УДК 004.9+517.2

ДИСКРЕТНОСТЬ ПРОТИВ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ: КВАНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО АЛЬТЕРНАТИВЫ

С.Л. Блюмин

Обсуждается роль квантового исчисления, «дифференциального исчисления без взятия пределов», как дискретного аналога непрерывного математического анализа, ориентированного на информационные технологии. Рассмотрены различительные исчисления, которые альтернативны квантовому исчислению и связывают конечные различители значений аргумента с конечными различителями значений функции при их различных сочетаниях.

Введение

В [1] подчеркивается приоритетность дискретного похода в теории и практике систем управления. Приведенная мотивация в полной мере относится и к информационным (компьютерным) технологиям (по классификации УДК: 004.9 – прикладные информационные (компьютерные) технологии). Хорошо известен междисциплинарный характер информационных технологий, использующих новейшие достижения математики, физики и других наук. С информационными технологиями уже традиционно связываются разделы дискретной математики – математическая логика, теория конечных множеств, теория графов, теория конечных автоматов и др. Между тем продолжает иметь место отмеченная еще в [2] «традиционность «непрерывностного» мышления», связанная с тем, что базой классического математического образования является математический анализ – дифференциальное и интегральное исчисление [3], основной «непрерывностной» операцией которого является предельный переход.

Дискретным аналогом классического непрерывного математического анализа, ориентированным на информационные технологии, может служить квантовый анализ, или квантовое исчисление, образно характеризуемое как «математический анализ, или дифференциальное исчисление, без взятия пределов». Его элементарное изложение [4] написано на уровне базовых курсов математического анализа и линейной алгебры и рассчитано на подготовку студентов и аспирантов в области прикладной математики, информатики и физики, учитывая тем самым междисциплинарный характер проблематики.

Квантовое исчисление изложено в [4] в двух вариантах: $\hbar$-исчисление и q-исчисление. Буква $\hbar$ используется как напоминание о постоянной Планка, которая является наиболее важной физической константой в квантовой механике (физике микроскопического мира). Буква q используется как первая буква слова «quantum». Эти два квантовых параметра связаны соотношением $q = e^{h}$.

Для числовой функции y=f(x), x,y$\in$**R**, в h-исчислении роль производной играет h-производная

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ -

общепринятое в дифференциальном исчислении [3] допредельное выражение производной: если a и b – два значения аргумента, то их конечная разность h=b-a, и при этом b=a+h=a+(b-a).

В q-исчислении роль производной играет q-производная

$$D_q f(x) = \frac{f(x \cdot q) - f(x)}{x \cdot q - x}$$ -

выражение, отличающееся тем, что если a и b – два значения аргумента, то их конечное частное q=b/a, и при этом b=a·q=a·(b/a), а разность b-a=a·q-a.

Незначительное на первый взгляд отличие приводит к весьма различающимся вариантам квантового исчисления. В соответствии с терминологией, используемой ниже, h-исчисление сочетает аддитивные конечный различитель и переход, тогда как в q-исчислении мультипликативные конечный различитель и переход сочетаются с аддитивным конечным различителем.

Цель данной работы – рассмотреть некоторые из возможных сочетаний подобного рода и возникающие в этих случаях исчисления.

Связь квантового и дифференциального исчислений

Учитывая отмеченную выше «традиционность «непрерывностного» мышления», уместно указать очевидную связь квантового и дифференциального исчислений, считая h не конечным, а «аддитивно» бесконечно малым, то есть $h \to 0$, а q – не конечным, а «мультипликативно» бесконечно малым, то есть $q \to 1$.

Взятие пределов h- и q-производных, если эти пределы существуют, приводит к обычной производной:

$$\lim_{h \to 0} D_h f(x) = \lim_{q \to 1} D_q f(x) = f'(x).$$

Ниже систематически используется связь квантового и дифференциального исчислений, имеющая место и без взятия пределов, при конечных h и q, основанная на формуле конечных приращений Лагранжа [3] (теореме о промежуточной точке, теореме о среднем значении):

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

В соответствии с ней h- и q-производные выражаются через обычную производную:

$$D_h f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(c),$$

$$D_q f(x)=\frac{f(x\cdot q)-f(x)}{x\cdot q-x}=f'(c),$$

где c – точка, промежуточная между a и b, x и x+h или x и x·q. В первом из этих соотношений общепринята аддитивная параметризация промежуточной точки $c=x+\alpha\cdot h$, $0\le\alpha\le1$; во втором возможны как аддитивная, $c=x+\alpha\cdot[x\cdot q-x]=x\cdot[1+\alpha\cdot(q-1)]$, так и мультипликативная, $c=x\cdot q^{\beta}$, $0\le\beta\le1$, параметризации. Параметры α и β взаимосвязаны соотношением $1+\alpha\cdot(q-1)=q^{\beta}$, откуда $\alpha=[q^{\beta}-1]/[q-1]$, $\beta=[\ln(1+\alpha\cdot(q-1))]/[\ln q]$.

Наряду с разностью h=b-a и частным q=b/a в приведенных соотношениях может быть использована относительная разность r=(b-a)/a=h/a=q-1; в этом случае $1+\alpha\cdot r=(1+r)^{\beta}$, откуда $\alpha=[(1+r)^{\beta}-1]/r$, $\beta=[\ln(1+\alpha\cdot r)]/[\ln(1+r)]$.

Выражения для параметра α допускают истолкование в терминах функции $f(x)=x^{\beta}$, например,

$$\alpha=\frac{q^{\beta}-1}{q-1}=D_q(x^{\beta})\Big|_{x=1}=\left[\frac{(xq)^{\beta}-x^{\beta}}{xq-x}\right]\Bigg|_{x=1}.$$

Отправной для дальнейшего является следующая запись формулы конечных приращений:

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)\ . \qquad (1)$$

Различительные исчисления

Одной из основных в поле действительных чисел **R** является аддитивная операция – сложение +. Обратная к ней операция вычитания - определяет используемые в формуле (1) аддитивные различители (разности) значений аргумента h=b-a и функции H=f(b)-f(a). Вообще говоря, $H\ne f(h)$, $f(b)-f(a)\ne f(b-a)$, но если по функции f(x) можно определить вспомогательную функцию $\delta[f](x)$ такую, что $H=\delta[f](h)$, то $\delta[f]$ является аддитивной различительной функцией функции f. Функции $\gamma(x)$, для которых $H=\gamma(h)$, $\gamma(b)-\gamma(a)=\gamma(b-a)$, являются аддитивными гомоморфизмами [5] поля **R**, удовлетворяют первому функциональному уравнению Коши [6] $\gamma(a+b)=\gamma(a)+(b)$ и имеют структуру $\gamma(x)=k\cdot x$. Если $\delta[f]$ такова, то она является аддитивным различительным гомоморфизмом $\gamma[f]$ функции f. Это именно так в формуле (1), причем $\gamma[f]$ определяется данной функцией f тем, что значение параметра $k=f'(c)$. Поэтому может быть записана

– основная формула аддитивного различительного исчисления
$H=\gamma[f](h):\ f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a).$ (1)

Другой основной в поле действительных чисел **R** является мультипликативная операция – умножение ·. Обратная к ней операция деления / определяет (при условии ее выполнимости) мультипликативные различители (частные) значений аргумента q=b/a и функции Q=f(b)/f(a).

Простейшей задачей различительных исчислений является установление связей между теми или иными различителями значений аргумента и функции.

Так, простыми «арифметическими» следствиями формулы (1), получаемыми «домножением/делением» и «прибавлением/вычитанием», являются выражения:

$$Q=\delta[f](h):\frac{f(b)}{f(a)}=1+\frac{f'(c)}{f(a)}\cdot(b-a), \qquad (2')$$

$$H=\delta[f](q):f(b)-f(a)=f'(c)\cdot a\cdot\left(\frac{b}{a}-1\right), \qquad (3')$$

$$Q=\delta[f](q):\frac{f(b)}{f(a)}=1+\frac{f'(c)\cdot a}{f(a)}\cdot\left(\frac{b}{a}-1\right). \qquad (4')$$

Эти выражения решают поставленную задачу, однако вспомогательные функции в них не являются гомоморфизмами. Действительно, если выражению (1) соответствует первое функциональное уравнение Коши, то выражениям (2’) – (4’) соответствуют следующие функциональные уравнения Коши [6]:

- второе $\gamma(a+b)=\gamma(a)\cdot\gamma(b)$ или $\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}=\gamma(b-a)$, решения которого – аддитивно-мультипликативные гомоморфизмы поля **R** – имеют структуру $\gamma(x)=k^x$;

- третье $\gamma(a\cdot b)=\gamma(a)+\gamma(b)$ или $\gamma(b)-\gamma(a)=\gamma\left(\frac{b}{a}\right)$, решения которого – мультипликативно-аддитивные гомоморфизмы поля **R** – имеют структуру $\gamma(x)=k\cdot\ln(x)$;

- четвертое $\gamma(a\cdot b)=\gamma(a)\cdot\gamma(b)$ или $\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}=\gamma\left(\frac{b}{a}\right)$, решения которого – мультипликативные гомоморфизмы поля **R** – имеют структуру $\gamma(x)=x^k$.

Выражения искомого типа, использующие именно гомоморфизмы, могут быть получены из того же выражения (1), но путем не «домножения/деления» и «прибавления/вычитания», а путем «логарифмирования/экспоненцирования» аргумента и/или функции, и имеют следующий вид:

– основная формула аддитивно-мультипликативного различительного исчисления

$$Q=\gamma[f](h):\frac{f(b)}{f(a)}=\left[\exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}\right)\right]^{(b-a)}, \qquad (2)$$

– основная формула мультипликативно-аддитивного различительного исчисления

$$H=\gamma[f](q):f(b)-f(a)=f'(c)\cdot c\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right), \qquad (3)$$

– основная формула мультипликативного различительного исчисления

$$Q=\gamma[f](q):\frac{f(b)}{f(a)}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{f'(c)\cdot c}{f(c)}}. \qquad (4)$$

В них значения параметра k соответствующего гомоморфизма определяются данной функцией f следующим образом:

- в выражении (2) $k=\exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}\right)$;
- в выражении (3) $k=f'(c)\cdot c$;
- в выражении (4) $k=\frac{f'(c)\cdot c}{f(c)}$.

Для функции нескольких переменных $y=f(x_1,\dots,x_n)$, $x_1,\dots,x_n,y\in\mathbf{R}$, могут быть получены выражения, соответствующие (1) – (4). Так, выражению (1) соответствует

$$f(b_1,\dots,b_n)-f(a_1,\dots,a_n)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(c_1,\dots,c_n)}{\partial x_i}\cdot(b_i-a_i),$$

а выражению (4) –

$$\frac{f(b_1,\dots,b_n)}{f(a_1,\dots,a_n)}=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{\frac{\partial f(c_1,\dots,c_n)\cdot c_i}{\partial x_i}/f(c_1,\dots,c_n)}. \qquad (5)$$

До сих пор при установлении связей между различителями значений аргумента и функции не учитывалось то, как осуществляется переход от значения a к значению b и как после этого определяется различитель этих значений. Естественным представляется сочетание аддитивного перехода с аддитивным различителем, когда b=a+h и b-a=(a+h)-a=h, или сочетание мультипликативного перехода с мультипликативным различителем, когда b=a·q и b/a=(a·q)/a=q.

Первый случай имеет место в h-исчислении и является общепринятым в дифференциальном исчислении; ему соответствует аддитивное различительное исчисление и его основная формула в записи

$$H=\gamma[f](h):\ f(a+h)-f(a)=f'(a+\alpha\cdot h)\cdot h.$$

В отличие от этого, в q-исчислении мультипликативный переход сочетается с аддитивным различителем: b=a·q, b-a=a·q-a; аддитивным является и различитель значений функции. Из вышеупомянутых этому случаю соответствует мультипликативно-аддитивное различительное исчисление, из основной формулы которого следует связь

$$H=\delta[f](h):$$

$$f(a\cdot q)-f(a)=$$

$$=[f'(a\cdot q^{\beta})\cdot q^{\beta}\cdot \ln q/(q-1)]\cdot(a\cdot q-a).$$

В мультипликативном исчислении в смысле [7] аддитивные переход и различитель значений аргумента сочетаются с мультипликативным различителем значений функции, что соответствует вышеупомянутому аддитивно-мультипликативному различительному исчислению, основная формула (2) которого в этом случае записывается в виде (мультипликативная теорема о среднем значении из [6])

$$Q=\gamma[f](h):\frac{f(a+h)}{f(a)}=\left[\exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}\right)\right]^{h},$$

причем допредельное выражение мультипликативной производной

$$Q_h f(x)=\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}$$

связано с h-производной соотношением

$$\ln Q_h f(x)=D_h \ln f(x).$$

Наконец, в исчислении «частные вместо разностей» в смысле [8] естественным образом сочетаются мультипликативные переходы и различители, что соответствует мультипликативному различительному исчислению, основная формула (4) которого в этом случае записывается в виде

$$Q=\gamma[f](q):\frac{f(a\cdot q)}{f(a)}=(q)^{\frac{f'(c)\cdot c}{f(c)}}.$$

К этой же связи приводят результаты работы [9], в которой основные арифметические операции сложения и умножения рассматриваются как звенья «естественной цепи бинарных арифметических операций» так, что если обычное умножение трактовать как «сложение», $x\oplus y=x\cdot y$, то соответствующим ему (в смысле распределительного закона) «умножением» оказывается операция (над положительными числами) $x \otimes y = x^{\ln y}$; «обобщенная производная» определяется «обычным» образом, но при указанной трактовке операций.

«Квантовая» экономика

Бытуют разнообразные трактовки термина «квантовая экономика» (см., например, [10]). Естественной можно считать трактовку, присущую экономическому факторному анализу [11] и состоящую в том, что экономические факторы и зависящие от них показатели претерпевают, вообще говоря, не бесконечно малые, но конечные изменения – изменяются «квантами». Именно этому соответствует систематически используемая в данной работе формула конечных приращений.

Разность h трактуется в этом контексте обычным образом как приращение, а частное q – как индекс экономической величины; отношение относительных приращений $r=(b-a)/a$ и $R=(f(b)-f(a))/f(a)$ трактуется как эластичность $E(f)=R/r$ зависимости $y=f(x)$, а ее предел при $b \to a$ – как предельная эластичность $f^{<e>}(a) = \frac{f'(a)\cdot a}{f(a)}$. Именно эта характеристика в промежуточной точке c фигурирует в формулах (4), (5) (в (5) – частные эластичности). Аналогично дифференциальному разработано эластичностное исчисление.

Связи между различителями h, q, r и H, Q, R могут быть установлены подобно тому, как выше установлены связи между различителями h, q и H, Q, например,

$$R = \delta[f](q) : \frac{f(b)-f(a)}{f(a)} = \frac{f'(c)\cdot c}{f(a)} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Заключительные замечания

Истоки «различителей» и «переходов» восходят к Евдоксу (мультипликативный вариант) и Гамильтону (аддитивный вариант), а истоки «цепи арифметических операций» – к Абелю; см. [12].

Мультипликативное исчисление [7] является одним из представителей не-ньютоновых исчислений, основы которых представлены в [13].

Аддитивное различительное исчисление связано с исчислением конечных разностей [14]; с этой точки зрения различительные исчисления могут быть охарактеризованы как «исчисления конечных разностей и/или конечных частных и/или конечных относительных разностей».

В данной работе не затронуты вопросы, связанные с новой быстро развивающейся и популярной областью исследований – теорией квантовых вычислений и квантовых компьютеров (см., например, [15]).

Список использованных источников

1. Блюмин С.Л. Дискретность против непрерывности при системном моделировании во времени и/или пространстве // Системы управления и информационные технологии. – 2004. - № 1 (13). – С. 4–9.
2. Моисеев Н.Н. Человек. Среда. Общество. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – СПб.: Лань, 1997. – 608 с.
4. Kac V., Cheung P. Quantum Calculus. – NY : Springer, 2002. – 127 p. (Русский перевод: Кац В., Чен П. Квантовый анализ. – М.: МЦНМО, 2005. – 128 с.)
5. Общая алгебра / Под общ. ред Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – 480 с.
6. Нечепуренко М.И. Итерации вещественных функций и функциональные уравнения. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1997.– 228 с.
7. Bashirov A., Kurpinar E., Özyapici A. Multiplicative Calculus and its Applications // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – No 337. – P. 36–48.
8. Блюмин С. Л. Альтернативный математический анализ: частные вместо разностей // Новые технологии в образовании. – 2002. – № 5. – С. 31–32.
9. Carroll M. The Natural Chain of Binary Arithmetic Operations and Generalized Derivatives [arXiv.org/math.HO/0112050]
10. Bauman Y. Quantum Microeconomics with Calculus [small-party.org/yoram/quantum]
11. Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Чеботарев С.В. Экономический факторный анализ. – Липецк: ЛЭГИ, 2004. – 148 с.
12. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. – М.: ГУПИ, 1938. – 480 с.
13. Grossman M., R. Katz R. Non-Newtonian Calculus. – MA: Lee Press, 1972. – 234 p.
14. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 432 с.
15. Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления. – М.: МЦНМО, ЧеРо, 1999. – 192 с.

Липецкий государственный технический университет, Липецк