УДК 512.8

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ «ВНЕШНИХ» УРАВНЕНИЙ И УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЩИМИ СИСТЕМАМИ

С.Л. Блюмин

Липецкий государственный технический университет

В [1-3] рассмотрено исследование и решение, без использования законов операций, уравнений вида $a\mathbf{-}x=b$, $x\mathbf{-}a=b$, $(a\mathbf{-}x)\mathbf{w}b=c$, $a\mathbf{-}(x\mathbf{w}b)=c$ в группоидах $\Gamma=<S,\mathbf{-}>$ и бигруппоидах $B\Gamma=<S,\mathbf{-},\mathbf{w}>$, где S – некоторое множество, $\mathbf{-}$ и $\mathbf{w}$ - бинарные алгебраические операции над его элементами, то есть отображения $\mathbf{-}$: $S\times S\to S$ и $\mathbf{w}$: $S\times S\to S$ в это множество его произведения на себя, состоящего из пар его элементов, так что если $S=\{s,s`,\ldots\}$, то $S\times S=\{(s,s`),\ldots\}$ и $S\times S\ni(s,s`)|\to s\bullet s`\in S$, $S\times S\ni(s,s`)|\to s\mathbf{w}s`\in S$.

Пусть теперь S, I, O – некоторые множества, вообще говоря, различные, и $\rho:S\times I\to O$ – некоторое отображение $S\times I\ni(s,i)|\to\rho(s,i)=o\in O$ произведения $S\times I$ множеств S и I в множество O (используются обозначения, ориентированные на дальнейшее приложение). Это отображение также может трактоваться как бинарная алгебраическая операция, известная как внешняя в отличие от указанных выше внутренних (когда все множества S, I, O совпадают). Промежуточными являются выводящая операция над элементами множества S (когда I=S) и внешняя операция над элементами множества S (или I) с операторами из множества I (или S) (когда O=S (или O=I)) [4]. Элементы $s\in S$ и $i\in I$ известны как операнды, а элемент $o\in O$ – как результат операции (отображения) ρ. Часто используется инфиксная запись операции: выражение $\rho(s,i)$ записывается как $s\ \rho\ i$.

Простейшими примерами внутренней, выводящих, внешних с операторами и внешней операций могут служить векторное, скалярное или тензорное произведения векторов, произведение вектора на скаляр или квадратную матрицу, произведение вектора на прямоугольную матрицу, результатами которых являются соответственно вектор, скаляр или матрица, вектор той же размерности, вектор другой размерности.

Цель данной работы – развить предложенную в [1-3] методику исследования и решения «внутренних» уравнений указанного выше типа применительно к «внешнему» уравнению

$s \rho i=o$ (1)

и рассмотреть на этой основе решение некоторых задач управления динамическими общими системами.

Уравнение (1) может быть охарактеризовано как простейшее «внешнее линейное неоднородное» уравнение; предполагаются заданными коэффициент $s\in S$ левой части и правая часть $o\in O$; неизвестным является элемент $i\in I$.

Для получения критерия разрешимости уравнения и некоторого его решения предполагается существование вспомогательного множества G, вспомогательной внешней операции $\sigma:G\times O\to I$ и сопровождающего (к элементу s относительно операций ρ, σ) элемента $s^-\in G$ таких, что для любого $i\in I$ выполняется соотношение

$s \rho (s^- \sigma (s \rho i))=s \rho i$. (2)

Если при этих предположениях уравнение (1) разрешимо, то есть существует $i_0\in I$ такое, что $s \rho i_0=o$, то применение (2) с $i=i_0$ дает

$o=s \rho i_0=s \rho (s^- \sigma (s \rho i_0))=s \rho (s^- \sigma o)$,

что является необходимым условием разрешимости уравнения, накладываемым на коэффициент s и правую часть o; это условие и достаточно, то есть является критерием разрешимости данного уравнения

$s \rho (s^- \sigma o)=o$, (3)

так как указывает вычисленное по элементам s^- и o некоторое его частное решение

$i^*=s^- \sigma o$. (4)

Для получения общего решения дополнительно предполагается существование вспомогательного множества D, вспомогательной внешней операции $\tau:D\times I\rightarrow I$ над элементами множества I с операторами из множества D, сопровождающей (к операциям ρ, σ, τ) внутренней операции $\iota:I\times I\rightarrow I$ над элементами множества I и сопровождающего (к элементам s, s^- относительно операции ι) элемента $s^{\sim}\in D$ таких, что для любых $i,j\in I$

$s\ \rho\ (j\ \iota\ (s^{\sim}\tau\ i))=s\ \rho\ j,$ (5)

$(s^-\sigma\ (s\ \rho\ \ i))\iota\ (s^{\sim}\ \tau\ \ i)=i.$ (6)

При этих предположениях общее решение уравнения (1) может быть записано в виде

$i=i(k)=(s^-\ \sigma\ \ o)\ \iota\ (s^{\sim}\ \tau\ \ k),$ (7)

где $k\in I$ – произвольный элемент. Действительно:

- это – решение, так как в силу (5) при $j=s^-\sigma\ o$ и $i=k$, а также в силу критерия

$s\ \rho\ ((s^-\ \sigma\ \ o)\ \iota\ (s^{\sim}\ \tau\ \ k))=s\ \rho\ ((s^-\ \sigma\ \ o))=o;$

- любое решение i_*, $s\ \rho\ i_*=o$, может быть получено из общего выбором, например, $k=i_*$, так как в силу (6) при $i=i_*$

$i=i(i_*)=(s^-\ \sigma\ \ (s\ \rho\ i_*\ ))\ \iota\ (s^{\sim}\ \tau\ \ i_*\ )=i_*$.

Таким образом, при сделанных предположениях исследование и решение уравнения (1) выполнены полностью.

В представляющем интерес для дальнейшего частном случае O=S изложенная схема исследования и решения уравнения не упрощается. Для сравнения следует отметить, что в случае O=I=S эта схема упрощается - можно положить G=D=S, $\tau=\sigma=\rho$ - и сводится к предложенной в [1-3] для случая внутренней операции; эта же схема применима в случае O=I.

Для применения вышеизложенного к задачам управления следует напомнить, что общая система определяется [5] как соответствие $\Sigma\subset I\times O$ между множествами ее входов $i\in I$ и выходов $o\in O$. Если соответствие является функцией (отображением) $F:I\rightarrow O$, то система функциональна. Любая общая система функционализируема [5] в том смысле, что по I, O, Σ могут быть построены ее множество S состояний $s \in S$ и реакция – отображение $\rho: S \times I \to O$ – такие, что соответствие Σ эквивалентно реакции:

$\{(i,o) \in \Sigma\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\rho(s,i)=o\}$.

Тем самым задание функционализированной общей системы эквивалентно заданию внешней операции $s \ \rho \ i=o$, операндами которой являются состояние и вход, а результатом – выход системы (именно с ориентацией на такое приложение использованы обозначения в данной работе).

Задача управления функционализированной общей системой может быть поставлена так: определить вход i, трактуемый как управление, обеспечивающий при заданном состоянии s заданный выход o. Решение такой задачи управления сводится к решению рассмотренного выше уравнения (1) и записывается в виде (7). Простейшим примером, при трактовке операции ρ как «умножения», может служить «билинейная» система (состояния «умножаются» на входы).

Динамическая функционализированная общая система определяется введением [5] согласованной с самой собой и реакцией функции перехода состояний $\varphi: S \times I \to S$, $\varphi(s,i)=s`$, $s,s` \in S$, показывающей, в какое состояние s` перейдет система из состояния s под действием входа i. Введение функции перехода состояний равносильно заданию внешней операции $s \ \varphi \ i$ над состояниями с операторами-входами. В ее терминах задача управления динамической функционализированной общей системой может быть поставлена так: определить вход-управление i, обеспечивающий переход системы из заданного состояния s в заданное состояние s`. Решение этой задачи сводится к решению уравнения $s \ \varphi \ i = s`$, то есть уравнения (1) при O=S, и, как указано выше, может быть выполнено по той же схеме; результат записывается в виде (7) с заменой o на s` и ρ на φ.

Согласованность функций φ и ρ использует операцию их композиции и в предельно упрощенном, но уже отражающем динамику как результат последовательного действия входов, виде может быть выражена условиями:

$(s\ \varphi\ i)\ \varphi\ j = s\ \varphi\ (i * j)$, (8)

$(s\ \varphi\ i)\ \rho\ j = s\ \rho\ (i * j)$, (9)

где через $*$ обозначена некоторая внутренняя операция над входами, вообще говоря, отличная от введенной ранее операции $\iota: I \times I \to I$. Условие согласованности функции φ с самой собой, соответствующее свойству композиции переходов состояний динамической системы [5], приведено здесь в виде (8) потому, что таким условием выражается ассоциативность внешней операции φ с операторами относительно внутренней операции $*$ [4], чем объясняется и название этого свойства как полугруппового [5] (полугруппой является группоид с ассоциативной операцией). Аналогичным образом условие (9) может быть истолковано как ассоциативная связь операций ρ, φ и $*$.

Для более полного отражения динамики функционализированной общей системы следует использовать итерации функции φ, то есть ее последовательные композиции с самой собой, определяющие семейство функций перехода состояний [5]:

$s\ \varphi^{(1,1)}\ i_1 = s\ \varphi\ i_1$,

$s\ \varphi^{(1,2)}\ (i_1, i_2) = (s\ \varphi\ i_1)\ \varphi\ i_2$,

…

$s\ \varphi^{(1,t)}\ (i_1, \ldots, i_t) =$

$= (\ldots((s\ \varphi\ i_1)\ \varphi\ i_2)\ldots)\ s\ \varphi\ i_t$,

$t = 1, 2, \ldots$,

- и, при каждом t, отображения множества $I \times \ldots \times I$ (t раз) в множество I^* конечных последовательностей элементов множества I с операцией $*$ их сочленения [5] (по другой терминологии I^* является свободным моноидом над алфавитом I – полугруппой слов из букв этого алфавита с операцией конкатенации (приписывания), нейтральным элементом которой является пустое слово). В этих терминах свойство композиции переходов состояний динамической функционализированной общей системы (ее полугрупповое свойство) может быть записано в виде

$s\ \varphi^{(1,t+t`)}\ (i_1,\ldots,i_{t+t`})=$

$=(s\ \varphi^{(1,t)}\ (i_1,\ldots,i_t))\ \varphi^{(t+1,t`)}\ (i_{t+1},\ldots,i_{t`})$.

В этих соотношениях время – неотъемлемый атрибут динамики – выражается номером итерации функции перехода состояний.

Уравнение $s\ \varphi\ i = s`$, при заданных $\varphi$ , $s$ , $s`$, может оказаться неразрешимым, то есть критерий (3), записываемый в виде $s\ \varphi\ (s^{-}\ \sigma\ s`)=s`$, может не выполниться ни при каком выборе вспомогательного множества G, вспомогательной внешней операции $\sigma:G\times S\to I$ и сопровождающего элемента $s^{-}\in G$. Если при некотором $t^*\geq 1$ разрешимо уравнение $s\ \varphi^{(1,t^*)}\ (i_1,\ldots i_{t^*})=s`$, то система оказывается управляемой; введя обозначение $\varphi^{(1,t^*)}=\varphi^*$ и соответствующие этой операции обозначения $s^{-}*$ и σ^*, критерий управляемости можно записать в виде

$s\ \varphi^*\ (s^{-}*\ \sigma^*\ s`)=s`$;

алгоритм управления, при соответствующих обозначениях, синтезируется в общем виде

$(i_1,\ldots i_{t^*})=$

$=(s^{-}*\ \sigma^*\ \ s`)\ \iota^*\ (s^{\sim}*\ \tau^*\ \ k)\in I^*,\ k\in I^*$,

являясь, таким образом, конечной последовательностью элементов множества входов системы (операция ι^*, вообще говоря, отлична от введенных ранее операций $*$ и ι).

Иллюстрацией изложенного подхода может служить стандартная линейная стационарная дискретно-временная система $x[t+1]=Ax[t]+Bu[t]$, $x[t],x[t+1]\in\mathbf{R}^n$, $u[t]\in\mathbf{R}^m$, $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbf{R}^{n\times m}$, для которой в принятых здесь обозначениях ($x=s$, $u=i$) определена операция

$s\ \varphi\ i=As+Bi:S\times I\to S$

и ее итерации

$s\ \varphi^{(1,t)}\ (i_1,\ldots,i_t)=A^t s+\Sigma_{r=1}^{t}\ A^{t-r}Bi_r =$

$=A^t s+[B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{t-1}B]\cdot$

$\cdot[i_t\ i_{t-1}\ i_{t-2}\ \ldots\ i_1]^T$.

Если положить $s^{-}*=-A^t s \in G*=S$ и определить операцию

$s^{-}*\ \sigma*\ s`=[B \ldots A^{t-1}B]^{+}(-A^t s+s`):S\times S\to I$

(где M^{+} - псевдообратная к матрице M), то критерий управляемости

$s\ \varphi*\ (s^{-}*\ \sigma*\ s`)=$

$=A^t s+[B \ldots A^{t-1}B]\cdot$

$\cdot[B \ldots A^{t-1}B]^{+}(-A^t s+s`)=s`$

будет выполняться, например, если $rg[B \ldots A^{t-1}B]=n$ (полный строчный ранг матрицы $[B \ldots A^{t-1}B]$, когда $[B \ldots A^{t-1}B][B \ldots A^{t-1}B]^{+}=E$ – единичная матрица; это, в частности, верно при выполнении известного критерия Калмана с $t=t*=n$, что принято далее). Если положить $s^{\sim}*=E-[B \ldots A^{n-1}B]^{+}[B \ldots A^{n-1}B]\in D*=\mathbf{R}^{mn\times mn}$ и определить операцию $\tau*$ как умножение блочной матрицы на составной вектор, а $\iota*$ - как сложение векторов, то алгоритм управления синтезируется в виде

$(i_1,\ldots i_{t*})=[i_t\ i_{t-1}\ i_{t-2} \ldots i_1]^T =$

$=(s^{-}*\ \sigma*\ s`)\ \iota*\ (s^{\sim}*\ \tau*\ k)=$

$=[B \ldots A^{n-1}B]^{+}(-A^n s+s`)+$

$+(E-[B \ldots A^{n-1}B]^{+}[B \ldots A^{n-1}B])k.$

Уравнение (1) рассмотрено выше как «левостороннее» [2]; оно может быть, с соответствующими модификациями, рассмотрено и как «правостороннее», когда заданы i и o, а ищется s. С системной точки зрения это означает задачу поиска такого состояния s, которое при заданном входе i обеспечивает заданный выход o (в случае динамической системы - которое при заданном входе i переходит в заданное состояние s`).

Могут быть рассмотрены и «внешние двусторонние» аналоги «внутренних двусторонних» уравнений из [2], например,

$w\ \omega\ (s\ \rho\ i)=p,$

где $\rho:S\times I\to O$, $\omega:W\times O\to P$; в случае O=P=S, когда ρ является внешней операцией на S с операторами из I, а ω является внешней операцией на S с операторами из W, такое сочетание операций рассмотрено в [4] в связи с определением коммутативности $w\ \omega\ (s\ \rho\ i) = (w\ \omega\ s)\ \rho\ i$, трактуемой как двоякая ассоциативность пары внешних операций с операторами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Блюмин, С.Л. «Линейные» алгебраические уравнения в «бедных» алгебраических структурах [Текст] / С.Л. Блюмин // Вести высших учебных заведений Черноземья. – Липецк: ЛГТУ. – 2006. - № 1. – С. 3-7.
2. Блюмин, С.Л. Исследование и решение двусторонних уравнений в бигруппоидах без использования законов операций [Текст] / С.Л. Блюмин // Вести высших учебных заведений Черноземья. – Липецк: ЛГТУ. – 2006. - № 3. – С. 96-100.
3. Блюмин, С.Л. Исследование и решение в группоидах уравнений с коэффициентами, обладающими свойствами обратимости [Текст] / С.Л. Блюмин, О.В. Мещерякова // Вести высших учебных заведений Черноземья. – Липецк: ЛГТУ. – 2007. - № 1. – С. 3-7.
4. Бурбаки, Н. Алгебра [Текст] / Н. Бурбаки. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 516 с.
5. Месарович, М. Общая теория систем: математические основы [Текст] / М. Месарович, Я. Такахара. – М.: Мир, 1978. – 311 с.