УДК 62-506:62-505.5

ХАРАКТЕРИСТИКА И ОПТИМАЛЬНОСТЬ АДАПТИВНЫХ МЕХАНИЗМОВ

ЦЫГАНОВ В. В.

(Москва)

Рассматривается задача оптимального синтеза адаптивного механизма функционирования (АМФ) активной системы, включающей центр и дальновидный активный элемент (АЭ) с настраиваемой стохастической моделью ограничений. Найдены достаточные условия оптимальности АМФ, прогрессивных по плану. Вводится характеристика АМФ, с помощью которой получены необходимые и достаточные условия оптимальности АМФ в отсутствие прогрессивности по плану. На их основе найдены конструктивные необходимые и достаточные условия оптимальности процедуры стимулирования АМФ при заданных процедурах прогнозирования, планирования и управления.

1. Введение

Эффективность любой системы управления зависит, прежде всего, от степени адекватности отражения в ней объекта управления. Каждый шаг, расширяющий и уточняющий знания об объекте, повышающий уровень адекватности его модели, неизбежно приводил к росту эффективности управления. В адаптивных механизмах функционирования (АМФ) активных систем [1–3] текущая информация о состояниях элементов используется центром при прогнозировании, планировании и стимулировании для достижения цели системы в целом. Соответственно АМФ включает рекуррентную процедуру прогнозирования (I), а также процедуры планирования (π) и стимулирования (f) и обозначается $\Sigma=(I, \pi, f)$. При построении АМФ обычно решаются задачи максимизации выигрыша центра в каждом периоде [1–5], минимизации средних потерь при прогнозировании (например, при идентификации структуры АЭ, опознавании образов и классификации) [6, 7], минимизации суммы средних потерь и затрат на управление [8].

Рассмотрим функционирование системы в дискретные моменты времени (периоды) $t=0, 1, 2, \ldots$. Пусть в периоде t компактное множество возможных состояний системы $Y(\mathbf{p}_t)\subset E^n$ определяется параметром $\mathbf{p}_t$ (потенциалом системы), неизвестным центру, $\mathbf{p}_t\in P_t$. Обозначим $A(\mathbf{p}_t)$ – множество состояний АЭ, при которых достигается экстремум целевой функции центра на множестве $Y(\mathbf{p}_t)$. В основе оптимизации АМФ $\Sigma=(I, \pi, f)$ лежит требование принадлежности множества решений игры дальновидных элементов $R(\Sigma, \mathbf{p})$ множеству $A(\mathbf{p})$

$$(1)\qquad R(\Sigma, \mathbf{p})\subset A(\mathbf{p})\quad \forall \mathbf{p}\in P_t.$$

Формулировка этого условия является первым этапом синтеза АМФ.

Так, в [2] были получены достаточные условия оптимальности АМФ в виде (1). В [4] было показано, что они же являются необходимыми и достаточными для абсолютной оптимальности АМФ.

Обозначим через $W(\mathbf{p})$ границу $Y(\mathbf{p})$ АМФ Σ, при котором

$$(2)\qquad R(\Sigma, \mathbf{p})\subset W(\mathbf{p})\quad \forall \mathbf{p}\in P_t$$

называется прогрессивным [1, 2]. Такой механизм обеспечивает возможность восстановления границы $W(\mathbf{p})$ (и, следовательно, всего множества

$Y(\mathbf{p})$) на основе изучения выбираемых АЭ состояний (откликов). В свою очередь, это используется для точной идентификации структуры АЭ (т. е. параметров его модели ограничений) [1, 2], обучения опознаванию образов и классификации в активных системах [6, 7] и т. д. Условие (2) является частным случаем (1).

Второй этап синтеза заключается в построении АМФ, удовлетворяющего (1) или (2). Вначале для АМФ Σ необходимо определить множества решений игры дальновидных элементов $R(\Sigma, \mathbf{p})$. В свою очередь, для этого необходимо устранить неопределенности в целевой функции АЭ, связанные с будущими значениями потенциала и состояния активной системы на весь период его дальновидности (не говоря уже о прогнозе самого АМФ). Затем, подбирая механизм Σ таким образом, чтобы обеспечить выполнение (1) или (2), решают задачу синтеза оптимального или прогрессивного АМФ (вплоть до построения соответствующих процедур прогнозирования, планирования и стимулирования). Многообразие и сложность возникающих здесь задач (по сравнению с задачами синтеза АМФ недальновидных АЭ) во многом обусловлены разнообразием гипотез относительно моделей ограничений и способов устранения неопределенности в целевых функциях дальновидных АЭ. В отсутствие общего подхода к реализации второго этапа синтеза АМФ это породило стремление решать относительно частные задачи синтеза, рассматривая отдельно сравнительно простые случаи детерминированной [1–4] и стохастической [6–8] структуры АЭ, гарантирующий [1–6]и вероятностный [7] подходы к устранению неопределенности, другие специальные предположения (например, гипотезу индикаторного поведения элемента [4]) и т. д.

Далее, в указанных работах модели ограничений АЭ не зависели от настраиваемых параметров. Первая попытка рассмотрения модели ограничений АЭ с настраиваемыми параметрами была предпринята в [8].

В данной работе рассматривается общий конструктивный подход к реализации второго этапа синтеза АМФ дальновидного АЭ со стохастической настраиваемой моделью ограничений при произвольном способе устранения неопределенности относительно потенциала системы, основанный на использовании характеристики АМФ.

2. Решение игры

Пусть состояние АЭ в периоде t описывается вектором $\mathbf{y}_t=(y_{1t},\ldots$ $\ldots, y_{mt})\in Y(p_t)\subset E^m$, где $\mathbf{p}_t=(a_t, \xi_t)$ — векторный параметр модели ограничений (потенциала) АЭ, ξ_t — случайная помеха, $\xi_t\in\theta$, a_t — настраиваемый параметр — оценка, получаемая на основе процедуры прогнозирования:

(3) $$a_{t+1}=I(a_t, \mathbf{y}_t), \quad a_0=a^0.$$

Легко видеть, что $a_t\in A_t$, $\mathbf{p}_t\in P_t=(A_t\otimes\theta)$, где

(4) $$A_t\otimes Y_t \xrightarrow[I]{} A_{t+1}, \quad Y_t=Y(p_t), \quad A_0=\{a^0\}.$$

Здесь $A_t\otimes Y_t$ — прямое произведение множеств A_t и Y_t.

Будем вначале предполагать, что множество возможных значений настраиваемого параметра со временем не расширяется: $A_{t+1}\subset A_t$ [1], откуда

[1] Используя (4), нетрудно показать, что это условие имеет место, например, если $a_t\geqslant a_{t+1}\geqslant r$ при любых t, $t=0, 1,\ldots$

$P_{t+1}\subset P_t$, $t=0, 1, \ldots$ При заданном a свойства $Y(a, \xi)$, $W(a, \xi)$ в зависимости от ξ такие же, как и свойства $Y(\xi)$, $W(\xi)$ в [2], причем $Y(a, \xi)\supset \supset Y(a, \xi')$, $\xi>\xi'$, $\xi, \xi'\in\theta$.

При этом предполагается, что для любого $a\in A_t$, $\xi, \xi'\in\theta$

$$(5)\qquad I(a, \mathbf{y})\geqslant I(a, \mathbf{y}')\Leftrightarrow \mathbf{y}\in W(a, \xi),\quad \mathbf{y}'\in W(a, \xi'),\quad \xi>\xi',$$

причем равенство имеет место, если и только если $\xi=\xi'$. Отсюда следует

$$(6)\qquad I(a, \mathbf{y})>I(a, \mathbf{y}'),\quad \mathbf{y}\in W(a, \xi),\quad \mathbf{y}'\in \operatorname{int} Y(a, \xi).$$

Как обычно, предполагается, что поведение дальновидного АЭ определяется стремлением к максимизации критерия эффективности

$$(7)\qquad w(\varphi_t, \ldots, \varphi_{t+T})=\sum_{\tau=t}^{t+T}\rho^{\tau-t}\varphi_\tau,\quad \varphi_\tau=f(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{y}_\tau),\ \mathbf{x}_\tau=\pi(a_\tau),$$

где φ_τ — поощрение в периоде τ, T — число периодов, учитываемых АЭ, ρ — коэффициент дисконтирования, $\rho\leqslant 1$, $\mathbf{x}_\tau$ — план в периоде τ, $\tau= =0, 1, \ldots$, причем $f(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{y}_\tau)$ монотонно возрастает по каждой компоненте вектора $\mathbf{y}_\tau$ и убывает по компонентам $\mathbf{x}_\tau\in X_\tau=\{\mathbf{x}|\mathbf{x}=\pi(a_\tau),\ a_\tau\in A_\tau\}$. Последние, в свою очередь, возрастают по a_τ.

Рассматривается обычный порядок функционирования системы в периоде t. Вначале центр определяет оценку a_t (3) и назначает план $\mathbf{x}_t$ (7). Затем, после реализации случайного потенциала $\mathbf{p}_t$, АЭ выбирает состояние $\mathbf{y}_t$ и получает поощрение φ_t. При этом АЭ решает задачу оптимизации целевой функции (7) при некоторых прогнозных значениях его потенциала и состояния на весь период дальновидности.

Поскольку выбор состояния АЭ $\mathbf{y}_\tau$ (при данном потенциале $\mathbf{p}_\tau$) зависит от него самого, то естественно предполагать, что в качестве прогнозных значений рассматриваются состояния, максимизирующие целевую функцию (7). Введем оператор максимизации на множестве возможных состояний АЭ в периоде τ — $M_\tau=\max\limits_{\mathbf{y}_\tau\in Y(\mathbf{p}_\tau)}$ и оператор устранения неопределенности относительно потенциала АЭ в периоде τ — E_{ξ_τ}[2]. Положим $E_\nu^\mu=\prod\limits_{\tau=\nu}^{\mu}E_{\xi_\tau}$, $M_\nu^\mu=\prod\limits_{\tau=\nu}^{\mu}E_{\xi_\tau}M_\tau$. Тогда ожидаемый выигрыш АЭ при состоянии $\mathbf{y}_t$

$$(8)\qquad \hat{w}(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)=M_{t+1}^{t+T}\{w(\varphi_t, \ldots, \varphi_{t+T})\}=$$
$$=\varphi_t+\sum_{\tau=t+1}^{t+T}\rho^{\tau-t}M_{t+1}^{t+T}\{\varphi_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)\},$$

где $\varphi_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)\equiv f(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{y}_\tau)$, $\mathbf{x}_\tau=\pi(a_\tau)$, $a_{\tau+1}=I(a_\tau, \mathbf{y}_\tau)$, $\mathbf{y}_\tau\in Y(\mathbf{p}_\tau)$, $\mathbf{p}_\tau\in P_\tau$, $\tau= =\overline{t, t+T}$.

Множество возможных выборов АЭ (решение игры) имеет вид

$$(9)\qquad R(\Sigma, \mathbf{p})=\operatorname{Arg}\max_{y_t\in Y(\mathbf{p})}\hat{w}(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t).$$

---

[2] Естественным образом предполагается, что для функции $q(\xi)$, непрерывной на θ, найдется $\xi^*\in\theta$, такое, что $E_\xi q(\xi)=q(\xi^*)$.

Наконец, для простоты ниже будем предполагать

(10) $\quad A(\mathbf{p}) \subset W(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in P_t.$

Содержательно это означает, что оптимальный АМФ является прогрессивным.

3. Оптимальные сильнопрогрессивные механизмы

Пусть АМФ $\Sigma = (I, \pi, f)$ прогрессивен по оценке [1]

(11) $\quad M_t f(\pi(a), \mathbf{y}_t) \uparrow a, \quad a \in A_t.$

Обозначим

(12) $$F(\Sigma, p) = \operatorname{Arg} \max_{\mathbf{y} \in Y(\mathbf{p})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Для оптимальности АМФ Σ, прогрессивного по оценке, достаточно

(13) $\quad F(\Sigma, \mathbf{p}) \subset A(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in P_t.$

При этом

(14) $\quad R(\Sigma, \mathbf{p}) = F(\Sigma, \mathbf{p}).$

Доказательство этой и последующих теорем приведено в приложении. Заметим, что из теоремы 1 следует теорема о сильной прогрессивности [2] (для этого достаточно положить $A(\mathbf{p}) \equiv W(\mathbf{p})$).

4. Характеристика АМФ

Возьмем произвольные a_t, $a_t' \in A_t$, $a_t > a_t'$, $\xi_t \in \theta$. Тогда нетрудно показать, что (11) может иметь место лишь при $Y(a_t, \xi_t) \supset Y(a_t', \xi_t)$. В противном случае ($Y(a_t, \xi_t) \subset Y(a_t', \xi_t)$), очевидно, имеем

(15) $\quad M_t f(\pi(a), \mathbf{y}_t) \downarrow a, \quad a \in A_t.$

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть имеет место (13), (15). Тогда для оптимальности АМФ Σ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \mathbf{p} \in P$

(16) $\quad V(\Sigma, \mathbf{p}) \subset A(\mathbf{p}),$

(17) $$V(\Sigma, \mathbf{p}) = \operatorname{Arg} \max_{\mathbf{y}_t \in Y(\mathbf{p})} v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t),$$

(18) $$v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = \sum_{\tau = t}^{t+T} \rho^{\tau - t} E_{t+1}^{t+T} f(\tilde{\mathbf{x}}_\tau, \mathbf{z}_\tau),$$

где $\mathbf{z}_t = \mathbf{y}_t$, $\tilde{\mathbf{x}}_\tau = \pi(\tilde{a}_\tau)$, $\tilde{a}_\tau = I(\tilde{a}_{\tau-1}, \mathbf{z}_{\tau-1})$, $\mathbf{z}_\tau \in A(\tilde{\mathbf{p}}_\tau)$, $\tilde{\mathbf{p}}_\tau = (\tilde{a}_\tau, \xi_\tau)$, $\tau = \overline{t+1, t+T}$, $\tilde{a}_t = a_t$.

При этом

(19) $\quad R(\Sigma, \mathbf{p}) = V(\Sigma, \mathbf{p}) = F(\Sigma, \mathbf{p}).$

Функцию (18) будем называть характеристикой АМФ Σ. Пусть теперь отсутствует монотонность по оценке a, т. е. $A_t = A_{1t} \cup A_{2t}$ и при $a \in$

$\in A_{1t}$ имеет место (11), при $a\in A_{2t}$ — (15). Тогда, комбинируя условия теорем 1 и 2, получаем очевидное

Следствие 1. Для оптимальности АМФ Σ достаточно выполнения условий (13), (16)—(18), и при этом имеет место (19).

Таким образом, при построении оптимальных АМФ можно ограничиться рассмотрением процедур стимулирования в виде функций $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, множество максимумов которых принадлежит множеству оптимальных состояний $A(\mathbf{p})$.

5. Оптимальная процедура стимулирования

Решение задачи оптимального синтеза АМФ обеспечивается путем построения соответствующей процедуры стимулирования. Справедлива следующая

Теорема 3. Для оптимальности АМФ $\Sigma=(I, \pi, f)$ при условии (13), (15) необходимо и достаточно, чтобы при любых $\mathbf{p}_t\in P_t$, $\mathbf{y}_t\in A(\mathbf{p}_t)$

$$\text{(20)} \qquad \operatorname*{Arg\,max}_{\mathbf{y}_t\in Y(\mathbf{p}_t)} f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)\subset A(\mathbf{p}_t),$$

где функция $h(\cdot)$ такова, что

$$\text{(21)} \qquad f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)=h(a_t, a_{t+1})\uparrow a_{t+1} \quad \forall \mathbf{y}_t\in A_t,$$

$$\text{(22)} \qquad u(a_t, a_{t+1})=\sum_{\tau=t}^{t+T}\rho^{\tau-t}E_{t+1}^{t+T}\, h(\tilde{a}_\tau, \tilde{a}_{\tau+1})\uparrow a_{t+1},$$

где $a_{t+1}\in A_{t+1}$, $\tilde{a}_t=a_t$, $\tilde{a}_{t+1}=a_{t+1}$, $\tilde{a}_{\tau+1}=I(\tilde{a}_\tau, \mathbf{z}_\tau)$, $\mathbf{z}_\tau\in A(\mathbf{p}_\tau)$, $\mathbf{p}_\tau=(\tilde{a}_\tau, \xi_\tau)$, $\tau=\overline{t+1, t+T-1}$.

Пусть справедлив принцип благожелательности АЭ по отношению к центру: если $R(\sum, \mathbf{p})\cap A(\mathbf{p})\neq\emptyset$, то из множества решений игры (9) элемент выбирает состояние $y_t\in A(p)$, желательное для центра. Тогда имеет место очевидное

Следствие 2. Для оптимальности АМФ при условии (13), (15) необходимо и достаточно выполнения условий (21), (22).

Таким образом, как было показано выше, оптимальный АМФ основан на скалярных оценках a_{t+1} как образцах состояний векторного АЭ $\mathbf{y}_t$. Введем в рассмотрение скалярный АЭ, состояния которого есть $y_t^c=a_{t+1}$, а планы $x_t^c=a_t=y_{t-1}^c$. Такой АЭ будем называть сопряженным к рассматриваемому векторному АЭ. Очевидно, что характеристика АМФ (22) совпадает с характеристикой АМФ сопряженного АЭ с простейшей процедурой планирования $x_t^c=y_{t-1}^c$ и процедурой стимулирования $h(x_t^c, y_t^c)$. Заметим, что в случае скалярного АЭ при (10) понятия оптимальности и прогрессивности АМФ совпадают. Таким образом, для построения оптимального АМФ векторного АЭ необходимо решить задачу синтеза прогрессивного АМФ сопряженного АЭ (т. е., по существу, построить прогрессивную процедуру стимулирования $h(x_t^c, y_t^c)$. Примеры решения этой задачи приведены в [6, 7]. В частности, если I — процедура обучения опознаванию образов, то прогрессивный АМФ дается формулами (5) и (8) из работы [7]; если I — процедура самообучения классификации — то формулами (10), (11); если I — абсолютно оптимальный алгоритм идентификации — то формулами (18) той же работы. Зная $h(a_t, a_{t+1})$ и используя теорему 3, нетрудно теперь построить искомую процедуру стимулирования, например, в виде $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = h(a_t, a_{t+1})\nu(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$, где $\nu(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = 1$, если $\mathbf{y}_t \in A(p_t)$, и $\nu(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = 1-\varepsilon$, если $\mathbf{y}_t \bar{\in} A(\mathbf{p}_t)$, $\varepsilon > 0$.

6. Некоторые обобщения

Полученные теоремы можно обобщить на случаи нестационарного множества возможных состояний активного элемента и произвольных монотонно убывающих коэффициентов дисконтирования в (7).

Нестационарное множество возможных состояний. Пусть множество возможных состояний АЭ есть $Y(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in P_t$. Обозначим $P^t = \bigcup\limits_{\tau=t}^{t+T} P_\tau$. В этом случае нетрудно показать, что доказанные теоремы и следствия дают лишь достаточные условия оптимальности (при условии замены P_t на P^t).

Произвольные монотонно убывающие коэффициенты дисконтирования. Пусть $\Sigma = (I, \pi, f)$ и $w(\varphi_t, \ldots, \varphi_{t+T}) = \sum\limits_{\tau=t}^{t+T} \rho_\tau \varphi_\tau$, где $1 \geqslant \rho_\tau \geqslant \rho_{\tau+1}$. Для АМФ Σ построим характеристику (18) и положим $\rho = 1$. Тогда нетрудно показать, что доказанные теоремы и следствия дают достаточные условия оптимальности АМФ Σ.

В заключение отметим, что тенденции и перспективы построения АМФ с иллюстрациями на простой модели стационарного случайного АЭ рассмотрены в обзоре [7].

Полученные в работе результаты по синтезу адаптивных механизмов используются при переходе на новую систему управления развитием науки и техники в отрасли [9]. С их помощью осуществляется постепенная настройка планов, норм и нормативов централизованного и децентрализованного планирования, финансирования и стимулирования с целью обеспечения наиболее эффективного режима функционирования отраслевой системы управления в изменяющихся условиях функционирования.

Автор выражает искреннюю благодарность В. Н. Буркову за обсуждение результатов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Из (12), (13) следует $\forall \mathbf{p} \in P_t$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in X_t \quad \forall \mathbf{z} \in A(p) \quad \forall \mathbf{y} \in (Y(\mathbf{p})/A(\mathbf{p})). \tag{П.1}$$

Далее, учитывая свойство монотонности (11), а также определения оператора M_{t+1}^{t+T}, находим

$$\sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} \{ M_{t+1}^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - M_{t+1}^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} > 0. \tag{П.2}$$

Суммируя (П.1) и (П.2), с учетом определения (8) получаем $\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, откуда следует (14). Но тогда согласно (9) $R(\Sigma, \mathbf{p}) \subset A(\mathbf{p})$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2.

1. *Необходимость.* Пусть $R(\Sigma, \mathbf{p}) \subset A(\mathbf{p})$ $\forall \mathbf{p} \in P_t$. Тогда согласно (8), (9)

$$f(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) + \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} \{ M_{t+1}^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) M_{t+1}^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) \} > f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) \tag{П.3}$$

при любых $\mathbf{x}_t \in X_t$, $\mathbf{z}_t \in R(\Sigma, \mathbf{p})$, $\mathbf{y}_t \in (Y(\mathbf{p})/R(\Sigma, \mathbf{p}))$.

Введем функции

(П.4) $$v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) = \sum_{\tau=\nu}^{t+T} \rho^{\tau-\nu} E_{\nu+1}^{t+T} \widetilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu),$$

$$\widetilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) = f(\widetilde{\mathbf{x}}_\tau, \mathbf{z}_\tau), \quad \widetilde{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{x}_\nu, \quad \mathbf{z}_\nu = \mathbf{y}_\nu, \quad \widetilde{\mathbf{x}}_\tau = \pi(\tilde{a}_\tau),$$
$$a_\tau = I(a_{\tau-1}, \mathbf{z}_{\tau-1}), \quad \mathbf{z}_\tau \in A(\widetilde{\mathbf{p}}_\tau), \quad \widetilde{\mathbf{p}}_\tau = (\tilde{a}_\tau, \xi_\tau),$$
$$\tau = \overline{\nu+1, \nu+T}, \ \tilde{a}_\nu = a_\nu, \quad \nu = \overline{t, t+T-1}.$$

Заметим, что в соответствии с (18) $v_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) \equiv v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$ и

(П.5) $$v_{\nu-1}(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) = f(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) + \rho E_{\xi_\nu} v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{z}_\nu), \quad \mathbf{z}_\nu \in A(\mathbf{p}_\nu).$$

Учитывая свойство монотонности (15) и $I(a_t, \mathbf{z}_t) > I(a_t, \mathbf{y}_t)$, нетрудно получить

(П.6) $$\sum_{\tau=\xi}^{t+T} \rho^{\tau-t} \{M_\xi^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) - M_\xi^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)\} > 0, \quad \mathbf{z}_t \in A(\mathbf{p}_t),$$

$$\mathbf{y}_t \equiv Y(\mathbf{p}_t)/A(\mathbf{p}_t)$$

при любых ξ, $t+1 \leqslant \xi \leqslant t+T$. Отсюда, полагая $\xi = t+1$ и используя (П.3), получаем $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) > f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$, так что в соответствии с (12) имеет место $F(\Sigma, \mathbf{p}) = R(\Sigma, \mathbf{p})$. Отсюда в силу $X_t \supset X_{t+T}$ (из-за $A_t \supset A_{t+T}$) следует

(П.7) $$f(\mathbf{x}_{t+T}, \mathbf{z}_{t+T}) = M_{t+T} f(\mathbf{x}_{t+T}, \mathbf{y}_{t+T})$$

при любых $\mathbf{x}_{t+T} \in X_{t+T}$, $\mathbf{z}_{t+T} \in A(p_{t+T})$, $\mathbf{y}_{t+T} \in (Y(\mathbf{p}_{t+T})/A(\mathbf{p}_{t+T}))$, $\mathbf{p}_{t+T} \in P_{t+T}$. Теперь, используя определение (П.4), нетрудно показать

(П.8) $$v_{t+T-1}(\mathbf{x}_{t+T-1}, \mathbf{y}_{t+T-1}) = f(\mathbf{x}_{t+T-1}, \mathbf{y}_{t+T-1}) + \rho M_{t+T} \varphi_{t+T}(\mathbf{x}_{t+T-1}, \mathbf{y}_{t+T-1}).$$

Далее доказательство проводится по индукции. Предположим, что для некоторого ν, $t+1 \leqslant \nu \leqslant t+T-1$

(П.9) $$v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) = f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) + \sum_{\tau=\nu+1}^{t+T} \rho^{\tau-\nu} M_{\nu+1}^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu),$$

и покажем, что

(П.10) $$v_{\nu-1}(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) = f(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) + \sum_{\tau=\nu}^{t+T} \rho^{\tau-t} M_\nu^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu).$$

Используя последовательно то обстоятельство, что $M_\nu^{t+T} = E_{\xi_\nu} M_\nu M_{\nu+1}^{\nu+T}$, а также предположение (П.9), имеем

(П.11) $$f(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) + \sum_{\tau=\nu}^{t+T} \rho^{\tau-t} M_\nu^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) =$$

$$= f(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) + \rho E_{\xi_\nu} M_\nu v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu), \quad \mathbf{x}_\nu = \pi(a_\nu),$$

$$a_\nu = I(a_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}), \quad \mathbf{x}_{\nu-1} = \pi(a_{\nu-1}), \quad \mathbf{y}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu), \quad \mathbf{p}_\nu \in P_\nu.$$

Покажем теперь, что

(П.12) $$M_\nu v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) = v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{z}_\nu), \quad \mathbf{z}_\nu \in R(\Sigma, \mathbf{p}_\nu).$$

Заменяя в (П.3) t на ν, в силу $X_t \supset X_\nu$ (из-за $A_t \supset A_\nu$) получаем при $\mathbf{z}_\nu \in R(\Sigma, \mathbf{p}_\nu)$, $\mathbf{p}_\nu \in P_\nu$

(П.13) $$f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{z}_\nu) + \sum_{\tau=\nu+1}^{\nu+T} \rho^{\tau-t} \{M_{\nu+1}^{\nu+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{z}_\nu) - M_{\nu+1}^{\nu+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu)\} > f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu).$$

Далее, полагая в (П.6) $\xi=t+T$, $t=\nu$, имеем

(П.14)
$$\sum_{\tau=t+T}^{\nu+T} \rho^{\tau-\nu}\{M_{t+T}^{\nu+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu,\mathbf{y}_\nu)-M_{t+T}^{\nu+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu,\mathbf{z}_\nu)\}>0.$$

Из (П.13) и (П.14) находим

$$f(\mathbf{x}_\nu,\mathbf{z}_\nu)-\sum_{\tau=\nu+1}^{t+T}\rho^{\tau-\nu}\{M_{\nu+1}^{t+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu,\mathbf{z}_\nu)-M_{\nu+1}^{t+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu,\mathbf{y}_\nu)\}>f(\mathbf{x}_\nu,\mathbf{y}_\nu),$$

откуда следует (П.12). С другой стороны, в силу $R(\Sigma,\mathbf{p}_\nu)\subset A(\mathbf{p}_\nu)$ $\mathbf{z}_\nu\in A(\mathbf{p}_\nu)$, так как справедливо (П.5). Но тогда согласно (П.11) и (П.5) имеет место (П.10) при любых ν, $t+1\leqslant\nu\leqslant t+T$. Полагая $\nu=t+1$ и учитывая, что $v_t(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=v(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)$, из (П.3), (П.10) имеем

(П.15) $\quad v(\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_t)=\hat{w}(\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_t)>\hat{w}(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=v(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t).$

Следовательно, $V(\Sigma,\mathbf{p})=R(\Sigma,\mathbf{p})\subset A(\mathbf{p})$, что и требовалось доказать.

2. *Достаточность* доказывается теми же приемами, что и необходимость. Отличие заключается лишь в том, что в процессе доказательства вместо $R(\Sigma,\mathbf{p})$ рассматривается $V(\Sigma,\mathbf{p})$ и соответственно вместо M_{t+1}^{t+T} $\varphi_\tau(\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_t)$ берется $\varphi_\tau(\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_t)$.

Доказательство теоремы 3.

1. *Необходимость.* Если $\Sigma=(I,\pi,f)$ оптимален, то согласно (12), (19) имеет место условие (20). Зафиксируем некоторое $a_t\in A_t$ и рассмотрим $\mathbf{y}_t,\mathbf{y}_t'\in\bigcup_{\xi_t\in\theta}A(\mathbf{p}_t)$, такие, что $a_{t+1}=I(a_t,\mathbf{y}_t)>I(a_t,\mathbf{y}_t')=a_{t+1}'$. Используя (15) и (П.7), получаем $f(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)>f(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t')$. Следовательно, функция f монотонно возрастает при увеличении оценки a_{t+1}, и без ограничения общности ее можно представить в виде

(П.16) $\quad f(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=H(\mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t),a_{t+1}).$

Здесь функция H монотонно возрастает по своим аргументам и $\mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)$ не зависит от $a_{t+1}=I(a_t,\mathbf{y}_t)$. Последнее означает, что $\mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=\mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t')$ при любых $\mathbf{y}_t\in A(\mathbf{p}_t)$, $\mathbf{y}_t\in A(\mathbf{p}_t')$, таких, что $I(a_t,\mathbf{y}_t)\neq I(a_t,\mathbf{y}_t')$. Поскольку согласно (5) последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}_t\in W(\mathbf{p}_t)$, $\mathbf{y}_t'\in W(\mathbf{p}_t')$, $\mathbf{p}_t\neq\mathbf{p}_t'$ и $A(\mathbf{p}_t)\subset W(\mathbf{p}_t)$, то

(П.17) $\quad \mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=\mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t'),\quad \mathbf{y}_t\in A(\mathbf{p}_t),\quad \mathbf{y}_t'\in A(\mathbf{p}_t'),\quad \mathbf{p}_t=\mathbf{p}_t'.$

С другой стороны, из (20) следует, что при $\mathbf{y}_t$, $\hat{\mathbf{y}}_t\in A(\mathbf{p}_t)$ $f(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=f(\mathbf{x}_t,\hat{\mathbf{y}}_t)$, откуда в соответствии с (П.16) получаем $\mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=\mu(\mathbf{x}_t,\hat{\mathbf{y}}_t)$. Поскольку $A(\mathbf{p})\subset W(\mathbf{p})$, то $I(a_t,\mathbf{y}_t)=I(a_t,\hat{\mathbf{y}}_t)$. Следовательно,

(П.18) $\quad \mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=\mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t')\quad \forall\mathbf{y}_t\in A(\mathbf{p})\quad \forall\mathbf{y}_t'\in A(\mathbf{p}')\quad \forall\mathbf{p},\mathbf{p}'\in P_t.$

Но из (П.17), (П.18) следует, что $\mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)$ не зависит от $\mathbf{y}_t$ при $\mathbf{y}_t\in A(\mathbf{p})$, т. е.

(П.19) $\quad \mu(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=\xi(\mathbf{x}_t)\quad \forall\mathbf{y}_t\in A(\mathbf{p}),\quad \mathbf{p}\in P_t.$

Подставляя (П.19) в (П.16), учитывая, что $\mathbf{x}_t=\pi(a_t)$, и обозначая $h(a_t,a_{t+1})\equiv\equiv H(\xi(\pi(a_t),a_{t+1})$, получаем $f(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=h(a_t,a_{t+1})\uparrow a_{t+1}$ $\forall\mathbf{y}_t\in A(\mathbf{p}_t)$, $h(a_t,a_{t+1})>>f(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t')$ $\forall\mathbf{y}_t'\in(Y(\mathbf{p}_t)/A(\mathbf{p}_t))$.

Отсюда имеем

(П.20)
$$V(\Sigma,\mathbf{p}_t)=\operatorname{Arg}\max_{\substack{\mathbf{y}\in\bigcup A(a_t,\xi)\\ \xi\in[b,\xi_t]}}\sum_{\tau=t}^{t+T}\rho^{\tau-t}E_{t+1}^{t+T}h(\bar{a}_\tau,\bar{a}_{\tau+1})=$$
$$=\operatorname{Arg}\max_{\substack{\mathbf{y}_t\in\bigcup A(a_t,\xi)\\ \xi\in[b,\xi_t]}}u(a_t,a_{t+1}).$$

Но согласно теореме 2 в силу оптимальности Σ необходимо $V(\Sigma, \mathbf{p}) \subset A(\mathbf{p})$ $\forall \mathbf{p} \in P_t$. Тогда из (9) следует, что $\operatorname{Argmax}_{y_t \in Y(\mathbf{p})} u(a_t, a_{t+1}) \subset W(\mathbf{p})$. Но для этого в силу (6) необходимо и достаточно, чтобы $u(a_t, a_{t+1})$ являлась монотонно возрастающей функцией a_{t+1} $\forall a_{t+1} \in A_{t+1}$, что и требовалось доказать.

2. *Достаточность.* Из (20) $F(\Sigma, \mathbf{p}) \subset A(\mathbf{p})$, а из (6) и (II.20) следует, что $V(\Sigma, \mathbf{p}) \subset W(\mathbf{p})$ $\forall \mathbf{p} \in P_t$. Но тогда из (6), (16), (17) нетрудно получить, что $V(\Sigma, \mathbf{p}) \subset A(\mathbf{p})$, и из теоремы 2 следует искомое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В., Цыганов В. В., Черкашин А. М.* Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука, 1984.
2. *Бурков В. Н., Цыганов В. В.* Адаптивные механизмы функционирования активных систем. I // АиТ. 1985. № 9. С. 87–94.
3. *Цыганов В. В.* Адаптивные механизмы функционирования активных систем. II // АиТ. 1985. № 10. С. 116–123.
4. *Цыганов В. В.* Адаптивные механизмы в активных системах с индикаторным поведением элементов // Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: Ин-т проблем управления, 1985. С. 69–75.
5. *Ашимов А. А., Бурков В. Н., Джапаров Б. А., Кондратьев В. В.* Согласованное управление активными производственными системами. М.: Наука, 1986.
6. *Tsyganov V. V.* Adaptive control of hierarchical socio-economic systems // Preprints of the 4th IFAC – IFORS symposium of the large scale systems. Zurich, 1986. V. 2. P. 644–648.
7. *Бурков В. Н., Цыганов В. В.* Тенденции и перспективы построения адаптивных механизмов функционирования активных систем // Измерения, контроль, автоматизация. 1985. № 4. С. 53–60.
8. *Burkov V. N., Tsyganov V. V.* Stochastic mechanisms of the active systems functioning // Preprints of the 2nd IFAC symposium on stochastic control. Moscow, 1986. Pt. 1. P. 259–263.
9. *Бурков В. Н., Суходаев А. А., Цыганов В. В.* Проблемы отраслевого управления развитием науки и техники на основе полного хозяйственного расчета и самофинансирования // Тез. докл. 2-го Всесоюз. научно-практического совещания «Проблемы повышения эффективности использования научно-технического потенциала». М.: ВИНИТИ, 1987. С. 70–72.