УДК 519.714.3:519.21

© 1995 г. А. К. ЕНАЛЕЕВ, канд. техн. наук,
Д. А. НОВИКОВ, канд. техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ. I

Решается задача синтеза оптимальной функции стимулирования в одноэлементной активной системе с вероятностной неопределенностью и симметричной информированностью участников. Приводятся свойства этого решения и алгоритмы его определения.

1. Введение

В теории активных систем задаче синтеза оптимальных механизмов стимулирования посвящено значительное количество работ. К настоящему времени решена задача синтеза оптимальной системы стимулирования в условиях полной информированности центра о моделях активных элементов [1, 2]. В [3] проведен обзор основных результатов, полученных отечественными и зарубежными специалистами в исследованиях по теории контрактов [9, 10]; в [4] рассмотрены различные методы учета вероятностной неопределенности и для ряда моделей предложены алгоритмы поиска решения; в [5] решена задача синтеза оптимальной функции стимулирования для частного класса задач; в [6] получено решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования для системы с асимметричной информированностью участников; в [7] исследуются многоэлементные вероятностные активные системы (на примере механизмов страхования). Проводимый ниже анализ свидетельствует об отсутствии общих аналитических методов решения вероятностной задачи стимулирования.

В данной работе для одноэлементной статической активной системы с симметричной информированностью участников и усреднением целевых функций (в соответствии с классификацией, предложенной в [3]) при некоторых достаточно естественных предположениях определяются оптимальные механизмы стимулирования и предлагаются алгоритмы их поиска.

2. Модель активной системы и постановка задачи

В экономической практике распространены ситуации, в которых управляющий орган заключает контракт с исполнителем. Контрактом может быть трудовой контракт – соглашение о зависимости объема заработной платы от результатов работы, страховой контракт – договор, заключаемый страхователем и страховой компанией, определяющий зависимость величины страхового возмещения от реализовавшегося "состояния природы" или действия исполнителя и т.д. Рассматриваемая ниже модель охватывает описанные ситуации.

Рассмотрим активную систему, состоящую из управляющего органа (центра) и одного активного элемента (АЭ). Пусть целевые функции центра и АЭ имеют вид

$$\widetilde{\Phi}(z) = \widetilde{H}(z),$$
$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{h}(z) - \widetilde{\chi}(x, z)$$

соответственно, где z – результат деятельности АЭ, $\widetilde{H}(z)$ – доход центра от результата z, $\widetilde{h}(z)$ – доход АЭ от этого результата, $\widetilde{\chi}(x,z)$ – штрафы (компенсации), выплачиваемые АЭ центру и зависящие от результата его деятельности z и от параметра x, задаваемого центром.

Результат деятельности активного элемента z, принадлежащий множеству возможных результатов A_0, зависит как от действий АЭ – y, выбираемых из множества возможных действий A, так и от случайных и неопределенных факторов – "состояния природы", т.е. z является случайной величиной. Примем, что и центру, и АЭ известно распределение вероятностей $p(z,y)$ – вероятности реализации результата z при выбранном действии y. Другой способ описания влияния случайных факторов на функционирование системы предложен в [4]. В [4, 8] установлена его эквивалентность со способом, используемым в настоящей работе. Поскольку при выборе действия АЭ не знает точного значения результата, которое впоследствии реализуется, то будем предполагать, что АЭ при выборе y стремится максимизировать ожидаемое значение своей целевой функции:

$$(1)\qquad f(x,y)=\int\limits_{A^0}\left[\widetilde{h}(z)-\widetilde{\chi}(x,z)\right]p(z,y)dz.$$

При этом среднее значение целевой функции управляющего органа в зависимости от выбранного элементом действия имеет вид

$$(2)\qquad H(y)=\int\limits_{A^0}\widetilde{H}(z)\,p(z,y)dz.$$

Центр имеет возможность оказывать влияние на действия АЭ путем выбора функции штрафов $\widetilde{\chi}(x,z)$ из заданного множества допустимых функций штрафов M и управляющего параметра x из множества X. Пару $\mu=\{x,\chi(\cdot)\}$ назовем механизмом стимулирования.

Задача управления в активной системе заключается в выборе $\mu^*=\{x^*,\chi^*(\cdot)\}$, удовлетворяющего условию

$$(3)\qquad K(\mu^*)=\max_{\mu\in\{M,X\}}K(\mu).$$

Здесь $K(\mu)=\max\limits_{y\in P(\mu)}H(y)$, где $P(\mu)=\operatorname{Arg}\max\limits_{y\in A}f(x,y)$ – множество решений игры, т.е. центр выбором механизма стимулирования стремится максимизировать ожидаемое значение своей целевой функции при условии, что выбираемое элементом действие максимизирует ожидаемую полезность элемента при заданной системе стимулирования.

Отметим, что если отказаться от гипотезы благожелательности $K(\mu)=\max\limits_{y\in P(\mu)}H(y)$, то центр будет ориентироваться на гарантированное значение $K(\mu)=\min\limits_{y\in P(\mu)}H(y)$. Как будет видно из дальнейшего изложения, ε-оптимальные решения в обоих случаях одинаковы.

Таким образом, задачей синтеза оптимальной функции стимулирования в теории активных систем будем называть следующую задачу:

$$(4)\qquad \max_{y\in P(\mu)}\int\limits_{A^0}\widetilde{H}(z)\,p(z,y)dz\Rightarrow\max_{\mu\in\{M,X\}}$$

при

$$(5)\qquad P(\mu)=\operatorname{Arg}\max_{y\in A}\int\limits_{A^0}\left[\widetilde{h}(z)-\widetilde{\chi}(x,z)\right]p(z,y)dz.$$

Отличие данной задачи от задачи теории контрактов [9] заключается в отсутствии в целевой функции центра функции штрафов, линейности функций полезности элементов и виде ограничений на множество допустимых функций стимулирования – в теории контрактов на функцию стимулирования не накладывается никаких ограничений, кроме того, что она должна обеспечить АЭ гарантированный уровень ожидаемой полезности. Здесь это требование не вводится и ограничивается непосредственно допустимое множество. Также отметим, что форма записи целевой функции активного элемента в виде разности стимулирования и затрат или в виде разности дохода и штрафов не является существенной, так как путем переобозначений эти два описания легко могут быть сведены одно к другому. Наличие такой двойственной эквивалентности между этими способами представления целевой функции элемента позволяет сконцентрировать внимание на одном из них.

Из работ зарубежных авторов известны два метода решения задачи теории контрактов. Первый – подход первого порядка [10] применим в очень ограниченном классе задач. Второй – двушаговый метод Гроссмана – Харта [9] может быть использован только для дискретных задач. Помимо этого, он обладает высокой вычислительной сложностью и не дает решения в аналитическом виде, т.е. лишает исследователя возможности анализировать зависимость решения от исходных данных. Предложенный в [4] вычислительный метод обладает практически теми же недостатками, что и двушаговый метод.

Для решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в вероятностной активной системе может также быть использован следующий подход. Из детерминированной теории известно [1], что в классе согласованных механизмов оптимален механизм с максимальной степенью централизации. Воспользуемся этим результатом и выделим из M класс M_s функций стимулирования, математическое ожидание которых является согласованной функцией стимулирования. Воспользуемся для этого "неравенством треугольника" [1]. Обозначим:

$$M_s = \left\{ \widetilde{\chi}_s(z) \in M : \int \widetilde{\chi}_s(x,z) p(z,y) dz \leqslant \int \widetilde{\chi}_s(x,z) p(z,t) dz + \right.$$
$$\left. + \int \widetilde{\chi}_s(t,z) p(z,y) dz \quad \forall\, x,y,z \right\}.$$

Оптимальная функция стимулирования $\widetilde{\chi}_s^*(z) \in M_s$ должна удовлетворять вероятностному аналогу условия оптимальности, известного из детерминированной теории [1]:

$$E\chi_s^*(x,y) \geqslant \max_{t \in A} \{E\chi_s(t,y) - E\chi_s(t,x)\} \quad \forall \chi_s \in M_s. \tag{6}$$

Этим методом исходная задача эффективно решается в случае параметрического задания класса M и в случае, когда распределение $p(\cdot)$ является равномерным [5]. Получение же решения этим методом в общем случае сталкивается со значительными (как теоретическими – не всегда удается свести задачу к известной оптимизационной, так и практическими – высокая вычислительная сложность) трудностями.

Таким образом, анализ существующих методов решения вероятностной задачи стимулирования позволяет сделать вывод, что все эти методы обладают рядом существенных недостатков, что обосновывает необходимость разработки аналитических методов решения.

3. Решение вероятностной задачи стимулирования

Сделаем ряд предположений относительно целевых функций и допустимых множеств, которых будем придерживаться, если не будет оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения.

Пусть $A = A^0 = X$ – отрезки $\mathbb{R}^1$; $\widetilde{H}(z) \in G$, $\widetilde{h}(z) \in G$, где G – класс финитных ($\mathrm{Supp}\ \widetilde{h} = A$), дважды непрерывно дифференцируемых почти всюду, строго вогнутых функций; $\widetilde{\chi}(x, z)$ – монотонная, ограниченная некоторой положительной константой C функция, имеющая не более конечного числа разрывов первого рода; $F(z, y) = \widehat{F}(z - y)$ – интегральная функция распределения; соответствующая ей плотность распределения вероятности $p(z, y)$ дважды непрерывно дифференцируема почти всюду, унимодальна (максимум в точке y) и $Ez = y$.

Последнее требование, налагаемое на функцию распределения, представляется достаточно обоснованным с содержательной точки зрения: если бы ожидаемое значения результата деятельности АЭ при фиксированном действии не совпадало с этим действием, то последнее могло бы быть соответствующим образом переопределено.

В дальнейшем нам потребуются следующие обозначения:

$$H(y) = \int\limits_{A^0} \widetilde{H}(z) p(z, y) dz; \quad h(y) = \int\limits_{A^0} \widetilde{h}(z) p(z, y) dz; \quad \chi(y) = \int\limits_{A^0} \widetilde{\chi}(z) p(z, y) dz,$$

$$y_1 = \arg \max_{y \in A} H(y); \quad y_2 = \arg \max_{y \in A} h(y);$$

$$h_2 = h(y_2); \quad y_3 : h(y_3) = h_2 - C, \quad y_3 \geqslant y_2;$$

$$y_4 : \left.\frac{\partial h(y)}{\partial y}\right|_{y=y_4} = -C \left.\frac{\partial \widehat{F}(t)}{\partial t}\right|_{t=0};$$

$$x_0 = \min\{y_3, y_4\}; \quad \widehat{y}_5(x) = \arg \max_{y \in Q(x)} f(x, y),$$

$$\text{где} \quad Q(x) = \left\{ y : \frac{\partial h}{\partial y} = -C \widehat{p}(x - y), \ y \in [y_2, x) \right\};$$

$$y_5(x) = \begin{cases} \widehat{y}_5(x), & \text{если } Q(x) \text{ непусто;} \\ y_2 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

$$y^*(x) = \min \left\{ y : \frac{\partial h}{\partial y} = -C \widehat{p}(x - y), \ y \geqslant x \right\};$$

$$\widehat{y}(x) = \mathrm{Max} \left\{ y : \frac{h(y_5) + h(y^*)}{2} < h(y) \right\}.$$

Будем считать, что $y_1 > y_2$. Случай $y_1 < y_2$ описывается аналогично.

Существование и единственность величин y_i $(i = \overline{1, 4})$ следует из свойств функций $H(\cdot)$ и $h(\cdot) \in G$, устанавливаемых следующей леммой.

Лемма 1. $H(\cdot) \in G$, $h(\cdot) \in G$.

Доказательства всех утверждений вынесены в приложение.

Из детерминированной теории известен следующий результат: на множестве согласованных функций стимулирования оптимален механизм с максимальной степенью централизации. Поэтому представляет интерес, насколько это утверждение остается справедливым для активной системы с вероятностной неопределенностью. Рассмотрим следующие функции стимулирования:

$$\widetilde{\chi}_1^+(x, z) = \begin{cases} 0; & z \leqslant x, \\ C; & z > x, \end{cases} \qquad \widetilde{\chi}_1^-(x, z) = \begin{cases} 0; & z > x, \\ C; & z \leqslant x. \end{cases}$$

Определим $M_x = \{\chi_1^{\pm}(x, z), \ x \in X\} \subseteq M$. В дальнейшем изложении будем анализировать $\widetilde{\chi}_1^- \in M_x$, для краткости используя обозначение χ_1, что соответствует случаю $y_1 > y_2$. Для $\widetilde{\chi}_1(x, z)$ справедливо:

$$\chi_1(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\chi}_1(x,z)\,p(z,y)dz = CF(x,y).$$

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства функции распределения, устанавливаемые следующей леммой.

Лемма 2. $F(z,y)$ не возрастает по y.

Отметим, что свойство функции распределения, установленное в лемме 2, имеет простую содержательную интерпретацию: для достижения больших результатов требуется предпринимать большие действия, а результат деятельности АЭ может быть представлен как $z = y + \xi$, где ξ – случайная величина с нулевым средним, имеющая распределение $\widehat{F}(\cdot)$.

Будем говорить, что система стимулирования $\widetilde{\chi}(\cdot)$ реализует действие $\widetilde{y}$, если выполнено

$$h(\widetilde{y}) - \chi(\widetilde{y}) \geqslant h(y) - \chi(y) \quad \forall\, y \in A.$$

Лемма 3. Необходимым и достаточным условием того, что система стимулирования $\chi_1(x^*,z) \in M_x$ реализует действие y^*, является

$$h(y^*) - CF(x^*,y^*) \geqslant h(y_5(x^*)) - CF(x^*,y_5(x^*)), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial\, h(y)}{\partial\, y}\right|_{y=y^*} = -C\,p(x^*,y^*). \tag{8}$$

Для решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в классе M_x достаточно решить следующую параметрическую оптимизационную задачу: для каждого $x \in [y_2, x_0]$ определить величину: $y^*(x) = \arg\max\limits_{y\in A} f(x,y)$, а затем выбрать x^*, соответствующее максимальному $y^*(x) \leqslant y_1$.

Теорема 1. Достаточным условием оптимальности пары $(x^*, y^*(x^*))$ является одновременное выполнение:

$$h(y^*(x^*)) - CF(x^*,y^*(x^*)) = h(y_5(x^*)) - CF(x^*,y_5(x^*)) \tag{9}$$

и (8).

Теперь можно определить классы систем, в которых оптимальны функции стимулирования из M_x.

Теорема 2. Если выполнено следующее условие:

$$F(x^*,y_5) - F(x^*,\widehat{y}) \geqslant 2F\left(\frac{x_0 - \widehat{y}}{2}\right) - 1, \tag{10}$$

а распределение $p(\cdot)$ симметрично, то функция штрафов $\chi_1(x,z)$ оптимальна в классе M.

Величина x_0, введенная выше, является вероятностным аналогом правой границы множества согласованных планов. Интуитивно ясно, что множество достижимости в вероятностном случае не должно быть шире, чем в детерминированном. Это утверждение обосновывается следующей теоремой.

Теорема 3. Если $y^* = x_0$, то $\chi_1 \in M_x$ оптимальна в M.

Несколько более частный, чем описанный в теореме 3, но достаточно важный для возможных приложений, результат по характеризации классов оптимальности систем стимулирования из M_x дается следующей теоремой.

Теорема 4. Если $p(\cdot)$ – финитное на Δ-окрестности точки y распределение, $y_3 \geqslant y_2 + 2\Delta$ и $\forall\, y \in [y_3 - 2\,\Delta, y_3]$ выполнено

$$p(z, y) \geqslant \frac{1}{c}\left|\frac{\partial\, h(y)}{\partial\, y}\right|,$$

то функция штрафов $\chi_1 \in M_x$ оптимальна в M и $x^* = y_3 - \Delta$.

Приведенный выше результат имеет следующую содержательную интерпретацию. Если известно, что результат деятельности АЭ лежит в Δ-окрестности его действия, и вероятность того, что результат окажется на границе этого интервала, достаточно (см. условия теоремы 4) велика, то следует использовать систему стимулирования из M_x. Этот результат позволяет решать следующую достаточно часто встречающуюся в практических приложениях задачу. Если ни центру, ни активному элементу неизвестно ничего, кроме области возможных значений результата деятельности при данном действии, то они могут либо использовать метод максимального гарантированного результата, либо рассчитывать на наихудшее распределение при имеющейся информации, которое в силу принципа Рэлея – Джинса будет именно равномерным распределением. В последнем случае оптимальное решение дается теоремой 4. Если же распределение равномерно, то, как установлено в [5], скачкообразное решение оптимально и выполнения условий теоремы 4 не требуется. Примеры вероятностных активных систем, удовлетворяющих условиям теорем 2 – 4, приведены в [8].

Отметим, что если имеет место $y_1 \equiv y_2$ (случай, не рассмотренный выше), т.е. интересы центра и АЭ полностью совпадают, то, очевидно, оптимальна функция штрафов, тождественно равная нулю.

Полученные результаты позволяют предложить алгоритмы поиска оптимальной скачкообразной системы стимулирования. Наиболее прямолинейным способом нахождения оптимального x^* является перебор с постоянным шагом множества $[y_2, x_0]$ (из доказательств леммы 3 и теоремы 1 следует, что $y^* \in [y_2, x_0]$, $x^* \leqslant y^*$). Нахождение решения с точностью до ε потребует вычисления примерно $1/\varepsilon^2$ величин. Такой алгоритм, во-первых, может оказаться достаточно трудоемким, а во-вторых, он слишком универсален и не учитывает специфики задачи. Альтернативой простому перебору может быть алгоритм, основанный на сравнении значений $y^*(x)$ и $y_5(x)$. При этом шаг по x является переменным: сначала "грубо" определяется такое значение x, при котором выполнены условия теоремы 1, а затем с уменьшающимся шагом "уточняется" это значение. Сходимость такого алгоритма за конечное число шагов доказана в [8].

Приведенные выше теоремы 2 – 4 являются достаточными условиями оптимальности скачкообразных решений и, по-видимому, не охватывают все возможные случаи. Известные на сегодняшний день необходимые условия оптимальности, фактически совпадающие с определением оптимальности решения, в настоящей работе не приводятся в силу их громоздкости и неконструктивности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Так как функции $H(\cdot)$ и $h(\cdot)$ обладают одинаковыми свойствами, то достаточно провести доказательство для одной из них: $h(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{h}(z)\, \widehat{p}(z-y)dz$. Функция $\widehat{p}(z-y)$ непрерывна и ограничена на компакте, а $\widetilde{h}(z)$ интегрируема и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\widetilde{h}(z)\right| dz$ сходится, так как $\widetilde{h}(z)$ – финитная функция.

Более того, $\dfrac{\partial\,\widehat{p}(z-y)}{\partial\, y}$ непрерывна, следовательно, по теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, $h(y)$ – непрерывно дифференцируемая функция и выполнено условие

$$\frac{\partial\, h(y)}{\partial\, y}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{h}(z)\frac{\partial\,\widehat{p}(z-y)}{\partial\, y}dz.$$

Аналогично доказывается непрерывность второй производной функции $h(y)$.

Сделаем замену переменных $t=z-y$. Для первой и второй производных функции $h(\cdot)$ получим:

$$\frac{\partial\, h(y)}{\partial\, y}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{h}\,'(t+y)\;\widehat{p}(t)dt,$$

$$\frac{\partial^2\, h(y)}{\partial\, y^2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{h}\,''(t+y)\,\widehat{p}(t)dt.$$

Так как $h(\cdot)$ строго вогнута, то $\widetilde{h}\,''(t+y)<0$, а так как $\widehat{p}(t)\geqslant 0$, то $h''(y)<0$, т.е. $h(y)$ строго вогнута.

Строго вогнутая, дважды непрерывно дифференцируемая функция достигает на компакте максимального значения и, более того, имеет не более одного максимума. $h(y)$ принимает положительные значения, так как является интегралом от произведения двух положительнозначных функций. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. В соответствии с принятыми предположениями $F(z,y)=\widehat{F}(z-y)$. Обозначим $t=z-y$. Тогда $F(z,y)=\widehat{F}(t)$, где $\widehat{F}(t)$ – неубывающая функция (так как это функция распределения). Дифференцируя $F(z,y)$ по y, получим $\dfrac{\partial\, F(z,y)}{\partial\, y}=-\dfrac{d\widehat{F}(t)}{dt}\leqslant 0$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Необходимость условий (7) – (8) очевидна. Докажем их достаточность.

Прежде всего, покажем, что максимум целевой функции АЭ при использовании функции штрафов $\chi_1(x,z)$ достигается при $y^*\geqslant y_2$. Предположим обратное, т.е. что $y^*<y_2$. Тогда должно выполняться:

$$h(y^*)-C\widehat{F}(x^*-y^*)\geqslant h(y_2)-C\widehat{F}(x^*-y_2),$$

т.е.

$$\frac{1}{C}\left[h(y_2)-h(y^*)\right]\leqslant\widehat{F}(x^*-y_2)-\widehat{F}(x^*-y^*).$$

Так как $y^*<y_2$, то правая часть неравенства неположительна. В силу строгой вогнутости $h(\cdot)$ левая часть строго положительна – противоречие. Значит, $y^*\geqslant y_2$.

Рассмотрим поведение функции $f(x,y)$ при $y\geqslant y_2$:

$$f(x,y)=h(y)-C\widehat{F}(x-y).$$

Найдем точки экстремума: $\dfrac{\partial\, f}{\partial\, y}=\dfrac{\partial\, h}{\partial\, y}+C\widehat{p}(x-y)$.

В силу вогнутости $h(\cdot)$ $\dfrac{\partial\, h}{\partial\, y}$ – невозрастающая функция. Так как $\widehat{p}(\cdot)$ унимодальна, то для любого $x\in X$ уравнение имеет не более одного решения $y^*\geqslant x^*$. При

$y \in (y_2, x)$ функция $f(x, y)$ имеет в общем случае не единственный максимум. Однако в силу (7) и определения величины y_5 ни одна из этих точек не является точкой глобального максимума на A.

Для второй производной целевой функции АЭ справедливо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - C\,\widehat{p}\,'(x-y).$$

Так как $x \leqslant y^*$, то $\widehat{p}\,'(x - y^*) \geqslant 0$, следовательно, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, т.е. y^* – точка максимума. Так как выполнено (7), то $f(x, y^*)$ – наибольшее значение целевой функции АЭ на рассматриваемом компакте. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу непрерывной дифференцируемости функций $h(\cdot)$ и $p(\cdot)$ и определения y^* функции $y^*(x)$ и $y_5(x)$, определяемые неявной функцией $G(x, y) = h'(y) + C\,p\,(x - y) = 0$, являются непрерывно дифференцируемыми по известной теореме анализа о неявных функциях ($G'_y \neq 0$ в силу строгой вогнутости функции дохода и неотрицательности плотности распределения вероятности).

Производная целевой функции активного элемента

$$f(x, y) = h(y) - C\,\widehat{F}(x - y)$$

по x в точке y^* равна:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y^*) &= h'(y^*)y^{*\prime}(x) - C\,\widehat{p}\,(x - y)(1 - y^{*\prime}(x)) = \\ &= (h'(y^*) + C\,\widehat{p}\,(x - y))y^{*\prime}(x) - C\,\widehat{p}\,(x - y) \leqslant 0, \end{aligned}$$

так как первое слагаемое равно нулю по определению $y^*(x)$. Значит, $f(x^*, y^*)$ убывает с ростом x (естественно, при $x \geqslant y_2$). Так как задача центра заключается в максимизации ожидаемого действия АЭ и это действие должно выбираться, т.е. должно выполняться $f(x^*, y^*) \geqslant f(x^*, y_5)$, то в оптимальной точке выполнено [9].

Но выбранная система стимулирования $\chi_1(x^*, \cdot)$ реализует действие y^*, а значит, должно выполняться (7) – (8). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\chi_1(x, z)$ реализует действие y^*. Предположим, что $\exists\, \chi_2 \in M$, такая, что $\widetilde{y} \in P(\chi_2)$ и $\widetilde{y} > y^*$. Тогда одновременно выполняется:

(П.1) $\quad h(y^*) - C\,F(x, y^*) \geqslant h(y) - C\,F(x, y) \quad \forall\, y \in A,$

(П.2) $\quad h(\widetilde{y}) - \chi_2(\widetilde{y}) \geqslant h(y) - \chi_2(y) \quad \forall\, y \in A.$

Проведем ряд преобразований:

$$B_1 = \chi_1(x, y_5) - \chi_1(x, \widetilde{y}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\chi}_1(x, z)dF(z, y_5) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\chi}_1(x, z)dF(z, \widetilde{y}).$$

Произведем в выражении для B_1 интегрирование по частям:

$$B_1 = \widetilde{\chi}_1(x, z)F(z, y_5)\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\,\widetilde{\chi}_1(x, z)}{\partial\, z} F(z, y_5)dz -$$

$$- \widetilde{\chi}_1(x, z)F(z, \widetilde{y})\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\,\widetilde{\chi}_1(x, z)}{\partial\, z} F(z, \widetilde{y})dz =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\,\widetilde{\chi}_1(x, z)}{\partial\, z} \left[F(z, \widetilde{y}) - F(z, y_5)\right] dz.$$

Тогда $B_1 = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C\delta(z-x)\,[F(z,y_5)-F(z,\widetilde{y})]\,dz = C\,[F(x,y_5(x))-F(x,\widetilde{y}(x))]$.

Возьмем $y=\widehat{y}$. (П.1) и (П.2) должно иметь место и для $\widehat{y}$. Покажем, что это приведет к противоречию. В силу теоремы 1 заменим в (П.1) y^* на y_5 и сложим (П.1) с (П.2). Получим

$$\text{(П.3)}\qquad h(y_5)+h(\widetilde{y})-2\,h(\widehat{y}) \geqslant C\,[F(x,y_5)-F(x,\widehat{y})]+\chi_2(\widetilde{y})-\chi_2(\widehat{y}).$$

Так как $h(\cdot)$ – строго вогнутая функция, то левая часть (П.3) строго отрицательна. Значит, и правая часть (П.3) строго отрицательна, т.е.

$$\text{(П.4)}\qquad C\,[F(x,y_5)-F(x,\widehat{y})] < \chi_2(\widehat{y})-\chi_2(\widetilde{y}).$$

Оценим правую и левую часть (П.4). По аналогии с выражением для B_1, используя симметричность распределения, получим:

$$\chi_2(\widehat{y})-\chi_2(\widetilde{y}) = \int\limits_{A^0}\left(-\frac{\partial\chi_2}{\partial z}\right)[F(z,\widehat{y})-F(z,\widetilde{y})]\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \max_{z\in A_0}[F(z,\widehat{y})-F(z,\widetilde{y})]\,C = C\left[F\left(\frac{\widehat{y}+\widetilde{y}}{2},\widehat{y}\right)-F\left(\frac{\widehat{y}+\widetilde{y}}{2},\widetilde{y}\right)\right] =$$

$$= C\left[F\left(\frac{\widetilde{y}-\widehat{y}}{2}\right)-F\left(\frac{\widehat{y}-\widetilde{y}}{2}\right)\right] = C\left[2\,F\left(\frac{\widetilde{y}-\widehat{y}}{2}\right)-1\right].$$

Таким образом,

$$F(x,y_5)-F(x,\widehat{y}) < 2\,F\left(\frac{\widetilde{y}-\widehat{y}}{2}\right)-1 \leqslant 2\,F\left(\frac{x_0-\widehat{y}}{2}\right)-1,$$

так как, очевидно, $\widetilde{y}\leqslant x_0$. Получили противоречие с (10). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\exists\,\chi_2\in M$, реализующая $\widetilde{y}>y^*=x_0$. В силу строгой вогнутости функции $h(\cdot)$ и определения реализуемости действия получим

$$\text{(П.5)}\qquad \left|\frac{\partial\chi_2(\widetilde{y})}{\partial y}\right| > \left|\frac{\partial\chi_1(y^*)}{\partial y}\right|.$$

Если $x_0=y_3$, то, очевидно, $\widetilde{y}$ не может быть больше y^*. Если же $x_0=y_4$, то $\left|\frac{\partial\chi_1(y^*)}{\partial y}\right| = C\,\widehat{p}(0)$ и в силу (П.5) $\left|\frac{\partial\chi_2(\widetilde{y})}{\partial y}\right| > C\,\widehat{p}(0)$. Но в силу нашего предположения:

$$\left|\frac{\partial\chi_2(\widetilde{y})}{\partial y}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{A_0}\widetilde{\chi}_2(z)p\,(z,y)dz\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{A_0}\left(-\frac{\partial\chi_2(\widetilde{z})}{\partial z}\right)F(z,y)dz\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{A_0}\left(-\frac{\partial\chi_2(\widetilde{z})}{\partial z}\right)p\,(z,y)dz\right| \leqslant \widehat{p}(0)\int\limits_{A_0}\left|\frac{\partial\chi_2(\widetilde{z})}{\partial z}\right|dz = C\,\widehat{p}(0).$$

Противоречие. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу условий теоремы $y_5(x^*)=y_2$. Из соотношения производных функции распределения и дохода АЭ следует, что на отрезке $[y_3-2\,\Delta, y_3]$ целевая функция АЭ не убывает по y. В то же время $f(y_5)=h_2-C=f(y_3)$. Следовательно, система стимулирования χ_1 реализует действие y_3. По теореме 3 она оптимальна. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. *Бурков В. Н., Данев Б., Еналеев А. К. и др.* Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, Ин-т проблем управления, 1989.
3. *Бурков В. Н., Еналеев А. К., Новиков Д. А.* Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // АиТ. 1993. № 11. С. 3–30.
4. *Бурков В. Н., Еналеев А. К., Новиков Д. А.* Вероятностная задача стимулирования // АиТ. 1993. № 12. С. 140–145.
5. *Бурков В. Н., Грацианский Е. В., Еналеев А. К., Умрихина Е. В.* Организационные механизмы управления научно-техническими программами. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1993.
6. *Еналеев А. К., Лавров Ю. Г.* Оптимальное стимулирование в активной системе с одним стохастическим элементом // АиТ. 1990. № 2. С. 104–113.
7. *Кузьмицкий А. А., Новиков Д. А.* Организационные механизмы управления развития приоритетными направлениями науки и техники. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1993.
8. *Новиков Д. А.* Разработка и исследование механизмов стимулирования в активных системах с вероятностной неопределенностью: Автореф. дис. на соискание учен. степени канд. техн. наук. М.: Ин-т проблем управления, 1994.
9. *Grossman S., Hart O. D.* An anlysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. № 1. P. 7–45.
10. *Rogerson W.* The first-order approach to principal-agent problem // Econometrica. 1985. № 6. P. 1357–1368.

Поступила в редакцию 26.07.94.