geq 1 - \alpha.$$

Предположим противное. Пусть  $\exists \tilde{y} \in A$  и  $\epsilon > 0$ , такие, что

$$(4.16) \sup_{f(z) \geq f(t)} \min \{P(z, \tilde{y}), P(t, y_0)\} =$$

$$= \sup_{f(t) \leq f(z)} \min \{P(t, y_0), P(z, \tilde{y})\} \geq 1 - \alpha + \epsilon.$$

Выберем  $\tilde{z} \in A_0$  такое, что  $P(\tilde{z}, \tilde{y}) \geq \alpha - \epsilon$  (существование такого  $\tilde{z}$  следует из (4.14)). Так как пара  $(z_0, y_0)$  – решение

задачи (4.13), то  $f(z_0) \geq f(\bar{z})$  и  $\underline{P}(z_0, y_0) \geq \alpha$ . Тогда

$$\sup_{f(t) \leq f(z)} \min \{ \underline{P}(t, y_0), \underline{P}(z, \bar{y}) \} \geq$$

$$= \min \{ \underline{P}(z_0, y_0), \underline{P}(\bar{z}, \bar{y}) \} \geq \alpha - \epsilon,$$

что противоречит (4.16). Теорема доказана.

Таким образом, задача исследования достаточных условий непустоты множества  $\alpha$ -недоминируемых действий (4.12) свелась к исследованию условий существования решения стандартной задачи математического программирования (4.13).

Следующая лемма дает ряд достаточных условий существования решения задачи (4.13) для широкого класса практических важных случаев.

Лемма 4.2. Если выполнено одно из следующих условий:

- (4.14) и множества  $A$  и  $A_0$  конечны;
- (4.14) и множества  $A$  и  $A_0$  компактны, а функции  $f$  и  $\underline{P}$  полунепрерывны сверху;
- множества  $A$ ,  $A_0$  компактны, функция  $f$  полунепрерывна сверху, а  $\underline{P}$  —  $\alpha$ -нормально,

то задача (4.13) имеет решение.

Доказательство леммы 4.2 очевидно. Понятно, что перечень условий, приведенных выше, далеко не полон, хотя и соответствует наиболее часто используемым при формулировке задачи стимулирования предположениям.

Следствие 4.3.

- a) Если выполнены условия теоремы 4.1 и леммы 4.2, то множество  $\alpha$ -недоминируемых действий непусто (то есть

существует хотя бы одно действие  $y_0 \in A$ , удовлетворяющее (4.15)).

б) Если выполнено условие (4.14), множества  $A$  и  $A_0$  компактны, а функции  $f$  и  $P$  полунепрерывны сверху, то множество Орловского непусто, причем любое решение задачи (4.13) с  $\alpha = 1$  принадлежит этому множеству.

Результат теоремы 4.1 гласит, что решения задачи (4.13) принадлежат множеству  $\alpha$ -недоминируемых действий. Однако, в общем случае, не исключена ситуация, когда может найтись  $\alpha$ -недоминируемое действие, не являющееся решением соответствующей задачи математического программирования. Следующая теорема определяет класс АС, в котором такая возможность исключается.

Теорема 4.4. Если нечеткое множество  $P(z, y)$   $\alpha$ -нормально и выполнены условия леммы 4.2, то любое  $\alpha$ -недоминируемое действие принадлежит множеству решений задачи (4.13).

Доказательство. Предположим противное. Пусть  $y^*$  -  $\alpha$ -недоминируемое действие. Обозначим

$$Q(y^*) = \{ z \in A_0 \mid P(z, y^*) \geq \alpha \}.$$

Пусть не существует результата деятельности  $z^* \in A_0$  такого, что пара  $(z^*, y^*)$  - решение задачи (4.13). Иными словами, пусть выполнено:

$$Q(y^*) \cap \operatorname{Arg} \max_{z \in A_0} f(z) = \emptyset.$$

Пусть  $z_0 \in \operatorname{Arg} \max_{z \in A_0} f(z)$ . В силу сделанного предположения  $P(z_0, y^*) < \alpha$ . В силу  $\alpha$ -нормальности

нечеткой функции  $P$ , существует  $y_0 \in A$  – действие АЭ такое, что пара  $(z_0, y_0)$  – решение задачи (4.13) и, следовательно, по теореме 4.1  $y_0 - \alpha$  – недоминируемое действие. Более того,  $y_0$  доминирует  $y^*$  со степенью, строго большей, чем  $(1-\alpha)$ . Значит  $y^*$  – не является  $\alpha$  – недоминируемым действием. Противоречие. Теорема доказана.

Отметим, что результаты теорем 4.1, 4.4 и леммы 4.2 формулировались для достаточно общего случая (произвольных значений  $\alpha \in (0, 1]$ ). На практике в большинстве случаев предполагается, что  $P$  – 1-нормальны.

Итак, комбинируя результаты теорем 4.1, 4.4 и леммы 4.2, можно утверждать, что в случае  $\alpha$ -нормальных информационных функций множество  $\alpha$ -недоминируемых действий совпадает с множеством решений задачи (4.13). Этот факт дает эффективный инструмент для решения задачи стимулирования и позволяет в достаточно широком классе нечетких активных систем вместо анализа множества недоминируемых действий решать задачу математического программирования. Рассмотрим более детально, как можно конструктивно использовать приведенные результаты для решения задачи стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы.

Целевая функция АЭ

$$(4.17) f(z) = h(z) - x(z)$$

представляет собой разность между доходом и штрафами. Если функция дохода АЭ квазиднепиковая, а функция штрафов ограничена, то в соответствии с теоремой 2 работы [6]

множество точек максимума целевой функции АЭ при  $x \in M$  ограничено и представляет собой отрезок  $P = [z^-, z^+] \subseteq A_0$ , где

$$z^- = \min \{ z \in A_0 \mid h(z) \geq h(p^\pm) - C \} \\ (4.18)$$

$$z^+ = \max \{ z \in A_0 \mid h(z) \geq h(p^\pm) - C \},$$

где  $p^\pm \in [p^-, p^+]$  произвольная точка пика (плато) функции дохода  $h(z)$ .

Более того, в работе [6] было показано, что множество  $P$  достижимо (гарантированно достижимым оказывается множество  $P_\delta = [z^- + \delta, z^+ - \delta], \delta > 0$ ) при использовании только систем стимулирования С-типа, то есть при  $x \in M_x \subseteq M$ . Поэтому предположим, что центр использует систему стимулирования С-типа:

$$(4.19) x(x, z) = \begin{cases} C, & z < (>) x \\ 0, & z \geq (s) x \end{cases}, \quad x, z \in A_0.$$

При использовании функции штрафов (4.19) максимум целевой функции АЭ (4.17) достигается в точке  $x \in P$  (назначать планы  $x \in P$  не имеет смысла). Фиксируем  $x \in M_x$ , или, что то же самое  $\tilde{x} \in P$ , и обозначим

$$(4.20) Q(\tilde{x}, \alpha) = \{ y \in A \mid P(\tilde{x}, y) \geq \alpha \}.$$

Теорема 4.5. Если  $P$   $\alpha$ -нормальна, то для любого  $y \in Q(x, \alpha)$  найдется система стимулирования  $x \in M_x$  (а именно,  $x(\tilde{x}, z)$ ), такая, что действие  $y$  будет принадлежать множеству  $\alpha$ -недоминируемых действий.

Доказательство. При использовании системы стимулирования  $x(\tilde{x}, z)$ , где  $\tilde{x} \in [z^-, z^+]$ , выполнено:

$$\tilde{x} \in \operatorname{Arg} \max_{z \in A_0} f(z).$$

В силу предположений теоремы множество  $Q$  непусто (требование  $\alpha$ -нормальности в условиях настоящей теоремы, как мы увидим в дальнейшем, является даже чрезчур сильным). В соответствии с (4.20), пара  $(\tilde{x}, y \in Q(\tilde{x}, \alpha))$  является решением задачи (4.13). Тогда по теореме 4.1  $y$  —  $\alpha$ -недоминируемое действие. Теорема доказана.

Назовем в рассматриваемой нечеткой модели, как и в детерминированной теории [1], множеством достижимости подмножество таких допустимых действий активного элемента, которые центр может побудить его выбрать, используя штрафы, удовлетворяющие ограничениям механизма стимулирования. В детерминированном аналоге рассматриваемой задачи множество достижимости совпадает с отрезком  $P$ . Обозначим

$$P(x, \alpha) = \{y \in A \mid y \in A^{\text{НД}}(R_f(x), \alpha)\}$$

и определим множество  $\alpha$ -достижимости

$$S(\alpha) = \bigcup_{x \in M} P(x, \alpha).$$

На основании теоремы 4.5 получаем следующий результат:

**Теорема 4.6.** Если  $P$   $\alpha$ -нормальна, то множество  $\alpha$ -достижимости в рассматриваемой модели нечеткой активной системы определяется

$$(4.21) S(\alpha) = \bigcup_{x \in P} Q(x, \alpha).$$

Справедливость утверждения теоремы 4.6 следует из того, что любое  $\alpha$ -недоминирующее действие принадлежит одному из множеств  $Q$ .

Произведем теперь "корректировку" понятия рационального выбора АЭ. Выше мы предполагали, что выбираемое элементом действие принадлежит множеству максимально недоминируемых альтернатив. Считалось, что в АС, удовлетворяющей (4.14) с  $\alpha = 1$ , АЭ выберет одно из действий, принадлежащее множеству Орловского. Можно ослабить требования, налагаемые на "рациональный" выбор АЭ. Например, предположим, что если АС удовлетворяет (4.14) с некоторым  $\alpha \in (0,1)$ , то рациональным будет выбор из множества  $\beta$ -недоминируемых альтернатив, где  $\beta \in (0,1]$ ,  $\beta \leq \alpha$ . При таком определении множество выбора расширяется. Понятно, что если  $\beta \leq \alpha$ , то

$$A^{\text{НД}}(R_f, \beta) \supseteq A^{\text{НД}}(R_f, \alpha).$$

Выбор элементом  $\beta$ -недоминируемого действия будем называть  $\beta$ -рациональным. При  $\beta = \alpha$  определение  $\beta$ -рационального выбора совпадает с определением рационального выбора, введенным в третьем разделе настоящей работы.

Теперь мы имеем возможность конструктивно определить решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования. Назовем  $\beta$ -решением такую допустимую систему стимулирования, при которой АЭ выбирает наиболее благоприятное для центра  $\beta$ -рациональное действие.

Задача стимулирования (4.9)-(4.10), с учетом результата теоремы (4.6) может быть сформулирована в следующем виде

(этот очевидный факт приведен в виде отдельной теоремы в силу его чрезвычайной важности).

Теорема 4.7. Если нечеткая АС удовлетворяет условию (4.14) с некоторым  $\alpha \in (0,1]$ , то

а) для любого  $\beta \in (0, \alpha]$   $\beta$ -решение задачи стимулирования совпадает с одним из решений следующей задачи:

$$\Phi(x) \rightarrow \max_{x \in S(\beta)},$$

где оптимальный план  $x^* \in P$  и  $S(\beta)$  определяются из (4.20)-(4.21);

б) для любой системы стимулирования  $x \in M$  существует система стимулирования С-типа не меньшей эффективности, то есть при поиске оптимального механизма стимулирования в нечеткой АС достаточно ограничиться классом  $M_x$ .

Следует отметить, что при формулировке приведенного результата неявно подразумевалось, что выполнена ГБ — считалось, что при плане  $x \in P$  АЭ выберет из множества  $Q(x, \alpha)$  действие, которое наиболее предпочтительно для центра. Если отказаться от гипотезы благожелательности, то эффективность системы стимулирования С-типа следует определить следующим образом:

$$K(x) = \min_{y \in Q(x, \alpha)} \Phi(y)$$

и решать задачу оптимального согласованного планирования:

$$K(x) \rightarrow \max_{x \in P}$$

При этом оптимальность системы стимулирования С-типа обосновывается следующим образом. Фиксируем произвольное  $x \in M$ . Обозначим  $P(x) = \cup_{x \in P(x)} Q(x, \alpha)$ . Эффективность стимулирования  $K(x) = \min_{y \in P(x)} \Phi(y)$ . С одной стороны, множество

точек максимума целевой функции АЭ при использовании скачкообразных штрафов не шире, чем при использовании любой другой системы стимулирования из класса  $M$  (за исключением, быть может, точки  $p^*$ ), а с другой стороны - в силу  $\alpha$ -нормальности  $P \forall y \in P(x) \exists x_c \in M : y \in P(x_c)$ .

Легко видеть, что в предельном случае - при отсутствии неопределенности (когда  $z = y$ , то есть  $P(z,y) = 1$  при  $z = y$  и  $P(z,y) = 0$  при  $z \neq y, \alpha = 1$ ) (4.20) превращается в  $Q(x,\alpha) = x$ ,  $P(x,\alpha)$  тождественно равно  $x$  при  $x = x(z,x)$ , а множество достижимости совпадает с множеством согласованных планов  $P$ . Задача стимулирования при этом переходит в задачу оптимального согласованного планирования [1,6]:

$$\Phi(x) \rightarrow \max_{x \in P}$$

Рассмотрим теперь алгоритм решения задачи стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы и конечными множествами возможных действий и результатов.

Пусть функции дохода центра и активного элемента заданы, соответственно, векторами  $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$  и  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ . Вектор штрафов -  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Нечеткая информация о состоянии природы представлена

квадратной матрицей  $P$ , элементы которой  $p_{ij} = P(z_j, y_i)$ . Отметим, что в отличие от вероятностных АС, на матрицу  $P$  не наложено требования стохастичности.

Рассмотрим две модификации алгоритма — "полный", использующий степени недоминируемости (алгоритм 3), и упрощенный — опирающийся на результаты теорем 4.4 — 4.7 (алгоритм 4).

Введем матрицу  $R_f$ , элементы которой ( $i, j = 1, n$ ) равны

$$r_{ij}^f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } h_i - x_i \geq h_j - x_j \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

НОП, индуцированное на множестве  $A$ , примет, в соответствии с (4.4), вид:

$$\mu_R^x(y_i, y_j) = \max_{p,q} \min \{ p_{pi}, p_{qj} \}.$$

$$r_{pq}^f = 1$$

Тогда степень недоминируемости действия  $y_i$  определяется выражением:

$$\mu_R^{ND}(y_i, x) = 1 - \max_{j=1, \dots, n} [\max_{p,q} \min \{ p_{pj}, p_{qi} \}] - r_{pq}^f(x) = 1$$

$$- \max_{p,q} \min \{ p_{qi}, p_{si} \} ] .$$

$$r_{qp}^f(x) = 1$$

Если НОП транзитивно (в смысле Т1), то множество Орловского непусто (см. третий раздел и [7]). Фиксируем i

( $i=1, n$ ). Пусть  $y_i$  - ЧНД действие. Тогда задача сводится к поиску  $x \in M$ , такого, что

$$(4.22) \max_{j \in I} \{ \max_{p,q} \min \{ p_{pj}, p_{qj} \} - \max_{p,q} \min \{ p_{qj}, p_{pj} \} \} = 0.$$
$$r_{pq}^f(x) = 1 \quad r_{qp}^f(x) = 1$$

Если класс допустимых функций штрафа задан параметрически и число допустимых значений параметра конечно, то в предыдущем выражении достаточно перебрать все допустимые функции стимулирования.

Например, если  $M = M_x$ , то алгоритм поиска ЧНД действий АЭ сводится к следующему.

#### Алгоритм 4.1.

1.  $A^{ЧНД} = \emptyset$ .
2. Положим  $i=1$ .
3. Если для действия  $y_i$  существует  $x \in A$ , такой, что выполнено (4.22), то  $y_i$  - ЧНД действие при использовании центром системы стимулирования  $x_c(x, z)$  и  $A^{ЧНД} := A^{ЧНД} \cup \{y_i\}$ .
4. Если  $i < n$ , то  $i := i + 1$  и переходим к шагу 3.
5. Перебором по всем действиям из множества  $A^{ЧНД}$  определяем реализуемое ЧНД действие, максимизирующее целевую функцию центра. Система стимулирования, реализующая это действие оптимальна.

Алгоритм 4.1 имеет сложность порядка  $n^2$  (ср. со сложностью алгоритма, реализующего двухшаговый метод решения вероятностной задачи [2]).

Более простым является следующий алгоритм. Пусть множество выбора -  $A^{ЧНД}(\alpha)$  (определения множеств  $Q(y_i, \alpha)$ )

$S(\alpha)$  приведены выше; напомним также, что индексы  $k$  и  $l$  были во втором разделе зарезервированы для обозначения точек пика функции дохода АЗ).

Алгоритм 4.2.

1. Определяем множество  $P = \{ i \mid h_k - h_i \leq C \}$ .
2. Для каждого  $y_i$  ( $i \in P$ ) определяем множества  $Q(y_i, \alpha)$ .
3. Определяем множество достижимости  $S(\alpha)$ .
4. Перебором элементов множества достижимости определяем оптимальную систему стимулирования.

#### 4.3. Свойства оптимального решения задачи стимулирования

Основными вопросами, возникающими при исследовании свойств оптимального решения задачи стимулирования в АС с неопределенностью являются: соотношение между эффективностью стимулирования в изучаемой АС и в соответствующей детерминированной АС, а также влияние "величины" неопределенности на эффективность стимулирования.

Сравним эффективности  $\beta$ -решений при различных  $\beta$  и эффективность соответствующего детерминированного механизма стимулирования.

Обозначим  $K_0$  - эффективность соответствующего детерминированного механизма,  $K(\beta)$  - эффективность оптимального  $\beta$ -решения. Следующая теорема устанавливает зависимость между эффективностью механизма стимулирования и величиной  $\beta$  при фиксированной нечеткой информации  $P$  о состоянии природы.

Теорема 4.8. Для любого  $\alpha \in (0,1]$ , если нечеткая АС является  $\alpha$ -нормальной, то

a)  $K(\alpha) \leq K_0$  и

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in (0, \alpha], \beta_1 \leq \beta_2 \quad K(\beta_1) \leq K(\beta_2);$$

б) если выполнена гипотеза благожелательности, то

$$K(\alpha) \geq K_0$$

и

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in (0, \alpha], \beta_1 \leq \beta_2 \quad K(\beta_1) \geq K(\beta_2).$$

Справедливость утверждения теоремы следует из того, что с уменьшением  $\varrho$  множества (4.20) и (4.21) не сужаются. Следовательно если выполнена гипотеза благожелательности, то максимум в выражении (4.9) ищется по большему множеству, если же гипотеза благожелательности не выполнена, то в (4.10) минимум ищется, опять-же, по большему множеству.

Следствие 4.9. Если  $A$  и  $A_o$  - компакты, функция дохода АЭ квазиоднопиковая,  $P(z,y)$  - 1-нормальная квазиоднопиковая функция и  $\forall y \in A$

$$\arg \max_{z \in A_o} P(z,y) = y; P(z,y) < 1 \quad \forall z \neq y.$$

то множество 1-достижимости (множество четко недоминируемых реализуемых действий) совпадает со множеством согласованных планов  $P$ .

Результат пункта б) теоремы 4.8 представляется достаточно нетривиальным (см. также результаты третьего раздела настоящей работы). Действительно, если выполнена гипотеза благожелательности, то эффективность стимулирования в активной системе с нечеткой неопределенностью оказывается не меньше, чем в соответствующей детерминированной активной системе. При этом даже четко оптимальное решение (при  $\alpha=1$  и выборе элемента из множества Орловского) может оказаться более эффективным, чем детерминированное - например, если в условиях следствия 4.9  $\forall y \in A$  множество

$$\{ z \in A_o \mid P(z,y) = 1 \}$$

состоит более чем из одной точки.

Содержательно этот эффект можно объяснить следующим образом. Множество выбора АЭ в нечеткой АС было определено таким образом (см. использование принципа соответствия и определение множества недоминируемых альтернатив), что АЭ "одинаково устраивали" как максимально недоминируемые действия, так и "не очень оптимальные" (если выполнена гипотеза  $\beta$ -рациональности; при этом, правда, предельный переход к детерминированной задаче необходимо производить достаточно осторожно). Поэтому при использовании множества Орловского, если четко недоминируемых альтернатив несколько и все они с точки зрения АЭ эквивалентны, то соответствующее множество достижимости не уже, чем в детерминированном случае (см. (4.20), (4.22)). Если центр будет использовать при определении эффективности механизма стимулирования максимальный гарантированный результат (4.10), то множество 1-достижимости может оказаться собственным подмножеством множества Р (ср. с результатами теорем 3.4 и 3.7). Поэтому результат пункта а) теоремы 4.8 вполне соответствует интуитивному представлению о том, что чем менее "требователен" АЭ (чем меньше  $\beta$ ), тем ниже эффективность стимулирования - с уменьшением  $\beta$  действенность одних и тех же штрафов уменьшается.

Полученный результат кажется достаточно парадоксальным и с другой точки зрения. В начале настоящего раздела подчеркивалось, что рассматриваемая модель нечеткой АС является в некотором смысле аналогом вероятностной АС. В тоже время известно, что эффективность стимулирования в

вероятностной АС не превосходит эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной АС [1,2]. На самом деле, аналогии между нечеткими и вероятностными АС достаточно условны — в частности, множества выбора в них определяются совершенно по-разному.

В качестве отступления попытаемся перекинуть "мостик" между нечеткими и вероятностными системами. Пусть  $A$  и  $A_0$  компактны, а  $P(z,y)$  непрерывна по обеим переменным и является нормальной. Можно попытаться "перевести" нечеткую информацию о состоянии природы в распределение вероятностей. Например, зависимость

$$(4.23a) \quad p(z,y) = \frac{P(z,y)}{\int\limits_{A_0} P(t,y) dt}, \quad y \in A, z \in A_0$$

может рассматриваться как плотность распределения вероятности результата  $z$  при действии  $y$ , в некотором смысле "согласованная" с нечеткой информацией о состоянии природы. Если в полученной с использованием (4.23) вероятностной задаче множество выбора АЭ определить как множество допустимых действий, максимизирующих ожидаемую полезность АЭ, то для любого  $y \in A$ , такого, что  $\text{Supp } P(\cdot, y) = A_0$ , получим, что эффективность стимулирования в "сконструированной" вероятностной активной системе строго меньше, чем в соответствующей детерминированной. В то же время, в исходной нечеткой системе она может оказаться и строго больше.

Обратно, если  $p(z,y)$  – вероятность результата  $z \in A_0$  при действии  $y \in A$ , то нормальную функцию принадлежности нечеткого результата можно определить следующим образом:

$$(4.23б) \quad P(z,y) = \frac{p(z,y)}{\sup_{t \in A_0} p(t,y)}, \quad y \in A, z \in A_0.$$

Различие между эффективностями в этом случае интуитивно можно объяснить тем, что при усреднении по (4.23а) АЭ "учитывает" все, в том числе и "плохие" результаты, а при выборе по НОП, индуцированному (4.23б), рассматривается только множество эквивалентных между собой  $\beta$ -недоминируемых действий.

Приведенные рассуждения вовсе не свидетельствуют о том, что в одном из двух (или в обеих) рассмотренных выше случаях задача была сформулирована "неправильно". С нашей точки зрения имеют право на существования оба подхода, которые в свою очередь не исключают возможности использования других альтернативных не менее "правильных" подходов. Просто при решении задачи стимулирования в каждом конкретном случае (в каждой реальной АС) необходимо исследовать адекватность модели. Например, при использовании (4.23а), (4.23б) необходимо представлять себе содержательный смысл того или иного преобразования.

Исследуем влияние неопределенности на эффективность механизма стимулирования. Рассмотрим две нечеткие активные системы, отличающиеся лишь тем, что центр и активный элемент обладают нечеткой информацией  $P_1(z,y)$  – в первой АС и  $P_2(z,y)$  – во второй АС.

Будем говорить, что в первой АС участники обладают большей информацией, если выполнено

$$(4.24) \forall y \in A, z \in A_0 \quad P_1(z,y) \leq P_2(z,y)$$

и обозначим  $K_1$  и  $K_2$  - эффективности стимулирования в первой и второй АС, соответственно.

Теорема 4.10. Если нечеткая АС является  $\alpha$ -нормальной, то

a)  $\forall \beta \leq \alpha \quad K_1(\beta) \geq K_2(\beta);$

б) если выполнена гипотеза благожелательности, то

$$\forall \beta \leq \alpha \quad K_1(\beta) > K_2(\beta).$$

Справедливость утверждения теоремы следует из того, что для любого  $y \in A$  множества  $\beta$ -уровня нечеткой функции  $P_1(z,y)$ , в силу (4.24), включают множества  $\beta$ -уровня нечеткой функции  $P_2(z,y)$  (см. (4.9) и (4.10)). Аналогично теоремам 4.8 и 4.10 сравниваются эффективности систем стимулирования в различных нечетких АС - при "деформации" функции предпочтения и т.д.

Результат теоремы 4.10 является на первый взгляд, опять же, несколько парадоксальным. Содержательное его объяснение такое же как и у теоремы 4.8: в рамках принятой концепции рационального выбора чем меньше информации имеет АЭ, тем шире множество "наилучших" эквивалентных между собой ( $\beta$ -рациональных) действий, то есть "чем меньше знаешь, тем на большее согласен" (или, другими словами - "меньше знаешь - крепче спиши"), что приводит к двум различным зависимостям

эффективности стимулирования от величины неопределенности, соответствующим выполнению или невыполнению гипотезы благожелательности.

Результат пункта б) теоремы 4.10, казалось бы, противоречит интуитивному (и подтверждающемуся во многих случаях на практике) представлению, что эффективность управления уменьшается (по-крайней мере, не увеличивается) с ростом неопределенности. "Противоречие" это объясняется тем, что в рамках введенного определения соотношений неопределенности (4.24) в рассматриваемой модели, фактически, уменьшается только информированность управляемого объекта - активного элемента. Поведение же гарантированной эффективности при уменьшении информированности вполне соответствует здравому смыслу - она уменьшается. Возможность увеличения эффективности обусловлена лишь использованием гипотезы благожелательности (для определения конкретного действия, выбираемого АЭ из множества решений игры). Таким образом, при использовании в модели АС ГБ необходимо тщательно исследовать ее адекватность свойствам реальной организационной системы.

При рассмотрении задач стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы выше предполагалось, что на момент принятия решений и центр, и активный элемент обладают одинаковой информацией о нечеткой функции Р. Обсудим кратко, что произойдет, если участники АС информированы асимметрично. А именно, предположим, что АЭ достоверно известно значение состояния природы (а,

следовательно, достоверно известен и результат деятельности при фиксированном действии), а центр имеет только нечеткую информацию о состоянии природы.

Понятно, что имеющаяся у центра информация должна быть каким-то образом согласована с истинным положением дел. Будем считать, что АЭ знает зависимость  $z = \hat{z}(y)$  результата деятельности от своего действия, а нечеткая функция  $P(z,y)$ , известная центру, 1-нормальна и удовлетворяет следующему условию:

$$\forall y \in A \quad P(\hat{z}(y), y) = 1.$$

Если информационная функция достигает максимума в единственной точке, то, фактически, имеет место полная информированность центра и задача сводится к детерминированной. Трудности появляются в случае, когда множество максимумов информационной функции содержит более одной точки.

Если обмен информацией между участниками АС не предусмотрен механизмом, то центр вынужден расчитывать на гарантированный результат с учетом имеющейся у него нечеткой информации. Обозначим  $Q(x) = \{y \in A \mid P(x, y) = 1\}$  - множество тех действий АЭ, выбор которых с учетом имеющейся у центра информации может приводить к тому, что  $x \in A_0$  окажется результатом деятельности. АЭ выберет действие из множества  $Q(x)$  только если  $x$  - точка максимума его целевой функции. Центр, используя штрафы из класса  $M$ , может обеспечить достижение максимума целевой функции АЭ в любой

точке отрезка  $[z^-, z^+]$  и только в точках этого отрезка.  
Значит  $x \in [z^-, z^+]$ .

Таким образом, используя, например, скачкообразные штрафы с точкой плана  $x$  центр может обеспечить гарантированную эффективность

$$K = \max_{x \in [z^-, z^+]} \min_{y \in Q(x)} \Phi(y).$$

В заключение настоящего раздела рассмотрим задачу стимулирования второго рода в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы.

Напомним, что в детерминированной АС задача стимулирования второго рода заключается в поиске допустимой системы стимулирования, максимизирующей целевую функцию центра

$$(4.25) \Phi(y) = H(y) + x(y),$$

при условии, что АЭ выбирает действие  $y \in A$ , максимизирующее его целевую функцию (2.2). Отличие задачи стимулирования второго рода от соответствующей задачи стимулирования первого рода заключается в добавлении штрафов в целевую функцию центра (ср. (4.25) и (4.2)). Решение в этом случае несколько отличается от описанной во втором разделе. А именно, максимальные затраты на стимулирование по реализации действия  $\bar{y} \in P$  равны

$$(4.26) C_{\text{ш}}(\bar{y}) = h(\bar{y}) - h(p^*) + c.$$

Оптимальным решением является, например, квазискакообразная система стимулирования вида:

$$(4.27) \quad x_c(\bar{v}, y) = \begin{cases} c_{\tau_B}(\bar{y}), & y = \bar{y} \\ C, & y \neq \bar{y} \end{cases}$$

а оптимальным планом является точка

$$(4.28) \quad x^* = \operatorname{Arg} \max_{y \in P} [H(y) + h(y)].$$

Попытаемся провести прямую аналогию с нечеткой АС. В случае наличия нечеткой неопределенности о состоянии природы максимальные затраты на стимулирование по реализации действия  $y \in Q(\bar{y}, \alpha)$ ,  $\bar{y} \in [z^-, z^+]$  определяются (4.26). Система стимулирования (4.27), где  $h = h(z)$  является максимальной, доставляющей максимум целевой функции АЭ в точке  $\bar{y}$ . Оптимальной точкой плана в случае выполнения ГБ будет

$$x^* = \operatorname{Arg} \max_{\bar{y} \in P} \max_{y \in Q(\bar{y}, \alpha)} [H(y) + h(y)].$$

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий использование полученных выше результатов.

Пусть  $A' = A_0 = \mathbb{R}^1$ ;  $h(z) = z - z^2/20$ ;  $\Phi(y) = y$ :

$$P(z, y) = e^{-\gamma(z-y)^2}, \text{ где } \gamma > 0, \gamma = 1.8.$$

Тогда множество согласованных планов  $P = [4; 16]$ , множество  $S(1) = P$  (в соответствии со следствием 4.9).

Фиксируем  $\beta \in (0;1]$ . Множество уровня  $\beta$  нечеткой функции  $\tilde{P}(z,y)$  равно

$$[y - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln(1/\beta)} ; y + \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln(1/\beta)}].$$

Тогда

$$S(\beta) = [4 - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln(1/\beta)} ; 16 + \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln(1/\beta)}].$$

С уменьшением  $\beta$  множество достижимости расширяется (см. теорему 4.10). С увеличением информации, содержащейся в нечетком сигнале  $\tilde{P}(z,y)$ , то есть с увеличением  $\gamma$ , множество достижимости сужается (см. теорему 4.8).

Предположим теперь, что в рассматриваемом примере

$$\tilde{P}(z,y) = \begin{cases} 1, & z \in [y-1, y+1] \\ 0, & z \notin [y-1, y+1] \end{cases}, \quad y \in A.$$

Тогда, если центр использует систему стимулирования С-типа с  $x^* = z^* = 16$ , то, если выполнена гипотеза благожелательности, то центр может расчитывать на то, что АЭ выберет действие  $y_1^* = 17$ . При этом эффективность стимулирования равна  $K_1 = \Phi(y_1^*) = 17$ . В соответствующей детерминированной АС эффективность стимулирования равна  $K_0 = \Phi(x^*) = 16$ . Если гипотеза благожелательности не выполнена, то центр вынужден предполагать, что АЭ выберет действие  $y_2^* = 15$ ; при этом эффективность стимулирования равна  $K_2 = \Phi(y_2^*) = 15$ , то есть в рассматриваемом примере имеет место:  $K_2 < K_0 < K_1$ .

## 5. НЕКОТОРЫЕ ОБОВЬДЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ

После ознакомления с настоящей работой у читателя может возникнуть чувство неудовлетворенности: некоторые постановки задач и содержательные интерпретации анализа моделей являются переупрощенными (по сравнению с моделируемыми реальными организационными системами), а методы решения чрезчур громоздкими. В этом случае автору следует напомнить, что исследования в этой области только начинаются и надеяться, что неудовлетворенность читателя несовершенством и неполнотой предложенных моделей и методов подтолкнет его к поиску новых путей и дальнейшему развитию исследований механизмов управления активными системами с нечеткой неопределенностью.

Приведем ряд качественных соображений о возможных путях обобщения полученных выше результатов, а также перспектив и актуальных направлений развития.

1. Вероятностная задача стимулирования. Пусть  $A$  - конечное множество возможных действий АЭ,  $A_o = A$  - множество возможных результатов его деятельности. Предположим, что в центре, и АЭ на момент принятия решений о выборе стратегий известны следующие матрицы:  $\Sigma = \{|\sigma_i|\}$  - матрица, соответствующая четкому бинарному ОП АЭ  $R$  на множестве  $A_o$  и  $P = \{|p_{ij}|\}$  - стохастическая матрица, элементы которой - вероятности реализации результатов деятельности при определенных действиях (см. модели теории контрактов [1,2]).

Определим ОП  $R$ , порождаемое ОП  $R$  и распределением  $P$ , следующим образом:

$$(5.1) \quad \tilde{\sigma}_{ik} = \sum_{j=1}^n p_{ij} \sigma_{jk}$$

Можно считать, что матрица  $\Sigma = ||\tilde{\sigma}_{ij}||$  отражает предпочтения АЭ (соответствующие ожидаемой полезности от последствий принимаемых решений) на множестве возможных действий. Рациональный выбор АЭ при этом определяется как и во втором разделе. Обозначим  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  - вектор весов элементов множества  $A_0$ ,  $Q$  - вектор весов элементов множества  $A$ . Из (5.1) следует, что вектор  $Q$  удовлетворяет матричному уравнению

$$(5.2) \quad Q = P Q.$$

Так как в вероятностных АС центр стимулирует АЭ за результаты его деятельности (изменяет матрицу  $\Sigma$ ), а элемент выбирает действия, сравнивая их по ОП  $\Sigma$ , то задача стимулирования в вероятностной активной системе может быть сформулирована как задача поиска системы стимулирования (последовательности операций типа  $(i-j)$  над матрицей  $\Sigma$ ), которая побудила бы АЭ выбрать по ОП  $\Sigma$  (определенному (5.1)-(5.2)) наиболее выгодное для центра действие. Иными словами, прямая задача стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования, такой, чтобы порождаемый ей в соответствии с (5.2) вектор весов действий побуждал АЭ выбрать наиболее благоприятное для центра действие (ср. с так называемым третьим методом решения вероятностной задачи

стимулирования, описанным в [1]). Обратная задача стимулирования решается еще проще: по (5.2) определяется вектор  $Q$ . Затем ищется вектор  $Q'$ , отличающийся от  $Q$  лишь тем, что вес вершины, которую надо реализовать максимальен. Далее, из матричного уравнения  $Q' = P^{-1} Q$  определяется вектор  $Q''$ , задающий систему стимулирования, реализующую требуемое действие. Ожидаемые затраты на стимулирование равны разности соответствующих компонент вектора  $Q$ .

Перспективным представляется также изучение механизмов с сообщением информации в АС с асимметричной информированностью участников и представлением их интересов на языке отношений предпочтения, то есть – обобщение моделей второго раздела на случай АС с интервальной неопределенностью.

2. Векторная задача стимулирования. Под векторной задачей стимулирования мы будем понимать задачу синтеза оптимальной функции стимулирования в активной системе, в которой АЭ оценивает альтернативы (возможные действия) по некоторым критериям.

Пусть множество альтернатив  $A$  конечно и на нем заданы  $m$  ( $m \geq 1$ ) внутренне согласованных четких ОП  $\{R^j\}$  и  $m$  соответствующих ОП матриц  $\{\Sigma^j\}$ , содержательные интерпретации элементов которых такие же, как и во втором разделе. Как отмечалось выше, выбор по каждому из ОП определяется весами альтернатив  $\{q_i^j, i=1..n, j=1..m\}$ , а операция  $(k \rightarrow l)$  эквивалентна увеличению веса  $l$ -ой вершины на  $n \sigma_{kl}$ .

Функцией выбора АЭ в общем случае является некоторое отображение профиля предпочтений  $\pi = (R_1, R_2 \dots R_n)$  в множество  $A$ . Ниже в качестве примера рассматриваются несколько конкретных функций выбора.

Для каждого из ОП упорядочим альтернативы в порядке убывания их весов. Обозначим:  $k_j$  — номер действия, имеющего максимальный вес в упорядочении по ОП  $R^j$  ( $y_{k_j} \in C(R^j, A)$ );  $Q_i^j$  — множество первых  $i$  альтернатив в упорядочении по ОП  $R^j$ ;

$$Q_i = \bigcap_{j=1}^n Q_i^j; p = \min \{ i \in A \mid Q_i \neq \emptyset \}.$$

Выбор АЭ можно определить многими способами, в том числе: как множество действий  $y_k \in A$  на которых достигается минимум "суммарного стимулирования":

$$(5.3) \quad \sum_{j=1}^n \sigma_{k_j}^j \rightarrow \min_k,$$

или

$$(5.4) \quad C(\pi, A) = Q_p \text{ и т.д.}$$

В случае нечетких предпочтений АЭ, обозначив  $A^{ND}(R_i, \alpha)$  — множество  $\alpha$ -недоминируемых (по НОП  $R_i$ ) альтернатив, выбор АЭ можно определить как  $Q_y$ , где

$$y = \max \{ \alpha \in (0, 1] \mid \bigcap_{j=1}^n A^{ND}(R_j, \alpha) \neq \emptyset \}.$$

Первое определение выбора негласно подразумевает равную значимость различных критериев для АЭ, хотя, конечно, вместо (5.3) могут минимизироваться и другие функции — например,

может использоваться линейная свертка с различными весами критериев и т.д. Второе определение выбора АЭ подразумевает несравнимость различных критериев (легко видеть, что множество  $Q$ , содержит хотя бы один Парето-оптимальный элемент). При использовании определения (5.4) затраты на стимулирование по реализации действия  $y_1 \in A$  равны:

$$(5.5) \quad c_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \max \{ 0; (q_p^j - q_1^j) \}, \quad 1=1, n.$$

Если ограничение механизма стимулирования таково, что затраты на стимулирование ограничены сверху некоторой константой  $C$ , то прямая задача стимулирования будет заключаться в выборе элемента множества

$$B = \{ y_1 \in A \mid c_1 \leq C \},$$

на котором достигается максимум целевой функции центра. Решение обратной задачи стимулирования (поиска минимальных затрат на стимулирование по реализации фиксированного действия) дается выражением (5.5).

Аналогичным образом формулируется и решается векторная задача стимулирования в активных системах с нечеткой или вероятностной неопределенностью (при условии, что функция выбора АЭ "декомпозируема", как это имело место в рассмотренных выше примерах). При этом не исключается случай смешанной неопределенности, например, когда по одним критериям имеет место полная информированность, по другим – вероятностная, а по третьим – нечеткая.

### 3. Стимулирование в многоэлементных статических АС.

Отметим, что результаты анализа векторной задачи стимулирования могут быть использованы при решении задачи стимулирования в широком классе многэлементных активных систем. Пусть имеется  $m$  активных элементов, причем множества их возможных действий одинаковы. Если в векторной задаче стимулирования рассматривать компоненты профиля,  $\mathbf{x}$  не как отношения предпочтения АЭ, соответствующие различным критериям оценки одних и тех же объектов, а как ОП различных АЭ, то получим задачу стимулирования в многоэлементной системе. Если АЭ не взаимодействуют, то можно считать, что каждый из них производит выбор независимо. Если АЭ взаимодействуют, то функция коллективного выбора будет "соответствовать" функции выбора элемента в векторной (многокритериальной) задаче.

Вторым возможным подходом к решению задачи стимулирования в многоэлементной АС является использование результатов решения одноэлементных задач стимулирования и сведение многозлементной задачи к набору параметрических оптимизационных задач. Такой подход применим в АС со слабо связанными элементами, которые достаточно подробно исследованы в условиях полной информированности и вероятностной неопределенности [1]. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть имеется АС, состоящая из  $m$  АЭ, и функционирующая в условиях нечеткой информации о состоянии природы (см. третий раздел). Целевая функция центра зависит от действий, выбираемых всеми АЭ. Выбор

элементами действий может производиться независимо, причем единственный, объединяющий их в одну систему, фактор - ограниченность суммарного фонда стимулирования (или ограничение на суммарные штрафы, накладываемые центром), то есть активные элементы являются слабо связанными [1]. Используя результаты четвертого раздела, нетрудно найти параметрическую зависимость действия, выбираемого каждым элементом, от соответствующего ограничения механизма стимулирования. В итоге задача сводится к стандартной задаче условной оптимизации - найти распределение ограничений механизма стимулирования, максимизирующее целевую функцию центра.

4. Стимулирование в одноэлементных динамических АС. Результаты анализа векторной задачи стимулирования и многоэлементных активных систем со слабо связанными элементами применимы и при решении задач стимулирования в квазидинамических активных системах [1,2]. Подробно останавливаться на их анализе мы не будем, отметив, что квазидинамические АС являются динамическими "аналогами" систем со слабо связанными элементами: если в последних практически не взаимодействуют АЭ, то в первых также слабо взаимодействуют периоды.

5. Определение рационального выбора АЭ в нечетких АС. В настоящей работе для определения рационального выбора АЭ при известном НОП, в основном, использовалась концепция максимально недоминируемых альтернатив (ее подробное описание приведено в [7, 14 и др.]), нашедшая широкое

применение при исследовании проблем принятия решений в условиях нечеткой неопределенности. Несмотря на широко распространенное представление о том, что множество выбора совпадает с множеством Орловского (см. выше), этот подход не является единственно возможным. Рассмотрим следующий качественный пример.

Широко используемая выше при анализе нечетких АС теорема 4.1, совместно с определением рационального выбора АЭ (4.1)-(4.12), привели к "парадоксальным" зависимостям эффективности стимулирования от величины неопределенности (см. пункты б) теорем 4.8-4.10). Обозначим точку глобального максимума целевой функции АЭ  $z^*$ . Так как четкое ОП, индуцированное на множестве  $A_0$  целевой функцией АЭ, является сильно линейным, в соответствии с введенным в четвертом разделе определением рационального выбора, АЭ выберет любое действие  $y^*$ , такое, что  $P(z^*, y^*) = 1$ . Интуитивно понятно, что не все действия, удовлетворяющие этому условию "равноценны" (хотя в рамках рассмотренной в четвертом разделе модели при нормальной функции  $P$  все ЧНД действия равноценны с точки зрения АЭ). Альтернативным могло бы служить определение рационального выбора, учитывавшего, например, поведение целевой функции АЭ в той окрестности точки максимума, в которой значение нечеткой функции  $P$  максимально или превышает заданное значение и т.д.

6. Стимулирование в АС с асимметричной информированностью. Если один из участников АС на момент выбора стратегий имеет большую информацию (о целевых

функциях, допустимых множествах, состоянии природы и т.д.), то имеет место асимметричная информированность [2]. Одним из наиболее распространенных методов устранения неопределенности в случае асимметричной информированности является сообщение информации от более информированного участника АС – менее информированному. При этом, естественно, возникает проблема манипулируемости достоверности сообщаемой информации [1]. Механизмы с сообщением информации в нечетких АС остались в настоящей работе, практически, вне рассмотрения. Тем не менее их исследование представляется достаточно перспективным, учитывая, что аналогичные результаты (для АС со смешанной – интервальной и вероятностной неопределенностью [6]) уже существуют.

Например, в случае когда центр имеет информацию о нечеткой функции дохода АЭ, а сам АЭ знает свою "настоящую" четкую функцию дохода могут быть использованы механизмы открытого управления; в многоэлементных АС, в которых АЭ имеют различную нечеткую информацию о состоянии природы могут быть использованы модификации механизмов гибкого планирования, многоканальных механизмов и т.д.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ приведенных выше моделей активных систем с нечеткой неопределенностью позволяет сделать следующие качественные выводы.

1. Модели социально-экономических систем, использующие язык теории нечетких множеств обладают рядом качественно новых свойств, по сравнению с известными детерминированными и вероятностными моделями.

2. Достаточно привлекательной является возможность использование моделей с нечеткими предпочтениями активных элементов, как позволяющих наиболее ясно и наглядно продемонстрировать суть управления и стимулирования в организационных системах. С одной стороны, формулировка задачи стимулирования (описание модели АС) в терминах отношений предпочтения требует использования сложных и громоздких алгоритмов ее решения. В то же время, интерпретация стимулирования, как влияния на предпочтения (интересы) АЭ представляется достаточно перспективной.

3. Существующий аппарат, результаты, методы и алгоритмы теории нечетких множеств на сегодняшний день значительно опережают уровень развития теории управления нечеткими активными системами. Поэтому в ближайшей перспективе возможно "лобовое" развитие и усложнение уже существующих моделей, в том числе - их обобщение на многоэлементные, динамические и многоуровневые активные системы, а также исследование нечетких "аналогов" детерминированных и базовых механизмов теории активных систем.

4. Большинство проблем, возникающих при исследовании нечетких активных систем связано с поиском конструктивных методов решения задачи стимулирования, в то время как собственно постановка задачи, как правило, не вызывает затруднений (множества выбора во всех разделах настоящей работы определялись относительно унифицированно). С этой точки зрения особенно актуальна как разработка общих и универсальных методов решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования, так и рассмотрение частных упрощенных моделей с целью создания достаточно разнообразного набора "базовых задач".

5. Полученный при рассмотрении нечетких АС результат о том, что при симметричной информированности с ростом неопределенности в ряде моделей растет эффективность стимулирования, представляется достаточно странным и нетривиальным. Поэтому целесообразным представляется расширение исследований по выявлению влияния неопределенности на эффективность стимулирования с целью получения целостной картины о роли неопределенности, в том числе и нечеткой, в управлении социально-экономическими системами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996. - 126 с.
2. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и телемеханика, 1993. - N 11. - С. 3-30.
3. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации//Автоматика и телемеханика, 1996. - N 3. - С. 3-25.
4. Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Цыганов В.В., Черкашин А.М. Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука, 1984. - 272 с.
5. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.
6. Новиков Д.А. Оптимальность правильных механизмов управления активными системами. II// Автоматика и телемеханика, 1997. N3.
7. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. - 206 с.
8. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. Пер. с англ. М.: Наука, 1978. - 352 с.
9. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. - 256 с.
10. Barrett C.R., Pattanaik P.K., Salles M. Rationality and aggregation of preferences in ordinal fuzzy framework // Fuzzy sets and systems, 1992. Vol. 49. N 1. P. 9-13.
11. Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision making in fuzzy environment // Management Science, 1970. Vol. 17B. P. 141-164.
12. Kacprzyk J., Fedruzzini M., Nurmi H. Group decision making under fuzzy preferences and fuzzy majority // Fuzzy sets and systems, 1992. Vol. 49. N 1. P. 21-31.

13. Marchak J., Radner R. Economic theory of teams. New Haven - London: Yale Univ. Press, 1976. - 345 p.
14. Montero F.J., Tejada J. A necessary and sufficient conditions for the existence of Orlovsky's choice set // Fuzzy sets and systems, 1988. Vol. 26. N 1. P. 121-125.
15. Nojiri H. on the fuzzy team decision in a changing environment // Fuzzy sets and systems, 1980. Vol. 3. N 2. P. 137-150.
16. Ovchinnikov S. Similarity relations, fuzzy partitions and fuzzy orderings // Fuzzy sets and systems, 1991. Vol. 40. N 1. P. 107-126.
17. Ramakrishnan R., Rao C.J.M. Representation of fuzzy relations with an application to group decision making // Fuzzy sets and systems, 1992. Vol. 49. N 2. P. 143-150.
18. Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making// Fuzzy sets and systems, 1984. Vol. 12. N2. P. 117-132.
19. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control, 1965. N 8. P. 338-353.
20. Zhukovin V.E., Bershtein F.V., Korelov E.S. A decision making model with vector fuzzy preference relation // Fuzzy sets and systems, 1987. Vol. 22. N 1/2. P. 71-80.

**Д.А. Новиков  
МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ  
В МОДЕЛЯХ АКТИВНЫХ СИСТЕМ  
С НЕЧЕТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ**

Формат бумаги 60x84/16  
Уч.-изд. л. 4,2. Тираж 100.  
Заказ 2.  
117806, Москва, Профсоюзная 65  
Институт проблем управления