УДК 62-505.5

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДВУХУРОВНЕВЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

I. Необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов функционирования в случае полной информированности центра

БУРКОВ В. Н., ЕНАЛЕЕВ А. К., КОНДРАТЬЕВ В. В., ЦВЕТКОВ А. В.

(Москва)

Даются необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов функционирования (механизмов, обеспечивающих выполнение плана) двухуровневой активной системы на множестве механизмов с фиксированными целевой функцией системы и системой стимулирования элементов в условиях полной информированности центра. В них обобщаются ранее полученные в этом направлении достаточные условия.

1. Описание двухуровневой активной системы «веерного типа» с независимыми по выбору состояний элементами включает следующие понятия [1]:

1) показатели состояния системы $y=\{y_{ij}|j\in J_i,\ i\in I\}$, где J_i — множество компонент состояния i-го элемента, $I=\{i|i=1, 2, \ldots, n\}$ — множество всех элементов системы;

2) показатели плана $x=\{x_{ij}|j\in J_i,\ i\in I\}$ в случае, когда планируются все компоненты состояния y;

3) множество возможных состояний системы $Y\subseteq\prod_{i\in I} Y_i$, где Y_i — множество возможных состояний i-го элемента;

4) множество допустимых планов системы $X\subseteq\prod_{i\in I} X_i$, где X_i — множество допустимых планов i-го элемента;

5) механизм функционирования системы Σ, включающий целевую функцию системы Φ, систему стимулирования элементов $f=\{f_i|i\in I\}$ (где f_i — целевая функция i-го элемента) и процедуру π формирования плана x;

6) множество локально-оптимальных состояний независимых элементов $P(f, x)=\{y\in Y|f_i(x_i, y_i)\geqslant f_i(x, z_i),\ z_i\in Y_i,\ i\in I\}$;

7) критерий эффективности механизма функционирования $K(\Sigma)=\min\Phi(x, y)$ по $y\in R(\Sigma)$, где $R(\Sigma)=\{y|y=x$, если $x\in P(f, x)$, иначе $y\in P(f, x)\}$ — множество решений игры элементов при гипотезе о благожелательном и локально-оптимальном их поведении;

8) множество допустимых механизмов функционирования G_Σ.

В теории активных систем задач оптимального синтеза механизмов функционирования заключается в определении механизма $\hat{\Sigma}$, удовлетворяющего дополнительным ограничениям $\hat{\Sigma}\in G_\Sigma^{\text{д}}$ и обеспечивающего максимальную эффективность функционирования системы на заданном множестве механизмов $G_\Sigma^3\subseteq G_\Sigma$ в смысле критерия $K(\Sigma)$ [1]:

$$K(\hat{\Sigma})=\max_{\Sigma\in G_\Sigma^3} K(\Sigma),\quad \hat{\Sigma}\in G_\Sigma^3\cap G_\Sigma^{\text{д}}. \tag{1}$$

Так как в механизм функционирования системы входит несколько компонент, рассматривались задачи синтеза одной или двух компонент при фиксированных остальных. Ряд исследований был посвящен решению задач оптимального синтеза процедур планирования в системе с независимыми элементами [1—7]. В задачах подобного типа $G_\Sigma^3 \subseteq G_\pi$, где G_π — множество механизмов с фиксированными целевой функцией системы Φ и системой стимулирования элементов f. Так как на множестве G_π только процедура формирования плана является варьируемой компонентой механизма функционирования, для $K(\Sigma)$ и $R(\Sigma)$ будем использовать запись $K(x)$ и $R(x)$ соответственно, где x — план, определяемый на основе процедуры планирования π_Σ. Подробно рассматривались следующие процедуры формирования плана:

$$\pi^{\text{ОП}}: \Phi(x, x) \underset{x}{\to} \max, \quad x \in X \subseteq Y,$$

$$\pi^{\text{ОПП}}: K(x) \underset{x}{\to} \max, \quad x \in X,$$

$$\pi^{\text{ОСС}}: \Phi(x, x) \underset{x}{\to} \max, \quad x \in X \cap S,$$

где $S = \{x \mid \max f_i(x_i, y_i) = f_i(x_i, x_i)$ по $y_i \in Y_i$, $x_i \in Y_i$, $i \in I\}$ — множество совершенно согласованных реализуемых планов. Приведенные процедуры планирования получили названия соответственно: оптимального планирования (ОП), оптимального планирования с прогнозом состояний (ОПП) и оптимального совершенно согласованного планирования (ОСС). Основное свойство процедур совершенно согласованного планирования — назначение элементам таких планов, в реализации которых они заинтересованы. Поэтому при рациональном поведении элементов совершенно согласованные планы будут выполнены. Механизмы функционирования, обеспечивающие выполнение плана, были названы правильными. Обозначим через $\tilde{G}_\Sigma$ множество этих механизмов. В этом случае процедура планирования ОСС есть решение задачи (1) при $G_\Sigma^3 \subseteq G_\pi$ и $G_\Sigma^{\text{д}} = \tilde{G}_\Sigma$.

Рассматривались также задачи оптимального синтеза систем стимулирования, удовлетворяющих дополнительным ограничениям, например требованию ограниченности величин штрафов [1].

В предлагаемом цикле статей рассматриваются решения задач оптимального синтеза процедур планирования и систем стимулирования, обеспечивающих максимальную эффективность функционирования системы и удовлетворяющих дополнительным ограничениям. Такими ограничениями могут быть: требование безусловного выполнения плана по всем или по части компонент, требование перевыполнения плана и т. д. Первое требование лежит в основе принципа совершенствования согласованного планирования [1]. Использование принципа согласованного планирования позволяет учесть и ряд других ограничений. В статьях цикла будут приведены необходимые и достаточные условия оптимальности механизмов функционирования на различных множествах механизмов. Результаты, полученные для случая полной информированности центра, обобщаются на случай неполной информированности центра о возможностях и интересах подчиненных ему элементов.

В данной статье получены необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов функционирования на множестве механизмов G_π. В них обобщаются ранее полученные в этом направлении достаточные условия [1, 5—7]. Эти результаты можно рассматривать как обоснование применения принципа совершенствования согласованного планирования в случае полной информированности центра.

2. Пусть в системе с независимыми элементами планируются все компоненты состояния элементов (прием, на основе которого полученные результаты переносятся на случай частичного планирования, можно найти в [1]). Будем считать, что система несет потери, если состояние y не совпадает с планом x:

$$\Phi(y, y) \geqslant \Phi(x, y) \tag{2}$$

на множестве $X \times Y$. Предполагается также, что элементы благожелательны по отношению к центру и выбирают свои состояния из множества локально-оптимальных состояний. Обозначим: $X^{\text{опп}}$ — множество планов, определяемых на основе процедуры ОПП: $X^{\text{опп}} = \operatorname{Arg}\max K(x)$ по $x \in X$; $\Sigma^{\text{осс}}$ и $\Sigma^{\text{опп}}$ — механизмы функционирования с процедурами ОСС и ОПП соответственно; $X(x) = \{z \mid z = x\}$, если $x \in R(x)$, иначе $z \in X$. Рассмотрим условия:

1°. $K(\Sigma^{\text{опп}}) = K(\Sigma^{\text{осс}})$;

2°. $X^{\text{опп}} \cap S \neq \phi$;

3°. $\exists x \in X^{\text{опп}} : R(x) \cap X \cap S \neq \phi$;

4°. $\exists x \in X^{\text{опп}},\ z \in R(x) \cap X : \forall y \in Y,\ i \in I : f_i(z_i, z_i) \geqslant f_i(z_i, y_i)$;

5°. $\exists x \in X^{\text{опп}},\ z \in X(x) \cap Y : \forall y,\ y' \in Y,\ i \in I$:

$$f_i(z_i, y_i) + f_i(x_i, y_i) \leqslant f_i(z_i, z_i) + f_i(x_i, z_i);$$

6°. $\exists x \in X^{\text{опп}},\ z \in X(x) \cap Y : \forall y \in Y,\ \alpha, \beta \geqslant 0,\ i \in I$:

$$\alpha f_i(z_i, y_i) + \beta f_i(x_i, y_i) \leqslant \alpha f_i(z_i, z_i) + \beta f_i(x_i, z_i).$$

Теорема. Условия 1°—6° эквивалентны.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

3. Обсудим результаты теоремы. То, что $X^{\text{опп}} \cap S \neq \phi$, непосредственно означает, что среди планов, определяемых на основе процедуры ОПП, имеется по крайней мере один совершенно согласованный реализуемый план.

Требования, предъявляемые к системам стимулирования, записаны в условиях 1°—6° в неявном виде. В частности, условия 3°—6° содержат множество $X^{\text{опп}}$, которое определяется как системой стимулирования f, так и целевой функцией системы Ф. Поэтому представляется, что использование условий 1°—6° в задачах анализа системы стимулирования, и тем более в задачах синтеза, затруднительно. Естественным выходом из этой ситуации является построение сравнительно простых конструктивных достаточных условий, по возможности незначительно сужающих множество оптимальных правильных механизмов функционирования. Путем последовательных упрощений условий 3°—6° можно получить целый ряд достаточных условий.

Для того чтобы устранить зависимость условий 3°—6° от вида целевой функции системы Ф, заменим требование $\exists x \in X^{\text{опп}}$ на более сильное $\forall x \in X$. Полученные таким образом условия, вообще говоря, уже не являются необходимыми, но зато, хотя по-прежнему в неявном виде, зависят теперь только от вида целевых функций элементов.

Представим целевые функции элементов f_i, $i \in I$ в виде $f_i(x_i, y_i) = h_i(y_i) - \chi_i(x_i, y_i)$, где $h_i(y_i) = f_i(y_i, y_i)$, $\chi_i(x_i, y_i)$ — функция штрафа за невыполнение плана.

Перепишем условия 3°—6° с учетом перечисленных выше замен в следующем виде:

3°а. $\forall x \in X : R(x) \cap X \cap S \neq \phi$;

4°а. $\forall x \in X : \exists z \in R(x) \cap X : \forall y \in Y,\ i \in I$:

$$\chi_i(z_i, y_i) \geqslant h_i(y_i) - h_i(z_i);$$

5°а. $\forall x \in X : \exists z \in X(x) \cap Y : \forall y,\ y' \in Y,\ i \in I$:

$$h_i(y_i) - h_i(y_i') - 2h_i(z_i) + \chi_i(x_i, z_i) \leqslant \chi_i(z_i, y_i) + \chi_i(x_i, y_i');$$

6°а. $\forall x \in X,\ z \in X \cap Y,\ y \in Y,\ i \in I$:

$$\Delta_i(y_i) \leqslant \chi_i(x_i, y_i) - \chi_i(x_i, z_i) \leqslant \chi_i(z_i, y_i),\ \chi_i(x_i, y_i) \geqslant 0;$$

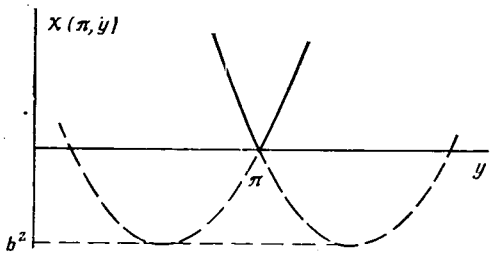
где

$$\Delta_i(y_i) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } y_i \in X_i \cap Y_i, \\ \max\limits_{i \in Y_i} h_i(y_i) - \max\limits_{z_i \in X_i \cap Y_i} h_i(z_i), & \text{если } y_i \notin X_i \cap Y_i. \end{cases}$$

Достаточность условий 3°а, 4°а и 5°а очевидна. Рассмотрим доказательство достаточности условия 6°а. Предположим, что 6° нарушается, а 6°а имеет место. Тогда $\forall x \in X^{\text{опп}}$, $z \in X(x) \cap Y : \exists y \in Y$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $i \in I$:

$$\alpha f_i(z_i, y_i) + \beta f_i(x_i, y_i) > \alpha f_i(z_i, z_i) + \beta f_i(x_i, z_i). \tag{3}$$

Неравенство (3) тем более будет выполняться, если заменить $\forall x \in X^{\text{опп}}$ на $\exists x \in X$. Из ограничения $\forall x \in X$, $y \in Y$, $z \in X \cap Y$, $i \in I$: $\Delta_i(y_i) \leqslant \chi_i(x_i, y_i) - \chi_i(x_i, z_i)$ условия 6°а следует, что $\forall x \in X : R(x) \cap X \neq \emptyset$. Выберем $z \in R(x) \cap X$, тогда $\forall y \in Y$, $i \in I : f_i(x_i, y_i) \leqslant f_i(x_i, z_i)$ и строгое неравенство (3) выполняется только, если $\exists i \in I$: $: \forall y \in Y$ имеет место строгое неравенство $f_i(z_i, z_i) < f_i(z_i, y_i)$. Если это так, то неравенство (3) будет выполняться и для $\alpha = -\beta \neq 0$. Сопоставляя полученное из (3) неравенство с неравенством условия 6°а, получим очевидное противоречие. Таким образом, из условия 6°а следует условие 6°.



Дальнейшее упрощение условий 3°а, 4°а и 6°а приводит к ранее полученным достаточным условиям максимальной согласованности, «сильных штрафов» и сильной согласованности соответственно [1]:

3°б. $S = \bigcup_{x \in X} R(x) \subseteq X$;

4°б. $\forall x, y \in Y \subseteq X$, $i \in I$:

$$\chi_i(x_i, y_i) \geqslant h_i(y_i) - h_i(x_i);$$

6°б. $\forall x \in X$, $z, y \in Y \subseteq X$, $i \in I$:

$$0 \leqslant \chi_i(x_i, y_i) \leqslant \chi_i(z_i, y_i) + \chi_i(x_i, z_i).$$

4. Множество всех оптимальных правильных механизмов, определяемых условиями 1°—6°, вообще говоря, шире множества механизмов функционирования, определяемых любым из достаточных условий. Проиллюстрируем это утверждение на простом примере. Рассмотрим систему стимулирования, которая не удовлетворяет условию сильного согласования 6°б, но тем не менее на основе которой можно построить оптимальный правильный механизм функционирования.

Рассмотрим простую двухуровневую систему, состоящую из центра и одного подчиненного ему элемента. Целевая функция системы имеет вид $\Phi(x, y) = y$. Целевая функция элемента

$$f(x, y) = h(y) - \chi(x, y),$$

где $h(y) = 2yc - y^2$ и

$$\chi(x, y) = \begin{cases} (y - x - b)^2 - b^2 & \text{при } y \leqslant x, \\ (y - x + b)^2 - b^2 & \text{при } y \geqslant x. \end{cases}$$

Для определенности положим $Y = X = [0, a]$ и $0 < c \leqslant a$. Функция штрафов χ является строго выпуклой функцией и при выбранных здесь Y и X не удовлетворяет условию 6°б [1]. Функция штрафа представлена графически на рисунке.

Применение процедуры ОПП дает $X^{\text{опп}} = a$. Учитывая то, что множество совершенно согласованных реализуемых планов имеет вид $S = [\max(c - b, 0), \min(c + b, a)]$, с помощью условия 2° теоремы получаем условие оптимальности правильного механизма функционирования при выбранной системе стимулирования: $b \geqslant a - c$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. В случае, когда из условия 1° следует условие 2°, будем писать 1°⇒2°. Доказательство эквивалентности условий в случаях 1°⇒2°, 3°⇒2°, 5°⇒3°, 6°⇒3° проводится методом от противного.

$1° \Rightarrow 2°$. Пусть $X^{\text{опп}} \cap S = \phi$. Так как механизм $\Sigma^{\text{осс}}$ существует, то $S \cap X \neq \phi$. Из определения $\Sigma^{\text{опп}}$ следуют равенства:

$$K(\Sigma^{\text{опп}}) = \max_{x \in X} K(x) = K(x^1),$$

где $x^1 \in X^{\text{опп}}$. Соответственно $\forall x^2 \in (S \cap X) \setminus X^{\text{опп}} = S \cap X$ выполняется неравенство $K(\Sigma^{\text{опп}}) > K(x^2)$. Поэтому

$$K(\Sigma^{\text{опп}}) > \max_{x \in S \cap X} K(x) = K(\Sigma^{\text{осс}}),$$

что противоречит условию 1°.

$2° \Rightarrow 1°$. Пусть $x^1 \in X^{\text{опп}} \cap S$. Тогда можно записать следующую цепочку равенств:

$$K(\Sigma^{\text{опп}}) = \max_{x \in X} K(x) = K(x^1) = \max_{x \in S \cap X} K(x) = K(\Sigma^{\text{осс}}),$$

что и требовалось доказать.

$2° \Rightarrow 3°$. Выберем произвольный $x \in X^{\text{опп}} \cap S$. Из определения множества S следует, что $x \in R(x)$ и тем самым выполняется условие 3°.

$3° \Rightarrow 2°$. Пусть $X^{\text{опп}} \cap S = \phi$. С учетом этого и условия 3° можно записать, что $\exists x^1 \in X^{\text{опп}} : \exists x^2 \in R(x^1) \cap S \cap X$ и $x^2 \in X \setminus X^{\text{опп}}$. Теперь можно записать две цепочки неравенств:

$$K(x^2) < K(\Sigma^{\text{опп}}),$$
$$K(\Sigma^{\text{опп}}) = K(x^1) = \min_{y \in R(x^1)} \Phi(x^1, y) \leqslant \Phi(x^1, x^2) \leqslant \Phi(x^2, x^2) = K(x^2).$$

Здесь было использовано свойство целевой функции системы (2). Полученное противоречие завершает доказательство.

$3° \Rightarrow 4°$. Из того что для некоторых $x \in X^{\text{опп}} : R(x) \cap X \cap S \neq \phi$, следует, что $\exists z \in R(x) \cap X \cap S$. Из определения множества S следует, что $\forall y \in Y : f_i(z_i, z_i) \geqslant f_i(z_i, y_i)$, что и требовалось доказать.

$4° \Rightarrow 3°$. Из 4° следует, что $\forall x \in X^{\text{опп}} : (R(x) \cap X) \cap S = \phi$. Отсюда $\exists x \in X^{\text{опп}} : \forall z \in R(x) \cap X : \exists y \in Y,\ i \in I : f_i(z_i, z_i) < f_i(z_i, y_i)$, что противоречит 4°.

$4° \Rightarrow 5°$. Так как $\exists x \in X^{\text{опп}},\ z \in R(x) \cap X \subseteq Y \cap X(x) : \forall y' \in Y,\ i \in I$, то выполняется условие $f_i(x_i, y_i') \leqslant f_i(x_i, z_i)$. Сопоставляя его с 4°, получаем 5°.

$5° \Rightarrow 3°$. Тогда $\forall x \in X^{\text{опп}} : R(x) \cap S \cap X = \phi$. В этом случае $\forall z \in X(x) \cap Y : z \notin R(x) \cap S$. Последнее означает, что либо $z \notin R(x)$, либо $z \notin S$, либо то и другое одновременно. В этом случае из этих условий можно получить неравенство, противоречащее неравенству условия 5°. Противоречие доказывает условие 3°.

Доказательство $4° \Rightarrow 6°$ и $6° \Rightarrow 3°$ проводится аналогично случаям $4° \Rightarrow 5°$ и $5° \Rightarrow 3°$, соответственно. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
3. *Канторович Л. В., Горстко А. В.* Оптимальные решения в экономике. М.: Наука, 1972.
4. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1977.
5. *Бурков В. Н., Еналеев А. К., Кондратьев В. В.* Двухуровневые активные системы. IV. Цена децентрализации механизмов функционирования.— Автоматика и телемеханика, 1980, № 6, с. 110–117.
6. *Бурков В. Н., Еналеев А. К., Кондратьев В. В., Марин Л. Ф., Щепкин А. В.* Правильные механизмы функционирования организационных систем.— В кн.: VIII Всес. совещ. по проблемам управления. Кн. 2. М.— Таллин, 1980, с. 382–384.
7. *Burkov V. N., Jenaleev A. K., Kondratiev V. V., Schepkin A. V.* Regular functioning mechanisms of organizational systems.— In: Control science and technology for the progress of society.— Proc. 8th Triennial World congress IFAC, Kyoto, Japan, 1981, v. XII, p. 31–37.

Поступила в редакцию
21.VI.1982

ELEMENTS OF THE THEORY OF OPTIMAL DESIGN FOR FUNCTIONING MECHANISMS OF TWO-LEVEL ACTIVE SYSTEMS. I. THE NECESSARY AND SUFFICIENT OPTIMALITY CONDITIONS FOR REGULAR FUNCTIONING MECHANISMS IN THE CASE OF FULL KNOWLEDGE AVAILABLE TO THE CENTER

BURKOV V. N., YENALEEV A. K., KONDRAT'EV V. V., TSVETKOV A. V.

The necessary and sufficient conditions are provided for the functioning mechanisms (that insure meeting the planned targets) to be optimalin a two-level active system on a set of mechanisms with a fixed objective function for the system and a set of element incentives with the central authority being completely informed.