УДК 519
ББК 22.183.43 + 65в641

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ МЕНЕДЖЕРОВ МНОГОУРОВНЕВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Мишин С. П.[1]
*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

Решена задача оптимального стимулирования менеджеров многоуровневой организации в условия неполной информированности (неопределенности) об их квалификации. Определено влияние иерархической позиции на вознаграждение менеджера и требования к его квалификации. В частности, смоделирована необходимость найма на более высокие позиции более квалифицированных менеджеров и выплаты им более высокого вознаграждения. Определена оптимальная функция стимулирования в зависимости от функции затрат менеджера и функции его вклада в прибыль организации. Определены классы функций, для которых максимально прибыльная управленческая иерархия может быть найдена известными оптимизационными методами.

Ключевые слова: оптимальное, стимулирование, менеджер, многоуровневая, организация, неопределенность.

1. Введение

В экономической литературе с первой половины XX века ведутся дискуссии, посвященные факторам, ограничивающим рост фирмы. Их результатом стало представление о том, что

---

[1] *Мишин Сергей Петрович, кандидат физико-математических наук (smishin@newmail.ru).*

одним из основных факторов является *неопределенность*, порождающая необходимость делегирования полномочий от *топ-менеджера* к *менеджерам среднего звена*, т. е. порождающая *иерархию*.[1] Как правило, перед высшим руководителем стоит весьма общая и неопределенная задача, например, максимально прибыльно вести определенный бизнес с соблюдением всех законодательных ограничений. Для ее решения необходимо вникать в детали (снижать неопределенность), что требует специальных знаний в различных *функциональных* областях (маркетинг, производство, снабжение, логистика, финансы и т. п.), координации действий множества исполнителей и т. д. Соответственно, топ-менеджер вынужден делегировать полномочия нескольким своим *непосредственным подчиненным* (*заместителям*), каждый из которых отвечает за определенную сферу деятельности. Каждый заместитель поступает аналогично – делит сферу своей ответственности между непосредственно подчиненными ему менеджерами, и так далее до тех пор, пока объем работы не станет понятным и обозримым для того, чтобы *менеджер нижнего уровня* мог непосредственно управлять *исполнителями*, которые собственно и производят продукты, услуги, выполняют вспомогательные функции и т. п. Разбиение сферы ответственности менеджера по функциям (например, маркетинг, производство, логистика и т. д.) порождает *функциональную* иерархию, по производимым продуктам – *дивизиональную* иерархию, композиция этих разбиений – *матричную* иерархию [17].

Таким образом, неопределенность – одна из фундаментальных причин формирования многоуровневых иерархий. Иерархия

---

[1] *Именно потери, связанные с функционированием иерархии менеджеров (не только чисто финансовые расходы на их содержание, но и снижение производительности из-за так называемой потери контроля), и являются тем фактором, который в результате может перевесить выгоды большого размера фирмы – концентрацию технологий и капитала, нивелирование рисков и т.п.*

позволяет организовать крупномасштабную деятельность за счет снижения неопределенности вплоть до менеджера нижнего уровня, который обладает детальной информацией о своем небольшом участке работы. В то же время его начальник в лучшем случае наблюдает *действие* менеджера, определяющее его *вклад в прибыль* организации[1], но не обладает информацией о том, какие усилия были затрачены для реализации данного действия, т. е. не наблюдает *затраты подчиненных*.[2] Если вознаграждение менеджера фиксировано, то он минимизирует свои затраты, не считаясь, например, со снижением прибыли организации. Поэтому возникает проблема *стимулирования* менеджера – выплаты такого вознаграждения в зависимости от действия, которое максимизирует разницу прибыли от действий менеджера (его *вклада*) и затрат на стимулирование. В силу того, что менеджер обладает *персональной информацией*, неизвестной его руководителям, *оптимальное стимулирование* должно превышать затраты менеджера на сумму так называемой *информационной ренты* (которая, фактически, служит менеджеру платой за честное сообщение о своем типе и понесенных затратах, то есть за устранение неопределенности) [1, 8, 9, 12 13, 14].

---

[1] *В данной работе под действием понимается именно значимый с точки зрения организации результат деятельности менеджера. Например, под действием может пониматься объем продаж, который и определяет прибыль, принесенную менеджером при фиксированных ценах. Таким образом, под действием понимается именно результат, а не затраченные усилия, например, не количество звонков или встреч с клиентами.*

[2] *Здесь и ниже под затратами понимается денежный эквивалент тех усилий, которые менеджер прилагает для выполнения своих функций, то есть минимальную денежную компенсацию, при наличии которой менеджер все еще будет работать. Затраты зависят как от действия, выполненного менеджером (например, объема продаж), так и от его персональных качеств, которые в общем случае достоверно не известны руководству менеджера, то есть являются неопределенным фактором.*

В работе считаются выполненными *предположения*:

1. Затраты каждого менеджера и его вклад в доход организации не зависят от действий остальных менеджеров (*аддитивность* функции вклада и функции затрат). Предположение об аддитивности может соответствовать стабильному функционированию организации, при котором можно измерить вклад и затраты менеджера при отклонении его действия от планового с сохранением действий остальных.

2. Персональной (частной) информацией менеджера является его *тип* (способности, квалификация и т. п.), определяющий его затраты на выполнение действия, однако само действие контролируется непосредственным начальником менеджера[1].

При выполнении вышеуказанных предположений в данной работе решена задача стимулирования менеджеров многоуровневой организации, т. е. найден *механизм стимулирования* (оплаты управленческого труда), позволяющий компенсировать неопределенность за счет вознаграждения, гарантирующего эффективную работу иерархии, несмотря на наличие у каждого менеджера персональной информации. Для построения оптимального *механизма* стимулирования использован аппарат теории контрактов [9, 13, 14]. Данный аппарат основывается на *принципе выявления*, гарантирующем, что оптимальный механизм достаточно искать в классе так называемых неманипулируемых механизмов стимулирования. В рамках этого класса механизмов менеджеру выгодно честно сообщать свой истинный тип.[2]

---

[1] *При этом затраты на осуществление контроля также могут быть учтены в модели, например, в качестве отдельного слагаемого функции затрат, которое и определяет сложность контроля действий непосредственных подчиненных.*

[2] *Оптимальное действие и стимулирование менеджера за выполнение данного действия существенным образом зависят от типа менеджера. При полной информации достаточно найти максимум разницы прибыли и затрат от действия менеджера. Однако неопределенность*

Найденный механизм оптимального стимулирования менеджера позволяет рассчитать чистую прибыль, которую он приносит организации (разницу вклада и затрат на стимулирование). При этом выявляется зависимость чистой прибыли от позиции менеджера в иерархии и выполняемых им управленческих функций. Имея подобную аналитическую зависимость, можно использовать математический аппарат, развитый в [2-7, 10, 11], для построения *эффективной (оптимальной) иерархии управления*, максимизирующей суммарную чистую прибыль по всем возможным управленческим иерархиям. При этом определяется вся структура подчинения (ациклический граф над исполнителями), в частности, оптимальное количество менеджеров в организации, оптимальные *нормы управляемости* (количество непосредственных подчиненных каждого из менеджеров), доказывается невыгодность множественного подчинения (древовидность), симметричность иерархии и т. д.

Таким образом, решается задача ***совместной*** оптимизации всей многоуровневой иерархии управления и механизма стимулирования с сообщением информации для каждого менеджера иерархии. Другими словами, *совместно оптимизируется многоуровневая структура управления, состав менеджеров и механизмы их стимулирования*, что и определяет *новизну* данной работы по отношению к [1-14], в которых задачи оптимизации состава, структуры и механизмов функционирования рассматриваются по отдельности. Разумеется, для получения конструктивных результатов при решении столь сложной задачи прихо-

---

относительно типа не позволяет решить эту задачу в явном виде. В данной ситуации можно предложить менеджеру «меню контрактов» – функцию действия менеджера и его стимулирования в зависимости от сообщения менеджера о своем типе. В теории контрактов показано, что для рассматриваемой модели оптимальным будет предлагать такие меню контрактов, при которых будет выгодно честно сообщить свой тип. Соответственно, достаточно рассматривать неманипулируемые механизмы.

дится опираться на достаточно обременительные предположения (см. выше). Однако известные автору попытки решения совместной задачи в более общей постановке дают результаты, например, лишь для трехуровневых иерархий [16], иерархий с четырьмя исполнителями [15] и тому подобных упрощений.

Работа структурирована следующим образом. *В разделе 2* кратко описана одна из классических моделей теории контрактов [8, 9, 13, 14], которая используется для построения оптимальной системы стимулирования отдельно взятого менеджера. *В разделе 3* дано определение секционных функций [11] и их частного случая – однородных функций, которые формализуют зависимость вклада и затрат менеджера от занимаемой им иерархической позиции. *В разделе 4* получен основной теоретический результат работы – аналитическая зависимость прибыли, приносимой менеджером при оптимальном стимулировании, от вида функции затрат и вклада. Имея подобную зависимость и опираясь на результаты [2-7, 10, 11], можно найти эффективную иерархию, максимизирующую суммарную прибыль организации. В частности, для однородных функций вклада и затрат доказана эффективность однородной иерархии, в которой у всех менеджеров имеется одинаковое количество заместителей. *В разделе 5* детально исследован случай, при котором неизвестный тип менеджера распределен по закону Парето. Формализовано понятие неопределенности рынка труда менеджеров и показано, что прибыль организации растет по мере роста среднерыночного типа менеджера, а также по мере снижения неопределенности при фиксированном среднем типе. *В разделе 6*, опираясь на «принцип неопределенности» (постулирующий рост дисперсии типа менеджера с ростом среднего по рынку типа), удается найти оптимальный тип менеджера и его зависимость от позиции в иерархии. В частности, показано, что по мере роста результативности управления (вклада на единицу затрат) выгодно нанимать более профессиональных менеджеров, несмотря на б*о*льшую неопределенность и б*о*льшую информационную ренту. В заключении результаты работы изложены более подробно и обсуждена проблематика идентификации функций затрат и вклада на основании статистических данных.

2. Базовая задача стимулирования

Кратко опишем одну из классических моделей теории контрактов [8, 9, 13, 14] – модель неблагоприятного отбора (*adverse selection*). Неизвестным параметром (персональной информацией) менеджера будем считать его тип. Как упоминалось выше, под типом понимается квалификация, опыт, способности и другие качества менеджера, которые определяют его затраты на выполнение одного и того же действия (например, заданного плана продаж). Важный вопрос при построении механизма стимулирования – выявление типа менеджера. Например, если стимулирование менеджера не зависит от его типа (всем поровну), то менеджер будет заявлять минимальный тип, при котором от него потребуется минимальное действие, требующее, соответственно, минимальных затрат (б*о*льшие действия будут невыгодны для центра, поскольку у него будет преувеличенное представление о затратах менеджера). Разумеется, результат будет экономически неэффективен – разница вклада менеджера и его затрат будет далеко не максимальной. Один из важнейших результатов теории контрактов состоит в том, что оптимальный для центра механизм стимулирования можно искать в классе так называемых неманипулируемых механизмов, заставляющих менеджера честно сообщить свой тип [1, 8, 9, 13, 14].

Изложим описанную модель формально, следуя [8, 9, 13, 14]. Все нижеуказанные функции будем считать дважды дифференцируемыми. Введем следующие обозначения.

1. $q' \geq 0$ – сообщаемая менеджером *оценка собственного типа* $q \geq 0$, который точно известен только самому менеджеру, а *центру* (в лице, например, владельца организации) известна лишь функция распределения вероятностей типа $F(q)$ с плотно-

стью $f(q)$ на отрезке от *минимального типа* $\underline{q}$ до *максимального типа* $\bar{q}$.

2. $\theta \geq 0$ – *действие менеджера*, которое известно центру, и от которого, наряду с типом, зависит *вклад менеджера* $h(q, \theta) \geq 0$ *в общий результат* (общую прибыль) *организации*. Вклад может не наблюдаться центром. Функция $h(q, \theta)$ строго вогнуто возрастает по действию[1]: $h_\theta(q, \theta) > 0$, $h_{\theta\theta}(q, \theta) < 0$, и неубывает по типу менеджера: $h_q(q, \theta) \geq 0$.

3. $\theta(q') \geq 0$– выбираемое центром *действие*, которое потребуется от менеджера, сообщившего о своем типе q'.

4. $t(q') \geq 0$ – выбираемая центром *функция стимулирования*, которое будет выплачено менеджеру, сообщившему о своем типе q' и выполнившему требуемое действие $\theta(q')$ (в случае невыполнения действия стимулирование не выплачивается).

5. $c(q, \theta) \geq 0$ – денежный эквивалент *затрат*, понесенных менеджером типа q, выполнившим действие θ (затраты не возрастают с ростом типа $c_q(q, \theta) \leq 0$ и выпукло возрастают с ростом действия $c_\theta(q, \theta) > 0$, $c_{\theta\theta}(q, \theta) > 0$).

Менеджер, *манипулируя сообщением о своем типе*, пытается максимизировать разность между выплаченным стимулированием и понесенными затратами – *целевую функцию*:

$$(1)\quad t(q') - c(q, \theta(q')) \to \max_{q'}.$$

Известно [1, 8, 9, 13, 14], что для одного агента оптимальный механизм стимулирования можно искать в классе *неманипулируемых механизмов*, при которых менеджеру выгодно сообщать истинный тип $q' = q$. Соответственно, достаточно рассмотреть такие функции $\theta(\cdot)$, $t(\cdot)$, которые обеспечивают неманипулируемость, т. е. выполнение условий максимума

[1] *Нижними индексами при функциях здесь и ниже обозначаются их частные производные по соответствующим аргументам.*

функции (1) в точке $q' = q$ (производные берутся по q' после чего подставляется $q' = q$):

(IC1 – условие первого порядка) $\dfrac{\partial t(q)}{\partial q} = c_\theta(q, \theta(q)) \dfrac{\partial \theta(q)}{\partial q}$,

(IC2 – условие второго порядка)

$$\frac{\partial^2 t(q)}{\partial q^2} < c_{\theta\theta}(q, \theta(q)) \left(\frac{\partial \theta(q)}{\partial q} \right)^2 + c_\theta(q, \theta(q)) \frac{\partial^2 \theta(q)}{\partial q^2}.$$

Технически (IC1) означает ноль первой производной при $q' = q$, (IC2) – отрицательность второй производной. Содержательно условия IC (*incentive compatibility*) – обозначают *согласованность стимулирования*, т. е. выгодность правдивого сообщения своего типа. Кроме того, ясно, что стимулирование должно как минимум покрывать затраты менеджера (условие участие менеджера в работе или условие индивидуальной рациональности – *individual rationality*).

(IR) $t(q) \geq c(q, \theta(q))$.

Будем считать, что для нахождения *оптимального механизма стимулирования* необходимо решить следующую задачу максимизации *средней прибыли центра от действий менеджера* (ниже для краткости также будем использовать термин *прибыль центра*):

(2) $R_p = \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} [h(q, \theta(q)) - t(q)] f(q) dq \to \max\limits_{\theta(\cdot), t(\cdot)}$,

по всем функциям $\theta(\cdot)$, $t(\cdot)$, удовлетворяющим ограничениям (IC1), (IC2), (IR).

Продифференцировав (IC1) по q и подставив в (IC2), легко получим:

(IC2) $c_{\theta q}(q, \theta(q)) \dfrac{\partial \theta(q)}{\partial q} < 0$.

Будем считать выполненным условие *Спенса-Миррлиса* (условие однократного пересечения): $c_{\theta q} < 0$. В этом случае (IC2) *выполнено тогда и только тогда, когда действие, требующееся от менеджера, возрастает по его типу*: $\partial \theta(q) / \partial q > 0$.

Выпишем выражение *прибыли менеджера* (так называемой *информационной ренты*), продифференцируем его по типу менеджера и подставим в (IC1):

(3) $R_m(q) = t(q) - c(q, \theta(q))$,

$\partial R_m(q)/\partial q = \partial t(q)/\partial q - c_q(q, \theta(q)) - c_\theta(q, \theta(q))\partial\theta(q)/\partial q$,

$\partial R_m(q)/\partial q = -c_q(q, \theta(q))$.

Затраты убывают с ростом типа, поэтому $\partial R_m(q)/\partial q \geq 0$. Следовательно, (IC1) *выполнено тогда и только тогда, когда информационная рента менеджера не убывает с ростом его типа*. Кроме того:

(4) $R_m(q) - R_m(\underline{q}) = -\int\limits_{\underline{q}}^{q} c_q(\tilde{q}, \theta(\tilde{q}))d\tilde{q}$.

Условие (IR) перепишется в виде $R_m(q) \geq 0$. Для его выполнения с минимальным стимулированием положим $R_m(\underline{q}) = 0$. Таким образом, следующие выражения определяют *минимально возможную информационную ренту менеджера, гарантирующую выполнение условий* (IR) и (IC1), и *оптимальную функцию стимулирования в зависимости от функции требуемого действия* $\theta(\cdot)$:

(5) $R_m(q) = -\int\limits_{\underline{q}}^{q} c_q(\tilde{q}, \theta(\tilde{q}))d\tilde{q}$,

(6) $t(q) = c(q, \theta(q)) + R_m(q) = c(q, \theta(q)) - \int\limits_{\underline{q}}^{q} c_q(\tilde{q}, \theta(\tilde{q}))d\tilde{q}$.

Подставляя (6) в (2) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int\limits_{\underline{q}}^{\bar{q}} [h(q, \theta(q)) - c(q, \theta(q)) + \int\limits_{\underline{q}}^{q} c_q(\tilde{q}, \theta(\tilde{q}))d\tilde{q}] f(q)dq \to \max_{\theta(\cdot), t(\cdot)} ,$$

$$\int_{\underline{q}}^{\bar{q}}[\int_{\underline{q}}^{q} c_q(\tilde{q},\theta(\tilde{q})) f(q) d\tilde{q}]dq = \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} c_q(\tilde{q},\theta(\tilde{q}))[\int_{\tilde{q}}^{\bar{q}} f(q)dq]d\tilde{q} =$$

$$= \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} c_q(\tilde{q},\theta(\tilde{q}))[1-F(\tilde{q})]d\tilde{q}.$$

Заменив $\tilde{q}$ на q, подставим результат в исходное выражение:

(7) $\int_{\underline{q}}^{\bar{q}}[h(q,\theta(q)) - c(q,\theta(q)) + c_q(q,\theta(q))(1-F(q))/f(q)]f(q)dq \to \max\limits_{\theta(\cdot),t(\cdot)}.$

Максимизируем подынтегральное выражение по всем неубывающим по типу[1] функциям требуемого действия $\theta(q)$, что позволит максимизировать прибыль центра. Приравняем к нулю производную по действию θ:

(8) $h_\theta(q,\theta) - c_\theta(q,\theta) + c_{q\theta}(q,\theta)H(q) = 0$,

где для краткости обозначено $H(q) = (1-F(q))/f(q)$.

В результате *решения уравнения* (8) *находится функция действия менеджера в зависимости от типа. Если выполнено* $\partial\theta(q)/\partial q > 0$, *то задача об оптимальном стимулировании решена* (для конкретного примера оптимальную функцию стимулирования легко найти, подставив оптимальное действие в (6)).

Для менеджера максимального типа $F(\bar{q}) = 1$ из (8) следует, что $h_\theta(q, \theta) = c_\theta(q, \theta)$, т. е. предельные издержки на реализацию менеджером действия равны предельному доходу центра от данного действия – *стимулирование эффективно* – обеспечивается максимум суммы дохода центра и менеджера. При меньших типах в силу условия Спенса-Миррлиса предельный доход больше предельных издержек, т. е. *все менеджеры, кроме наи-*

---

[1] *Неубывание действия по типу диктуется необходимостью выполнения условия (IC2).*

лучших, выполняют меньшие действия, чем требуется для эффективной работы, что является неизбежным следствием неопределенности.

3. Влияние позиции на стимулирование менеджера

В предыдущем разделе была кратко описана классическая задача стимулирования менеджера как отдельного изолированного агента, взаимодействующего с центром. Для обобщения данной модели на случай многоуровневых организаций с множеством менеджеров, будем считать функции вклада $h(q, \theta)$ и затрат $c(q, \theta)$ различными для различных позиций в иерархии управления. Однако саму задачу стимулирования будем рассматривать независимо для каждого из менеджеров иерархии. В экономике функция затрат коллектива часто рассматривается в виде суммы затрат его членов (агентов), причем затраты каждого отдельного агента не зависят от действий остальных. Функция вклада менеджера – более сложный объект. Остается открытым вопрос о том, как декомпозировать общую прибыль организации на вклады, приносимые различными сотрудниками. Одна из возможностей – рассчитать вклад как потери организации от бездействия менеджера *при условии работы всех остальных согласно плановым действиям*. При этом *вклад будет зависеть только от действия самого менеджера и не зависеть от действий коллег*. Данная гипотеза является ключевой, позволяя найти оптимальное стимулирование независимо для каждого из менеджеров, а уже потом построить многоуровневую иерархию, которая максимизирует сумму вкладов менеджеров.

В общем случае функции вклада и затрат могут определяться как подчиненными менеджера, так и начальниками и даже всей иерархией в целом. Однако для возможности формального исследования мы ограничимся так называемыми *секционными функциями* [11]: $h(q, \theta, s_1, \ldots, s_k)$ и $c(q, \theta, s_1, \ldots, s_k)$, в которых зависимость от позиции ограничивается теми *группами исполнителей* $s_1, \ldots, s_k$ (подразделениями, отделами, звеньями и т. п.), которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера.

Например, пусть менеджер управляет 20-ю исполнителями $w_1, \ldots, w_{20}$, каждый из которых отвечает за специфический участок работы. Менеджер может управлять ими непосредственно, в этом случае подчиненная ему группа $s = s_1 \cup \ldots \cup s_{20} = \{w_1\} \cup \ldots \cup \{w_{20}\}$, т. е. непосредственными подчиненными менеджера являются сами исполнители. С другой стороны, менеджер может, например, создать четыре подчиненных отдела, наняв четырех промежуточных менеджеров и подчинив каждому из них по пять исполнителей, например, $s = s_1 \cup \ldots \cup s_4 = \{w_1, w_5, w_9, w_{13}, w_{17}\} \cup \ldots \cup \{w_4, w_8, w_{12}, w_{16}, w_{20}\}$.

При этом учитывается, на какие именно отделы разбиты исполнители, т. е. все характеристики менеджера могут принципиально отличаться, например, если каждый из заместителей отвечает за выпуск одного продукта, либо если один заместитель отвечает за сбыт, второй за закупки, третий за производство. В наиболее общем виде подобные зависимости можно отразить, введя произвольную функцию множеств $s_1, \ldots, s_k$, не зависящую от их порядка, т. е. секционную функцию.

В данной работе рассматриваются только секционные функции. В результате в рамках рассматриваемой модели выполнены следующие основные ограничения [11]:

Аддитивность по добавлению начальников. Вклад и затраты менеджеров никак не меняются при добавлении *над ними* новых начальников (которые привносят свои вклады и несут свои затраты).

Независимость от промежуточных уровней управления. Вклад и затраты менеджера зависят только от *непосредственно подчиненной* ему «секции» из его *заместителей* (непосредственных подчиненных), но не от того, как организовал управление каждый из его заместителей. В примере выше на затратах менеджера никак не скажется, самостоятельно ли управляет исполнителями каждый из 4 непосредственных подчиненных или нанимает дополнительных менеджеров более низких уровней. Данная гипотеза соответствует реальности, если каждый подчиненный справляется со всеми проблемами *внутри* своей группы, перекладывая на начальника лишь вопросы, которые не полностью в компетенции подчиненного.

Секционная функция определяется теми реальными задачами, которые выполняют исполнители, включая любую специфику исполнителя или выполняемой им задачи, специфику взаимодействия между исполнителями и т. д. и т. п. В общем случае секционная функция зависит от того, как именно подчиненные менеджеру исполнители разбиты на подразделения и даже от группы всех остальных (не подчиненных менеджеру) исполнителей.

Таким образом, несмотря на жесткость вышеуказанных ограничений, класс секционных функций является весьма обширным и включает в себя многие функции, рассмотренные в экономико-математических моделях многоуровневых иерархий [2, 6, 11]. Чаще всего в известных моделях рассматривается лишь зависимость от числа непосредственных подчиненных (*нормы управляемости*), реже – от нормы управляемости и количества подчиненных исполнителей. Данная зависимость соответствует секционной функции лишь для узкого класса однородных исполнителей и полностью симметричных деревьев (когда менеджер делит подчиненную ему группу точно поровну между заместителями). Для всех остальных случаев указанная зависимость – лишь весьма частный случай секционной функции.

Определим некоторую *меру* группы как сумму мер входящих в нее исполнителей. Содержательно мера исполнителя может соответствовать объему выполняемой им работы. Соответствующее значение имеет и мера группы. В случае однородных исполнителей мера группы равна количеству входящих в нее исполнителей. Важным подклассом секционных функция являются *функции*, *зависящие от мер* групп $\mu(s_1)$, ..., $\mu(s_k)$, а не от самих множеств s_1, ..., s_k. Функции, зависящие от мер, являются значительно более простыми объектами, нежели произвольные функции множеств, что позволило продвинуться в их исследовании (см. [3-7, 10, 11]). Одним из наиболее изученных подклассов являются *однородные функции*, для которых существует такое число γ (показатель однородности), что для любого числа $y > 0$ выполнено $h(q,\theta, y\mu_1,\ldots, y\mu_k) = y^{\gamma} h(q,\theta,\mu_1,\ldots,\mu_k)$, то есть при пропорциональном росте масштаба задач всех подчиненных подразделений функция растет степенным образом с показателем однородности γ. Для однородных функций в [6] доказана оптимальность[1] так называемых *однородных иерархий*, в которых каждый менеджер делит подчиненную ему группу исполнителей между одним и тем же количеством заместителей (норма управляемости постоянна), причем в одной и той же пропорции (например, поровну по объему работы, т. е. по мере подгрупп)[2].

4. Функции затрат и вклада

Зафиксируем произвольного менеджера в некоторой иерархии управления. Рассмотрим *функцию вклада* менеджера в прибыль организации:

(9) $h(q,\theta) = \theta g(h_s, q)$.

Функция (9) линейна по действию менеджера (линейная зависимость вклада наиболее часто рассматривается в экономико-математических моделях [1, 8, 9, 12]). Коэффициент $g(h_s, q)$ не убывает как по типу менеджера q, так и по характеристике иерархической позиции $h_s(s_1, \ldots, s_k)$. При этом будем считать,

---

[1] *Под оптимальной иерархией понимается дерево, которое доставляем максимум или минимимум некоторой однородной функции. Соответственно, как при максимизации прибыли, так и при минимизации затрат достаточно рассматривать только однородные иерархии.*

[2] *Если однородной иерархии не существует в силу дискретности, то можно построить субоптимальное дерево, которое будет близким по виду к однородной иерархии (подробнее см. [6]).*

что функция h_s определена для любого менеджера любой иерархии и является секционной[1].

Рассмотрим *функцию затрат*, обобщающую функцию Кобба-Дугласа:

(10) $c(q,\theta) = \theta^{\beta} w(c_s, q) / \beta + c_{fix} / q$.

Классическая функция Кобба-Дугласа $c(q,\theta) = \theta^{\beta} / (\beta q^{\beta - 1})$, $\beta > 1$ выпукла по действию, скорость роста затрат (производная по действию) зависит только от отношения θ / q требуемого действия к типу менеджера. Например, при квадратичной функции (показатель степени роста затрат $\beta = 2$) затраты линейно убывают по типу менеджера, т. е. менеджер с более высоким типом (способностями, квалификацией и т. д.) затрачивает пропорционально меньше усилий и времени на выполнение одного и того же действия. Функция (10) обобщает зависимость затрат от типа и вводит зависимость от секционной функции $c_s(s_1, \ldots, s_k)$: коэффициент $w(c_s, q)$ возрастает по характеристике иерархической позиции c_s и убывает по типу q. Постоянные затраты c_{fix} / q не зависят от действия (например, отражают некоторые необходимые вспомогательные операции) и уменьшаются для менеджеров б*о*льших типов. При этом секционная функция $c_{fix}(s_1, \ldots, s_k)$ также характеризует иерархическую позицию (в частном случае $c_{fix} \equiv c_s$).

Применим результаты, описанные в предыдущем разделе, для решения задачи об оптимальном стимулировании. Производные функции затрат (10) имеют вид:

(11) $c_{\theta}(q,\theta) = \theta^{\beta - 1} w(c_s, q)$, $c_{\theta q}(q,\theta) = \theta^{\beta - 1} w_q(c_s, q)$.

---

[1] *Например, чем больше размер группы, подчиненной менеджеру, тем больший вклад он может внести в прибыль организации и тем более возрастает h_s. Поскольку секционная функция h_s характеризует именно позицию, а не менеджера, значение h_s никак не зависит от типа и усилий конкретного менеджера, занимающего данную позицию.*

Уравнение (8) для определения оптимального действия перепишется в виде:

$$g(h_s, q) - \theta^{\beta-1} w(c_s, q) + \theta^{\beta-1} w_q(c_s, q) H(q) = 0,$$

т. е.

$$\theta^{\beta-1}\{w(c_s, q) - w_q(c_s, q) H(q)\} = g(h_s, q),$$

и, окончательно,

(12) $$\theta = \left[\frac{g(h_s, q)}{w(c_s, q) - w_q(c_s, q) H(q)}\right]^{1/(\beta-1)}, \text{ где } H(q) = (1 - F(q)) / f(q).$$

Для всех рассматриваемых ниже примеров выполнено условие Спенса-Миррлиса, и действие, определяемое выражением (12), возрастает по типу менеджера, т. е. является оптимальным действием, которое центр должен потребовать от менеджера. Подставляя в (10), получим:

(13) $$c(q, \theta) = \frac{w(c_s, q)}{\beta}\left[\frac{g(h_s, q)}{w(c_s, q) - w_q(c_s, q) H(q)}\right]^{\beta/(\beta-1)} + \frac{c_{fix}}{q}.$$

С учетом (9), (12), (13), математическое ожидание прибыли центра от действий менеджера (7) примет вид:

$$\int_{\underline{q}}^{\bar{q}} \{h(q, \theta(q)) - c(q, \theta(q)) + c_q(q, \theta(q)) H(q)\} f(q) dq = \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} \{g(h_s, q) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{g(h_s, q)}{w(c_s, q) - w_q(c_s, q) H(q)}\right]^{1/(\beta-1)} - \frac{w(c_s, q)}{\beta}\left[\frac{g(h_s, q)}{w(c_s, q) - w_q(c_s, q) H(q)}\right]^{\beta/(\beta-1)} -$$

$$- \frac{c_{fix}}{q} - \frac{c_{fix}}{q^2} H(q) + \frac{w_q(c_s, q)}{\beta}\left[\frac{g(h_s, q)}{w(c_s, q) - w_q(c_s, q) H(q)}\right]^{\beta/(\beta-1)} H(q)\} f(q) dq =$$

$$= \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} \{g(h_s, q)\left[\frac{g(h_s, q)}{w(c_s, q) - w_q(c_s, q) H(q)}\right]^{\frac{1}{\beta-1}} - \frac{w(c_s, q) - H(q) w_q(c_s, q)}{\beta}.$$

$$\cdot\left[\frac{g(h_s,q)}{w(c_s,q)-w_q(c_s,q)H(q)}\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}}-\frac{c_{fix}}{q}(1+H(q)/q)\}f(q)dq=$$

$$=\int_{\underline{q}}^{\bar{q}}\left[\frac{g(h_s,q)}{w(c_s,q)-w_q(c_s,q)H(q)}\right]^{1/(\beta-1)}\{g(h_s,q)-\frac{w(c_s,q)-H(q)w_q(c_s,q)}{\beta}\cdot$$

$$\cdot\frac{g(h_s,q)}{w(c_s,q)-w_q(c_s,q)H(q)}\}f(q)dq-\int_{\underline{q}}^{\bar{q}}\frac{c_{fix}}{q}(1+H(q)/q)f(q)dq=$$

$$=\frac{\beta-1}{\beta}\int_{\underline{q}}^{\bar{q}}\left[\frac{1}{w(c_s,q)-w_q(c_s,q)H(q)}\right]^{1/(\beta-1)}g(h_s,q)^{\beta/(\beta-1)}f(q)dq-$$

$$-\int_{\underline{q}}^{\bar{q}}\frac{c_{fix}}{q}(1+H(q)/q)f(q)dq.$$

Таким образом, для оптимального механизма стимулирования *прибыль центра*:

$$R_p=\frac{\beta-1}{\beta}\int_{\underline{q}}^{\bar{q}}\left[\frac{1}{w(c_s,q)-w_q(c_s,q)H(q)}\right]^{1/(\beta-1)}g^{\beta/(\beta-1)}(h_s,q)f(q)dq-$$
$$-\int_{\underline{q}}^{\bar{q}}\frac{c_{fix}}{q}(1+H(q)/q)f(q)dq. \quad (14)$$

Оптимальной будем называть иерархию, на которой достигается максимум прибыли центра по всем менеджерам. Полученный результат сводит задачу поиска оптимальной иерархии к задаче максимизации выражения (14), которая решается с помощью аппарата, развитого в [3-7, 10, 11]. Собственно выражение (14) и является основным теоретическим результатом работы. Ниже излагаются примеры решения задачи об оптимальном стимулировании в многоуровневой организации.

Исследуем частный случай (9) и (10), а именно, *мультипликативную* зависимость вклада и затрат от иерархической позиции, то есть $w(c_s,q)=c_s w(q)$, $g(h_s,q)=h_s g(q)$.

Утверждение 1. Если линейная функция вклада менеджера (9) и функция затрат (10) мультипликативно зависят от однородных степени γ функций h_s, c_s, и c_{fix}, то при оптимальном стимулировании прибыль центра (14) также является однородной функцией той же степени.

Доказательство. Вынося из-под интегралов h_s и c_s, преобразуем (14):

$$\frac{h_s^{\beta/(\beta-1)}}{c_s^{1/(\beta-1)}}\frac{\beta-1}{\beta}\int\limits_{\underline{q}}^{\bar{q}}\left[\frac{1}{w(q)-w_q(q)H(q)}\right]^{1/(\beta-1)} g(q)^{\beta/(\beta-1)} f(q)dq -$$

$$-c_{fix}\int\limits_{\underline{q}}^{\bar{q}}\frac{1}{q}(1+H(q)/q)\} f(q)dq.$$

$$h_s(y\mu_1,\dots,y\mu_k)^{\beta/(\beta-1)}/c_s(y\mu_1,\dots,y\mu_k)^{1/(\beta-1)} =$$
$$= y^{\gamma\beta/(\beta-1)-\gamma/(\beta-1)}h_s(\mu_1,\dots,\mu_k)^{\beta/(\beta-1)}/c_s(\mu_1,\dots,\mu_k)^{1/(\beta-1)} =$$
$$= y^{\gamma}h_s^{)}(\mu_1,\dots,\mu_k)^{\beta/(\beta-1}/c_s(\mu_1,\dots,\mu_k)^{1/(\beta-1)}.$$

Поскольку c_{fix} также является однородной степени γ функцией, то и все выражение (14) также однородно степени γ, то есть однородно зависит от иерархической позиции. Утверждение доказано. •

Значимость утверждения 1 заключается в том, что оно увязывает характеристики иерархической позиции с прибылью центра он найма менеджера на данную позицию. А именно, *оптимальное стимулирование сохраняет однородность*: если зависимость вклада и затрат менеджера от иерархической позиции имеет вид однородной функции, то зависимость прибыли центра от иерархической позиции также будет однородной функцией.

Как упомянуто выше, для однородных функций в [6] доказано, что максимум их суммы по всем менеджерам достигается на так называемых однородных деревьях: каждому менеджеру подчинено одно и то же количество заместителей, и распределение объемов работы между ними одинаково на всех уровнях (например, «всем заместителям поровну»). Соответственно, максимум прибыли достигается при управленческой иерархии, имеющей вид однородного дерева, которое и будет *оптимальной иерархией*. Итак, доказано следующее следствие из утверждения 1.

Следствие 1. В условиях утверждения 1 при использовании центом оптимального механизма стимулирования менеджеров, оптимальная управленческая иерархия имеет вид однородного дерева.

По формуле (5) с учетом (13) можно рассчитать *информационную ренту менеджера*, имеющего тип q:

$$R_m(q) = -\int_{\underline{q}}^{q} \{ \frac{w_q(c_s,\tilde{q})}{\beta} \left[\frac{g(h_s,\tilde{q})}{w(c_s,\tilde{q}) - w_q(c_s,\tilde{q})H(\tilde{q})} \right]^{\beta/(\beta-1)} - \frac{c_{fix}}{\tilde{q}^2} \} d\tilde{q} = \tag{15}$$

$$= c_{fix}(1/\underline{q} - 1/q) + \int_{\underline{q}}^{q} \{ \frac{-w_q(c_s,\tilde{q})}{\beta} \left[\frac{g(h_s,\tilde{q})}{w(c_s,\tilde{q}) - w_q(c_s,\tilde{q})H(\tilde{q})} \right]^{\beta/(\beta-1)} \} d\tilde{q}.$$

То есть менеджеру компенсируются его затраты и, сверх того, выплачивается информационная рента (15). Первое слагаемое в выражении (15) зависит от постоянных затрат менеджера и гиперболически растет с ростом типа менеджера. Поведение второго слагаемого зависит от конкретного вида функций $w(\cdot, \cdot)$, $g(\cdot, \cdot)$ и от распределения вероятностей типов.

4. Распределение Парето на рынке труда менеджеров

Предположим, что имеется некоторый рынок (множество кандидатов), из которого выбирается менеджер на рассматриваемую позицию в иерархии. Будем считать, что рассматривается множество кандидатов, в котором уже учтен первоначальный отсев, таким образом менеджер будет выбран из заданного множества случайным образом. При этом считаем множество достаточно большим, чтобы его можно было описывать с помощью плотности вероятности выбора менеджера того или иного типа Рассмотрим так называемое *распределение Парето* типов менеджеров, которое описывается следующими функциями распределения и плотности распределения.

(16) $F(q) = 1 - \left(\dfrac{q_0}{q}\right)^{\alpha}$, $f(q) = \dfrac{\alpha}{q_0}\left(\dfrac{q_0}{q}\right)^{1+\alpha}$,

где $H(q) = (1 - F(q)) / f(q) = q / \alpha$, $\alpha > 1$.

В (16) минимальный тип менеджера $\underline{q} = q_0$, а максимальный тип неограничен $\overline{q} = +\infty$. Плотность распределения типа гиперболически убывает, показатель степени α соответствует «*степени информированности*» о состоянии рынка: чем больше α, тем быстрее убывает плотность, то есть при больших α наибольшее количество менеджеров будут иметь тип, близкий к минимальному типу q_0, и центр с большой вероятностью может ориентироваться на подобный тип.

Математическое ожидание типа (*средний тип*) равно $q_* = \alpha q_0 /(\alpha - 1)$, а *дисперсия* типа равна $(Mq)^2 /(\alpha - 2)$.[1] Соответственно, при большой степени информированности α средний тип близок к q_0, а дисперсия близка к нулю. По мере снижения степени информированности до единицы средний тип неограниченно возрастает.

Распределение Парето часто встречается в математической статистике, в частности, при исследовании квалификации, способностей и т. п., то есть типа некоторой выборки людей, что и обуславливает интерес к исследованию данного распределения [9]. Кроме того, распределение Парето обладает свойством самоподобия – часть кривой от любого q до бесконечности с точностью до множителя повторяет всю кривую. Данное свойство значительно упрощает аналитическое решение задачи об оптимальном стимулировании менеджеров.

Для распределения Парето прибыль центра (14) имеет вид:

---

[1] *Дисперсия существует лишь при $\alpha > 2$.*

$$(17)\ R_p = \frac{\beta-1}{\beta}\alpha q_0^\alpha \int_{q_0}^{+\infty} \left[\frac{1}{w(c_s,q) - q w_q(c_s,q)/\alpha}\right]^{1/(\beta-1)} \frac{g(h_s,q)^{\beta/(\beta-1)}}{q^{1+\alpha}} dq - \frac{c_{fix}}{q_0}.$$

Для функций $h(q,\theta) = h_s\theta$ и $c(q,\theta) = c_s\theta^\beta/(q^{\beta-1}\beta) + c_{fix}/q$ получим $g(h_s,q) = h_s$, $w(c_s,q) = c_s/q^{\beta-1}$, $w_q(c_s,q) = -(\beta-1)c_s/q^\beta$, то есть:

$$(18)\ R_p = \frac{\beta-1}{\beta}\left[\frac{1}{1+(\beta-1)/\alpha}\right]^{1/(\beta-1)} \frac{h_s^{\beta/(\beta-1)}}{c_s^{1/(\beta-1)}} \frac{\alpha}{\alpha-1} q_0 - \frac{c_{fix}}{q_0}.$$

Подставив $q_* = \alpha q_0/(\alpha-1)$, получим *прибыль центра*:

$$(19)\ R_p = \frac{\beta-1}{\beta}\left[\frac{1}{1+(\beta-1)/\alpha}\right]^{1/(\beta-1)} \frac{h_s^{\beta/(\beta-1)}}{c_s^{1/(\beta-1)}} q_* - \frac{c_{fix}}{q_*}\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Очевидно, что прибыль центра (19) растет по мере роста среднего типа q_*. На рис. 1 приведены графики зависимости (19) от информированности при фиксированном среднем типе $q_* = 1$ для $h_s = 2$, $c_s = 0,9$, $c_{fix} = 0,1$. Видно, что прибыль центра растет с ростом информированности. Приведенные примеры показывают, что при высокой информированности рост степени функции затрат β приводит к снижению прибыли центра. Однако при снижении информированности ключевую роль в затратах на стимулирование начинает играть информационная рента (см. рис. 2 ниже), которая снижается при росте β. Поэтому при малой информированности на рис. 1 кривые $\beta = 2$ и $\beta = 4$ пересекаются.

Поведение прибыли центра достаточно предсказуемое: *прибыль растет по мере роста среднерыночного типа менеджера, а также по мере роста информированности при фиксированном среднем типе*. Рост предсказуемости типа менеджера позволяет снизить информационную ренту, которую центр вынужден переплачивать менеджеру за сообщение достоверного типа. *Чем больше разброс типов на рынке труда* (при фиксированном среднем)*, тем больше информационная рента, выплачиваемая центром на стимулирование менеджеров организации*. Для доказательства этого факта достаточно рассчитать информационную ренту менеджера типа q, пользуясь (15):

$$R_m(q)=c_{fix}(1/\underline{q}-1/q)+\int\limits_{\underline{q}}^{q}\frac{(\beta-1)c_s/\tilde{q}^{\beta}}{\beta}\left[\frac{h_s}{c_s/\tilde{q}^{\beta-1}+(\beta-1)c_s/\alpha\tilde{q}^{\beta-1}}\right]^{\beta/(\beta-1)}d\tilde{q}=c_{fix}(1/q_0-1/q)+\frac{\beta-1}{\beta}\left[\frac{1}{1+(\beta-1)/\alpha}\right]^{\beta/(\beta-1)}\frac{h_s^{\beta/(\beta-1)}}{c_s^{1/(\beta-1)}}(q-q_0). \quad (20)$$

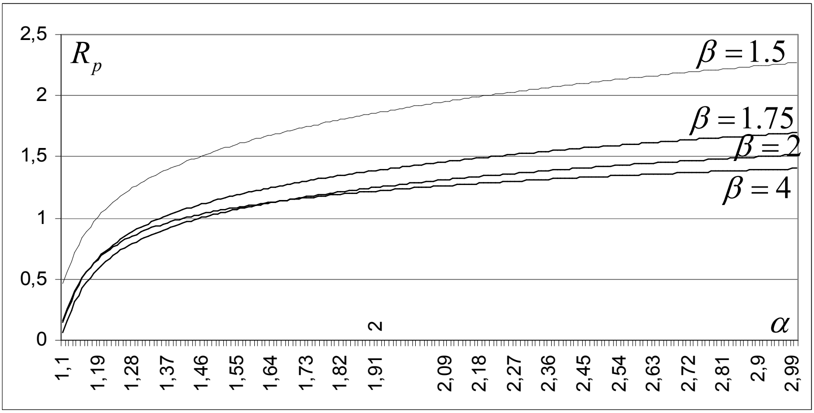

Рис. 1. Рост прибыли центра R_p по степени информированности α для различной эластичности β функции затрат

Для распределения Парето имеем $q_0 = q_*(\alpha - 1)/\alpha$. Для заданного q_* при росте степени информированности α растет и минимальный тип q_0. Поэтому в (20) первое слагаемое уменьшается. Что касается второго слагаемого, то, поставляя $q_0 = q_*(\alpha - 1)/\alpha$ и вычисляя производную по α, получим его уменьшение при условии $q < q_* + q_0/\beta$. Следовательно, для среднего типа информационная рента снижается при росте степени информированности центра.

Выпишем оптимальное действие (12) и подставим его в функцию затрат менеджера:

$$(21)\ \theta = \left[\frac{h_s}{c_s / q^{\beta-1} + (\beta-1) c_s / \alpha q^{\beta-1}} \right]^{1/(\beta-1)} = q \left[\frac{1}{1+(\beta-1)/\alpha} \right]^{1/(\beta-1)} \frac{h_s^{1/(\beta-1)}}{c_s^{1/(\beta-1)}},$$

$$(22)\ c(q,\theta) = c_s \theta^\beta / q^{\beta-1}\beta + c_{fix} / q = \frac{c_{fix}}{q} + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{1+(\beta-1)/\alpha} \right]^{\beta/(\beta-1)} \frac{h_s^{\beta/(\beta-1)}}{c_s^{1/(\beta-1)}} q.$$

При фиксированном типе менеджера рост степени информированности α приводит к росту оптимального действия (21) и, соответственно, к росту затрат (22). [1]

Проиллюстрируем указанные закономерности с помощью рис. 2, на котором горизонтальной штриховкой обозначена информационная рента (20), вертикальной – затраты (22), их сумма равна стимулированию менеджера. Изображен случай квадратичных затрат $\beta = 2$ и менеджера среднего типа $q = q_*$, все остальные параметры те же, что и на рис. 1 ($q_* = 1$ для $h_s = 2$, $c_s = 0{,}9$, $c_{fix} = 0{,}1$).

Из рис. 2 видно, что при малой информированности центра бóльшая часть стимулирования затрачивается на информационную ренту, а не на компенсацию затрат. По мере роста информированности информационная рента (20) падает, а затраты (22) растут за счет роста оптимального действия менеджера (21), которое изображено на рис. 3.

1 *Сравнивая с (20) и (22), можно рассчитать отношение «переменной части» информационной ренты к переменным затратам $(\beta - 1)(q - q_0) / q$ и отношение «постоянной части» ренты к постоянным затратам $(q - q_0)/q_0$. Легко заметить, что по мере роста q_0 оба выражения убывают при любом типе агента.*

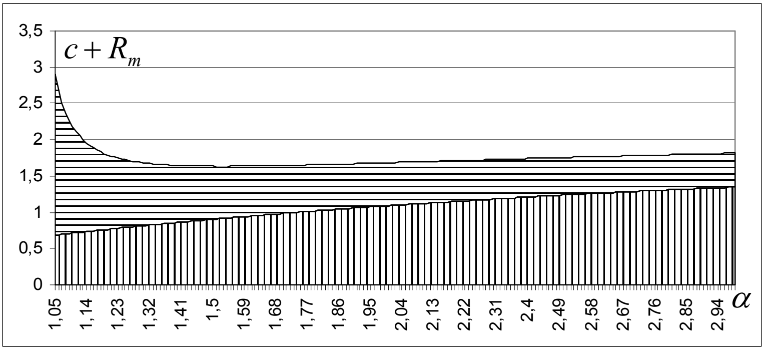

Рис. 2. Соотношение ренты менеджера R_m и его затрат c при росте информированности центра

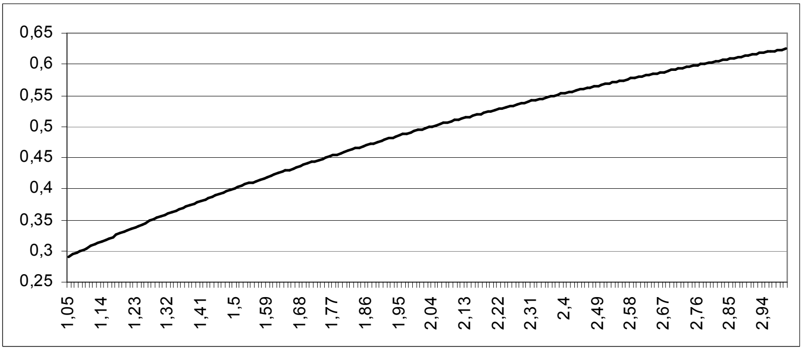

Рис. 3. Оптимальное действие θ менеджера при росте информированности центра α

Таким образом, *рост неопределенности приводит к росту информационной ренты менеджера среднего типа и к снижению его затрат, а, следовательно, и к увеличению доли информационной ренты в суммарном стимулировании менеджера*.

Из рис. 1 и рис. 2 видно, что по мере приближения информированности центра к минимальной $\alpha = 1$ фактически весь вклад менеджера уходит на его стимулирование, связанное с наличием персональной информации, а не с компенсацией реальных затрат.

5. Зависимость типа менеджера от позиции в иерархии

В теории контрактов рассматривается проблема найма одного агента (*principal-agent problem*) в условиях неопределенности о его типе и неблагоприятного отбора (*adverse selection*). Предмет данной работы – стимулирование менеджеров многоуровневой иерархии. В идеале всех менеджеров необходимо рассматривать как коллектив, учитывая сложные взаимовлияния действий менеджеров на затраты и вклад остальных членов коллектива. Однако даже для двухуровневой иерархии данная задача решена лишь в частных случаях (см., например, [8]). Для решения задачи совместной оптимизации многоуровневой иерархии и механизмов стимулирования необходимо вводить упрощающие допущения. В данной работе предполагается *аддитивность прибыли*: прибыль организации представима в виде суммы вкладов отдельных менеджеров, причем вклад конкретного менеджера не зависит от действий остальных менеджеров. Аналогично предполагается *аддитивность затрат*.

Предположение об аддитивности является довольно сильным. Однако достаточно предполагать его выполнение не при любых действиях менеджеров, а лишь при отклонении действия одного менеджера от планового с сохранением плановых действий остальными менеджерами. Такая «окрестностная аддитивность» может соответствовать функционированию организации «в окрестности» планового вектора действий менеджеров. Вклад и затраты отдельного менеджера в этом случае можно определить как отклонение его действия от планового с сохранением действий остальных. Поскольку в результате находится максимально прибыльная иерархия, все менеджеры которой честно сообщают свой тип, а их действия наблюдаются[1], то из соображений рациональности менеджер будет выбирать именно плановое действие. Таким образом, полученное оптимальное решение как раз и будет являться той точкой, в окрестности которой выполнено предположение об аддитивности. Отдельный вопрос – возможность сговора менеджеров с согласованным отклонением от плановых действий с целью изменения самих функций вклада и прибыли за счет внесения нестабильности в функционирование организации (согласованного отхода от планового вектора). Подобные согласованные действия коллектива менеджеров вопреки интересам организации рассматриваться в настоящей работе не будут.

Итак, в предположении аддитивности функции затрат и вклада задача об оптимальном стимулировании решается отдельно для каждого менеджера так, как показано выше. Исследуем зависимость полученного решения от позиции в иерархии. Из практики известно, что, как правило, более квалифицированные и опытные менеджеры занимают более высокие позиции в иерархии. Для учета этого эффекта в модели необходимо допустить, чтобы менеджеры разных позиций могли выбираться из различных рынков труда. В этом случае можно найти оптимальный рынок и *оптимальный средний тип менеджера* (*оптимальный тип*) в зависимости от уровня в иерархии управления. Опишем предлагаемую модель подробнее.

Если «рынок» менеджеров фиксирован и на разные позиции в иерархии нанимается случайным образом пришедший с одного и того же рынка менеджер, то очевидно, что в среднем тип будет одним и тем же, а вообще – случайной величиной с известным распределением. На практике рынок менеджеров сегментирован в соответствии с уровнем в иерархии (от топ-

---

[1] *Например, непосредственными начальниками. Затраты на осуществление контроля за непосредственными подчиненными могут быть учтены в функции затрат менеджера.*

менеджеров до менеджеров низшего звена[1]). Минимальные квалификационные требования для приема на работу растут с ростом уровня иерархии. Однако и неопределенность по поводу типа менеджера растет с ростом уровня. Если для менеджера низшего уровня можно разработать стандартную анкету, которая позволит с высокой вероятностью выяснить соответствие кандидата позиции, то для топ-менеджера оценка соответствия производится в результате личных переговоров и субъективных мнений.

В рамках распределения Парето вышеописанную практическую закономерность можно моделировать с помощью *принципа неопределенности*: *степень информированности α снижается с ростом среднего типа менеджера q_**, то есть α является монотонно убывающей функцией среднего типа q_* (и наоборот).

Проиллюстрируем принцип неопределенности на рис. 4 для зависимости $q_* = 1/\alpha$, которая используется ниже в примере 1. Видно, что при высокой информированности $\alpha = 3$ б*о*льшая часть менеджеров имеет низкий тип. А именно, менеджеры с типом $q < 0.355$ встречаются чаще в случае высокой информированности $\alpha = 3$, чем в случае низкой $\alpha = 1{,}5$. Для менеджеров высокого типа $q > 0.355$ ситуация обратная. То есть центр вынужден жертвовать потерей информированности, если хочет получить более квалифицированных менеджеров. На рис. 4 снижение α от 3 до 1,5 приводит к росту среднего типа q_* от 0,33 до 0,66. При этом минимальный тип $q_0 = q_*(\alpha - 1)/\alpha$ не изменяется и остается равным 0,22.

---

[1] *Данный тезис подтверждается хотя бы существованием специализированных кадровых агентств: от «поточного» метода работы при отборе менеджеров нижнего уровня до сугубо индивидуальной работы с топ-менеджерами.*

Таким образом, будем считать, что центр в состоянии выбрать бóльший средний тип q_* за счет роста степени неопределенности α. При этом встает ключевой вопрос о том, как зависит оптимальный средний тип от позиции в иерархии?

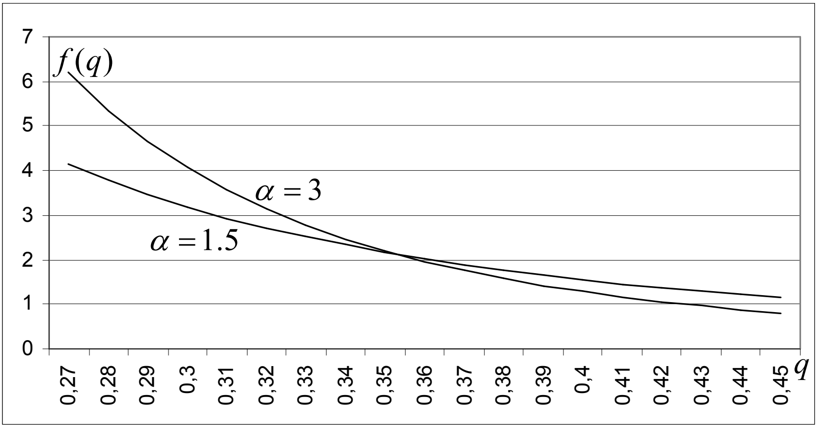

Рис. 4. Плотность вероятности типа f(q) для различных степеней информированности α

В выражении (19) вынесем за скобку c_{fix}:

$$R_c = c_{fix}\left\{\frac{\beta-1}{\beta}\left[\frac{1}{1+(\beta-1)/\alpha}\right]^{1/(\beta-1)}\frac{h_s^{\beta/(\beta-1)}}{c_s^{1/(\beta-1)}c_{fix}}q_* - \frac{1}{q_*}\frac{\alpha}{\alpha-1}\right\}.$$

Множитель c_{fix} не зависит от α и q_*. Максимизируя по α и q_* с учетом принципа неопределенности, получим оптимальные α и q_*, которые могут зависеть только от β и от $h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_{fix}c_s^{1/(\beta-1)}$. Таким образом, оптимальная степень информированности α и оптимальный средний тип q_* могут меняться для различных иерархических позиций только при изменении $h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_{fix}c_s^{1/(\beta-1)}$. При этом выше задача об оптимальной иерархии была решена для однородной функции, для которой величина $h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_{fix}c_s^{1/(\beta-1)}$

постоянна. Следовательно, *в условиях утверждения 1 и распределения Парето оптимальной управленческой иерархией является однородное дерево с одинаковым средним типом менеджера на всех уровнях*. Однако даже в этом наиболее простом случае интересно исследовать зависимость оптимального типа менеджера (общего для всей иерархии) от «*результативности*» – величины $h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_{fix} c_s^{1/(\beta-1)}$, определяющей вклад менеджера по отношению к затратам.

При $c_{fix} = 0$ в выражении прибыли центра (19) величина $h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_s^{1/(\beta-1)}$ является множителем, причем другой сомножитель не зависит от позиции в иерархии. Поэтому *при отсутствии постоянных затрат оптимальна иерархия с одинаковым средним типом менеджера на всех уровнях,* то есть α и q_* не зависят от h_s и c_s. При этом оптимальная иерархия может быть неоднородной если $h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_s^{1/(\beta-1)}$ является неоднородной функцией.

Итак, *построенная модель позволит описывать рост типов вышестоящих менеджеров в следующих случаях*:

1. *Постоянные затраты отличны от нуля и результативность* $h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_{fix} c_s^{1/(\beta-1)}$ *не является константой*[1].

2. *Функция h_s или c_s не является мультипликативной*.

Проиллюстрируем пункты 1 и 2 соответствующими примерами.

Пример 1. Зависимость оптимального типа от результативности.

Рассмотрим случай распределения Парето, линейной функции вклада $h(q, \theta) = h_s \theta$ и квадратичной функции затрат $c(q,\theta) = c_s \theta^2 / 2q + c_{fix} / q$. В этом случае прибыль центра определяется выражением (19). Вынося c_{fix} за скобку, обозначая результативность через x и учитывая $\beta = 2$, получим:

---

[1] *Например, при однородных функциях h_s, c_s и c_{fix} разной степени.*

(23) $R_p = c_{fix}\{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha+1}xq_* - \frac{1}{q_*}\frac{\alpha}{\alpha-1}\}$.

Рассмотрим принцип неопределенности на примере гиперболического убывания среднего типа $q_* = 1/\alpha$ по мере роста степени информированности α. То есть ценой роста среднего типа от 0 до 1 является снижение информированности α от бесконечной до минимальной (равной единице). Подставим в (23) $q_* = 1/\alpha$:

(24) $R_p = c_{fix}\{\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+1}x - \frac{\alpha^2}{\alpha-1}\}$.

Приравняем к нулю производную по α: $-\frac{x}{2}\frac{1}{(\alpha+1)^2} - \alpha\frac{\alpha-2}{\alpha-1} = 0$.

При $\alpha \geq 2$ производная отрицательна, то есть прибыль центра R_p убывает при росте α свыше двойки. При $1 < \alpha < 2$ имеем $\alpha\frac{(2-\alpha)(\alpha+1)^2}{\alpha-1} = \frac{x}{2}$. Слева функция, убывающая от бесконечности до нуля, поэтому максимум прибыли (24) единственен, расположен на интервале $1 < \alpha < 2$ и убывает при росте x.

Проиллюстрируем данный результат на рис. 5. Рассмотрим те же значения затрат, что и выше на рис. 1 и рис. 2: $c_s = 0{,}9$, $c_{fix} = 0{,}1$. Изобразим три кривые (24) для значений коэффициента вклада $h_s = 1{,}75; 2; 2{,}25$, которые при квадратичных затратах $\beta = 2$ соответственно приводят к результативности $x = 34; 44; 56$. Видно, что при росте результативности данной иерархической позиции оптимальная информированность убывает $\alpha = 1{,}53; 1{,}47; 1{,}42$ за счет найма более квалифицированных менеджеров с соответствующими средними типами $q_* = 0{,}65; 0{,}68; 0{,}70$.

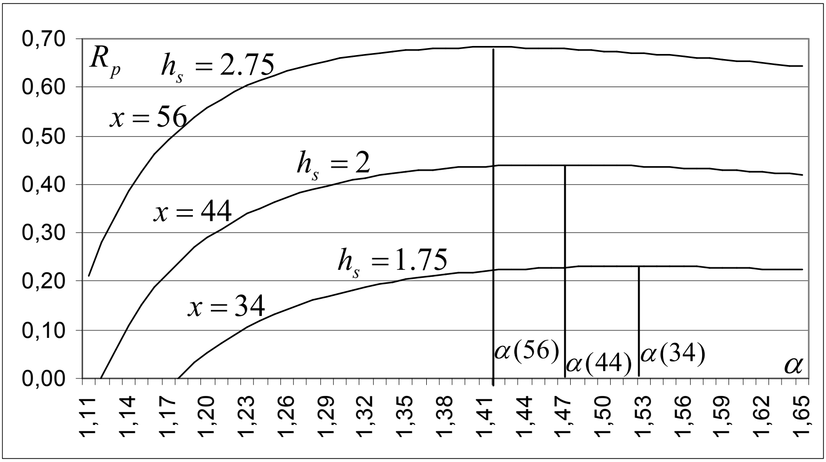

Рис. 5. Снижение оптимальной информированности α при росте результативности x

Итак, доказано, что по мере роста результативности[1] $x = h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_{fix} c_s^{1/(\beta-1)}$ оптимальная информированность убывает от двойки до единицы, при этом оптимальный тип менеджера соответственно возрастает от одной второй до единицы[2]. Таким образом, пример показывает, что *по мере роста результативности управления выгодно нанимать более профессиональных менеджеров, несмотря на большую неопределенность и боль-*

---

[1] *Как отмечено выше, в модели рост* $x = h_s^{\beta/(\beta-1)} / c_{fix} c_s^{1/(\beta-1)}$ *может описываться, например, степенью однородности вклада менеджера* h_s*, большей, чем степень однородности затрат* c_s *или* c_{fix}.

[2] *Несложно также подобрать пример, при котором оптимальная информированность меняется в большем диапазоне. Модифицируем гиперболическую зависимость:* $q_* = 1 + (\bar{q} - 1) / \alpha$. *В результате средний тип будет меняться от единицы до некоторого максимального типа* $2 < \bar{q} < 4$. *Здесь уже рост результативности будет снижать оптимальную информированность от бесконечности до единицы.*

шую информационную ренту. Данный вывод хорошо согласуется с наблюдаемой практикой. По мере роста иерархической позиции резко растет значимость принимаемых менеджером решений, что приводит к росту результативности и требований к менеджерам более высоких типов. Чем более важна функция менеджмента, т.е. чем б*о*льшую потенциальную отдачу может принести менеджер, тем выгоднее нанимать более профессиональных менеджеров и, кроме компенсации затрат, выплачивать все б*о*льшую премию за незнание истинного типа менеджера и необходимость стимулировать честное поведение. При этом, как отмечено выше, доля премии менеджера среднего типа по отношению к его затратам будет расти. Таким образом, *рост результативности управления приводит ко все более высокой прибыли менеджера на единицу его затрат*.

Пример 2. Немультипликативная функция вклада

Рассмотрим случай распределения Парето и квадратичной функции затрат $c(q, \theta) = c_s\theta^2/2q$ с нулевыми постоянными затратами, то есть $w(c_s, q) = c_s/q$. Функцию же вклада несколько усложним, положив $h(q,\theta) = \theta g(h_s, q) = \theta\sqrt{h_s - 1/q}$. Таким образом, $g(h_s, q) = \sqrt{h_s - 1/q}$, поэтому функция $g(h_s, q)$ непредставима в мультипликативном виде $h_s g(q)$. Вклад менеджера возрастает по мере роста его типа (а не только действия θ).

Прибыль центра определяется выражением (17):

$$R_p = \frac{\alpha}{2} q_0^\alpha \int_{q_0}^{+\infty} \frac{1}{(1+1/\alpha)c_s/q} \frac{h_s - 1/q}{q^{1+\alpha}} dq = \frac{1}{2c_s} \frac{\alpha^2}{\alpha+1} q_0^\alpha \int_{q_0}^{+\infty} \frac{h_s - 1/q}{q^\alpha} dq =$$

$$= \frac{1}{2c_s} \frac{\alpha^2}{\alpha+1} q_0^\alpha \{\int_{q_0}^{+\infty} \frac{h_s}{q^\alpha} dq - \int_{q_0}^{+\infty} \frac{1}{q^{\alpha+1}} dq\} = \frac{1}{2c_s} \frac{\alpha^2}{\alpha+1} q_0^\alpha \{\frac{h_s}{(\alpha-1)} \frac{1}{q_0^{\alpha-1}} -$$

$$- \frac{1}{\alpha} \frac{1}{q_0^\alpha}\} = \frac{1}{2c_s} \frac{\alpha}{\alpha+1} \{\frac{h_s\alpha}{(\alpha-1)} q_0 - 1\} = \frac{1}{2c_s} \frac{\alpha}{\alpha+1} (h_s q_* - 1).$$

Аналогично мультипликативным функциям, *прибыль центра линейно растет по мере роста среднего типа менеджера*

q_*, *а при фиксированном типе растет по мере роста степени информированности* α.

В случае гиперболического принципа неопределенности $q_* = 1/\alpha$ падение среднего типа оказывается слишком резким, поэтому оптимальна минимальная информированность независимо от h_s. Рассмотрение зависимости вида $q_* = b + 1/\alpha$ при достижении определенного порога параметра b дает резкое изменение в противоположную сторону, когда оптимальной будет полная информированность и минимальный средний тип. Поэтому в данном примере гиперболический принцип неопределенности не выявляет внутреннего оптимального типа менеджера. Однако для некоторых логарифмических зависимостей существует внутреннее оптимальное решение аналогично примеру 1.

6. Заключение

В работе поставлена и для частных случаев решена задача **совместной** оптимизации многоуровневой организации, включая структуру управления, состав менеджеров и механизмы их стимулирования в условиях неопределенности.

Главный математический результат работы – утверждение 1 – связывает характеристики иерархической позиции (коэффициент вклада h_s, коэффициент переменных затрат c_s, коэффициент постоянных затрат c_{fix}) с прибылью, которую менеджер приносит организации при оптимальном стимулировании. А именно, для мультипликативных зависимостей от позиции в иерархии в «классическом» случае (линейный вклад менеджера и затраты вида Кобба-Дугласа с постоянной частью) однородность функций, характеризующих иерархическую позицию, влечет однородность функции прибыли центра, что позволяет применить аналитический аппарат [6] для поиска *эффективной многоуровневой иерархии, обеспечивающей максимум прибыли*.

Для типов менеджеров, распределенных по Парето, введено и формализовано понятие степени информированности центра.

Показано, что в «классическом» случае прибыль центра растет по мере роста среднерыночного типа менеджера, а также растет по мере роста информированности при фиксированном среднем типе. Кроме того, чем выше неопределенность, тем больше средняя информационная рента (премия), выплачиваемая центром на стимулирование менеджеров организации, и больше доля премии в суммарном стимулировании менеджера. Можно проверить, что данные закономерности остаются справедливыми и для многих «неклассических» функций затрат и вклада, что позволяет выдвинуть гипотезу о справедливости полученных результатов в более общем случае.

Для распределения Парето предложен *принцип неопределенности*: степень информированности снижается с ростом среднерыночного типа менеджера. При этом возникает задача выбора: снизить неопределенность за счет набора худших менеджеров или поступить наоборот. Ответ на этот вопрос зависит от многих факторов, в частности – от *результативности* – потенциального вклада в прибыль на единицу затрат менеджера. Показано, что модель может описывать рост типов вышестоящих менеджеров только при ненулевых постоянных затратах и непостоянной результативности или при немультипликативных функциях вклада и затрат, приведены соответствующие примеры. В частности показано, что по мере роста результативности управления выгодно нанимать более профессиональных менеджеров, несмотря на б*о*льшую неопределенность и б*о*льшую информационную ренту, что приводит к более высокой премии на единицу затрат менеджера на более высоких позициях.

При построении модели считается, что известны функции вклада h_s и затрат c_s, c_{fix}, которые характеризуют собственно иерархическую позицию без привязки к персоналиям менеджеров. Зная h_s, c_s и c_{fix}, можно рассчитать все остальные параметры, а именно определить, на каком рынке нужно нанимать менеджера на данную позицию, какое действие от него потребовать на основании сообщенного типа, какое стимулирование выплатить для честного сообщения о типе, и какую прибыль в конечном итоге все это принесет организации. Зная функцию прибыли для любой потенциально возможной позиции, с использованием результатов [3-7, 10, 11] можно построить собственно оптимальную иерархию, в которой будут фигурировать лишь необходимые иерархические позиции.

Заслуживает пристального внимания обратная задача – идентификация h_s, c_s, c_{fix} на основании имеющихся управленческих иерархий данной отрасли, вида бизнесы, сегмента и т. п. в зависимости от цели исследования. Проблема идентификации состоит в том, что напрямую измерить характеристики иерархической позиции проблематично, поскольку, как правило, исследователь имеет дело с характеристиками конкретного менеджера, занимающего данную позицию. Аппарат данной работы может быть полезен, в том числе, для отделения персональных характеристик и нахождения h_s, c_s, c_{fix}.

Предположим, что известен ключевой показатель деятельности – KPI, а точнее, для приведения к единой размерности, известен *процент выполнения KPI*, который можно считать действием менеджера θ. Также будем считать известным *общее количество отработанных часов, включая процент вспомогательного* (*непроизводительного*) *времени*, что позволяет оценить соотношение постоянных c_{fix} и переменных c_s затрат. Снижение числа отработанных часов возможно либо при росте типа, либо при уменьшении действия. В первом приближении можно считать, что число часов продуктивной работы равно θ / q, что с учетом измеренного θ позволяет рассчитать тип менеджера q. Кроме того, логично предположить, что затраты менеджера, которые центр вынужден компенсировать, достаточно хорошо коррелируют с постоянной частью заработной платы (без учета премий). В результате из уравнения затрат можно найти[1] c_s и c_{fix}.

Предположим, что известен некоторый *денежный эквивалент работы, выполненной подразделением менеджера* (напри-

---

[1] *При известном β, например, при квадратичных затратах.*

мер, объем производства или продаж). Считая его равным вкладу менеджера для линейной зависимости $h(q, \theta) = \theta h_s$, можно оценить h_s.

В работах [3-7, 10, 11] предложен целый ряд аналитических секционных функций. Возможно, на основании эмпирических данных о h_s, c_s, c_{fix} удастся определить, какой класс функций наиболее хорошо описывает практически имеющиеся величины, как изменяются параметры функции в зависимости от характеристик реальной организации (размер, отрасль и т. п.).

Литература

1. БУРКОВ В. Н., НОВИКОВ Д. А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. М.: СИНТЕГ, 1999.
2. ВОРОНИН А. А., ГУБКО М. В., МИШИН С. П. НОВИКОВ Д. А. *Математические модели организаций*. М.: ЛЕНАНД, 2008.
3. ВОРОНИН А. А., МИШИН С. П. *Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы* // АиТ. 2002. №5. С. 120-132.
4. ВОРОНИН А. А., МИШИН С. П. *Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы* // АиТ. 2002. №8. С. 136-150.
5. ВОРОНИН А. А., МИШИН С. П. *Оптимальные иерархические структуры*. М.: ИПУ РАН, 2003.
6. *ГУБКО М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур*. М.: ЛЕНАНД, 2006.
7. ГУБКО М. В. *Структура оптимальной организации континуума исполнителей* // АиТ. 2002. №12. С. 116-130.
8. КОРГИН Н. А. *Неманипулируемые механизмы обмена в активных системах*. М.: ИПУ РАН, 2003.
9. КОРГИН Н. А., НОВИКОВ Д. А. *Задача стимулирования в условиях внутренней неопределенности о типах агентов, описываемых распределением Парето* // Системы управления и информационные технологии. 2006. №4(26). С. 66-69.

10. МИШИН С. П. *Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах* // АиТ. 2004. №5. С. 96-119.
11. МИШИН С. П. *Оптимальные иерархии управления в экономических системах*. М.: ИПУ РАН, 2004.
12. НОВИКОВ Д. А. *Теория управления организационными системами.* М.: МПСИ, 2005.
13. GROSSMAN S., HART O. (1983) *An Analysis of the Principal-Agent Problem* // Econometrica. 1983. 51, No. 1. P. 7-45.
14. GROSSMAN S., HART O. *Implicit Contracts Under Asymmetric Information* // Quarterly Journal of Economics. 1982. No. 1. P. 110-124.
15. HARRIS M., RAVIV A. *Organization Design* // Management Science. 2002. No. 7.
16. MELUMAD D. N., MOOKHERJEE D., REICHELSTEIN S. *Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts* // The Rand Journal of Economics. 1995. No. 4(26). P. 654-672.
17. MINTZBERG H. *The structuring of organizations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.

OPTIMAL INCENTIVE OF MANAGERS WITH UNCERTAIN TYPES IN MULTI-TIER FIRM

Sergey Mishin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (smishin@newmail.ru).

Abstract: optimal incentive problem is solved for managers with uncertain types (skills, efficiency etc.) in multi-tier firm. We have found functions of manager's salary and type depending on his or her position in multi-tier hierarchy. Particularly we have proven that higher position causes more qualified managers with more salary. For any manager's cost and manager's efficiency functions the optimal incentive function has been found. For defined class of *functions most efficient (optimal) multi-tier hierarchy can be found by previously developed optimization methods.*

Keywords: optimal, incentive, manager, multi-tier, firm, uncertain types.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Ворониным