УДК 681.327.6

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПАМЯТЬЮ БОЛЬШОГО ОБЪЕМА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СТАТИСТИКЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОБРАЩЕНИЙ

В. Н. БУРКОВ, М. И. РУБИНШТЕЙН, В. Б. СОКОЛОВ

(Москва)

Рассматривается постановка и решение двух задач оптимального выбора количества и моментов перераспределения информации в памяти большого объема при нестационарной статистике обращений.

В работах [1—3] рассмотрена постановка и решение задач оптимального размещения информационных массивов (ИМ) в памяти большого объема (ПБО) на магнитных лентах или дисках. Предложенные решения ограничиваются случаем стационарной статистики обращений к ИМ. Однако имеются случаи, когда статистика обращений существенно нестационарна. Это может иметь место как при решении различных задач, так и при решении одной задачи в различных условиях.

Если закон изменения статистики известен, можно уменьшить среднее время работы с ПБО за счет переразмещения информации в некоторые моменты времени.

В настоящей работе рассматривается постановка и решение двух задач определения оптимального числа и оптимальных моментов переразмещения информации в ПБО, при которых минимизируется либо среднее время работы с ПБО за некоторый интервал, либо максимальное из средних времен обращения к ПБО на интервалах постоянства статистики.

Постановка задач. Основные определения и обозначения

Пусть вычислительная система должна в определенной последовательности решить несколько задач, использующих одни и те же ИМ, хранящиеся в ПБО, и пусть для каждой из этих задач задана статистика обращений. Кроме того, пусть задано среднее время переразмещения информации в памяти (перестройки памяти).

Рассмотрим следующие задачи.

(I). Выбрать оптимальным образом число и моменты перестроек ПБО, при которых минимально среднее время работы с ПБО на интервале решения всех задач.

(II). При ограниченном числе перестроек разместить их таким образом, чтобы максимальное из средних времен обращения к ПБО на интервалах решения задач было минимально.

Для перехода к аналитической постановке задач введем следующие обозначения: N — число решаемых задач, ΔT_j — время решения j-й задачи, $\mathbf{p}_j$ — вектор статистики обращений для j-й по порядку решения задачи (i-я компонента этого вектора представляет собой вероятность обращения к i-му ИМ при решении j-й задачи, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, N$), $\Delta\overline{T}$ — среднее время перестройки ПБО, $\Delta T_{ij} = \sum_{q=i}^{j} \Delta T_q$ $(j > i,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,$ $j = 2, \ldots, N)$.

Определим N-вектор управления $\mathbf{u}$, характеризующий моменты перестройки памяти:

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{если перед решением } j\text{-й задачи осуществлялась перестройка,} \\ 0 & \text{в противном случае } (j = 1, 2, \ldots, N). \end{cases}$$

Кроме того, обозначим через $[j_1(j, \mathbf{u}), j_2(j, \mathbf{u})]$ интервал минимальной длины такой, что $j_1(j, \mathbf{u}) \leqslant j < j_2(j, \mathbf{u})$ и $u_j = 1$ для $j = j_1, \mathbf{u}), j_2(j, \mathbf{u})$. Если для некоторых $\mathbf{u}$ и j $u_l = 0$ для $j < l \leqslant N$ или $j = N$, то $j_2(j, \mathbf{u}) = N + 1$.

Будем считать, что в интервалах между соседними перестройками порядок ИМ в ПБО выбран *оптимальным* по отношению к средней статистике задач, решаемых внутри соответствующего интервала.

Теперь задачи (I) и (II) можно сформулировать следующим образом:

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{N} u_j \right) \Delta \overline{T} + \frac{1}{T_{1N}} \sum_{j=1}^{N} \Delta T_j \overline{T} [\mathbf{p}_j, \mathbf{k}_{0j}(\mathbf{u})] \right\}, \tag{I}$$

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ \max_j \overline{T} [\mathbf{p}_j, \mathbf{k}_{0j}(\mathbf{u})] \,\middle|\, \sum_{j=1}^{N} u_j \leqslant n \right\} \tag{II}$$

$$(n < N).$$

Здесь в соответствии с [1] обозначено:

$$\overline{T}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = C_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j \left| k_i - k_j \right| + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \right) + C_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j,$$

где C_1 и C_2 — константы, учитывающие скорость поиска и считывания, k_i — номер i-го ИМ в размещении $\mathbf{k}$, $\beta = 1$ для случая магнитных лент и $\beta = 0$ для случая магнитных дисков;

$$\mathbf{k}_{0j}(\mathbf{u}) = \mathbf{k}_0 \left[\frac{1}{T_{j_1\, j_2-1}} \sum_{q=j_1}^{j_2-1} \Delta T_q \, \mathbf{p}_q \right],$$

где $\mathbf{k}_0(\mathbf{p})$ — оптимальный вектор размещения ИМ в смысле минимума $T(\mathbf{p}, k)$ и для краткости у $j_1(j, \mathbf{u})$ и $j_2(j, \mathbf{u})$ опущены аргументы.

В случае, когда решается одна задача при изменяющейся статистике, постановки получаются аналогичными (I) и (II), если выполняется соотношение:

$$\min_j \{\Delta T_j\} \gg \Delta \overline{T}.$$

Рассмотрим теперь решение задач (I) и (II).

Решение задач

Построим сеть, состоящую из узлов с номерами $1, 2, \ldots, N + 1$. Каждую пару узлов соединим дугой, направленной от узла с меньшим номером к узлу с большим номером. Рассмотрим два случая: дуга (i, j) имеет длину l_{ij}^1, где

$$l_{ij}^1 = \frac{1}{T_{ij-1}} \sum_{q=i}^{j-1} \Delta T_q \overline{T} \left[\mathbf{p}_q, \mathbf{k}_0 \left(\frac{1}{T_{ij-1}} \sum_{m=i} \Delta T_m \mathbf{p}_m \right) \right], \tag{1}$$

дуга (i, j) имеет длину l_{ij}^2, где

$$l_{ij}^2 = \max_{i\leqslant q<j} \bar{T}\left[\mathbf{p}_q, \mathbf{k}_0\left(\frac{1}{T_{ij-1}}\sum_{m=i}^{j-1}\Delta T_m \mathbf{p}_m\right)\right] \tag{2}$$

Длиной $l(L_s)$ пути L_s, соединяющего 1-й узел с $(N+1)$-м узлом, будем в случае (1) называть сумму длин дуг, входящих в этот путь, а в случае (2) $\max\ l_{ij}^2$ по всем дугам (i, j), принадлежащим пути L_s. Чтобы различать пути в обоих этих случаях, будем писать $l_1(L_s)$ и $l_2(L_s)$. Кроме того, обозначим через $r(L_s)$ число дуг, входящих в путь L_s. Тогда задачи (I) и (II) могут быть сформулированы следующим образом:

$$\min_{L_s} \{r(L_s)\Delta\bar{T} + l_1(L_s)\}, \tag{I$'$}$$

$$\min_{L_s} \{l_2(L_s)\,|\,r(L_s) = n\}. \tag{II$'$}$$

Решив задачи (I$'$) и (II$'$), найдем «оптимальный» путь в соответствующей сети, по которому легко построить вектор управления $\mathbf{u}$ ($u_i = 1$, если i-й узел входит в оптимальный путь, и $u_i = 0$ в противном случае, а $i = 1, 2, \ldots, N$). Кроме того, при этом найдем также оптимальные значения целевых функций задач (I$'$) и (II$'$).

Рассмотрим каждую из задач (I$'$) и (II$'$) в отдельности.

Задача (*I$'$*). Если отбросить в целевой функции задачи (I$'$) первое слагаемое, то получится задача определения кратчайшего пути в сети. Известная процедура (см., например, [4]) определения кратчайшего пути для сети задачи (I$'$) принимает вид

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_{j+1} = \min_{i\leqslant j} \{\varphi_i + l_{ij+1}^1\}, \tag{3}$$

где j последовательно принимает значения $1, 2, \ldots, N$.

Очевидно,

$$\min_{L_s} l_1(L_s) = \varphi_{N+1}.$$

Для получения решения самой задачи (I$'$) необходимо немного изменить процедуру (3), перейдя от нее к следующей:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_{j+1} = \min_{i\leqslant j} \{\varphi_i + l_{ij+1}^1\} + \Delta\bar{T} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{4}$$

Тогда, как легко видеть, φ_{N+1} дает оптимальное значение целевой функции задачи (I$'$). Отметим, что на каждом j-м шаге процедуры (4) мы определяем дугу, которая входит в оптимальный путь, если последний содержит j-й узел. Поэтому, определив φ_{N+1}, найдем последнюю дугу $(i_1, N+1)$ оптимального пути, двигаясь по которой к началу сети, найдем дугу оптимального пути (i_2, i_1), по которой «приходим» в узел i_1, и т. д. В результате построим оптимальный путь. Итак, задача (I$'$), а значит, и (I) решена.

Задача (*II$'$*). Данная задача представляет собой задачу нахождения пути минимальной длины с фиксированным числом дуги, равным n. Общая процедура решения задач такого типа, предложенная в [5], в данном конкретном случае значительно упрощается и принимает вид:

$$\varphi_j^1 = l_{1j}^2 \quad (j = 2, \ldots, N), \tag{5}$$

$$\varphi_j^q = \min_{q\leqslant p<j} \{\max[\varphi_p^{q-1}, l_{pj}^2]\} \qquad (j = q+1, \ldots, N). \tag{6}$$

В (6) величина q последовательно принимает значения $2, \ldots, n$. Очевидно, значение критерия, соответствующего оптимальному решению задачи (II′), а значит, и задачи (II) совпадает с φ_{N+1}^{n}, где

$$\varphi_{N+1}^{n} = \min_{n<p\leqslant N} \{\max [\varphi_p{}^n, l_{pN+1}^{2}]\}. \tag{7}$$

Остановимся теперь подробнее на вопросе о нахождении оптимального пути в задаче (II′), или оптимального вектора управления $\mathbf{u}_0$ для задачи (II). Путь, соединяющий любые два узла, можно характеризовать N-вектором, i-я компонента которого равна 1 или 0 в зависимости от того, входит i-й узел в данный путь или нет $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Пусть $\mathbf{u}_j{}^q$ соответствует пути, соединяющему 1-й узел с j-м и состоящему из q дуг. Тогда

$$\mathbf{u}_j{}^1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_j \quad (j = 2, \ldots, N), \tag{5′}$$

$$\mathbf{u}_j{}^q = \mathbf{u}_{p'}^{q-1} + \mathbf{e}_j \qquad (j = q+1, \ldots, N,\ q = 2, \ldots, n), \tag{6′}$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{p'}^{n}. \tag{7′}$$

В выражениях (6′) и (7′) p' представляет собой то значение p, для которого достигается минимум соответственно в (6) и (7), а через $\mathbf{e}_j$ обозначен N-вектор, у которого отличается от 0 только j-я компонента, которая равна 1.

Как легко видеть, вектор $\mathbf{u}_0$, определенный в (7′), совпадает с решением задачи (II).

Заключение

В работе рассматриваются две важные задачи динамического переразмещения информации в ПБО при критериях минимума среднего времени работы с ПБО за некоторый интервал и минимума максимального из средних времен обращений на интервалах стационарности статистики. Для решения предложена сетевая модель, переход к которой требует $N(N+1)/2$ вычислений. Решение самой модели не связано с большим объемом вычислений.

Поступила в редакцию
4 февраля 1969 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В. Н., Рубинштейн М. И., Соколов В. Б. Некоторые задачи оптимального размещения информации в памяти большого объема. Автоматика и телемеханика, № 9, 1969.
2. Бурков В. Н., Соколов В. Б. Оптимальное размещение информационных массивов в памяти на магнитных лентах для случая двунаправленного поиска. Автоматика и телемеханика, № 4, 1969.
3. Чиесов В. А. Задача рационального расположения массивов информации на магнитной ленте. Кибернетика, № 4, 1968.
4. Зуховицкий С. И., Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. «Наука», 1965.
5 Saigal Romezh. A constrained shortest route problem. Operat. Res., v. 16, No. 10, 1968.

OPTIMAL MASS MEMORY CONTROL UNDER NONSTATIONARY STATISTICS OF INDEPENDENT ACCESSES

V. N. BURKOV, M. I. RUBINSHTEIN, V. B. SOKOLOV

Two problems of optimal number and moments of information reallocations in a mass memory under the condition of nonstationary statistics of accesses are formulated and solved.