УДК 511.1+517.22+517.965

БИНАРНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ, ФОРМУЛЫ КОНЕЧНЫХ РАЗЛИЧЕНИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГОМОМОРФИЗМОВ

С.Л. Блюмин

Липецкий государственный технический университет

Введение

Сложение и умножение общепринято считать простейшими основными бинарными арифметическими операциями. Разность b-a, использующая обратную к сложению операцию – вычитание, определяет аддитивное различение (дискриминацию, discrimination) действительных чисел $a,b\in\mathbf{R}$. В классическом математическом анализе функций y=f(x), $x,y\in\mathbf{R}$, аддитивное различение b-a двух значений a,b аргумента трактуется как приращение аргумента между начальной точкой a и финальной точкой b, а аддитивное различение f(b)-f(a) – как соответствующее приращение функции. Связь между приращениями дифференцируемой функции и ее аргумента выражается формулой конечных приращений (теоремой Лагранжа о среднем, о промежуточной точке) [1]

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a),$$

где f'(c) – значение производной f'(x) данной функции в точке c, промежуточной между точками a и b. Приращение функции непосредственно выражается через приращение аргумента, если эта функция является аддитивным гомоморфизмом [2] γ поля **R**, определяемым первым функциональным уравнением Коши [3] $\gamma(a+b)=\gamma(a)+\gamma(b)$ или $\gamma(b-a)=\gamma(b)-\gamma(a)$; его непрерывные решения имеют структуру $\gamma(x)=k\cdot x$; в формуле конечных приращений используется именно такой гомоморфизм γ, ассоциированный с данной функцией f(x) в том смысле, что его параметр k определяется этой функцией как значение ее производной в промежуточной точке: k=f'(c).

Цель данной работы – представить некоторые арифметические операции, отличные от обычных сложения и умножения; получить формулы конечных различений, являющиеся аналогами классической формулы конечных приращений, для различений, определяемых этими операциями; указать функциональные уравнения, и их решения, определяющие соответствующие гомоморфизмы.

Арифметические операции

В теоретической арифметике [4] арифметические операции сложения и умножения трактуются как смежные операции первой и второй ступени; под этим понимается их связь распределительным законом и то, что умножение натуральных чисел определяется через их сложение. Указаны также, в частности: операция ступенью ниже сложения $\log_\eta(\eta^a+\eta^b)$; операция ступенью выше умножения $\eta^{\log_\eta a \cdot \log_\eta b}$ (в них η - некоторое основание логарифма); операция, по отношению к которой умножение является операцией следующей высшей ступени: $\sqrt[c]{a^c+b^c}$ (c – некоторое число; при c=1 это – сложение). Отмечена возможность дальнейшего перехода к операциям более низких и более высоких ступеней, включающихся в общую теорию Абеля.

В работе [5] представлена одна из реализаций, при основании логарифма η=e (основание натуральных логарифмов), построения такого рода в виде «естественной цепи бинарных арифметических операций», звеньями которой являются сложение и умножение, определяемой следующим образом.

Поле действительных чисел расширяется до множества $\mathbf{R}_{¥}=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ с обычными соглашениями относительно операций (это не поле, так как выражения типа $\infty-\infty$ и ∞/∞ не определены); полагается $\ln(0)=-\infty$, $\ln(+\infty)=+\infty$, $\exp(-\infty)=0$, $\exp(+\infty)=+\infty$.

Счетное семейство операций цепи определяется для целых чисел $n\in\mathbf{Z}$.

В качестве отправной используется операция + и полагается

$x \oplus_0 y = x + y$;

для $n \le 0$ полагается

$x \oplus_{n-1} y = \ln(\exp(x) \oplus_n \exp(y))$;

для $n \ge 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ полагается

$x \oplus_{n+1} y = \exp(\ln(x) \oplus_n \ln(y))$.

Таким образом, обычные сложение и умножение являются «нулевым» и «плюс первым» звеньями этой цепи:

$x + y = x \oplus_0 y$,

$x \cdot y = x \oplus_{+1} y = \exp(\ln(x) \oplus_0 \ln(y)) =$

$= \exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x \cdot y))$;

указанная выше операция ступенью ниже сложения является «минус первым» звеном

$x \oplus_{-1} y = \ln(\exp(x) \oplus_0 \exp(y)) =$

$= \ln(\exp(x) + \exp(y))$;

указанная выше операция ступенью выше умножения является «плюс вторым» звеном

$x \oplus_{+2} y = \exp(\ln(x) \oplus_{+1} \ln(y)) =$

$= \exp(\ln x \cdot \ln y)$;

«минус вторым» звеном является операция двумя ступенями ниже сложения

$x \oplus_{-2} y = \ln(\exp(x) \oplus_{-1} \exp(y)) =$

$= \ln(\ln(\exp(\exp(x)) + \exp(\exp(y))))$;

и т.д. В дальнейшем рассматриваются в первую очередь эти пять операций. Используется и операция, являющаяся «плюс третьим» звеном

$x \oplus_{+3} y = \exp(\ln(x) \oplus_{+2} \ln(y)) =$

$= \exp(\exp(\ln\ln x \cdot \ln\ln y))$.

В [5] показано, что для каждой пары смежных, в смысле расположения в цепи, операций для следующей выполняется распределительный закон относительно предыдущей:

$x \oplus_n (y \oplus_{n-1} z) = (x \oplus_n y) \oplus_{n-1} (x \oplus_n z)$.

Представляет интерес выполнение распределительного закона и для несмежных операций. С этой целью оказывается целесообразным рассмотреть операции с основанием η, отличным от e.

Основные определения при этом принимают вид

$x\ \{\oplus 0,\eta\}\ y = x+y;$

для $n \le 0$ полагается

$x\{\oplus n-1,\eta\}\ y = \log_\eta (\eta^x\ \{\oplus n,\eta\}\ \eta^y);$

для $n \ge 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ полагается (при обозначении $\exp_\eta x = \eta^x$)

$x\{\oplus n+1,\eta\}\ y=$

$=\exp_\eta (\log_\eta x\ \{\oplus n,\eta\}\ \log_\eta y).$

В частности,

$x\{\oplus +1,\eta\}\ y=$

$=\exp_\eta (\log_\eta x\ \{\oplus 0,\eta\}\ \log_\eta y)=$

$= \exp_\eta (\log_\eta x + \log_\eta y)=$

$= \exp_\eta (\log_\eta x\cdot y)=x\cdot y$

(как и ранее),

$x\{\oplus -1,\eta\}\ y=\log_\eta (\eta^x + \eta^y).$

В операциях вторых звеньев основания могут комбинироваться. При этом

$x\{\oplus +2,\eta,\theta\}\ y=$

$=\exp_\eta (\log_\eta x\ \{\oplus +1,\theta\}\ \log_\eta y)=$

$= \exp_\eta (\exp_\theta(\log_\theta \log_\eta x + \log_\theta \log_\eta y))=$

$= \exp_\eta (\log_\eta x\cdot\log_\eta y) = x\{\oplus +2,\eta\}\ y$

(подобно тому, как ранее),

$x\{\oplus -2,\eta,\theta\}\ y=\log_\eta (\eta^x\ \{\oplus -1,\theta\}\ \eta^y)=$

$= \log_\eta(\log_\theta(\exp_\theta(\eta^x)+\exp_\theta(\eta^y))).$

Наряду с обычным сложением $x+y=x\{\oplus 0,\eta\}y$ (при любом η) ниже используется операция $x\ \{\oplus 0,c\}\ y = \sqrt[c]{a^c+b^c}$.

Пример распределительного закона для смежных операций:

$x\{\oplus\text{-}1,\eta\}\ (y\{\oplus\text{-}2,\eta,\theta\}\ z) =$

$= (x\{\oplus\text{-}1,\eta\}y)\{\oplus\text{-}2,\eta,\theta\}(x\{\oplus\text{-}1,\eta\}z).$

Некоторые модификации распределительного закона для несмежных операций:

$x\{\oplus+2,\eta\}\ (y\{\oplus 0,c\}\ z)=$

$=(x\{\oplus+2,\eta\}y)\{\oplus 0,c'\}(x\{\oplus+2,\eta\}z)$

где $c'= c/\log_\eta x$;

$x\{\oplus+1,\eta\}(y\{\oplus\text{-}1,\theta\}z)=$

$=(x\{\oplus+1,\eta\}y)\{\oplus\text{-}1,\theta'\}(x\{\oplus+1,\eta\}z),$

где $\theta'=\exp_\theta(1/x)$;

$x\{\oplus 0,\eta\}\ (y\{\oplus\text{-}2,\eta,\theta\}\ z) =$

$= (x\{\oplus 0,\eta\}y)\{\oplus\text{-}2,\eta,\theta'\}(x\{\oplus 0,\eta\}z),$

где $\theta'=\exp_\theta(1/\eta^x)$.

Арифметические различения

Каждая из арифметических операций $\oplus$ имеет обратную, обозначаемую y или Θ, с использованием которой определяется соответствующее различение чисел a,b:

$b\ y\ _0a=b-a$;

для $n\leq 0$

$b\ y\ _{n-1}a=\ln(\exp(b)\ y\ _n\exp(a))$;

для $n\geq 0$, $x\geq 0$, $y\geq 0$

$b\ y\ _{n+1}a=\exp(\ln(b)\ y\ _n\ln(a))$.

Таким образом,

$b\ y\ _{-1}a= \ln(\exp(b)\ y\ _0\exp(a))=$

$=\ln(\exp(b)-\exp(a))$;

$b\ y\ _{-2}a= \ln(\exp(b)\ y\ _{-1}\exp(a))=$

$=\ln(\ln(\exp(\exp(b))-\exp(\exp(a))))$;

$b\ y\ _{+1}a=\exp(\ln(b)\ y\ _0\ln(a))=$

=exp(ln(b)-ln(a))=

=exp(ln(b/a))=b/a;

b y $_{+2}$a=exp(ln(b) y $_{+1}$ln(a))=

=exp(ln(b)/ln(a))=

=exp(log$_a$ (b));

и т.д. Во всех случаях выполняется соотношение $a\oplus_n(b$ y $_n a)=b$.

Формулы конечных различений

Для пяти рассматриваемых операций формулы конечных различений одинакового смысла записываются в виде:

$$f(b)\Theta_{-2}f(a)=D_{-2}f(c)\oplus_{-1}(b\Theta_{-2}a),$$

$$f(b)\Theta_{-1}f(a)=D_{-1}f(c)\oplus_{0}(b\Theta_{-1}a),$$

$$f(b)\Theta_{0}f(a)=D_{0}f(c)\oplus_{+1}(b\Theta_{0}a),$$

$$f(b)\Theta_{+1}f(a)=D_{+1}f(c)\oplus_{+2}(b\Theta_{+1}a),$$

$$f(b)\Theta_{+2}f(a)=D_{+2}f(c)\oplus_{+3}(b\Theta_{+2}a).$$

В этих формулах использованы соответствующие операциям производные:

$$D_{-2}f(x)=\ln(\ln f'(x)+f(x)-x+$$

$$+e^{f(x)}-e^{x}),$$

$$D_{-1}f(x)=\ln f'(x)+f(x)-x,$$

$$D_{0}f(x)=f'(x),$$

$$D_{+1}f(x)=e^{\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}},$$

$$D_{+2}f(x)=e^{e^{\frac{f'(x)\cdot x\cdot \ln x}{f(x)\cdot \ln f(x)}}}.$$

В этих выражениях, наряду с обычной производной $f'(x)$, фигурируют одинарные и повторные экспоненциальные и логарифмические производные, соответственно:

$$\frac{de^{e^{f(x)}}}{de^{e^{x}}}=\frac{f'(x)\cdot e^{f(x)}\cdot e^{e^{f(x)}}}{e^{x}\cdot e^{e^{x}}},$$

$$\frac{de^{f(x)}}{de^{x}}=\frac{f'(x)\cdot e^{f(x)}}{e^{x}},$$

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x),$$

$$\frac{d\ln f(x)}{d\ln x}=\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)},$$

$$\frac{d\ln\ln f(x)}{d\ln\ln x}=\frac{f'(x)\cdot x\cdot \ln x}{f(x)\cdot \ln f(x)}.$$

Примеры развернутой записи второй и последней из формул конечных различений:

$$\ln(e^{f(b)}-e^{f(a)})=$$

$$=(\ln f'(c)+f(c)-c)+\ln(e^{b}-e^{a}),$$

$$e^{\frac{\ln f(b)}{\ln f(a)}}=e^{\left(\ln\left(e^{\frac{\ln b}{\ln a}}\right)\right)^{\frac{f'(c)\cdot c\cdot \ln c}{f(c)\cdot \ln f(c)}}}.$$

Примеры определения второй и последней производных в соответствии с [5]:

$$D_{-1}f(x)=$$

$$=\lim_{h\to-\infty}$$

$$\{[f(x\oplus_{-1}h)\oplus_{-1}(\sim_{-1}f(x)]\oplus_{0}[\sim_{0}h]\},$$

где $\sim_{0}h]$=-h, а определение $\sim_{-1}f(x)$ требует выхода в комплексную плоскость;

$$D_{+2}f(x)=$$

$$=\lim_{h\to e}$$

$\{[f(x \oplus_2 h) \oplus_2 (\sim_2 f(x)] \oplus_3 [\sim_3 h]\}$,

где $\sim_2 f(x) = e^{\frac{1}{\ln f(x)}}$, $\sim_3 h = e^{e^{\frac{1}{\ln\ln h}}}$.

Справедливы и формулы конечных различений разного смысла, например:

$$f(b)\Theta_{-1} f(a) =$$

$$= D_{0,-1} f(c) \oplus_0 \ln(b \Theta_0 a),$$

где

$$D_{0,-1} f(x) = \ln f'(x) + f(x);$$

$$f(b)\Theta_{+1} f(a) =$$

$$= D_{0,+1} f(c) \oplus_{+2} e^{b\Theta_0 a},$$

где мультипликативная производная [6]

$$D_{0,+1} f(x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}};$$

$$f(b)\Theta_{-1} f(a) =$$

$$= D_{+1,-1} f(c) \oplus_0 \ln\ln(b \Theta_{+1} a),$$

где

$$D_{+1,-1} f(x) = \ln f'(x) + f(x) + \ln x;$$

$$f(b)\Theta_{+1} f(a) =$$

$$= D_{-1,+1} f(c) \oplus_{+2} e^{e^{b\Theta_{-1} a}},$$

где

$$D_{-1,+1} f(x) = e^{\frac{f'(c)}{f(c) \cdot e^c}}.$$

Функциональные уравнения гомоморфизмов

Функциональные уравнения типа Коши имеют вид

$\gamma(x \oplus_m y) = \gamma(x) \oplus_n \gamma(y)$,

или

$\gamma(x \Theta_m y) = \gamma(x) \Theta_n \gamma(y)$,

где $m,n \in \mathbf{Z}$ – целые числа. Именно их непрерывные решения – соответствующие гомоморфизмы – используются в правых частях формул конечных различений. Они имеют такую структуру для $m=n \in \{-2,-1,0,+1,+2\}$, то есть для совпадающих операций:

$m = n = -2: \gamma(x) = \ln\ln k \oplus_{-1} x$,

$m = n = -1: \gamma(x) = \ln k \oplus_0 x$,

$m = n = 0: \gamma(x) = k \oplus_{+1} x$,

$m = n = +1: \gamma(x) = e^k \oplus_{+2} x$,

$m = n = +2: \gamma(x) = e^{e^k} \oplus_{+3} x$,

где параметр k определяется значением соответствующей производной в промежуточной точке. В случаях m=n=0 и m=n=+1 это – первое и четвертое функциональные уравнения Коши $\gamma(x+y) = \gamma(x) + \gamma(y)$ и $\gamma(x \cdot y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$.

Второе и третье функциональные уравнения Коши, $\gamma(x+y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$ и $\gamma(x \cdot y) = \gamma(x) + \gamma(y)$, связывают операции сложения и умножения и имеют непрерывные решения $\gamma(x) = e^{k \cdot x}$ и $\gamma(x) = k \cdot \ln x$. Непрерывные решения некоторых из соответствующих функциональных уравнений типа Коши для несовпадающих операций таковы:

- для смежных операций

$m = -2, n = -1: \gamma(x) = \ln k \oplus_0 e^x$,

$m = -1, n = 0: \gamma(x) = k \oplus_{+1} e^x$,

$m = 0, n = +1: \gamma(x) = e^k \oplus_{+2} e^x$,

$m = +1, n = +2: \gamma(x) = e^{e^k} \oplus_{+3} e^x$;

$m=-1, n=-2: \gamma(x)=\ln\ln k \oplus_{-1} \ln x$,

$m=0, n=-1: \gamma(x)=\ln k \oplus_{0} \ln x$,

$m=+1, n=0: \gamma(x)=k \oplus_{+1} \ln x$,

$m=+2, n=+1: \gamma(x)=e^{k} \oplus_{+2} \ln x$;

- для несмежных операций

$m=0, n=-2: \gamma(x)=\ln\ln k \oplus_{-1} \ln\ln x$,

$m=+1, n=-1: \gamma(x)=\ln k \oplus_{0} \ln\ln x$,

$m=+2, n=0: \gamma(x)=k \oplus_{+1} \ln\ln x$;

$m=-2, n=0: \gamma(x)=k \oplus_{+1} e^{e^{x}}$,

$m=-1, n=+1: \gamma(x)=e^{k} \oplus_{+2} e^{e^{x}}$,

$m=0, n=+2: \gamma(x)=e^{e^{k}} \oplus_{+3} e^{e^{x}}$.

Для более удаленных друг от друга операций выражения становятся более громоздкими.

Заключение

В качестве лишь одного из подтверждений практической значимости представленных результатов следует указать, что четвертая из формул конечных различений одинакового смысла находит приложение в экономическом факторном анализе [7] как формула конечных индексов

$$\frac{f(b)}{f(a)}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{f'(c)\cdot c}{f(c)}}.$$

Здесь мультипликативное различение трактуется как индекс экономической величины между ее плановым и фактическим значениями, а стоящая в показателе степени величина является значением в промежуточной точке с эластичности экономической зависимости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 1997. – 608 с.
2. Общая алгебра [Текст] / Под общ. ред Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – 480 с.
3. Нечепуренко М.И. Итерации вещественных функций и функциональные уравнения [Текст] / М.И. Нечепуренко. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1997.– 228 с.
4. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика [Текст] / И.В. Арнольд. – М.: ГУПИ, 1938. – 480 с.
5. Carroll M. The Natural Chain of Binary Arithmetic Operations and Generalized Derivatives [Text] / M. Carroll // [arXiv.org/math.HO]. – 2001. – No 0112050. – 17 p.
6. Bashirov A. Multiplicative Calculus and its Applications [Text] / A. Bashirov, E. Kurpinar, A. Özyapici // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – No 337. – P. 36–48.
7. Блюмин С.Л. Экономический факторный анализ [Текст] / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарев. – Липецк: ЛЭГИ, 2004. – 148 с.