ПРИНЦИП МИНИМУМА ДОХОДНОСТИ И CC-VAR ПРИ ЧАСТИЧНОМ ПРОГНОЗЕ РЫНКА

Агасандян Г. А.[1]
(*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва*)

Работа продолжает исследования, связанные с применением континуального критерия VaR (CC-VaR) на рынках опционов. Рассматривается ситуация, когда прогноз инвестора относительно будущих вероятностных свойств базового актива ограничивается лишь частичными суждениями. Неполнота прогноза моделируется введением в прогноз некоторых параметров, выбор значений которых инвестор доверяет рынку. Постулируется принцип минимума доходности (ПМД), согласно которому инвестору следует назначать свободные параметры из соображений минимизации доходности инвестиции. Тем самым инвестор приобретает определенную гарантию от возможных ошибок в прогнозе. Исследуются теоретические свойства введенного принципа, имеющие самостоятельный интерес, а в ряде случаев упрощающие анализ результатов его применения. Демонстрация его работы проводится аналитически на двусторонних экспоненциальных и равномерных распределениях и численными методами на двухпараметрических бета-распределениях. Результаты подтверждают адекватность принципа и алгоритмов расчетов.

Ключевые слова: континуальный критерий VaR (CC-VaR), функция рисковых предпочтений (ф.р.п.), частичность прогноза, процедура Неймана-Пирсона, диссонанта, функция упорядочения, доходность, принцип минимума доходности (ПМД), волатильность, регрессия.

1. Введение

В работе изучаются проблемы, связанные с применением континуального критерия VaR (CC-VaR) [1, 2] на рынках опционов. Рассматривается ситуация, когда прогноз инвестора относительно будущих вероятностных свойств базового актива лишь частичен. Неполнота прогноза моделируется введением некото-

---

[1] *Геннадий Аршавирович Агасандян, д.ф.-м.н.* (agasang17@yandex.ru).

рых параметров, выбор значений которых инвестор доверяет рынку.

Применяется *принцип минимума доходности* (ПМД), позволяющий в рамках обшей задачи связать, фактически, две подзадачи – оценивания неизвестных параметров прогноза и оптимизации по CC-VaR портфеля инвестора при известном параметре. Принцип минимума доходности предлагает инвестору выбирать такое значение параметра неполноты, которое минимизирует доходность инвестиции. Введение ПМД представляется вполне естественным, поскольку предоставляет инвестору определенную надежность при выборе портфеля.

Проводятся теоретические исследования принципа и устанавливаются некоторые его свойства, упрощающие анализ особенностей его применения в конкретных случаях. На примере двухпараметрического двустороннего экспоненциального распределения демонстрируется возможность находить результаты применения ПМД аналитическими средствами. Аналитически решаются задачи с ПМД и для равномерных распределений, хотя они для CC-VaR образуют экзотический случай. Наконец, двухпараметрические бета-распределения предоставляют пример распределений, для которых без привлечения методики численных расчетов, считающейся в рассматриваемых задачах универсальной, не удается обойтись.

2. Формализация принципа минимума доходности

Как и при изучении многих иных теоретических проблем с континуальным критерием, здесь решается базовая континуальная *задача СВ* [1, 2], в которой рассматривается однопериодный теоретический идеальный рынок, инвестиционная сумма A (> 0) не задается, а оптимальный портфель ищется из условия его регулярности и минимума стоимости. Сам критерий требует, чтобы портфельный доход q удовлетворял условию

$\mathsf{P}\left\{q \geq \phi(\varepsilon)\right\} \geq 1-\varepsilon$ для всех $\varepsilon \in [0, 1]$, где $\phi(\varepsilon)$ – *функция рисковых предпочтений* (ф.р.п.) инвестора, $\mathsf{P}\{S\}$ – вероятность множества S. При необходимости в расчетах принимается $\phi(\varepsilon; \lambda) = \varepsilon^{\lambda}$, или даже с $\lambda = 2$.

Частичность прогноза моделируется (возможно, векторным) параметрическим заданием семейства прогнозных плотностей вероятности $\{p(x; \theta), \theta \in \Theta\}$ (и порождаемых ими мер $\mathsf{P}\{\cdot; \theta\}$). Не следует путать параметр θ с возможным параметром риска λ у ф.р.п. $\phi(\varepsilon; \lambda)$, характеризующим готовность инвестора к риску и единым для инвестора во всех задачах с CC-VaR.

Алгоритм оптимизации по CC-VaR с применением ПМД состоит в том, что для каждого возможного значения θ проводится стандартная оптимизация по CC-VaR, континуальная или дискретная в зависимости от типа задачи [2–4], основанная на процедуре Неймана – Пирсона [5], и находится доходность $y(\theta)$. А затем согласно ПМД определяется значение параметра неопределенности, минимизирующее доходность инвестиции.

В условиях частичного прогноза инвестора привычные агрегаты задачи, такие как функция относительных доходов, прогнозная функция (относительных доходов), стоимостная функция (относительных доходов) и диссонанта, по необходимости снабжаются дополнительным аргументом $\theta \in \Theta$ и записываются соответственно соотношениями

(1) $\rho(x;\theta) = p(x;\theta)/c(x), \quad \theta \in \Theta,$

(2) $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau;\theta) = \mathsf{P}\{\rho(x;\theta) \le \tau\}, \quad \mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau;\theta) = \mathsf{C}\{\rho(x;\theta) \le \tau\}, \quad \tau \ge 0,$

(3) $\gamma(\varepsilon;\theta) = \mathsf{f}_\mathsf{C}\left(\mathsf{f}_\mathsf{P}^{\leftarrow}(\varepsilon;\theta);\theta\right), \quad \varepsilon \in [0,1].$

Функция рисковых предпочтений инвестора $\phi(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, разумеется, не зависит от θ. При фиксированном значении θ оптимизация по CC-VaR дает средний доход R (не зависящий от θ), стоимость портфеля $A(\theta)$ и среднюю доходность инвестиции $y(\theta)$, равные соответственно (с учетом (1)–(3))

(4) $R = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\varepsilon, \quad A(\theta) = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\gamma(\varepsilon;\theta) = \int_0^\infty \phi\left(\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)\right)d\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau),$

(5) $y(\theta) = R/A(\theta) - 1 = R\Big/\int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\gamma(\varepsilon;\theta) - 1.$

Поэтому применение ПМД сводится к нахождению значения параметра $\theta = \theta_{min}$, *минимизирующего* доходность $y(\theta)$ или, что то же, *максимизирующее* инвестиционную сумму $A(\theta)$:

(6) $$\theta_{min} = \arg\min_\theta y(\theta) = \arg\max_\theta \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\gamma(\varepsilon;\theta).$$

3. Вспомогательные теоретические результаты

Задача инвестора формально будет описываться парой $\pi = (\varphi(x), \psi(x))$, первая компонента которой означает стоимостную плотность, а вторая – прогнозную. Напомним [2], что пара плотностей (также порождаемых ими мер) и задача в целом называются регулярными (невырожденными), когда диссонанта непрерывна и строго возрастает на [0, 1]. Рассмотрим свойства, связанные с преобразованиями цены базового актива, которые интересны сами по себе, а в ряде случаев бывают полезными.

Лемма 1. Пусть задача $\pi_1 = (c(x), p(x))$ порождает диссонанту $\gamma_1(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, и функцию упорядочения $w_1(x)$, $x \in \Re$. Тогда при линейном преобразовании цены актива $X_2 = \mu + \nu X_1$, $\mu \in \Re$, $\nu > 0$, для задачи $\pi_2 = (c(x - \mu), p(x - \mu))$ имеет место

(i) $\gamma_2(\varepsilon) = \gamma_1(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$;

(ii) $w_2(x) = w_1\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right)$, $x \in \Re$.

Доказательство. Задаче π_1 в алгоритме оптимизации отвечает функция относительных доходов $\rho_1(x) \equiv p_1(x)/c_1(x)$, а система оптимальных множеств $Z_1(\tau)$ [2] определяется условием

$$Z_1(\tau) = \{x | \rho_1(x) \le \tau\}, \quad \tau \ge 0.$$

Для задачи π_2 по свойствам плотности вероятности имеем

$$\rho_2(x) \equiv p_2(x)/c_2(x) \equiv p_1\left(\tfrac{x-\mu}{\nu}\right)\Big/c_1\left(\tfrac{x-\mu}{\nu}\right) \equiv \rho_1\left(\tfrac{x-\mu}{\nu}\right).$$

Очевидны эквивалентности

$$\rho_2(x) = \tau \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1\left(\tfrac{x-\mu}{\nu}\right) = \tau, \qquad x \in Z_2(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{x-\mu}{\nu} \in Z_1(\tau).$$

Поэтому

$$\mathsf{P}_1\{Z_1(\tau)\} = \mathsf{P}_2\{Z_2(\tau)\} = \varepsilon, \qquad \mathsf{C}_1\{Z_1(\tau)\} = \mathsf{C}_2\{Z_2(\tau)\} = \gamma(\varepsilon).$$

Второе из этих равенств фактически означает справедливость утверждения (i) леммы. Кроме того,

$$\varepsilon \equiv \mathsf{f}_{\mathsf{P};1}(\tau) = \mathsf{P}_1\{Z_1(\tau)\}, \quad \varepsilon \equiv \mathsf{f}_{\mathsf{P};2}(\tau) = \mathsf{P}_2\{Z_2(\tau)\},$$

и потому

$$\mathsf{f}_{\mathsf{P};1}(\tau) = \mathsf{f}_{\mathsf{P};2}(\tau) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau), \quad \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\rho_1(x)) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\rho_2(x)).$$

Согласно определению функции упорядочения [2] имеем

$$w_1(x) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\rho_1(x)),$$

$$w_2(x) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\rho_2(x)) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}\left(\rho_1\left(\tfrac{x-\mu}{\nu}\right)\right) = w_1\left(\tfrac{x-\mu}{\nu}\right),$$

что доказывает утверждение (ii) и лемму в целом. □

Как правило, если не оговорено противное, предполагается, что диссонанта на отрезке [0, 1] *непрерывна* и *строго монотонно возрастает*. Она вообще может претерпевать разрыв лишь при $\varepsilon = 0$, а сохранять постоянное значение – лишь при $\gamma(\varepsilon) = 1$, но эти случаи рассматриваются как экзотические, хотя они часто допускают осмысления.

Лемма 2. Пусть $\gamma(\varepsilon)$ и $w(x)$ – соответственно диссонанта и функция упорядочения для регулярной задачи $\pi = (c(x), p(x))$. Тогда функции $\gamma^*(\varepsilon)$ и $w^*(x)$, порождаемые *сопряженной* задачей $\pi^* = (p(x), c(x))$, определяются равенствами

(i) $\gamma^*(\varepsilon) = 1 - \gamma^{\leftarrow}(1-\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1];$

(7) (ii) $w^*(x) = 1 - \gamma(w(x)), \quad x \in \mathsf{X}.$

Доказательство. Каждая из функций относительных доходов порождает свое семейство множеств по $\tau \geq 0$:

$$Z(\tau) = \{x \mid \rho(x) \leq \tau\}, \quad Z^*(\tau) = \{x \mid \rho^*(x) \leq \tau\}.$$

Очевидно,

$$\rho(x) \leq \tau \Leftrightarrow \rho^*(x) \geq 1/\tau, \quad Z^*(\tau) = \overline{Z(1/\tau)} \cup \{\rho(x) = 1/\tau\},$$

и потому для регулярной задачи

(8) $\mathsf{P}\{Z^*(\tau)\} = \mathsf{P}\{\overline{Z(1/\tau)}\} = 1 - \mathsf{P}\{Z(1/\tau)\},$

(9) $\mathsf{C}\{Z^*(\tau)\} = \mathsf{C}\{\overline{Z(1/\tau)}\} = 1 - \mathsf{C}\{Z(1/\tau)\}.$

Также

(10) $\varepsilon = \mathsf{C}\left\{Z^*(\tau)\right\} = \mathsf{C}\left\{\overline{Z(1/\tau)}\right\} = 1 - \mathsf{C}\left\{Z(1/\tau)\right\}$,

$$\gamma^*(\varepsilon) = \mathsf{P}\left\{Z^*(\tau)\right\} = \mathsf{P}\left\{\overline{Z(1/\tau)}\right\} = 1 - \mathsf{P}\left\{Z(1/\tau)\right\}.$$

Из определения диссонанты

$$\gamma\left(\mathsf{P}\left\{Z(1/\tau)\right\}\right) = \mathsf{C}\left\{Z(1/\tau)\right\}, \quad \tau > 0,$$

или, с учетом (8) и (9),

$$\gamma\left(1 - \gamma^*(\varepsilon)\right) = 1 - \varepsilon,$$

откуда и следует утверждение (i) леммы.

Обратимся к доказательству утверждения (ii). Имеем

$$w(x) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}\left(\rho(x)\right).$$

Функция упорядочения для задачи π^* находится из (10):

$$w^*(x) = \mathsf{f}_{\mathsf{C}}\left(\rho^*(x)\right) = \mathsf{C}\left\{Z^*\left(\rho^*(x)\right)\right\} = 1 - \mathsf{C}\left\{\rho(x) \le 1/\rho^*(x)\right\} =$$

$$= 1 - \gamma\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(1/\tau)\right)\Big|_{\tau=\rho^*(x)} = 1 - \gamma\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}\left(\rho(x)\right)\right) = 1 - \gamma\left(w(x)\right).$$

Таким образом, при сопряжении задачи действует правило

(11) $w^*(x) = 1 - \gamma\left(w(x)\right)$.

Его инвертированием определяется и функция упорядочения

(12) $w(x) = \gamma^{\leftarrow}\left(1 - w^*(x)\right)$.

Некоторая асимметрия этих формул устраняется, если подставить в формулу (7) вместо аргумента ε функцию $w^*(x)$:

$$\gamma^*\left(w^*(x)\right) = 1 - \gamma^{\leftarrow}\left(1 - w(x)\right).$$

В сочетании с (12) получается симметричная к (11) формула

$$w(x) = 1 - \gamma^*\left(w^*(x)\right).$$

Подобные логические построения, основанные на взаимной симметрии задач, могут сами по себе служить доказательством утверждения (ii). Лемма полностью доказана. □

Лемма 3. Если $\gamma_1(\varepsilon) \le \gamma_2(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, то для любой неубывающей и ограниченной функции $\varphi(\varepsilon)$

$$\int_0^1 \varphi(\varepsilon)\, d\gamma_1(\varepsilon) \ge \int_0^1 \varphi(\varepsilon)\, d\gamma_2(\varepsilon).$$

Доказательство. Поскольку диссонанты в нуле и единице равны соответственно нулю и единице, интегрированием по частям получается неравенство

$$\int_0^1 \varphi(\varepsilon)\, d\left(\gamma_1(\varepsilon) - \gamma_2(\varepsilon)\right) = -\int_0^1 \left(\gamma_1(\varepsilon) - \gamma_2(\varepsilon)\right) d\varphi(\varepsilon) \geq 0$$

(внеинтегральное слагаемое обращается в нуль). Тем самым утверждение леммы доказано. □

Очевидным следствием леммы 3 является

Лемма 4. Если существует значение $\theta' \in \Theta$, при котором для всего семейства диссонант $\{\gamma(\varepsilon;\, \theta),\, \theta \in \Theta\}$ выполняется неравенство

$$\gamma(\varepsilon; \theta') \leq \gamma(\varepsilon; \theta), \quad \varepsilon \in [0,\, 1],$$

то θ' удовлетворяет (6) при определениях (4), (5) с $\theta' = \theta_{min}$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 3 к функции $\varphi(\varepsilon) \equiv \phi(\varepsilon)$ и положить $\gamma_1(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon;\, \theta')$, $\gamma_2(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon;\, \theta)$. □

Таким образом, если в семействе диссонант $\{\gamma(\varepsilon;\, \theta),\, \theta \in \Theta\}$ существует минимальный элемент, то соответствующее этому элементу значение θ' параметра θ является оптимальным по ПМД (и не зависит от функции $\phi(\varepsilon)$. В отсутствие минимального элемента это, вообще говоря, не так, и следует обращаться к самой формуле (6).

Леммы 3, 4 можно переформулировать в терминах прогнозной и стоимостной функций:

$$\int_0^\infty \varphi\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P};1}(\tau)\right) d\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau) \geq \int_0^\infty \varphi\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P};2}(\tau)\right) d\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau),$$

$$\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau; \theta_{min}) \geq \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau; \theta), \quad \tau \in [0, \infty).$$

4. Двустороннее экспоненциальное распределение

Рассматривается пример задачи оптимизации по CC-VaR для δ-рынка, в которой прогнозная $p(\cdot)$ и стоимостная $c(\cdot)$ плотности подчинены билатеральному (двустороннему) экспоненциальному распределению с параметрами μ, α, $\mu \in \Re$, $\alpha > 0$:

$$\mathrm{Exp}(\mu, \alpha): \quad \tfrac{1}{2\alpha} \exp\left(-\tfrac{|x-\mu|}{\alpha}\right), \quad x \in \mathsf{X} = \Re.$$

при этом $p(x) \sim \mathrm{Exp}(\mu,\, \alpha)$, $\mu > 0$, $c(x) \sim \mathrm{Exp}(0,\, \beta)$, т.е.

$$p(x)=\tfrac{1}{2\alpha}\exp\left(-\tfrac{|x-\mu|}{\alpha}\right),\quad c(x)=\tfrac{1}{2\beta}\exp\left(-\tfrac{|x|}{\beta}\right).$$

Здесь среднее v второго распределения приравнивается нулю для простоты (и без ограничения общности). Функция относительных доходов

$$\rho(x)=p(x)/c(x)=\tfrac{\beta}{\alpha}\exp\left(-\tfrac{|x-\mu|}{\alpha}+\tfrac{|x|}{\beta}\right),\quad x\in\Re.$$

4.1. АНАЛИЗ ДИССОНАНТЫ ПРИ $\mu > v$, $\alpha < \beta$

Пусть теперь $\kappa = \alpha/\beta < 1$. Это условие означает, что инвестор считает рынок более волатильным, чем об этом свидетельствуют рыночные цены. В таком случае функция $\rho(x)$ унимодальна, принимает максимальное значение $\tau_{max} = \exp(\mu/\beta)/\kappa$ при $x_{max} = \mu$ с изломом и претерпевает дополнительный излом в точке $x = 0$ со значением $\tau_{br} = \exp(-\mu/\alpha)/\kappa$. При $x \to -\infty$ функция стремится к минимальному значению $\tau_{min} = 0$.

Алгоритм оптимизации по CC-VaR требует нахождения оптимальных по Нейману-Пирсону множеств $\{Z(\tau), \tau \geq 0\}$ [2, 5]. Это семейство определяется из неравенств

$$\rho(x)\leq\tau,\quad 0<\tau\leq\tau_{max}.$$

Разрешая их относительно x, получаем эквивалентную систему неравенств. При $x \leq 0$, $0 < x \leq \mu$, $\mu \leq x$ соответственно

$$x\leq\tfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(\tfrac{\mu}{\alpha}+\ln\left(\tfrac{\tau\alpha}{\beta}\right)\right),\ x\leq\tfrac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}\left(\tfrac{\mu}{\alpha}+\ln\left(\tfrac{\tau\alpha}{\beta}\right)\right),\ x\geq\tfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(\tfrac{\mu}{\alpha}-\ln\left(\tfrac{\tau\alpha}{\beta}\right)\right).$$

Производя замену $t = \alpha\ln(\tau\alpha/\beta)$ переменной τ, получаем ту же систему неравенств в терминах t:

$$x\leq(\mu+t)/(1-\kappa),\quad x\leq(\mu+t)/(1+\kappa),\quad x\geq(\mu-t)/(1-\kappa).$$

В терминах новой переменной $t_{min} = -\infty$, $t_{br} = -\mu$, $t_{max} = \mu\kappa$, а оптимальные по Нейману – Пирсону множества имеют вид:

$$Z(t)=\{x\leq(\mu+t)/(1-\kappa)\}\cup\{x\geq(\mu-t)/(1-\kappa)\},\quad t\leq-\mu,$$

$$Z(t)=\{x\leq(\mu+t)/(1+\kappa)\}\cup\{x\geq(\mu-t)/(1-\kappa)\},\ -\mu<t\leq\mu\kappa.$$

Множество $Z(t)$ при $t = \mu\kappa$ совпадает с $\Re_+$, а при $t\to-\infty$ имеет пределом пустое множество. Переменная t связывается с вероятностным уровнем $\varepsilon = \mathsf{f}(t)$ соотношением

$$\varepsilon = \mathrm{f}(t) = \mathrm{P}\{Z(t)\} = \tfrac{1}{2\alpha}\int_{Z(t)} \exp\left(\tfrac{x-\mu}{\alpha}\right)dx .$$

Интегрированием находится

$$\varepsilon = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{t+\kappa\mu}{\alpha-\kappa\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{t-\kappa\mu}{\alpha-\kappa\alpha}\right), & t \le -\mu, \\ \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{t-\kappa\mu}{\alpha+\kappa\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{t-\kappa\mu}{\alpha-\kappa\alpha}\right), & t > -\mu; \end{cases}$$

$$\left(\varepsilon_{\mathrm{br}} = \tfrac{1}{2}\exp\left(-\tfrac{\mu}{\alpha}\right)\left(1+\exp\left(\tfrac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)\right), \quad t_{\mathrm{br}} = -\mu\right).$$

А диссонанта

$$\gamma(\varepsilon) = \mathrm{C}\{Z(t)\} = \tfrac{1}{2\beta}\int_{Z(t)} \exp\left(\tfrac{x}{\beta}\right)dx \ =$$

$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{t+\mu}{\beta-\kappa\beta}\right) + \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{t-\mu}{\beta-\kappa\beta}\right), & t \le -\mu, \\ 1 - \tfrac{1}{2}\exp\left(-\tfrac{t+\mu}{\beta+\kappa\beta}\right) + \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{t-\mu}{\beta-\kappa\beta}\right), & t > -\mu; \end{cases}$$

$$\left(\gamma_{\mathrm{br}} = \gamma(\varepsilon_{\mathrm{br}}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\exp\left(-\tfrac{2\mu}{\beta-\kappa\beta}\right)\right).$$

Теперь проводится еще замена $t \to u$:

$$u = \upsilon\exp\left(\tfrac{t}{\alpha-\kappa\alpha}\right), \quad \upsilon = \exp\left(\tfrac{-\mu}{\beta-\kappa\beta}\right) < 1.$$

При этом $u_{min} = 0$, $u_{br} = \upsilon^{(1+\kappa)/\kappa}$, $u_{max} = 1$,

(13) $\varepsilon = \tfrac{1}{2}\tfrac{u}{\upsilon}\left(\upsilon^{-1}+\upsilon\right), \quad \gamma(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\tfrac{u^{\kappa}}{\upsilon^{\kappa}}\left(\upsilon^{-1}+\upsilon\right), \quad u \in \left(0, \upsilon^{(1+\kappa)/\kappa}\right],$,

(14) $\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(u+u^{\omega}\right), \quad \gamma(\varepsilon) = 1 - \tfrac{\upsilon^{1-\kappa}}{2u^{\kappa\omega}}\left(1-u^{2\kappa/(1+\kappa)}\right), \quad u \in \left(\upsilon^{(1+\kappa)/\kappa}, 1\right],$,

где $\omega = (1-\kappa)/(1+\kappa)$, а $\varepsilon_{br} = \upsilon^{1/\kappa}(\upsilon^{-1}+\upsilon)/2$, $\gamma_{br} = (1+\upsilon^2)/2$.

Формулы (13) и (14) дают параметрическое задание диссонанты $\gamma(\varepsilon)$. Явное представление $\gamma(\varepsilon)$ удается получить лишь на первом интервале, тем не менее можно провести необходимое оценивание для применения ПМД. В связи с этим рассматриваются две задачи, в первой из которых в качестве свободного параметра распределения инвестора (именно он и находится из ПМД) выступает параметр μ, во второй – α.

4.2. СВОБОДНЫЙ ПАРАМЕТР μ

Рассмотрим в качестве свободного параметр μ. На основании (14) легко устанавливается, что при $\mu = 0$ и $\kappa < 1$

(15) $\gamma\left(\varepsilon;0,\kappa\right)=\varepsilon^{\kappa}$, $\varepsilon \in [0, 1]$.

Здесь в обозначение диссонанты дополнительно вводятся идентификационные параметры. Для доказательства оптимальности по ПМД значения $\mu = 0$ достаточно показать, что для всех α, β и $\kappa = \alpha/\beta < 1$

(16) $\gamma\left(\varepsilon;\mu,\kappa\right)\geq\gamma\left(\varepsilon;0,\kappa\right),\ \mu>0,\ \kappa<1$, $\varepsilon \in [0, 1]$.

Из соотношений (13) и (14) переменная u выражается через ε, подставляется в (16) и находятся нужные оценки для двух интервалов (для второго используется неравенство $u^{\kappa\omega} \geq \upsilon^{1-\kappa}$):

$$\gamma\left(\varepsilon;\mu,\kappa\right)=2^{\kappa-1}\left(\upsilon^{-1}+\upsilon\right)^{1-\kappa}\varepsilon^{\kappa}\geq\varepsilon^{\kappa},\quad u\in\left(0,\upsilon^{(1+\kappa)/\kappa}\right],$$

$$\gamma\left(\varepsilon;\mu,\kappa\right)\geq\tfrac{1}{2}\left(1+u^{2\kappa/(1+\kappa)}\right),\quad u\in\left(\upsilon^{(1+\kappa)/\kappa},1\right].$$

Справедливость неравенства (16) (с учетом (15)) устанавливается, если будет доказано, что

$$\tfrac{1}{2}\left(1+u^{2\kappa/(1+\kappa)}\right)\geq\tfrac{1}{2^{\kappa}}\left(u+u^{(1-\kappa)/(1+\kappa)}\right)^{\kappa}\quad\left(=\varepsilon^{\kappa}\right).$$

После замены в последнем неравенстве $u \to z^{1+\kappa}$ и деления на z^{κ} получается эквивалентное неравенство

$$\tfrac{1}{2}\left(z^{-\kappa}+z^{\kappa}\right)\geq\left(\tfrac{1}{2}\left(z^{-\kappa}+z^{\kappa}\right)\right)^{\kappa},$$

которое справедливо, поскольку выражение слева не меньше единицы, а $\kappa < 1$. Неравенство (16) доказано.

4.3. СВОБОДНЫЙ ПАРАМЕТР α

Рассмотрим теперь задачу со свободным параметром α и найдем диссонанту $\gamma(\varepsilon)$ при $\mu > 0$ и $\kappa = 1$. Дальнейшему изложению предпошлем

Замечание. Соображения размерности позволяют уменьшить количество параметров в рассматриваемой задаче. В исходной постановке мы имеем наряду с переменной x набор параметров (μ, α, ν, β), и потому важные для задачи функции $\rho(x)$, $w(x)$ и $\gamma(\varepsilon)$ зависят, вообще говоря, еще от этих четырех параметров. Однако, как нетрудно видеть, существенными являются лишь комбинации (здесь могут возникать варианты) $x' = (x - \nu)/\beta$, $\mu' = (\mu - \nu)/\beta$, $\kappa = \alpha/\beta$, и потому

$$\rho(x;\mu,\alpha,\nu,\beta)=\widehat{\rho}\left(\tfrac{x-\nu}{\beta};\tfrac{\mu-\nu}{\beta},\tfrac{\alpha}{\beta}\right)=\widehat{\rho}\left(x';\mu',\kappa\right),$$

$$w(x;\mu,\alpha,\nu,\beta)=\widehat{w}\left(\tfrac{x-\nu}{\beta};\tfrac{\mu-\nu}{\beta},\tfrac{\alpha}{\beta}\right)=\widehat{w}\left(x';\mu',\kappa\right),$$

$$\gamma(\varepsilon;\mu,\alpha,\nu,\beta)=\widehat{\gamma}\left(\varepsilon;\tfrac{\mu-\nu}{\beta},\tfrac{\alpha}{\beta}\right)=\widehat{\gamma}\left(\varepsilon;\mu',\kappa\right). \ \square$$

Для упрощения записи формул полагаем $\beta = 1$ (иначе в них нужно произвести замены $x \to x' = x/\beta$, $\mu \to \mu' = \mu/\beta$), и тогда

$$c(x)=\tfrac{1}{2}\exp\left(-|x|\right), \quad p(x)=\tfrac{1}{2}\exp\left(-|x-\mu|\right),$$

$$\rho(x)=\exp\left(-|x-\mu|+|x|\right).$$

Очевидно,

$$\rho(x)=\left\{\mathrm{e}^{-\mu},\ x\le x_1;\ \mathrm{e}^{2x-\mu},\ x_1<x\le x_2;\ \mathrm{e}^{\mu},\ x_2<x\right\}=\tau,$$

$$x_1=0,\ x_2=\mu,\ \tau\in\left[\mathrm{e}^{-\mu},\mathrm{e}^{\mu}\right].$$

Параметризация $\rho(x) = \tau$ и надлежащее интегрирование по мерам $\mathsf{P}\{\cdot\}$ и $\mathsf{C}\{\cdot\}$ дает

$$\varepsilon_1=\mathsf{P}\left\{x\le x_1\right\}=\mathrm{e}^{-\mu}/2, \quad \varepsilon_2=1-\mathsf{P}\left\{x>x_2\right\}=1/2,$$

$$\varepsilon=\mathrm{f}(\tau)=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mu/2}\sqrt{\tau}, \quad \tau\in\left(\mathrm{e}^{-\mu},\mathrm{e}^{\mu}\right), \quad \tau=\mathrm{f}^{\leftarrow}(\varepsilon)=4\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{\mu},$$

$$\gamma_1=\mathsf{C}\left\{x\le x_1\right\}=1/2, \quad \gamma_2=1-\mathsf{C}\left\{x>x_2\right\}=1-\mathrm{e}^{-\mu}/2,$$

$$\gamma(\varepsilon)=1-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mu/2}/\sqrt{\tau}\Big|_{\tau=\mathrm{f}^{\leftarrow}(\varepsilon)}, \quad \tau\in\left(\mathrm{e}^{-\mu},\mathrm{e}^{\mu}\right).$$

Образуя требуемую суперпозицию $\gamma(\varepsilon)$ и используя значения параметров ε_1, ε_2, γ_1, γ_2, получаем представление

$$(17)\quad \gamma(\varepsilon;\mu,1)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mu}\,\varepsilon, & 0\le\varepsilon\le\mathrm{e}^{-\mu}/2;\\ 1-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mu}/\varepsilon, & \mathrm{e}^{-\mu}/2<\varepsilon\le 1/2;\\ 1-\mathrm{e}^{-\mu}(1-\varepsilon), & 1/2<\varepsilon\le 1.\end{cases}$$

Здесь для более точной идентификации запись диссонанты снабжается необходимыми параметрами. Нетрудно заметить, что $\gamma(\varepsilon)$ – «самосопряженная» функция, переходящая сама в себя при преобразовании $\varepsilon^* \leftrightarrow 1-\gamma$, $\gamma^* \leftrightarrow 1-\varepsilon$.

Для доказательства оптимальности значения $\kappa = \alpha/\beta = 1$ при $\mu > 0$, $\kappa \le 1$ достаточно показать, что для всех α, β, $\kappa < 1$

$$(18)\quad \gamma(\varepsilon;\mu,\kappa)\ge\gamma(\varepsilon;\mu,1), \quad \mu>0, \quad \kappa<1, \quad \varepsilon\in[0,1],$$

где $\gamma(\varepsilon;\mu,1)$ задается формулой (17).

На первом из интервалов u выражается через ε и подставляется в формулу для $\gamma(\varepsilon)$. При этом, поскольку некоторые из входящих в выражение функций при $\kappa = 1$ становятся неопределенными, следует рассмотреть их предельные значения, именно

$$\lim_{\kappa\to 1}\varepsilon_{\mathrm{br}} = \mathrm{e}^{-\mu}/2\left(=\varepsilon_1\right);\ \lim_{\kappa\to 1}\gamma_{\mathrm{br}} = 1/2\left(=\gamma_1\right).$$

В результате этих манипуляций из (13) и (14) сразу получается оценка. Для интервала $(0, \upsilon^{(1+\kappa)/\kappa}]$

$$\gamma\left(\varepsilon;\mu,1\right) = 2^{\kappa-1}\left(\upsilon^{-1}+\upsilon\right)^{1-\kappa}\varepsilon^{\kappa} \geq 2^{\kappa-1}\upsilon^{-1+\kappa}\varepsilon^{\kappa} =$$

$$= \mathrm{e}^{\mu}\,2^{\kappa-1}\varepsilon^{\kappa} = \left(2\varepsilon\right)^{\kappa}\tfrac{\mathrm{e}^{\mu}}{2} \geq \left(2\varepsilon\right)\tfrac{\mathrm{e}^{\mu}}{2} = \mathrm{e}^{\mu}\,\varepsilon,$$

для интервала $(\upsilon^{(1+\kappa)/\kappa}, 1]$ (используется также замена $u \to z^{1+\kappa}$)

$$\gamma\left(\varepsilon;\mu,1\right) = 1-\tfrac{\upsilon^{1-\kappa}}{2u^{\kappa\varpi}}\left(1-u^{\frac{2\kappa}{1+\kappa}}\right) > 1-\tfrac{\mathrm{e}^{-\mu}}{4\varepsilon} = 1-\tfrac{\mathrm{e}^{-\mu}}{2}\left(u+u^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(1-u^{\frac{2\kappa}{1+\kappa}}\right)\left(u+u^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}\right)u^{\kappa\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}\ \Leftrightarrow\ z^{1-\kappa} < z^{(1-\kappa)\kappa} + z^{1+3\kappa}.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку $z \in (0, 1]$, $\kappa < 1$, и потому

$$z^{1-\kappa} < \left(z^{1-\kappa}\right)^{\kappa}.$$

Соотношение (18) окончательно доказано.

4.4. ВЗАИМНАЯ СВОДИМОСТЬ ЗАДАЧ

Итак, полностью разобран случай $\mu \geq 0$, $\alpha \leq \beta$ $(\kappa \leq 1)$, и найдено, что значение $\mu = 0$ является оптимальным для задачи со свободным параметром μ, а значение $\alpha = \beta$ $(\kappa = 1)$ является оптимальным для задачи со свободным параметром α.

Этот случай дает решение обеих задач на ПМД для случая (i) $\mu > \nu$, $\alpha < \beta$ $(\kappa < 1)$. Остается рассмотреть еще три случая (ii) $\mu < \nu$, $\alpha < \beta$ $(\kappa < 1)$; (iii) $\mu > \nu$, $\alpha > \beta$ $(\kappa > 1)$; (iv) $\mu < \nu$, $\alpha > \beta$ $(\kappa > 1)$. Однако специальных построений для этого можно не проводить, а воспользоваться правилами сведения одних задач к другим родственным.

Напомним, что по лемме 2 (отчасти, по лемме 1) при линейном преобразовании $X' = \mu + \nu X$ цены базового актива

(19) $\gamma'(\varepsilon)=\gamma(\varepsilon), \quad w'(x)=w\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right),$

а по лемме 3 при переходе к сопряженной задаче ($p(x) \leftrightarrow c(x)$)

(20) $\gamma^*(\varepsilon)=1-\gamma^{\leftarrow}(1-\varepsilon), \quad w^*(x)=1-\gamma(w(x)).$

Это означает, что в случаях:

(ii) функции $\rho(x)$, $w(x)$ и $\gamma(\varepsilon)$ получаются из аналогичных функций для случая (i) по правилу (19) при $\mu = 0$, $\nu = -1$;

(iii) функции $\rho(x)$, $w(x)$ и $\gamma(\varepsilon)$ получаются из аналогичных функций для случая (i) по правилу *сопряжения* (20), при этом оптимальность вытекает из утверждения леммы 3.

(iv) функции $\rho(x)$, $w(x)$ и $\gamma(\varepsilon)$ получаются из аналогичных функций для случая (iii) по правилу (19) при $\mu = 0$, $\nu = -1$.

Тем самым можно считать доказанной возможность замены (16) и (18) соответственно соотношениями

$$\gamma(\varepsilon;\mu,\kappa)\geq\gamma(\varepsilon;0,\kappa), \quad \mu\in\Re, \quad \kappa\in\Re_+, \quad \varepsilon\in[0, 1],$$

$$\gamma(\varepsilon;\mu,\kappa)\geq\gamma(\varepsilon;\mu,1), \quad \mu\in\Re, \quad \kappa\in\Re_+, \quad \varepsilon\in[0, 1],$$

что завершает анализ.

5. Равномерные распределения

Рассматривается ситуация, когда обе функции $c(x)$ и $p(x)$ являются плотностями равномерного распределения – R(0, 2) и R(μ, 2α), x, $\mu \in \Re$, $\alpha > 0$. Выбор первого из них, очевидно, не ограничивает общности, а симметрия распределений позволяет изучать лишь случай $\mu \geq 0$. Анализируются две задачи на ПМД, в первой из которых свободным будет параметр μ, во второй – α. Необходимые вычисления проводятся при $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^\lambda$, $\lambda > 0$, хотя бóльшая часть выводов справедлива для произвольных ф.р.п.

Очевидно, эта пара плотностей не удовлетворяет условиям регулярности. Относительный доход может принимать лишь значения 0, $1/\mu$, ∞, а диссонанта состоит не более чем из трех отрезков – вертикального, наклонного и горизонтального, и потому обе задачи следует отнести к разряду экзотических. Но простота распределений позволяет построить решение и для них – строго аналитическими средствами и с сохранением сути ПМД. Нужно лишь проявить аккуратность. И в данном разделе, не вдаваясь в подробности анализа, ограничимся лишь формулированием решений, которые пытливый читатель сможет, надеемся, без труда проверить.

В первой задаче фиксируется параметр α, а μ свободен. При любом α оптимальны все значения $\mu'^{*} \in [0, |\alpha - 1|)$ (по лемме 4), и среди них естественный и ожидаемый нуль. Для них выполняются условия минимальности леммы 4, кроме того:

при $\alpha \le 1$ $\gamma(0; \mu', \alpha) = 0$, $\gamma(\varepsilon; \mu', \alpha) = 1 - \alpha + \varepsilon\alpha$, $\varepsilon \in (0, 1]$;

при $\alpha > 1$ $\gamma(\varepsilon; \mu', \alpha) = \min[\varepsilon\alpha, 1]$, $\varepsilon \in [0, 1]$.

Во второй задаче фиксируется параметр μ, а свободен α. В ней тип решения различается по μ: если $\mu \le 1$, условия минимальности леммы 4 не выполняются и решение зависит от рискового параметра λ. Так, при $\lambda < \lambda_{cr} = \ln(1 - \mu)/\ln(1 + \mu)$ оптимальное значение $\alpha' = 1 + \mu$, при $\lambda > \lambda_{cr}$ – $\alpha' = 1 - \mu$.

Если $\mu > 1$, оптимально $\alpha' = 1 - \mu$. Такой выбор α минимизирует прогнозное множество цен из покрывающих отрезок $[-1, 1]$ и вовсе не зависит от рисковых предпочтений инвестора.

6. Бета-распределения – численные методы

В данном разделе исследуется применение принципа минимума доходности в задачах, в которых обе функции $p(\cdot)$ и $c(\cdot)$ являются плотностями бета-распределения, известного из теории вероятности и математической статистики. В примерах с этим распределением для рассматриваемых задач не удается провести полного аналитического исследования, и потому применяются численные методы.

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЛЕВАНТНЫЕ СВОЙСТВА

Для обеих плотностей $p(\cdot)$ и $c(\cdot)$ используется двухпараметрическое бета-распределение:

$$\mathrm{Be}(\alpha,\mu):\quad x^{\alpha-1}(1-x)^{\mu-1}\big/\mathrm{B}(\alpha,\mu),\quad \alpha,\mu>0,\ \text{где}$$

$$\mathrm{B}(\alpha,\mu)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)/\Gamma(\alpha+\mu)\quad \text{и}$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\exp(-x)\,dx$$

– соответственно бета- и гамма-функции.

Его математическое ожидание и дисперсия

(21) $\mathsf{E}X = \alpha/(\alpha+\mu), \quad \mathsf{D}X = \alpha\mu\Big/\left((\alpha+\mu)^2(1+\alpha+\mu)\right).$

Далее полагаем $p(x) \sim \mathrm{Be}(\alpha, \mu)$, $c(x) \sim \mathrm{Be}(\beta, \nu)$, $\alpha, \mu, \beta, \nu > 1$, и тогда функция относительного дохода

(22) $\rho(x) = p(x)/c(x) = x^{\alpha-\beta}(1-x)^{\mu-\nu}\,\mathrm{B}(\beta,\nu)/\mathrm{B}(\alpha,\mu)$.

Ее производная имеет вид

$$\rho'(x) = u(x)l(x), \quad l(x) = (1-x)(\alpha-\beta) - x(\mu-\nu),$$

где функция $u(x)$ на интервале $(0, 1)$ строго положительна, может обращаться в нуль лишь на его границах, а $l(x)$ – линейная функция. Поэтому знаки $\rho'(x)$ и $l(x)$ совпадают. Кроме того, $l(0) = \alpha-\beta$, $l(1) = \nu-\mu$, а обращается в нуль $l(x)$ в точке

(23) $x^* = (\alpha-\beta)/(\alpha+\mu-\beta-\nu)$.

При этом $x^* \in (0, 1)$, если (i) $\alpha > \beta$, $\mu < \nu$ и (ii) $\alpha < \beta$, $\mu > \nu$. В этих двух случаях функция $\rho(x)$ унимодальна и достигает в $x^* \in (0, 1)$ соответственно минимума и максимума.

Если $x^* \notin (0, 1)$, производная $\rho'(x)$ на $(0, 1)$ сохраняет знак и

$$\mathrm{sgn}[\rho'(x)] \equiv \mathrm{sgn}[\alpha-\beta] = \mathrm{sgn}[-\mu+\nu].$$

В случаях (iii) $x^* < 0$ и (iv) $x^* > 1$, как это следует из (23), функция $\rho(x)$ на интервале $(0, 1)$ монотонно возрастает и убывает при $\alpha > \beta$ и $\mu > \nu$ соответственно. Или более детально: если $\Delta = \alpha-\beta+\mu-\nu$, то случаю (iii) отвечают условия 1) $\mu < \nu$, $\Delta > 0$ и 2) $\mu > \nu$, $\Delta < \min(\alpha-1, 0)$, а случаю (iv) – 1) $\alpha < \beta$, $\Delta > 0$ и 2) $\alpha > \beta$, $\Delta < \min(\mu-1, 0)$.

В разделе 6.2 рассматриваются игры на тренде и волатильности базового актива с использованием составных параметров. В разделе 6.3 рассматриваются игры на хвосте распределения уже с непосредственным заданием своими параметрами, но представляющими также и самостоятельный интерес.

6.2. ИГРЫ НА ТРЕНДЕ И ВОЛАТИЛЬНОСТИ БАЗОВОГО АКТИВА

При рассмотрении игр на тренде и волатильности базового актива выделяются два «чистых» случая:

(i) $\alpha > \beta, \alpha + \mu < \beta + \nu$; (ii) $\alpha < \beta, \alpha + \mu > \beta + \nu$;

(iii) $\mu < \nu, \alpha + \mu > \beta + \nu$; (iv) $\alpha > \beta, \alpha + 1 < \beta + \nu, \alpha + \mu < \beta + \nu$.

В случае (i) функция $\rho(x)$ на интервале (0, 1) монотонно возрастает, в случае (ii) – монотонно убывает. В случаях (iii) и (iv) функция $\rho(x)$ унимодальна и принимает в точке $x^* \in (0, 1)$ соответственно минимальное и максимальное значения.

Случаи (i) и (ii) обычно ассоциируются с негативным и позитивным трендами соответственно, а (iii) и (iv) – с покупкой и продажей волатильности базового актива. Хотя на рынках в чистом виде тренд и волатильность, как правило, не встречаются, но вполне могут уживаться.

Для упрощения выбора параметров распределений вместо среднего и дисперсии будем оперировать составными параметрами $m = \alpha/\mu$ и $s = \alpha + \mu$. В соответствии с (21) среднее однозначно определяется отношением $m = \alpha/\mu$, и чем оно *больше*, тем *больше* среднее. Соотношение дисперсий неплохо, во всяком случае, в широком множестве случаев характеризуется суммой $s = \alpha + \mu$, и чем она *меньше*, тем *больше* дисперсия.

Тем не менее для повышения надежности результатов выбора свободных параметров и в отсутствие однозначного определения волатильности (да и тренда) для реального рынка не мешало бы при оптимизации по ПМД сопоставлять s со стандартным отклонением σ, или с дисперсией, с учетом обратной зависимости s от σ (21), если исключить крайние, малопригодные, значения параметров в качестве показателей степени.

В новых составных параметрах *позитивному* (*негативному*) *тренду* соответствует неравенство $m_p > m_c$ ($m_p < m_c$). В примере 1 для позитивного тренда принимается $\beta = 1,5$, $\nu = 2,5$, что дает $m_c = 0,6$, $s_c = 4,0$ (для сравнения, $\sigma_c = 0,216506$), и требуется, чтобы $m_p = 0,8$ ($> m_c$). Оптимум для параметра μ будет определяться в соответствии с ПМД варьированием параметра s_p.

С этой целью изменяются оба параметра α и μ, но так, чтобы $\alpha/\mu = m_p = 0,8$. При $m_p = 0,8$ параметр $s_p = \alpha + \mu = \alpha\,(1 + 1/m_p)$ меняется в пределах от $2,25\omega_1$ до $2,25\omega_2$, где (ω_1, ω_2) – интервал изменения параметра α, подбираемый так, чтобы минимум доходности достигался в его пределах. Для этого подходят границы интервала $\omega_1 = 1,0$, $\omega_2 = 3,0$.

В этом интервале задается $k = 50$ значений параметра α: $\alpha_j = \omega_1 + j\Delta$, $j \in J = \{1, \ldots, k\}$, $\Delta = (\omega_2 - \omega_1)/k = 0{,}04$. Таким значениям отвечают прогнозные плотности

$p_j(x) \sim \mathrm{Be}(\alpha_j, \alpha_j/m_p)$, $j \in J$.

Наконец, дискретный алгоритм оптимизации по CC-VaR дает k-мерный вектор средних доходностей, а наименьшей среди них оказывается 29-я компонента, для которой $\alpha_{29} = 2{,}16$, и потому $s_p = s_{p,opt} = 4{,}86$ ($\sigma_p = 0{,}205269$).

На рис. 1 слева представлены графики плотности $c(\cdot)$ и найденной оптимальной плотности $p_{29}(\cdot)$ (прерывистая и сплошная толстая линии соответственно). Дополнительно сплошными тонкими линиями изображены 20 из 50 тестируемых плотностей $p(\cdot)$, следующих друг за другом на одинаковых по параметру μ расстояниях.

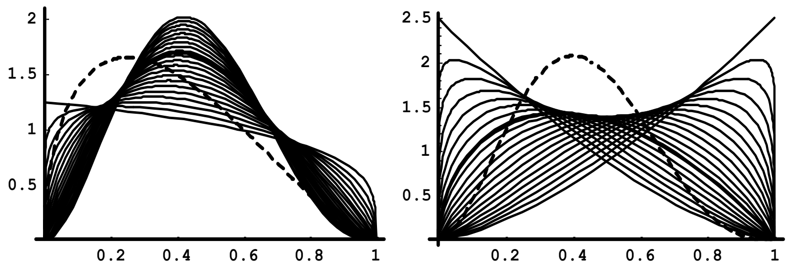

Рис. 1. Графики позитивного тренда и покупки волатильности

Аналогично *покупке* (*продаже*) *волатильности* соответствует неравенство $s_p < s_c$ ($s_p > s_c$). В примере 2 для *покупки волатильности* $\beta = 3{,}0$, $\nu = 4{,}0$, и потому $m_c = 0{,}75$, $s_c = 7{,}0$ ($\sigma_c = 0{,}174964$). Требуется, чтобы $s_p = 3{,}5 < s_c$ (при этом $\sigma_p = 0{,}259355 > \sigma_c$), а оптимум ищется варьированием m_p.

В распоряжении инвестора остается параметр s_p, который ему надлежит выбирать согласно ПМД. Его варьированием получается семейство плотностей $p(x)$ для тестирования.

Вновь изменяются оба параметра α и μ, но на этот раз так, чтобы $\alpha + \mu = \alpha\,(1 + 1/m_p) = s_p = 3{,}5$. Поскольку $m_p = \alpha/\mu$, то при $s_p = 3{,}5$ параметр m_p меняется в пределах от $\omega_2/(3{,}5 - \omega_2)$ до $\omega_1/(3{,}5 - \omega_1)$, где (ω_1, ω_2) – диапазон изменения параметра α

(зависимость m_p от α – обратная!). Интервал (ω_1, ω_2) для α подбирается аналогично задаче 1. Принимаются $\omega_1 = 1{,}0$, $\omega_2 = 2{,}5$.

В этом интервале задается $k = 50$ значений параметра α: $\alpha_j = \omega_1 + j\Delta$, $j \in J = \{1, \ldots, k\}$, $k = 50$, $\Delta = (\omega_2 - \omega_1)/k = 0{,}03$. Им отвечают прогнозные плотности

$p_j(x) \sim \mathrm{Be}(\alpha_j, s_p - \alpha_j)$, $j \in J$.

Применением к ним алгоритма оптимизации по CC-VaR находится k-мерный вектор средних доходностей. Наименьшую доходность доставляет 18-я компонента, для нее $\alpha_{18} = 1{,}54$, и потому $m_p = m_{p,opt} = 0{,}785714$. Соответствующие этой *покупке волатильности* графики изображены на рис. 1 справа.

Для рассмотрения *негативного тренда* достаточно в примере 1 произвести замену $x \leftrightarrow 1 - x$, а *продажи волатильности* – в примере 2 поменять ролями $p \leftrightarrow c$.

6.3. ИГРЫ НА ХВОСТЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Здесь изучаются игры на одном из хвостов распределения, прогнозный параметр которого непосредственно задан, а другого хвоста – свободен. Желательно также выяснить, как они связаны с играми (i)–(iv) предыдущего раздела. Вновь речь идет о бета-распределенных цене базового актива и прогнозе.

В силу внутренней зеркальной симметрии семейства бета-распределений достаточно рассмотреть задачи о *продаже* и *покупке*, например, левого хвоста распределения; тогда аналогичные задачи для правого хвоста решаются простой переменной ролей параметров α и β с параметрами μ и ν соответственно.

При $\alpha > \beta$ инвестор будет стремиться к *продаже* левого хвоста распределения, при $\alpha < \beta$ – к *покупке*. Интуитивные соображения, подкрепленные предварительными расчетами, подводят к тому, что продажа, например, левого хвоста (при $\alpha > \beta$) требует и продажи правого (когда $\mu_{\mathrm{opt}} > \nu$), что в итоге и дает продажу волатильности.

В сделках для левого хвоста распределения задаются три параметра α, β и ν, и требуется определить $\mu_{\mathrm{opt}} = h(\alpha, \beta, \nu)$. Будет проверяться гипотеза «тождественности прогноза со стоимостной картиной рынка», а именно, что

(i) $h(\beta, \beta, \nu) = \nu$.

(ii) при фиксированных параметрах β и ν функция $h(\alpha, \beta, \nu)$ монотонно *возрастает* по α.

Едва ли было бы оправдано применение ПМД при нарушении части (i) гипотезы. Но уже часть (ii) требует дополнительного осмысления, и если не в отношении монотонности, то, во всяком случае, в ее направленности.

Для подтверждения (или опровержения) гипотезы предлагается такая схема вычислительных процедур (экспериментов). Задаются тестовые дискретные множества параметров α, β, μ, ν в количествах I, J, M, N соответственно. Для каждого набора значений этих четырех параметров решается стандартная дискретная задача оптимизации по CC-VaR с K сценариями и находится доходность инвестиции.

Затем по результатам для каждой тройки параметров α, β, ν определяется значение μ_{opt} параметра μ с минимальной доходностью. Тем самым находится функция $\mu_{opt} = h(\alpha, \beta, \nu)$ и может проверяться гипотеза. В экспериментах, предназначенных для анализа проблемы, выбираются относительно небольшие объемы данных: $I = J = 12$, $M = 19$, $N = 5$, $K = 20$, именно

α, β = 1,25; 1,5; 1,75; 2; 2,25; 2,5; 2,75; 3; 3,25; 3,5; 3,75; 4;

ν = 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; $\mu_m = 1 + 10\,(m/M)^3$, $m = 1, 2, \ldots, M$.

Подобный выбор диапазонов для параметров определяется соображениями минимизации практической достаточности и сводится к их небольшим значениям, а для параметра μ еще и стремлением во избежание дополнительных систематических ошибок не допускать выхода μ_{opt} на границы диапазона.

Фактически цель обработки результатов состоит в построении функции регрессии, как это делается в математической статистике, но на основе детерминированных, а не случайных результатов. Просто для них нет точных аналитических представлений, а приближенная формула, как обычно и регрессия в статистике, находится методом наименьших квадратов.

В качестве функции регрессии принимается полиномиальная функция второй степени, притом фактически одной переменной $\alpha - \beta$, к чему склоняет сам вид функции $\rho(x)$ (22):

(24) $\mu^* = h(\nu; \alpha, \beta) = \nu + \vartheta_0 + \vartheta_1(\alpha - \beta) + \vartheta_2(\alpha - \beta)^2$.

Методом наименьших квадратов находятся:

(25) $\vartheta_0 = 0{,}00120266$, $\vartheta_1 = 0{,}973058$, $\vartheta_2 = 0{,}208499$ и
(26) $\mu^* = \nu + 0{,}00120266 - 0{,}973058\,(\alpha - \beta) + 0{,}208499\,(\alpha - \beta)^2$.

Среднеквадратическое отклонение, рассчитанное по остаточной сумме квадратов, $\sigma = 0{,}414601$, что представляется вполне приемлемым с учетом грубости дискретной модели и использования относительно высоких значений параметров бета-распределений, ответственных за излишне деликатное поведение их плотности в окрестности нуля и единицы.

Проводятся и тесты проверки на адекватность (скорее, на возможную неадекватность) ПМД-модели, и они подтверждают часть (i) гипотезы неизменным характером результатов. К типичным можно отнести расчеты, например, при $\nu = 2$ и всех тестируемых α и β, $\alpha = \beta$, от 0,25 до 2,75. При $K = 100$ и $M = 50$ оптимально по ПМД значение $\mu_{opt} = 1{,}95112$ при $m = 29$.

Хотя увеличение до $M = 100$ не показывает повышения точности, так как оптимум равен $\mu_{opt} = 2{,}05379$ и достигается также при $m = 59$, но уже при $M = 200$ и даже при пониженном объеме $K = 50$ оптимально $\mu_{opt} = 2{,}00201625$ (при $m = 117$).

Соотношения (24)–(26), оперирующие средними характеристиками, тем не менее с очевидностью говорят в пользу части (ii) гипотезы. Кроме того, в каждом эксперименте при прогонках по всем α, β и ν, не претендующих, разумеется, на теоретическую точность, неравенства $\alpha > \beta$ и $\mu_{\text{opt}} > \nu$ выполняются одновременно. То же самое наблюдается и в отношении противоположных неравенств, а это уже веское основание для признания гипотезы.

В завершение анализа игр на хвосте распределения приведем результаты подобных игр уже на новых данных, непосредственно не участвовавших в получении соотношений (25), (26). Кроме того, значения параметров распределений для них выходят за пределы интервалов, принятых в модели регрессии. Тем не менее результаты сопоставляются именно с моделью.

В тесте для *покупки* фиксируются $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\nu = 4$, программа оптимизации по CC-VaR с ПМД дает $\mu_{opt} = 6{,}49802$, по регрессии (26) $\mu^* = 6{,}18276$ и отклонение $\mu_{opt} - \mu^* = 0{,}31526$. Для *продажи* с $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\nu = 2$ также $\mu_{opt} = 3{,}47072$, согласно (26) $\mu^* = 4{,}23664$, и отклонение $\mu_{opt} - \mu^* = -0{,}76592$.

Оба эти результата вполне согласуются со среднеквадратическим отклонением в регрессии $\sigma = 0{,}414601$ (во всяком случае при правиле «трех сигм» из математической статистики). Соответствующие *покупке* и *продаже* левого хвоста графики изображены на рис. 2 слева и справа соответственно.

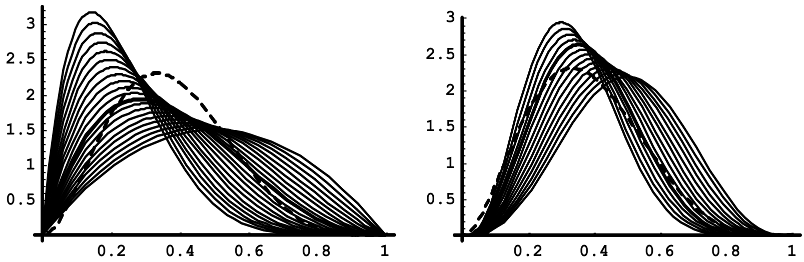

Рис. 2. Графики покупки и продажи левого хвоста

В графиках отчетливо усматривается также *покупка* и *продажа* волатильности (пунктирная линия отвечает стоимостной плотности, толстая сплошная – прогнозной). Однако обе операции показывают и некоторое смещение рынка (тренд).

7. Заключение

Работа исследует проблемы применения континуального критерия VaR на финансовых рынках в условиях частичного прогноза, когда инвестор формирует будущую плотность цены базового актива с точностью до некоторых параметров, оставляя рынку окончательный выбор их значений.

Вводится *принцип минимума доходности*, предлагающий инвестору выбирать значения свободных параметров прогноза, минимизирующие доходность инвестиции. Такой подход (идейно близкий критерию минимума χ^2 из математической статистики) дает инвестору определенную гарантию от ошибочных решений, связанных с частичностью прогноза.

Проблемы применения ПМД в отдельных важных для теории случаях удается решать аналитически на основе аппарата, развитого для методологии оптимизации по CC-VaR. Однако универсальным подходом следует рассматривать использование численных методов. В качестве примеров решаются задачи с бета-распределениями путем совмещения дискретного алгоритма оптимизации по CC-VaR с применением ПМД.

Специальные подходы предлагаются в задачах с бета-распределениями для игр на любом одном из хвостов распределений. Решения для них представляются любопытными и сводят их к играм на волатильности. Разумеется, ценность выводов может показаться несколько сниженной, поскольку решения находятся не аналитическими, а численными методами и потому не претендуют на абсолютную точность. Хотя и оснований доверять им также не достаточно.

Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках*. – М. : ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 73. – С. 6–26.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на сценарных рынках* // Информатика и ее применения. – М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2018. – Т. 12, вып. 1. – С. 32–40.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *Многомерные рынки опционов и оптимизация по CC-VaR* // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 88. – С. 5–25.
5. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Наука, 1975. –750 с. (Перевод с англ.: Cramer. H. *Mathematical methods of statistics*. – Princeton University Press, 1946.)

MINIMUM YIELD PRINCIPLE AND CC-VAR UNDER PARTIAL MARKET FORECAST

Gennady Agasandyan, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (agasang17@yandex.ru).

Abstract: The work continues author's investigations connected with applying continuous VaR-criterion (CC-VaR) in option markets. A situation, when the investor's forecast about future probabilistic properties of an underlier is restricted by a partial view, is considered. The incompleteness of investor's forecast is modeled by introducing into forecast some parameters whose values are chosen by investor market properties considered. A minimum yield principle (MYP) that suggests minimizing the investment yield by the choice of parameters' values is postulated. By that the investor acquires some security for possible forecast mistakes. The theoretical properties of the principle introduced that has self-sufficient interest and simplifies the analysis in a variety of cases are investigated. Demonstration of the principle is realized analytically by two-sided exponential and uniform distributions and by numerical methods with beta-distributions. The results reassert the adequacy of the principle and of the computation algorithms.

Keywords: continuous VaR-criterion (CC-VaR), Newman-Pearson procedure, forecast incompleteness, risk-preferences function (r.p.f.), dissonance function, ordering function, yield, minimum yield principle (MYP), volatility, regression.

УДК 519.685
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2021.92.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко.

*Поступила в редакцию 19.04.2021.
Опубликована 31.07.2021.*