DOI: 10.25728/tas.2019.50.1.2

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГР

Горелов М.А.
(*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва*)
griefer@ccas.ru

Предлагается авторский взгляд на современное состояние теории иерархических игр. Основное внимание уделяется математической стороне вопроса. Обсуждаются возможные направления дальнейшего развития данной области науки.

Ключевые слова: теория исследования операций, принятие решений в условиях конфликта и неопределенности, теория иерархических игр.

1. Введение

Данный материал можно рассматривать как продолжение обзора [10]. Нужно отметить, что обзор [10] сыграл свою роль. За прошедшие двадцать лет некоторые общие соображения, сформулированные в [10], начали обретать вполне конкретную математическую форму, что позволило получить и ряд новых результатов. Поэтому, возможно, стоит продолжить в том же духе. Но в отличие от [10], далее акцент делается на математических вопросах, поскольку именно здесь за истекшие двадцать лет произошли наиболее значительные изменения.

Написание подобного обзора предполагает выбор наиболее существенного из большого числа фактов. Такой выбор неизбежно субъективен. Поэтому дальнейшее следует рассматривать лишь как авторскую точку зрения на рассматриваемый предмет. Конечно, могут быть и иные мнения по тому же вопросу.

Размер статьи не позволяет привести сколько-нибудь подробную библиографию. Чтобы избежать субъективности хотя бы здесь, было принято следующее решение. В список литературы включены лишь монографии [1–9, 16–21] и несколько статей обзорного характера [10–15]. Дальнейшие ссылки можно найти в этих работах.

2. Теория иерархических игр

Попробуем очертить предмет обсуждения.

Общепризнанного определения теории иерархических игр нет. Например, математическая энциклопедия дает такое определение: «Игра с иерархической структурой – модель конфликтной ситуации при фиксированной последовательности ходов и обмена информацией участников» (И.А. Ватель, Ф.И. Ерешко). Такое определение вызывает определенные ассоциации, но не более того. В самом деле, если вдуматься, в любой игре порядок ходов фиксирован: игроки могут принимать решения последовательно, могут – одновременно, возможны какие-то смешанные варианты. То же относится и к информированности. Попытка конкретизировать определение, например, запретив одновременное принятие решений, сразу приводит к чрезмерному сужению класса изучаемых моделей.

Теория иерархических игр на сегодняшний день находится в развитии и не достигла такого совершенства, как, например, теория групп или даже теория чисел. Поэтому и само слово «теория» в данном контексте следует понимать несколько иначе.

В теории иерархических игр имеется небольшое число базовых утверждений (в основном принадлежащих Н.С. Кукушкину), которые используются (или могут быть использованы) при решении разных задач, и есть много моделей, каждая из которых строится «с нуля» и исследуется независимо от других. Что же всетаки позволяет говорить о наличии общей теории?

Здесь нужно отметить два момента: общность постановок задач и общие методы их решения.

Начнем с первого. Имеется большое число задач, формулируемых следующим образом. Имеется игра Γ_*, определенным образом связанная с более простой игрой Г. Определяется «решение» $R(\Gamma_*)$ игры Γ_* и ставится задача описания этого решения в терминах игры Г. Чтобы пояснить это, остановимся на двух примерах.

Начнем с игры Ю.Б. Гермейера Γ_2. Пусть задана игра $\Gamma = \langle U, V, g, h\rangle$, где U и V – множества, а g и h функции, определенные на $U \times V$ и принимающие действительные значения. Определим новую игру $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, g_*, h_*\rangle$, в которой $V_* = V$, U_* – множество всех функций из V в U, а функции g_* и h_* определяются условиями $g_*(u_*,v) = g(u_*(v),v)$ и $h_*(u_*,v) = h(u_*(v),v)$. Дальше обычным образом определяется максимальный гарантированный результат $R(\Gamma_*)$ первого игрока в игре Γ_* и ставится задача вычисления его с помощью решения серии оптимизационных задач на «конечномерных» множествах U и V. Эту задачу решает классическая теорема Гермейера [6].

Чуть сложнее задача, связанная с описанием множества $R(\Gamma_*)$ равновесий по Нэшу в той же игре Γ_*, поскольку непонятно, как описать подмножество функционального пространства U_* в терминах «простых» множеств U и V. Делается это введением следующего определения. Пара $(u, v) \in U \times V$ называется равновесным исходом в игре Γ_*, если *существует*[1] стратегия $u_* \in U_*$ такая, что (u_*,v) – ситуация равновесия в игре Γ_* и $u_*(v) = u$. А вот множество равновесных исходов уже можно описать в терминах игры Г.

Наличие связи между играми Γ_* и Г задает некую дополнительную структуру игры Γ_*. В этом смысле, например, игра Γ_2 является частным случаем игры Γ_1. Но подобного рода сужения классов рассматриваемых моделей позволяют получить более содержательные результаты. А поскольку частные модели имеют важные содержательные интерпретации, эти результаты приобретают особый вес.

---

[1] *Забегая вперед, отметим, что этот квантор существования «отвечает» за появление наказания в структуре оптимального решения.*

Задачи описанного типа мы и будем относить к теории иерархических игр[1]. Соответственно, к этой теории будет относиться, например, задача поиска седловой точки в дифференциальной игре на классе позиционных стратегий, и не будет относиться теория игр Гермейера–Вателя (для интересующихся последней темой имеется видеозапись доклада Н.С. Кукушкина, специально посвященного этому вопросу: http://www.mathnet.ru /php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=22040).

Обратимся к методам исследования.

На начальном этапе развития теории единственный метод решения рассматриваемых задач выглядел следующим образом. Сначала угадывался класс стратегий, которому принадлежит оптимальное решение. Потом в этом классе находился оптимум. И, наконец, доказывалось, что найденное решение оптимально и на классе *всех* стратегий. Таким образом, получалось логически безупречное решение задачи. Правда, наличие этапа «угадывания» делает такое решение не совсем обычным. Но это имеет как отрицательную, так и положительную сторону.

Недостатки понятны: угадывание – это скорее искусство, чем наука. Хотя это искусство было развито весьма хорошо, и удалось угадать решения с весьма сложной структурой.

Достоинства же таковы. Во-первых, поскольку угадывание происходит на основе каких-то содержательных соображений, облегчается взаимодействие с «заказчиком» на том же содержательном языке.

А во-вторых, поскольку акцент делался на структуру, то в какой-то момент выяснился следующий любопытный факт. В некоторых задачах структура оптимального решения оказывается настолько сложной, что вряд ли можно говорить о практической применимости такого решения. Это может свидетельствовать только о том, что построенная модель не адекватна реальности. Причем распознать такую неадекватность на этапе построения модели весьма сложно. Например, структура равновесных по

---

[1]*Именно эти результаты, полученные представителями школы Ю.Б. Гермейера наиболее близки к результатам теории активных систем.*

Нэшу решений на классе позиционных стратегий в многошаговой игре двух лиц выглядит вполне нормально. А в аналогичной игре трех и более лиц появляются решения, содержащие такие конструкции, как биективное отображение отрезка на квадрат, что делает результат весьма сомнительным.

Второй метод появился позднее. По сути его можно охарактеризовать как применение идей динамического программирования для исследования иерархических игр. Правда, с этим возникают проблемы. Дело в том, что многие задачи теории иерархических игр изначально плохо приспособлены для решения методом динамического программирования. И сначала их нужно преобразовать. Если с равновесиями по Нэшу удалось справиться быстро (достаточна описанная выше «иерархическая» постановка), то с другим популярным принципом оптимальности – принципом максимального гарантированного результата – пришлось повозиться.

Но, в конце концов, удалось предложить альтернативное определение максимального гарантированного результата, удобное для дальнейшей работы. Для многих «разумных» задач доказана эквивалентность этого определения классическому.

Новое определение чисто формально проще старого. В нем уже изначально присутствует разделение задачи управления на задачу планирования и задачу стимулирования, что давно используется в теории активных систем. Оно допускает модификацию на случай игр с доброжелательными партнерами.

Новый метод тоже имеет свои плюсы и минусы. «Готовое» решение новым методом обычно длиннее, чем «вычищенное» решение традиционным способом. Но зато исключается этап угадывания, и решение сводится к преобразованиям формул, как правило, несложным и достаточно естественным. Кроме того, есть еще одна привлекательная сторона. В настоящее время найден целый ряд задач теории иерархических игр, которые не имеют решения в описанном выше смысле. При использовании второго метода легко распознать такие задачи. И можно не пытаться решать их точно, а искать, скажем, достаточные условия или еще как-то модифицировать постановку.

Обратимся к анализу полученных результатов.

3. Динамические модели

Подробно изучены два класса динамических моделей: многошаговые и дифференциальные игры. Впрочем, нет сомнения в том, что полученные результаты могут быть без особых проблем перенесены и на другие классы моделей, когда это возможно.

Интересно взаимоотношение между изученными классами моделей. Результаты, полученные в том и другом случае очень похожи. Но получаются они каждый раз независимо.

Понятно, что любую динамическую систему можно моделировать как с помощью дифференциальных, так и с помощью многошаговых игр. И построенные модели будут корректными лишь в том случае, когда решение дифференциальной игры будет пределом решений многошаговых игр при стремлении «длины шага» к нулю. Переход от дифференциальных игр к многошаговым и обратно интересен и еще по одной причине. Исследование многошаговых игр проще технически. Зато при использовании непрерывного времени появляется возможность использовать такое мощное орудие, как принцип максимума. К сожалению, на сегодняшний день нет техники, позволяющей легко осуществлять такой переход. В конкретных задачах его удается обосновать, но только тогда, когда известны структуры решений как многошаговых, так и дифференциальных игр.

Выяснилась особая важность правильно выбранного класса стратегий. Трудно представить себе динамическую систему, особенно экономическую, которая управлялась бы без обратной связи. Поэтому программные стратегии практически не рассматривались. С другой стороны установлено, что в существенно неантагонистическом случае нет необходимости постоянно отслеживать состояние управляемой системы: без потери качества управления можно наблюдать за ней лишь «время от времени». Этот эффект изучен детально.

Но и от «содержания» используемой информации существенно зависит как возможность решения получающейся задачи, так и корректность получаемых результатов. Причем для «правильной» постановки задачи недостаточно использования каких-то «внешних признаков» рассматриваемой динамической системы. Нужно понимание «внутренних механизмов» управления. Впрочем, накопленный опыт позволяет справляться с этими трудностями. Приведем пару примеров.

Рассмотрим игру двух лиц на классе позиционных стратегий с интегральными критериями.

В теории оптимального управления широко используется следующий технический прием. Задача с интегральным критерием сводится к задаче с терминальным критерием путем расширения фазового пространства, при котором «накопленное значение» критерия считается новой фазовой переменной. Получаются эквивалентные задачи.

В игровом случае ситуация существенно меняется, поскольку при «формальном» расширении фазового пространства меняется информированность игроков. При этом в двух получающихся задачах решения существенно отличаются. Но важнее другое. Обе задачи удается решить. Но решение на классе «нерасширенных» позиционных стратегий оказывается структурно довольно сложным, что позволяет сомневаться в возможности его практического использования. Решение «модифицированной» задачи выглядит значительно проще.

Другой пример связан с поиском ситуаций равновесия на классе позиционных стратегий. В играх двух лиц решение соответствующей задачи строится и выглядит достаточно естественно. А в случае игры трех и более лиц решения в общем случае найти не удается. И есть веские основания полагать, что решения этой задачи (в смысле редукции к серии «конечномерных» оптимизационных задач) попросту не существует. При некоторых дополнительных предположениях топологического характера задачу удается решить, но здесь в структуре решения появляются описанные выше «дикие» теоретико-множественные конструкции.

Ситуацию спасает «добавление игрокам памяти» о фазовой траектории. Задача сразу оказывается разрешимой. А структура найденных равновесных стратегий имеет достаточно прозрачную содержательную интерпретацию.

4. Неопределенность и риск

Еще один класс рассматривавшихся моделей – иерархические игры с неопределенностью.

Имеется две интерпретации такого рода моделей. При первой предполагается, что имеются некоторые параметры, выбор которых не подконтролен игрокам. Их выбирает некий сторонний субъект – «Природа». От остальных игроков он отличается отсутствием собственных интересов. При второй интерпретации неопределенность трактуется просто как неполная информированность игроков о параметрах управляемой системы. В большинстве случаев модель допускает обе интерпретации.

Чаще всего рассматриваются модели с асимметричной информацией, что довольно естественно. При первой интерпретации естественно предполагать, что подчиненный обладает более детальной информацией, чем начальник. При второй разумно предполагать, что игрок точно знает свои интересы и возможности, но может не знать, например, интересы партнеров.

Число и разнообразие изучавшихся моделей такого рода весьма велико, поэтому можно говорить об их классификации.

Первый классификационный признак – способ формализации имеющейся неопределенности.

Наиболее изучен параметрический способ формализации. При этом способе в модели явно присутствует некий параметр, который выбирает Природа. Этот выбор может осуществляться и случайным образом. При второй интерпретации соответствующие вероятности трактуются как субъективные.

Одна важная работа Н.С. Кукушкина посвящена модели, в которой игроку верхнего уровня известна лишь «трубка» в которой лежит график функции выигрыша партнера. Помимо полученного оригинального результата эта работа интересна тем, что при исследовании построенной там модели появился прообраз второго определения максимального гарантированного результата.

Еще одна работа посвящена модели, в которой функция выигрыша игрока не известна, а известны лишь некоторые ее свойства. Эта работа носила чисто прикладной характер. В ней рассматривался вопрос, явно сформулированный биржевыми брокерами. И на этот вопрос удалось найти нетривиальный исчерпывающий ответ.

В основном изучались модели, в которых неопределенными являются выигрыши игроков. Это и понятно. В отличие от, скажем, возможностей, интересы игроков непосредственно не наблюдаются. И функции выигрыша выбираются при построении модели с большой долей условности. Впрочем, изучались и модели, в которых от неопределенного фактора зависели множества управлений игроков. По факту такие задачи оказались даже проще, чем задачи исследования моделей с неточно известными функциями выигрыша.

Разумеется, можно исследовать модели, в которых присутствуют оба типа неопределенности. Но каких-то новых качественных эффектов, возникающих вследствие такого рода «объединения» на сегодняшний день не найдено.

Наибольшее число работ в рамках теории иерархических игр посвящено исследованию моделей, в которых предполагается осторожность игроков по отношению к неопределенности. В значительной степени это обусловлено основными методологическими установками, идущими от Ю.Б. Гермейера.

Впрочем, рассматривались и модели, в которых наличествует вероятностная мера на множестве неопределенных факторов и эта мера используется для описания отношения игроков к неопределенности. Это направление очень популярно на западе. Следует признать, что получающиеся при этом задачи оказываются посложнее.

Причину этого усложнения можно понять при использовании нового метода решения иерархических игр. При таком подходе решение задачи сводится к перестановке кванторов. При этом одноименные кванторы можно переставлять свободно, а для перестановки разноименных кванторов требуется выполнение определенных условий. При появлении стохастики к классическим кванторам общности и существования добавляется еще «квантор» вычисления математического ожидания. Возможности для перестановки кванторов в таком случае, разумеется, уменьшаются.

Традиционно при описании отношения игроков к риску используется принцип риск-нейтральности. Новый метод исследования иерархических игр сделал возможным исследовать модели, в которых игроки пользуются принципом Value at Risk. Это еще усложняет задачу, но позволяет более гибко описывать отношения игроков к риску. А управление рисками в последнее время стало очень модной областью исследования.

В основном исследовались статические модели принятия решений в условиях неопределенности. Попытки перенести результаты на случай модели с динамическими управляемыми системами тоже предпринимались. Разумеется, задачи здесь получаются более сложными. Но какого-то «синергетического» эффекта от одновременного рассмотрения динамики и неопределенности пока обнаружено не было. Поэтому на сегодняшний день представляется разумным исследовать модели этих двух классов по отдельности.

Бóльшая часть работ посвящена изучению игр двух лиц с правом первого хода у одного из игроков. Этому есть свое объяснение. Разумеется, есть потребность исследования иерархий со многими участниками. Но здесь возникает большое число проблем, главным образом связанных с постановками соответствующих задач в случае, когда число участников больше двух. Появление «Природы» как некоторого третьего игрока, не совсем полноправного, является естественным шагом в данном направлении. Это позволяет как-то решать возникающие проблемы с постановками задач и оттачивать технику их решения.

Модели с равноправными участниками в условиях внешней неопределенности тоже рассматривались, но здесь появление «лишнего» игрока не вносит ничего принципиально нового. Поэтому данное направление пока не кажется актуальным.

5. Модели с ограничениями на доступ к информации

В данном разделе речь будет идти об информированности игроков о действиях партнеров. Это, пожалуй, один из центральных вопросов теории иерархических игр. В конце концов, в схеме, описанной в параграфе 1, игра Γ_* отличается от игры Γ чаще всего тем, что в ней явно описываются процессы обмена информацией при управлении системой. В простейших моделях рассматриваются два крайних случая: либо игрок имеет полную информацию о действиях какого-то своего партнера, либо не имеет такой информации вовсе. Разумеется, возможны и промежуточные случаи. Они сложнее, поэтому стали изучаться позже. Здесь можно выбелить два класса постановок.

В одном из них ограничения на доступную игрокам информацию задаются «правилами игры». Такого типа модели являются классическими. По сути именно к этому классу моделей относятся позиционные игры фон Неймана. Поэтому речь здесь должна идти о тех ограничениях на структуру игры, при которых «решение» игры $Г_*$ может быть описано в терминах игры Г.

С этим удалось достаточно хорошо разобраться. Оказалось, что соответствующие задачи близки к задачам теории динамических игр и их решения очень похожи.

В другом классе постановок речь идет о синтезе рациональных процедур обмена информацией. Здесь задачи получаются менее традиционными.

Первые результаты были получены достаточно давно. Довольно естественным является тот факт, что увеличение информированности игрока не может приводить к уменьшению его выигрыша. Чуть более неожиданным явился обнаруженный эффект «насыщения»: с какого-то момента увеличение информированности не приводит к увеличению выигрыша. Например, если рассматриваются игры двух лиц с правом первого хода у одного из игроков и эффективность управления оценивается максимальным гарантированным результатом этого игрока, то оптимальным является уже способ обмена информацией, описанный в примере из параграфа 1.

Таким образом, «оптимальные» способы обмена информацией во многих случаях удалось найти. Но при этом выяснился один существенный недостаток такого рода постановок: в нетривиальных случаях оптимальный способ обмена информацией предполагает обмены очень большими объемами информации. Естественный путь преодоления такого рода проблем состоит в том, чтобы явно учесть ограничения на объемы обрабатываемой информации уже при постановке задачи. Здесь возникает много трудностей, но появляется и много интересного.

Первая трудность связана с тем, что задача синтеза рациональных способов обмена информацией принципиально является многокритериальной: с одной стороны хочется повысить эффективность управления, а с другой – уменьшить объемы обрабатываемой информации. Есть два довольно естественных способа свертки этих двух критериев: один из них можно «превратить» в ограничение. Получается пара в известном смысле двойственных задач. Любопытно, что в большинстве случаев одна из задач этой пары оказывается значительно сложнее другой. Впрочем, возможны и другие способы свертки. Так линейный способ свертки естественно интерпретируется как учет в критерии затрат на обработку информации.

Более существенная проблема связана с тем, что само понятие «количество информации» в настоящее время не имеет единого способа формализации. И вообще не понятно, может ли оно быть до конца формализовано. Можно предложить целый ряд способов формализации этого понятия. Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки. Соответственно получается целый ряд довольно разнообразных теоретико-игровых задач.

Появление в модели явного описания количества информации позволяет учесть в ней и ряд новых содержательных моментов, которые до сих пор не исследовались. Например, можно учесть в модели наличие ошибок при передаче информации, возникающих либо по умыслу одного из игроков, либо из-за технических сбоев при передаче.

Возможность явно учитывать в моделях ограничения на объем передаваемой информации позволяет построить ряд моделей, связывающих целесообразность децентрализации управления сложной системой с объемами необходимой для эффективного управления информации. Таким образом, удалось получить формальное подтверждение одного из центральных тезисов информационной теории иерархических систем Ю.Б. Гермейера и Н.Н. Моисеева.

В последнее время экономисты (как академические ученые, так и практикующие бизнесмены) все чаще говорят о необходимости учета сложности процессов управления. Поэтому актуальность проблемы построения математических моделей, учитывающих этот аспект процедур принятия решений, не вызывает сомнения. Понятно, что сложность процедуры управления и объем используемой при этом информации – это не совсем одно и то же. Но понятно также, что ограничение одного из этих показателей неизбежно накладывает ограничения на другой. А поскольку эффективных способов описания сложности процедур управления пока не предложено, можно в качестве замены использовать количество информации.

Наконец, учет ограничений на объем используемой информации во многих случаях «регуляризует» рассматриваемую задачу, делая ее решение в каком-то смысле менее чувствительным к малым изменениям параметров модели. Да и для появления «диких» теоретико-множественных конструкций остается меньше возможностей, что тоже приятно.

6. Устойчивость

Если рассматривать задачи теории иерархических игр как прикладные, то естественным образом встает вопрос об их устойчивости, т.е. о непрерывности зависимости решения задачи от параметров исследуемой модели. В чуть иной форме тот же вопрос возникает, если предполагается численное решение задачи. Здесь нет ничего нового.

Специфика теории иерархических игр состоит в том, что совсем нетрудно «наткнуться» на класс задач, решение которых неустойчиво «почти всегда». Простейший пример – поиск ситуаций равновесия по Нэшу в многошаговой игре трех лиц на классе позиционных стратегий.

В этом смысле теория иерархических игр тоже не уникальна. Например, подобные эффекты возникают при исследовании метеорологических уравнений. Но если в последнем случае такая неустойчивость связана, видимо, с природой моделируемых процессов, то в теории иерархических игр во всех известных случаях подобных проблем можно избежать, меняя постановку задачи. Накопленный опыт позволяет увидеть возможные проблемы уже на ранних этапах построения моделей.

В большой степени такого рода неустойчивость связана с выбором неверных способов моделирования информированности игроков. Все имеющиеся способы моделирования привязаны в основном к «синтаксису» передаваемых сообщений. При этом нередко оказывается, что при (бесконечно) малом изменении параметров модели «смысл» того или иного сообщения может поменяться весьма существенно. А даже в обыденной жизни нетрудно найти ситуации, когда получение одного бита информации способно кардинально поменять поведение человека.

Но понимание этого позволяет и разрешить многие проблемы. Например, во многих задачах большей устойчивости удается добиться, включая в описание процесса возможности добровольного обмена не обязательно достоверной информацией. Это усложняет описание модели, но делает ее более осмысленной. Кстати говоря, тот же прием можно интерпретировать как передачу прав по выбору управлений от игрока к его партнеру.

Разумеется, не все проблемы могут быть решены только правильной постановкой задачи. В большинстве естественных классов задач имеются «неустойчивые». Причем чаще всего такими «нехорошими» свойствами обладают самые простые линейные модели. На этот случай в [18] развита методология и предложены достаточно универсальные методы исследования устойчивости и регуляризации неустойчивых задач. Кстати говоря, при втором из описанных в параграфе 1 методе исследования иерархических игр, предлагаемые в [18] конструкции выглядят особенно естественными.

Заметим, что в результате развития идей из [18] возникла теория мягких множеств [19]. Этот аналог теории нечетких множеств Л. Заде [20] в последнее время становится популярным за рубежом под названием серых (gray) множеств именно в теоретико-игровых задачах.

7. Неполностью сформированные модели

Понятие, вынесенное в название данного раздела, появилось уже в 1971 г. в монографии [5]. Важность выделения описываемых этим понятием моделей заключается в том, что не нужно пытаться найти решения задач, относящихся к такого рода моделям, поскольку данных для этого все равно недостаточно. А следует думать о способах дополнения таких «моделей».

К данной категории можно отнести два популярных класса моделей: игры с векторными критериями и игры с запрещенными ситуациями. Играм с векторными критериями посвящены многочисленные исследования, но по большей части они не относятся к теории иерархических игр в том смысле, как это понимается в данном обзоре. Игры с запрещенными ситуациями исследованы меньше. Некоторые из подходов к их исследованию можно найти в обзоре [11,12].

Следует отметить, что в основополагающей монографии [6] именно игра с запрещенными ситуациям рассматривалась как «основная» модель. Правда, после короткого замечания о том, что ее исследование следует сводить к исследованию игры с распадающимися ограничениями, основное внимание переключалось на изучение таких полностью сформированных моделей.

Однако во многих задачах теории иерархических игр учет наличия запрещенных ситуаций явно напрашивается.

Например, уже решение классической игры Γ_2, использованной в качестве примера выше, предполагает наказание второго игрока за отклонение от предложенного ему плана. Здесь явно упускается из виду известный на практике принцип соответствия строгости наказания тяжести совершенного проступка. В жизни этот принцип чаще всего соблюдается. Или, во всяком случае, у игрока имеется возможность отказаться от «игры». Если модель не учитывает ни того, ни другого, она может оказаться неадекватной. Учет данного принципа неизбежно ведет к исследованию игры с запрещенными ситуациями.

Та же картина возникает, когда один из игроков имеет возможность управлять ограничениями деятельности партнеров.

Таким образом, данный класс моделей заслуживает, может быть, большего внимания, чем ему уделялось до сих пор.

8. Некоторые направления дальнейших исследований

Задачи теории иерархических игр весьма разнообразны. И продолжать их решение можно еще долго. Другое дело, что с каждым новым решением все бóльшие вопросы вызывает ценность полученных результатов. Хорошо еще, если исследование стимулировано какими-то потребностями практики. А если задача решается из чисто академического интереса, проблема встает особенно остро. Поэтому ощущается насущная потребность в каких-то обобщающих результатах. В идеале хотелось бы видеть «общую постановку» задачи теории иерархических игр и саму теорию с развитой «дедуктивной структурой».

Такая потребность ощущается довольно давно. Но в последнее время получены некоторые результаты, позволяющие как-то подступиться к решению данной проблемы. Во всяком случае, появились основания считать, что язык, на котором может быть сформулирована упомянутая «общая постановка» может быть похож на язык родов структур Н. Бурбаки или язык математической логики. Правда, здесь все не очень просто, поскольку языка логики первого порядка явно не достаточно. А более продвинутые разделы логики сами достаточно сложны.

Важность появления «общей постановки» определяется и еще одним обстоятельством. Каждый раз, строя модель для исследования, мы принимаем те или иные гипотезы. Если в результате исследования соответствующей задачи выявляется какой-то интересный эффект, то, естественно, хочется понять, какие из принятых гипотез «отвечают» за этот эффект, а какие являются несущественными. Для этого приходится рассматривать ряд аналогичных задач. Но при современной технике исследования решение каждой задачи – это весьма трудоемкий процесс. Хотя по факту такое решение сводится к тождественному преобразованию какой-то формулы исчисления предикатов. С этим вполне мог бы справиться и компьютер, но для этого необходим переход на новый уровень формализации.

За годы исследования теории иерархических игр был обнаружен ряд задач, которые не удается решить. С появлением нового метода стало понятно, что решение в большинстве случаев не удается найти потому, что его просто не существует. В некоторых классах задач удалось выделить индивидуальные «неразрешимые» задачи. И даже понятно, как могло бы выглядеть доказательство их неразрешимости. Проблема заключается лишь в отсутствии формального определения разрешимости.

Выяснение этого вопроса интересно по нескольким причинам. Чисто математический интерес понятен. Важность распознавания неразрешимости в контексте «машинного» решения задач тоже очевидна. Но можно предполагать, что неразрешимость является выражением и каких-то глубоких черт моделируемой действительности, таких как «свобода воли», «творчество», различие между «искусственным» и «естественным» интеллектом и т.п.

Второе из возможных направлений исследования связано с уточнением понятия «информация». В классических моделях информация занимает центральное место, но основной акцент делается на наличии или отсутствии той или иной информации. Из содержательных соображений понятно, что интерес представляют и другие «свойства» информации: достоверность, ценность, и т.д. Попытки описать эти свойства делались. Полученные результаты свидетельствуют скорее о том, что выбранные способы формализации были не совсем адекватными.

Понятие информации сложно и многогранно. И надежды получить адекватное формальное описание в общем случае кажутся несбыточными. Если же ограничиваться лишь задачами принятия решений, то надежда получить что-то содержательное остается. В конце концов, удалось же получить адекватное описание информации для задач ее передачи.

В последнее время экономисты (как академические ученые, так и практикующие бизнесмены) все чаще говорят о необходимости учета сложности процессов управления. Да и в данном обзоре это понятие в той или иной форме возникало не раз. Поэтому его введение в теоретико-игровые модели напрашивается. А исследование уже самых грубых моделей показало, что можно получить достаточно содержательные результаты.

Проблема заключается в следующем. «Сложность» – это понятие конструктивной математики. Теоретико-игровые модели сложны уже сами по себе. Перевод на язык конструктивной математики усложняет их еще больше, делая плохо обозримыми. Определенный оптимизм внушает следующее обстоятельство. В последнее время специалистам по теории алгоритмов удалось хорошо продвинуться в направлении упрощения описаний своих результатов. Может быть, новый язык и поможет в теории игр.

И последнее. На практике иерархические системы обычно бывают многоуровневыми и многоэлементными. Исследовались же пока лишь гораздо более простые (в смысле наличия субъектов и связей между ними) модели. Основная проблема заключается в отсутствии естественных способов описания отношения к неопределенности элементов сложных систем.

В тех же случаях когда задачи удается формализовать, реализуется один из двух крайних случаев: либо задача весьма просто сводится к исследованию игры двух лиц, либо она вовсе не поддается решению. Что может лежать «между» этими двумя крайностями, весьма интересно.

Литература

1. ВАТЕЛЬ И.А., ЕРЕШКО Ф.И. *Математика конфликта и сотрудничества.* М: Знание, 1973. – 64 с.
2. ВАСИН А.А. *Модели динамики коллективного поведения.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 155 с.
3. ВАСИН А.А. *Некооперативные игры в природе и обществе.* М.: МАКС Пресс, 2005. – 412 с.
4. ВАСИН А.А., МОРОЗОВ В.В. *Теория игр и модели математической экономики.* М.: МАКС Пресс, 2005. – 271 с.
5. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: Наука, 1971. – 383 с.
6. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* М.: Наука, 1976. – 327 с.
7. ГОРЕЛИК В.А. *Теория игр и исследование операций.* М.: Моск. ин-т нефтехим. и газ. промышл., 1978. – 94 с.

8. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах.* М.: Радио о связь, 1982. – 144 с.
9. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* М.: Радио о связь, 1991. – 288 с.
10. ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Очерк тенденций развития теории иерархических игр* / Теория активных систем. Труды Юбилейной международной научно-практической конференции. М.: ИПУ РАН, 1999. С. 70 – 92.
11. ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Игры с запрещенными ситуациями. Модели с жесткими ограничениями* // Автоматика и телемеханика. 2010. № 1. С. 118 – 129.
12. ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Игры с запрещенными ситуациями. Модели с нежесткими ограничениями* // Автоматика и телемеханика. 2010. № 5. С. 110 – 121.
13. ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Динамические модели конфликтов I. Язык моделирования* // Автоматика и телемеханика. 2014. № 11. С. 127 – 149.
14. ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Динамические модели конфликтов II. Равновесия* // Автоматика и телемеханика. 2014. № 12. С. 56 – 77.
15. ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Динамические модели конфликтов III. Иерархические игры* // Автоматика и телемеханика. 2015. № 2. С. 89 – 106.
16. КУКУШКИН Н.С., МОРОЗОВ В.В. *Теория неантагонистических игр.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 104 с.
17. КОНОНЕНКО А.Ф., ХАЛЕЗОВ А.Д., ЧУМАКОВ В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности.* – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.
18. МОЛОДЦОВ Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности.* М.: Наука, 1987. – 280 с.
19. МОЛОДЦОВ Д.А. *Теория мягких множеств.* М.: УРСС, 2004. – 351 с.
20. ОРЛОВСКИЙ С.А. *Проблемы принятия решений при нечеткой информации.* М.: Наука, 1981. – 208 с.
21. *Современное состояние теории исследования операций.* Под ред. Н.Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. – 464 с.