УДК 339:06.063

КОНКУРСНЫЕ МЕХАНИЗМЫ В ЗАДАЧАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ

БУРКОВ В. Н., ДАНЕВ Б., ЕНАЛЕЕВ А. К., НАНЕВА Т. Б., ПОДВАЛЬНЫЙ Л. Д., ЮСУПОВ Б. С.

(Москва, София)

Исследуется эффективность конкурсных механизмов для решения задач распределения ограниченных ресурсов. Показано, что для определения классов функций эффекта (производственных функций) конкурсные механизмы обеспечивают оптимальное распределение ресурсов между победителями. Установлена связь между конкурсными механизмами и механизмами открытого управления.

1. Введение

Конкурсные механизмы привлекают в настоящее время все большее внимание теории и практики управления. Особенность конкурсных механизмов в том, что процедура планирования в части распределения ограниченных ресурсов предусматривает организацию конкурса участников (элементов системы). В число победителей конкурса входят элементы, имеющие наибольшие показатели эффективности использования ресурсов в представляемых встречных (возвратных) планах. Победители конкурса получают определенный приоритет при распределении ресурсов. Стремление победить в конкурсе побуждает элементы к разработке эффективных планов.

Конкурсные механизмы успешно внедряются в практику управления народным хозяйством НРБ. Примерами конкурсных механизмов являются: национальный конкурс предложений по созданию мелких и средних предприятий; конкурс Государственного комитета по науке и научно-техническому прогрессу по закупке лицензий; конкурс на распределение лимитов капитальных вложений и валютных кредитов по созданию мелких и средних предприятий по производству новых материалов; национальный конкурс предложений по распределению кредитов на капитальные вложения по реализации встречных планов хозяйственных организаций.

Конкурсный принцип планирования нашел определенное отражение в методике по расчету и оценке качества производственных программ предприятий Минприбора. В этой методике на основе анализа возвратных (встречных) планов предприятий (производственных объединений), определяется множество предприятий, получающих минимальную (базовую) величину централизованных капитальных вложений. Остальные предприятия (победители конкурса) получают большую величину капитальных вложений в соответствии с показателем качества планов.

В теоретическом плане конкурсные механизмы относятся к так называемым многоканальным организационным механизмам, изучаемым в теории активных систем [1]. В работе проводится исследование конкурсного

механизма распределения ограниченных ресурсов в активной системе, состоящей из центра, распределяющего ресурс, и активных элементов — потребителей ресурса. При этом элементы — победители конкурса получают запрашиваемое количество ресурсов, а остальные элементы получают некоторое минимальное количество, устанавливаемое центром. Доказано существование ситуации равновесия (точка Нэша) в соответствующей игре и при определенных предположениях оптимальность распределения ресурсов между победителями конкурса.

2. Описание модели. Конкурсный механизм

Рассмотрим активную систему из n элементов и центра, распределяющего ограниченный ресурс. Обозначим R — количество ресурса у центра, x_i — величина ресурса, получаемая i-м элементом, u_i — эффект от использования ресурса i-м элементом. В качестве эффекта на практике часто выступает прирост производства либо некоторая комплексная оценка эффекта по ряду критериев. Предполагается, что $u_i=\varphi_i(x_i)$, где $\varphi_i(x_i)$ — функция эффекта или производственная функция. Положим, что $\varphi_i(x_i)$ — строго вогнутая, дифференцируемая при $x_i>0$, неубывающая функция, определенная при $x_i\geqslant 0$ и $\varphi_i(0)=0$[1]. Задача центра заключается в определении плана $x=\{x_i,\ i=1\div n\}$ распределения ресурса, максимизирующего суммарный эффект

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i) \tag{1}$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\leqslant R. \tag{2}$$

Сложность решения задачи (1), (2) связана с тем, что центр, как правило, не имеет достаточно точной информации о функциях $\varphi_i(x_i)$. Информация о локальном поведении функции $\varphi_i(x_i)$ сообщается центру элементами в виде так называемых возвратных или встречных планов, представляющих собой пару $(s_i,\ w_i)$, где s_i — величина требуемого ресурса, w_i — оценка достигаемого (ожидаемого) эффекта. При этом проявляется активность элементов, приводящая обычно к тенденции завышения требуемого количества ресурса s_i. Если элементы оплачивают получаемый ресурс, то в теории активных систем предложены механизмы открытого управления [2], дающие оптимальное распределение ресурсов. Если плата за ресурс отсутствует, но имеются достаточно сильные санкции (сильные штрафы) за недостижение планируемого (ожидаемого) эффекта, то оптимальное распределение ресурса для широкого класса функций эффекта позволяют получить прогрессивные механизмы оптимального распределения ресурсов [2], схема аукциона [3] или принцип обратных приоритетов [4]. Однако в условиях отсутствия платы за ресурс и отсутствия достаточно сильной системы санкций за недостижение планируемого эффекта до последнего времени не было предложено механизмов, обеспечивающих оптимальное распределение ресурсов.

[1] Результаты статьи справедливы и для дважды кусочно-дифференцируемых функций $\varphi_i(x_i)$.

Перейдем к определению конкурсного механизма. Обозначим $q_i=u_i/x_i$ — эффективность использования ресурса i-м элементом, $\xi_i=w_i/s_i$ — оценка эффективности, сообщаемая i-м элементом. Упорядочим ξ_i по убыванию, т. е. $\xi_{i_1}\geqslant\xi_{i_2}\geqslant\ldots\geqslant\xi_{i_n}$. Примем сначала, что ограничение (2) на количество ресурса у центра отсутствует.

Определение. Конкурсным называется механизм распределения ресурса, в котором процедура планирования включает этап определения множества Q элементов — победителей конкурса. Это множество содержит m элементов с наибольшими оценками эффективности, т. е. $Q=\{i_k : k\leqslant m\}$, где $m<n$. Процедура распределения ресурса после определения множества победителей имеет вид

$$x_i=\begin{cases} s_i, & \text{если} \quad i\in Q, \\ c, & \text{если} \quad i\notin Q, \quad i\in I\setminus Q, \end{cases} \tag{3}$$

где c — минимальный уровень получаемого ресурса $(c>0)$, $I=\{1, 2, \ldots, n\}$. В качестве целевых элементов функций примем

$$f_i(u_i, w_i)=u_i-\psi_i(w_i-u_i), \tag{4}$$

где

$$\psi_i(w_i-u_i)=\begin{cases} \alpha(w_i-u_i), & \text{если} \quad w_i-u_i\geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad w_i-u_i<0 \end{cases}$$

(по определению, для $i\notin Q$ предполагается $w_i=u_i=\varphi_i(c)$, $\alpha>0$). Здесь функция $\psi_i(w_i-u_i)$ определяет штраф за недостижение ожидаемого эффекта w_i. Будем предполагать, что каждый элемент выбирает свои стратегии (сообщения s_i и w_i), стремясь обеспечить максимальное значение своей целевой функции (4).

Таким образом, выбор сообщений элементами при конкурсном механизме можно рассматривать как игру n лиц. Заметим, что поскольку $\xi_i=w_i/s_i$, то в качестве сообщаемых оценок может выступать любая пара (s_i, w_i), (s_i, ξ_i) или (w_i, ξ_i). Для удобства теоретико-игрового анализа примем в качестве сообщаемых оценок пару (s_i, ξ_i). При заданном ξ_i величина оценки s_i определяется из условия максимума (4), где $u_i=\varphi_i(x_i)$, $w_i=\xi_i s_i$, поскольку оценка s_i не влияет на определение победителей конкурса.

3. Решение игры при конкурсном механизме и его оптимальность

Определим функцию

$$h_i(\xi_i)=\max_{s_i}\left[\varphi_i(s_i)-\psi_i(\xi_i s_i-\varphi_i(s_i))\right]$$

и исследуем ее свойства.

Обозначим точку максимума функции $f_i=\varphi_i(s_i)-\psi_i(\xi_i s_i-\varphi_i(s_i))$ по s_i через x_i. Далее будем различать слабые и сильные штрафы, определяемые величиной α. Величина α определяет слабый штраф для i-го элемента при заданном ξ_i, если максимум функции $f_i(\varphi_i(s_i), \xi_i s_i)$ по s_i достигается в точке x_i, определяемой условиями

$$\left[\varphi_i'(x_i)-\frac{\alpha}{1+\alpha}\xi_i\right]x_i=0 \quad \text{и} \quad \xi_i x_i\geqslant\varphi_i(x_i). \tag{5}$$

Величина α определяет сильный штраф для i-го элемента при заданном ξ_i, если максимум функции $f_i(\varphi_i(s_i), \xi_i s_i)$ по s_i достигается в точке x_i,

определяемой условием

$$\varphi_i(x_i)=\xi_i x_i. \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) описывают необходимые и достаточные условия экстремума f_i по s_i в силу строгой вогнутости функции f_i.

Пусть $\gamma_i(\xi_i)$ — значение x_i, удовлетворяющее условию (5), а $\beta_i(\xi_i)$ — значение x_i, удовлетворяющее условию (6).

Лемма. а) Функция $h_i(\xi_i)$ является непрерывной, убывающей по ξ_i;

б) $\sup\limits_{0<\xi_i<\infty} h_i(\xi_i)\geqslant\varphi_i(c)$; в) $\lim\limits_{\xi_i\to\infty} h_i(\xi_i)=0$.

Доказательство леммы приводится в приложении.

Из леммы следует, что уравнение $h_i(\xi_i)=c$ всегда имеет единственное решение. Обозначим корень этого уравнения через $v_i=v_i(c)$.

Рассмотрим сначала случай, когда имеет место

$$\sum_{i\in Q} x_i+(n-m)c<R, \tag{7}$$

т. е. будем считать, что ограничение на общее количество ресурса отсутствует.

Функционирование системы в условиях конкурсного механизма будем рассматривать как игру n лиц (элементов), стратегиями которых являются сообщаемые оценки $\{\xi_i\}$, а функциями выигрыша $h_i(\xi_i)$ в случае $i\in Q$ и $\Delta_i=\varphi_i(c)$ в случае $i\notin Q$. Примем в качестве решения игры $\xi^*=\{\xi_i^*\}$ ситуацию равновесия в смысле Нэша (точка Нэша).

Пусть элементы упорядочены по убыванию v_i, т. е.

$$v_{i_1}\geqslant v_{i_2}\geqslant\ldots\geqslant v_{i_n}.$$

Теорема 1. Решение игры (равновесие по Нэшу) при конкурсном механизме существует, причем для $j\in Q$: $\xi_j^*=v_{i_{m+1}}$.

Доказательство теоремы приводится в приложении.

Простейший вариант конкурсной процедуры, приводящей в равновесие за две итерации, выглядит следующим образом.

1-й шаг. Элементы сообщают $\xi_i^0=v_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Центр объявляет победителей на данном шаге и упорядочивает элементы по убыванию v_i.

2-й шаг. Элементы-победители $j\in Q$ сообщают $\xi_j^1=v_{i_{m+1}}$, остальные элементы $j\notin Q$ не меняют своих оценок $\xi_j^1=\xi_j^0=v_j$. Ситуация равновесия получена.

Из теоремы 1 следует, что в решении игры при конкурсном механизме имеет место $\xi_i=\text{const}$ для всех $i\in Q$, т. е. в решении игры величина ξ одна и та же для всех элементов-победителей.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности построения для рассматриваемого случая неконкурсных механизмов планирования, обеспечивающих неменьшую эффективность по сравнению с конкурсным механизмом.

Положим, что функция эффекта $\varphi_i(z_i, r_i)$ зависит от параметров r_i. Центру неизвестны значения r_i, а известно лишь, что $r_i\in\Omega_i$, где Ω_i — множество возможных значений параметра r_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Предполагается, что элементы знают значения параметров r_i точно.

Примем, что элементы сообщают в центр оценки параметров r_i, а центр, используя эту информацию, распределяет ресурс. На основе оценок $\sigma=\{\sigma_i\}$ центр может определить оценки $v_i=v_i(\sigma)$ из решения уравнений

$h_i(v_i, \sigma_i)=\varphi_i(c, \sigma_i)$, где

$$h_i(v_i, \sigma_i)=\max_{s_i}[\varphi_i(s_i, \sigma_i)-\psi_i(v_i s_i-\varphi_i(s_i, \sigma_i))].$$

Упорядочим $v_i(\sigma_i)$ по убыванию, т. е.

$$v_{i_1}(\sigma_{i_1})\geqslant v_{i_2}(\sigma_{i_2})\geqslant \ldots \geqslant v_{i_n}(\sigma_{i_n}),$$

и обозначим

$$\xi_i^*=v_{i_{m+1}}(\sigma_{i_{m+1}}).$$

Определим следующую задачу согласованного планирования:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(z_i, \sigma_i)\to \max \tag{8}$$

при условиях

$$i\in Q: x_i=\arg\max f_i(\varphi_i(z, \sigma_i), \xi^*), \tag{9}$$

$$i\notin Q: x_i=c,$$

где $f_i(\varphi_i(z, \sigma_i), \xi^*)=\varphi_i(z, \sigma_i)-\psi_i(\xi^* z-\varphi_i(z, \sigma_i))$.

В условиях «согласования» параметр ξ^* не зависит от σ_i, поэтому описанная выше процедура является процедурой открытого управления. Как известно [5], для процедур открытого управления сообщение достоверной информации $\sigma_i=r_i$ является доминантной стратегией всех элементов.

Заметим, что, поскольку для процедуры открытого управления $\sigma_i=r_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, распределение ресурсов при конкурсном механизме совпадает с решением задачи (8), (9), определяющей процедуру открытого управления. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для любого конкурсного механизма распределения ресурса (3) в случае (7) следует процедура открытого управления (8), (9) не меньшей эффективности.

Замечание 1. Указанная связь конкурсных механизмов и процедур открытого управления позволяет организовать конкурсную процедуру за один шаг. Элементы сообщают оценки $\sigma=\{\sigma_i\}$, центр определяет величины $v_i(\sigma_i)$, выделяет множество Q победителей и устанавливает соответствующие планы.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об оптимальности конкурсных механизмов распределения ресурсов, а следовательно, и соответствующих им процедур открытого управления.

Обозначим суммарную величину ресурса, получаемую элементами-победителями при конкурсном механизме, через

$$R'=\sum_{i\in Q}x_i=\sum_{i\in Q}s_i$$

и рассмотрим следующую задачу распределения ресурсов:

$$\sum_{i\in Q}\varphi_i(x_i)\to \max_{\{x_i\}}, \tag{10}$$

$$\sum_{i\in Q}x_i=R'.$$

Как уже отмечалось, из теоремы 1 следует, что для всех элементов-победителей в равновесии имеет место

$$\xi_j^* = v_{i_{m+1}} = \text{const}, \quad j \in Q.$$

Пусть в равновесии имеет место случай слабых штрафов для всех элементов-победителей, т. е. для всех $j \in Q$, выбор заявок определяется из $\varphi_j'(s_j) = \frac{\alpha}{1+\alpha} v_{i_{m+1}}$. Для случая слабых штрафов за недостижение планируемого эффекта справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Набор заявок элементов-победителей при конкурсном механизме в равновесии Нэша дает оптимальное решение задачи (10).

Справедливость теоремы непосредственно следует из условия оптимальности $\varphi_i'(s_i) = \text{const}$ при распределении ресурса в количестве R'. Эта теорема может быть использована при отыскании приближенного решения задачи оптимального распределения ресурса (1), (2).

Если величина $\sum_{i \in I \setminus Q} \varphi_i(x_i) \Big/ \sum_{i \in I} \varphi_i(x_i)$, характеризующая долю эффекта проигравших в конкурсе элементов, мала, то приближенное решение $\tilde{x} = \{\tilde{x}_i\}$ определяется выражением

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} \gamma_i(v_{i_{m+1}}(\tilde{c})), & \text{если } i \in Q, \\ \tilde{c}, & \text{если } i \in I \setminus Q, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\sum_{i \in Q} \gamma_i(v_{i_{m+1}}(\tilde{c})) + (n-m)\tilde{c} = R. \tag{12}$$

Таким образом, вычисление приближенного решения сводится к нахождению значения $\tilde{c}$, при котором имеет место (12). Для нахождения $\tilde{c}$ можно строить разнообразные итеративные схемы, в которых оценка c параметра $\tilde{c}$ подбирается в зависимости от знака величины $\sum = \sum_{i \in Q} \gamma_i(v_{i_{m+1}}(c)) + (n-m)c - R$ (если $\sum < 0$, то центр увеличивает c, если $\sum > 0$, то центр уменьшает c, если $\sum = 0$, то $\tilde{c} = c$ и решение получено).

В этих схемах, в отличие от рассмотренных выше, величина $\tilde{c}$ подбирается в зависимости от стратегий элементов. Поэтому равновесие может отличаться от того, которое устанавливается в теореме 1. Приведем некоторые соображения, которые позволяют оценить получающуюся в этом случае точку равновесия ξ_i^*.

Для определения стратегий ξ_i^* для $i \in Q$ заметим, что $\gamma_i(v_{i_{m+1}})$ — убывающая функция $v_{i_{m+1}}$. Поэтому, чем больше $v_{i_{m+1}}$, тем больше c. Поскольку элементы $i \in I \setminus Q$ заинтересованы в увеличении $\tilde{c}$, то по крайней мере элемент с номером i_{m+1} сообщит такую оценку $\xi_{i_{m+1}}$, при которой $v_{i_{m+1}}$ было бы возможно большим. Так как $v_{i_{m+1}} \leqslant v_{i_m}$, то в решении игры $\xi^*_{i_{m+1}} = v_m$. Что касается остальных элементов ($i \in I \setminus Q$), то они могут сообщить любые оценки $\xi_i^* \leqslant v_{i_m}$.

Итак, если «вес» победителей в общей массе элементов достаточно велик, то описанный механизм дает близкое к оптимальному распределе-

ние ресурсов. Очевидно, для этого целесообразно число победителей брать возможно больше, т. е. $m=n-1$.

Для иллюстрации конкурсного механизма и оценки близости распределения при этом механизме к оптимальному рассмотрим конкретный пример.

Пример *1*. Пусть $\varphi_i(x_i, r_i)=\sqrt{r_i x_i}$, $i=1, 2, \ldots, n$, число элементов-победителей равно $n-1$. Тогда условие (5) примет вид $\frac{\sqrt{r_i}}{2\sqrt{x_i}}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\xi$, откуда

$$x_i=\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha\xi}\right)^2 r_i \quad \text{и} \quad h_i(\xi)=\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha\xi}r_i.$$

Определим $\xi^*=v_n$ из условия (5), которое примет вид

$$\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha\xi}r_{n-1}=\sqrt{r_{n-1}c}.$$

Отсюда находим

$$\xi^*=\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}\frac{\sqrt{r_{n-1}}}{\sqrt{c}},$$

Подставляя в выражение для x_i величину ξ^*, получаем решение

$$x_i^*=\begin{cases}\dfrac{4\tilde{c}}{(1+\alpha)^2}\dfrac{r_i}{r_{n-1}}, & \text{если} \quad i=1, 2, \ldots, n-1,\\ \tilde{c}, & \text{если} \quad i=n,\end{cases}$$

$$\tilde{c}=\frac{Rr_{n-1}}{\dfrac{4}{(1+\alpha)^2}H-\dfrac{4}{(1+\alpha)^2}r_n+r_{n-1}}, \quad \text{где} \quad H=\sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Подставив значение $\tilde{c}$ в выражение для x_i^*, получим

$$x_i^*=\frac{Rr_i}{H-r_n+r_{n-1}\dfrac{(1+\alpha)^2}{4}} \quad \text{для} \quad i\neq n.$$

Оценим относительную ошибку

$$\delta=\frac{\Phi(x^{\text{опт}})-\Phi(x^*)}{\Phi(x^{\text{опт}})}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Phi(x^{\text{опт}})=\sqrt{RH}, \qquad \Phi(x^*)=\left(\sqrt{RH}-\frac{r_n\sqrt{R}}{\sqrt{H}}+\frac{1+\alpha}{2}\sqrt{\frac{R}{H}}\sqrt{r_n r_{n-1}}\right)B,$$

где

$$B=1\Big/\sqrt{1-\frac{r_n}{H}+\frac{r_{n-1}}{H}\frac{(1+\alpha)^2}{4}}.$$

Отсюда

$$\delta=1-\left(1-\frac{r_n}{H}+\frac{(1+\alpha)}{2}\frac{\sqrt{r_n r_{n-1}}}{H}\right)B.$$

Предположим, что r_{n-1}/H и r_n/H — достаточно малые величины, тогда, разлагая в ряд Тейлора, получим

$$\delta\approx\frac{1}{2H}\left[\sqrt{r_n}-\frac{(1+\alpha)}{2}\sqrt{r_{n-1}}\right]^2\leqslant\frac{r_n+\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 r_{n-1}}{2H}.$$

Таким образом, при $0<\alpha<1$ относительная ошибка равна $\delta\leqslant r_{n-1}/2H$.

Описанный конкурсный механизм распределения ресурсов можно реализовать в виде процедуры открытого управления при встречном сообщении информации элементами. Пусть элементы сообщают оценки σ_i параметров r_i. Центр определяет параметр $\xi=\frac{(1+\alpha)^2\sqrt{\sigma_n}}{4\alpha\sqrt{c}}$ для всех $i\in Q=(1, 2, \ldots, n-1)$ и процедуру планирования по формулам (8), (9), где

$$c=\frac{R\sigma_n}{\frac{4}{(1+\alpha)^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sigma_i+\sigma_n}.$$

Величина c при достаточно большом значении n слабо зависит от оценки σ_i для $i\in Q$. Поэтому при предположении, что i-й элемент не учитывает влияния своей оценки σ_i на параметр c, условия (8) определяют процедуру открытого управления. В этом случае элементы $i\in Q$ сообщают достоверную информацию $\sigma_i=r_i$. Элемент с номером n завышает оценки σ_n до величины $\sigma_n(c, r_{n-1})$, определяемой из уравнения $v_n(c, \sigma_n)=v_{n-1}(c, \sigma_{n-1})$. Нетрудно видеть, что для рассматриваемого примера $\sigma_n=r_{n-1}$. Отсюда видно, что распределение ресурса по процедуре открытого управления совпадает с распределением, полученным для конкурсного механизма. При процедуре открытого управления распределение ресурса вычисляется за один шаг.

Рассмотрим теперь случай сильных штрафов за недостижение планируемого эффекта. В этом случае значение параметра α столь велико, что максимумы функций f_i по s_i для равновесного ξ достигаются в точках $x_i=\beta_i(\xi)$, т. е. определяются условиями (6).

Покажем, что решение игры при конкурсном механизме в случае сильных штрафов обладает также определенным свойством оптимальности. Пусть функции $\varphi_i(x_i)$ вогнуты и непрерывно дифференцируемы для всех $i=1, 2, \ldots, n$ и хотя бы два элемента имеют разные функции, т. е. $\forall x\exists i, j: \varphi_i(x)\neq\varphi_j(x)$.

Теорема 4. Для того чтобы $\{x_i|i\in Q\}$ было оптимальным решением задачи (10) для любого $v_{i_{m+1}}$, необходимо и достаточно, чтобы все функции $\varphi_i(x)$, $i\in Q$ принадлежали классу функций N_θ, определенному дифференциальным уравнением

$$d\varphi_i/dx=\theta[\xi(\varphi_i(x), x)], \tag{13}$$

где $\theta(\cdot)$ — произвольная однозначная функция одной переменной.

Доказательство теоремы приводится в приложении.

Замечание 2. В случае кусочно-непрерывной дифференцируемости φ_i теорема 4 остается справедливой, необходимо лишь в ее условиях заменить класс функций N_θ на класс, определяемый неравенствами

$$d\varphi_i^-/dx_i \geqslant \theta[\xi(\varphi_i, x_i)] \geqslant d\varphi_i^+/dx_i.$$

Замечание 3. Если множество N_θ содержит одну функцию, т. е. $\varphi_i(x) = \varphi(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, то, очевидно, в решении игры $x_i^\theta = x^*$ для всех $i \in Q$, что является оптимальным решением задачи (10) для любых вогнутых функций $\varphi(x)$.

Теорема 4 позволяет конструировать оптимальные конкурсные механизмы для случая сильных штрафов по той же схеме, которая была описана выше для случая слабых штрафов.

Аналогичная теорема оптимальности для задачи распределения ресурса на основе принципа аукциона доказана В. Бурковым и Б. Юсуповым [6].

Пример 2. Пусть $u_i = \varphi_i(x_i) = r_i x_i^a$, $a<1$, $i=1, 2, \ldots, n$. Имеем $d\varphi_i/dx_i = ar_i x_i^{a-1} = au_i/x_i$. Если взять $\xi = u_i/x_i$, то конкурсный механизм обеспечит оптимальное распределение ресурсов между победителями.

Пример 3. Пусть $\xi_i = u_i/x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi}{dx} = a\frac{\varphi}{x^2}.$$

Его решением является $\varphi = re^{-a/x}$. Заметим, что

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{ar}{x^2}e^{-a/x}$$

является убывающей функцией только при $x > a/2$. Следовательно, конкурсный механизм с показателем эффективности $\xi = u/x^2$ дает оптимальное распределение ресурса между победителями по критерию

$$\Phi = \sum_{i \in Q} r_i e^{-a/x_i}$$

при $x_i > a/2$ для всех $i \in Q$.

4. Заключение

Подведем итоги. В статье представлены следующие результаты: описана модель конкурсного механизма распределения ресурса; показано, что конкурсный механизм приводит к игре, решением которой является равновесие по Нэшу; установлена связь конкурсного механизма с принципом открытого управления (для описанного конкурсного механизма строится процедура открытого управления, которая имеет не меньшую эффективность по сравнению с конкурсным механизмом); показано, что в случае слабых штрафов конкурсный механизм (при достаточном числе элементов) дает распределение ресурсов, близкое к оптимальному, а в случае сильных штрафов найдены условия близости решения конкурсной игры к оптимальному.

Дальнейшее развитие и обобщение представленных результатов возможно, например, путем рассмотрения функций штрафов $\psi_i(\cdot)$ более об-

щего вида, а также исследования системы со смешанными штрафами, когда для одной части элементов штрафы являются слабыми, а для другой сильными. Обобщение постановки задачи можно осуществить также, рассматривая распределение не одномерного, а многомерного ресурса (комплексные поставки, взаимозаменяемые ресурсы). В этом случае теорема о существовании равновесия по Нэшу для конкурсного механизма остается справедливой, но вопрос об оптимальности требует дальнейшего исследования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы.

а) Рассмотрим функцию $h(\xi)=\alpha \max\limits_x \left[\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi x\right]$, где $\varphi(x)$ — строго вогнутая, дифференцируемая при $x>0$ функция, $\varphi(0)=0$. Пусть функция $h(\xi)$ определена в точке $\xi=\xi^0$. Покажем, что $h(\xi)$ непрерывна в этой точке.

В силу дифференцируемости и строгой вогнутости функции $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi^0 x$ она достигает максимума по x в единственной точке x^0, определяемой условием $\varphi'(x^0)=\frac{\alpha}{1+\alpha}\xi^0$. Из строгой вогнутости функции $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi(x)$ по x следует, что $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi$ убывает по x. Так как при фиксированном ξ $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi x$ является функцией одной переменной x, то ее производная не имеет разрывов первого рода, а из ограниченности и монотонности этой производной на $[\varepsilon', \infty]$, где $\varepsilon'>0$, следует, что $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi'(x)-\xi$ не имеет также разрывов второго рода. Таким образом $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi'(x)-\xi$ — непрерывная, убывающая функция.

Из сказанного следует, что уравнение $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi'(x)-\xi^0-\delta=0$ для достаточно малого по абсолютной величине значения δ имеет единственное решение x_δ. При этом $|x_\delta-x^0|<\nu_\delta$, где $\lim\limits_{\delta\to 0}\nu_j=0$. Действительно, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\nu_\delta=\text{const}>0$, то получим, что максимум функции $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi^0 x$ достигается по крайней мере в двух различных точках, но это противоречит строгой вогнутости функции $\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi^0 x$.

Пусть $\xi=\xi^0+\delta$. Покажем, что для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_\varepsilon>0$, такое, что для $\forall\delta<\delta_\varepsilon$, если $|\xi-\xi^0|<\delta$, то $|h(\xi)-h(\xi^0)|<\varepsilon$, т. е. $h(\xi)$ непрерывна.

Рассмотрим $|h(\xi)-h(\xi^0)|=\alpha\left|\max\limits_x\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi^0 x-\delta x\right)-\max\limits_x\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x)-\xi^0(x)\right)\right|=$

$$=\alpha\left|\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x_\delta)-\xi^0 x_\delta-\delta x_\delta-\frac{1+\alpha}{\alpha}\varphi(x^0)-\xi^0 x^0\right|\leqslant(1+\alpha)|\varphi(x^0)-\varphi(x_\delta)|+\alpha\xi^0|x_\delta-x^0|+$$

$$+\alpha\delta x_\delta\leqslant[(1+\alpha)|\varphi(x')|+\alpha\xi^0+\alpha\delta]\nu_\delta+\alpha\delta x^0,$$

где $x' \in [x_\delta, x^0]$. Так как величины $|\varphi(x')|$ и ξ^0 ограничены, а $\lim\limits_{\delta \to 0} \nu_\delta = 0$, то можно подобрать δ настолько малым, что

$$[(1+\alpha)|\varphi(x')|+\alpha\xi^0+\alpha\delta]\nu_\delta+\alpha x^0\delta<\varepsilon.$$

Случай $\xi=\xi^0-\delta$ рассматривается аналогично. Таким образом, функция $h(\xi)$ непрерывна.

Итак, для случая слабых штрафов непрерывность функции $h(\xi)$ доказана.

При сильных штрафах точка экстремума функции f_i определяется условием (6), которое разрешимо относительно x_i, если $\varphi_i'(0)>\xi_i$, в противном случае $x_i=0$. Это следует из строгой вогнутости функции $\varphi_i(x_i)$. Поэтому в точке x_i имеет место $0<\varphi_i'(x_i)<\xi_i$. Но тогда по теореме о неявной функции $x_i(\xi_i)$ является непрерывно дифференцируемой. Таким образом, функция $h_i(\xi_i)$ непрерывна и в случае сильных штрафов.

Покажем теперь, что $h_i(\xi_i)$ является убывающей функцией. Рассмотрим сначала случай слабых штрафов, когда $h_i(\xi_i)=(1+\alpha)\varphi_i(x_i(\xi_i))-\alpha\xi_i x_i(\xi_i)$. Пусть $\xi_i^2>\xi_i^1$, тогда имеет место $h_i(\xi_i^1)=(1+\alpha)\varphi_i(x_i^1)-\alpha\xi_i^1x_i^1\geqslant(1+\alpha)\varphi_i(x_i^2)-\alpha\xi_i^1>(1+\alpha)\varphi_i(x_i^2)-\alpha\xi_i^2x_i^2=h_i(\xi_i^2)$, т. е. $h_i(\xi_i)$ – убывающая функция.

Пусть имеют место сильные штрафы. В этом случае $h_i(\xi_i)=\varphi_i(x_i(\xi_i))$, где $x_i(\xi_i)$ удовлетворяет (6). Рассмотрим производную функции $h_i(\xi_i)$: $h_i'(\xi_i)=\varphi_i'(x_i(\xi_i))x_i'(\xi_i)$.

Здесь $\varphi_i'(x_i(\xi_i))>0$. Исследуем знак $x_i'(\xi_i)$. Дифференцируя функцию $\varphi_i(x_i(\xi_i))-x_i(\xi_i)\xi_i$ по ξ_i и приравнивая производную этой функции нулю, получим

$$[\varphi_i'(x_i)-\xi_i]x_i'(\xi_i)=x_i(\xi_i).$$

Так как $x_i(\xi_i)>0$, а $\varphi_i(x_i(\xi_i))-\xi_i<0$, то $x_i'(\xi_i)<0$. Отсюда $h_i(\xi_i)<0$.

б) Справедлива цепочка неравенств

$$\sup_{0<\xi_i<\infty} h_i(\xi_i)\geqslant h_i(0)=\sup_{s_i}\varphi_i(s_i)\geqslant\varphi_i(c).$$

в) Покажем, что при $\xi_i\to\infty$ $\lim x_i(\xi_i)=0$. Пусть $\lim x_i\to c_i^0>0$, тогда $\varphi_i(x_i)\to\infty$ при $x_i\to c_i^0$, что противоречит ограниченности производной φ_i' на (ε, ∞), где $\varepsilon>0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что если зафиксировать ξ_i у элементов, то выбор заявки s_i определяется из условия максимизации каждым i-м элементом целевой функции $f_i(\varphi_i(s_i), \xi_i s_i)$ по s_i. Поэтому если выбор стратегий ξ_i элементами определяет равновесие по Нэшу, то теорема будет доказана. Покажем, что набор стратегий является равновесием по Нэшу. Заметим, что для элементов непобедителей с номерами $k\notin Q$ по определению $s_k^*=c$, $w_i^*=\varphi_i(c)$, $f_i(u_i, w_i)=\varphi_i(c)$; для элементов-победителей выигрыш определяется величиной $h_i(\xi)$. Поскольку $h_i(\xi)$ – непрерывная убывающая функция, то элементы-победители $i\in Q$ стремятся выбрать наименьшее ξ, но не меньше чем $v_{i_{m+1}}$. Последнее следует из того, что в противном случае элемент с номером i_{m+1} станет победителем. При этом выигрыш элемента $i\in Q$ станет равным $\varphi_i(c)\leqslant h_i(v_{i_{m+1}})$. Таким образом, для любого $i\in Q$ стратегия $\xi_i=v_{i_{m+1}}$ обеспечивает наибольший выигрыш, т. е. определяет равновесие по Нэшу. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Достаточность. Пусть (13) имеет место для всех $\varphi_i(x)$. Поскольку в решении конкурсной игры $\xi(\varphi, x)=\text{const}$, то, обозначив $\theta[\xi(\varphi, x)]=\lambda$, получаем

(П.1) $\qquad d\varphi/dx=\lambda,\ i\in Q.$

Эти условия являются достаточными условиями оптимальности решения $\{x_i, i\in Q\}$ для задачи (10).

Необходимость. Обозначим N_θ – множество различающихся функций $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Для любого $v_{i_{m+1}}$ в силу условий теоремы $\{x_i\}$ – оптимальное решение задачи (10). Поэтому существует λ, такое, что выполняется (П.1) для любых $\varphi_i\in N_\theta$. Таким образом, существует функция $\lambda=\theta[v_{i_{m+1}}]$. Учитывая, что в решении конкурсной игры $v_{i_{m+1}}=\xi[u_i^Q, x_i^Q]$ для всех $i\in Q$ после постановки в (П.1) $\lambda=\theta[\xi(\varphi, x)]$, получаем (13). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдеев В. П., Бурков В. Н., Еналеев А. К., Киселева Т. В.* Многоканальные организационные механизмы. Опыт применения в АСУ. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1986.
2. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
3. *Заруба В. Я.* Механизмы планирования при распределении ограниченного ресурса // АиТ. 1984. № 9. С. 110–120.
4. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
5. *Бурков В. Н., Еналеев А. К.* Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах // АиТ. 1985. № 3. С. 73–80.
6. *Юсупов Б. С.* Необходимые и достаточные условия оптимальности принципа аукциона // АиТ. 1986. № 12. С. 60–65.

Поступила в редакцию
8.VII.1987

COMPETITION MECHANISMS IN ALLOCATION OF LIMITED RESOURCES

BURKOV V. N., DANEV B., YENALEEV A. K., NANEVA T. B., PODVAL'NYI L. D., YUSUPOV B. S.

For certain kinds of production functions competition mechanisms lead to optimal allocation of resources between the winners. The relation between competition and above-the-board management mechanisms is established.

УДК 519.854.2

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДНОГО ЛОКАЛЬНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

ГУТИН Г. М.

(Гомель)

Приводится теоретическое сравнение известных локальных алгоритмов наискорейшего спуска решения задачи коммивояжера с алгоритмом, предложенным Сарвановым и Дорошко [1]. Показано, что при случайном выборе исходного гамильтонова контура алгоритм Сарванова – Дорошко находит в окрестности этого контура гамильтонов контур меньшей длины, нежели известные локальные алгоритмы наискорейшего спуска для почти всех полных симметрических орграфов с некоторыми дискретными весами дуг.

1. Введение

Одной из важнейших задач комбинаторной оптимизации является задача коммивояжера (ЗК). ЗК и ее обобщения находят широкое применение при решении практических задач управления [2]. Для решения данного класса задач часто используют локальные алгоритмы [2–4]. Известные локальные алгоритмы [2–4] просматривают окрестности полиномиальной мощности. В [1] впервые предложен локальный алгоритм, просматривающий окрестности факториальной мощности за полиномиальное время. Этот алгоритм использует сведение ЗК к некоторому множеству задач о назначении (ЗН). Заметим, что указанное сведение в несколько