УДК 62-505.5:65.01

АДАПТИВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

II. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

ЦЫГАНОВ В. В.

(Москва)

Рассматривается решение задачи синтеза оптимального адаптивного механизма функционирования двухуровневой динамической активной системы в предположении, что активные элементы решают задачу оптимизации с прогнозами потенциала, состояния и механизма. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности в терминах законов планирования, распределения ресурсов и стимулирования.

1. Введение

В [1] была дана общая постановка задачи оптимального синтеза и установлены в общем виде достаточные условия оптимальности адаптивных механизмов функционирования (теорема 2). Кроме того, также в общем виде были установлены необходимые и достаточные условия существования среди адаптивных механизмов таких, которые имеют, вообще говоря, большую эффективность, чем правильные (теорема 3). С другой стороны, для получения конструктивных результатов и построения адаптивных механизмов функционирования реальных организационных систем [2] требуется перейти от этих условий к соответствующим зависимостям и ограничениям на адаптивные процедуры планирования, распределения ресурсов и стимулирования. В свою очередь, для этого необходимо принять те или иные гипотезы относительно поведения активных элементов и т. п. В связи с этим в настоящей работе изучается задача построения адаптивных механизмов функционирования, удовлетворяющих условиям теорем 2, 3 [1].

2. Решение игры элементов

Как указывалось выше, особенностью адаптивного планирования и распределения ресурсов является использование в каждом периоде информации о функционировании системы в предшествующих периодах. Рассмотрим наиболее простую процедуру адаптивного планирования, в соответствии с которой учитываются планы и состояния активных элементов (АЭ) лишь в одном предшествующем периоде. Везде ниже используются обозначения, принятые в [1]. В частности, множество возможных состояний i-го АЭ в периоде $t(\mathbf{y}_t^i)$ обозначено $Y_t^i(\mathbf{p}_t)$, $i=\overline{1,N}$, где $\mathbf{p}_t$ – потенциал системы, $\mathbf{p}_t\in P_t$.

В соответствии с процедурой адаптивного планирования план i-го АЭ на период $t+1(x_{t+1}^i)$ определяется как

$$(1)\qquad \mathbf{x}_{t+1}^i=\pi_t^i(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t,\mathbf{r}_t),\quad \mathbf{x}_0=\mathbf{x}^0,\quad \mathbf{r}_0=\mathbf{r}^0,\quad r=\overline{1,N},\quad \pi=\{\pi_t^i\},$$

где π_t^i – вектор-функция размерности m. Уравнение, определяющее величину ресурсов, выделяемых центром i-му АЭ на период $t+1$ по окончании периода $t(\mathbf{r}_t^i)$, имеет вид

$$(2)\qquad \mathbf{r}_t^i=Q_t^i(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t),\quad \mathbf{x}_0=\mathbf{x}^0,\quad Q=\{Q_t^i\},$$

где Q_t^i – вектор-функция размерности m.

Предполагается, что π_t^i, Q_t^i являются монотонно возрастающими функциями своих аргументов. Предполагается также слабая прогрессивность механизма функционирования [1] (т. е. процедура стимулирования f_t^i — возрастающая функция y_{jt}^i) и, кроме того, f_t^i — убывающая функция x_{jt}^i (см. (5) [1]).

Отметим, что характерной особенностью рассматриваемой задачи является изменение законов планирования (1) и распределения ресурсов (2) во времени вследствие адаптации механизма функционирования к изменениям потенциала и цели системы.

Таким образом, в условиях неопределенности потенциала системы дальновидный АЭ решает задачу выбора оптимального состояния с прогнозом как потенциала и состояния системы, так и механизма функционирования (или, коротко, задачу ОПСМ — оптимизации с прогнозом потенциала, состояния и механизма).

Многообразие задач ОПСМ, очевидно, чрезвычайно велико. Поэтому дальнейшее рассмотрение будет проведено на примере класса задач ОПСМ, в которых предполагается стационарность механизма функционирования $\Sigma=(\pi, Q, f)$:

$$\pi_\tau^i(\cdot)=\pi_t^i(\cdot),\quad Q_\tau^i(\cdot)=Q_t^i(\cdot),\quad f_\tau^i(\cdot)=f_t^i(\cdot),\quad \tau=\overline{t, t+T}. \tag{3}$$

Например, (3) имеет место в простейшем случае, когда каждый элемент решает задачу ОПСМ, экстраполируя действующий механизм функционирования на перспективу. Далее, пусть i-й АЭ при решении задачи ОПСМ использует свои собственные прогнозы множеств возможных значений потенциала $P_{i\tau}$ ($P_{i\tau}\subset P_\tau$), а также прогнозы множеств возможных выборов элементов системы $Y_{i\tau}^k(\mathbf{p}_\tau)$, $k=\overline{1, N}$ ($\mathbf{p}_\tau\in P_{i\tau}$, $Y_{i\tau}^k(\mathbf{p}_\tau)\subset Y_\tau^k(\mathbf{p}_\tau)$), $\tau=\overline{t, t+T}$, $i=\overline{1, N}$.

Предположим, что составляющие механизма функционирования $\Sigma=(\pi, Q, f)$ непрерывно дифференцируемы. Введем следующее

Определение. Направлением максимального гарантированного роста целевой функции i-го АЭ называется вектор $\mathbf{D}_t^i$, такой, что

$$\mathbf{D}_t^i=(D_{1t}^i, \ldots, D_{mt}^i),\quad D_{jt}^i=\min_{\mathbf{p}_\tau\in P_{i\tau},\ \tau=\overline{t, t+T}} \tag{4}$$
$$\min_{\mathbf{y}_\tau^k\in Y_{i\tau}^k(\mathbf{p}_\tau),\ k=\overline{1, N}} \frac{\partial w_t^i}{\partial y_{jt}^i}\equiv\min_{\Omega_t^i}\frac{\partial w_t^i}{\partial y_{jt}^i},\quad j=\overline{1, m}.$$

Содержательно D_{jt}^i есть максимальная гарантированная величина j-й компоненты градиента целевой функции i-го АЭ в периоде t при заданных прогнозах множеств потенциалов $P_{i\tau}$ и состояний $Y_{i\tau}(\mathbf{p}_\tau)$, $i=\overline{1, N}$, $\tau=\overline{t, t+T}$. В нетривиальном случае $\forall i$ $\exists j$ такой, что $D_{jt}^i>0$.

В качестве решений игры элементов рассматриваются гарантирующие стратегии, множество которых для i-го АЭ в периоде $t=0$ есть

$$R_t^i(\Sigma, p_t)=\{\tilde{\mathbf{y}}_t^i \mid \tilde{\mathbf{y}}_t^i=d_t^i\mathbf{D}_t^i\in W_t^i(p_t),\ d_t^i>0\}. \tag{5}$$

Здесь d_t^i — скаляр, $W_t^i(p_t)$ — граница $Y_t^i(p_t)$ [1]. Содержательно (5) означает, что в условиях неопределенности i-й АЭ выбирает текущее состояние ($\mathbf{y}_t^i$) по направлению максимального гарантированного роста его *целевой функции* (D_t^i) на границе множества возможных состояний ($W_t^i(\mathbf{p}_t)$). Пусть, например, $m=1$. Тогда при положительности нижней оценки производной целевой функции i-го АЭ (4) из (5) следует, что элемент выбирает максимально возможное состояние. При этом его целевая функция также достигает максимума. Для получения конструктивных результатов необходимо определить зависимость вектора $\mathbf{D}_t^i$ от процедур планирования (1), распределения ресурсов (2) и стимулирования (2) [1]. Без ограничения общности положим $t=0$.

Введем операторы

$$d\xi=\min_{p_\tau\in P_\tau,\ \tau=\overline{0,T}}\ \min_{y_\tau^k\in Y_\tau^k(p_\tau),\ k=\overline{1,N}}\frac{\partial}{\partial\xi}=\min_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial\xi},$$

$$D\xi=\max_{p_\tau\in P_\tau,\ \tau=\overline{0,T}}\ \max_{y_\tau^k\in Y_\tau^k(p_\tau),\ k=\overline{1,N}}\frac{\partial}{\partial\xi}=\max_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

На основе уравнений (2), (3) [1] и (1), (2), опуская в последних для краткости индекс $t=0$, введем тензоры

$$(6)\qquad \begin{aligned} &V_0^{in}=d\varphi_0^n w^i, \quad U_j^{ni}=dy_j^i f^n, \quad V_\tau^{in}=D\varphi_\tau^n w^i,\\ &F_a^{nb}=-dx_a^b f^n, \quad G_{dj}^{ci}=Dy_j^i\pi_d^c, \quad A_{ac}^{bd}=Dx_c^d\pi_a^b,\\ &E_{al}^{bk}=Dr_l^k\pi_a^b, \quad R_{gj}^{mi}=Dy_j^iQ_g^m, \quad L_{lc}^{kd}=Dx_c^dQ_l^k, \end{aligned}$$

где $\tau=\overline{1,T}$, верхние индексы пробегают значения от 1 до N, а нижние — от 1 до m, m, n соответственно, если они относятся к векторам планов (**x**), состояний (**y**) и ресурсов (**r**). В записи внутреннего произведения тензоров ниже для удобства предполагается суммирование по каждому немому индексу, встречающемуся дважды, один раз на втором и один раз на первом месте (либо вверху, либо внизу). Внутреннее произведение тензора на себя τ раз обозначается введением показателя τ:

$$(T_{ad}^{bc})^\tau=T_{af}^{bl}T_{ff}^{li}\ldots T_{nd}^{mc}.$$

Тогда справедливая следующая
Лемма:

$$(7)\qquad \begin{aligned} D_{j0}^i\geqslant V_0^{in}U_j^{ni}-\sum_{\tau=1}^{T}V_\tau^{in}F_a^{nb}(A_{ad}^{bc}+\\ +E_{al}^{bk}L_{ld}^{kc})^{\tau-1}(G_{dj}^{ci}+E_{dg}^{cm}R_{gj}^{mi})\equiv\hat{D}_{j0}^i(\Sigma), \end{aligned}$$

причем при линейных π, Q, f, w^i в (7) имеет место равенство. (Доказательства леммы, теорем и следствия приведены в приложении.)

Выше для краткости предполагалось $t=0$. Очевидно, что аналогичные рассуждения имеют место при любом t с заменой τ в (4) на $t+\tau$ и $\mathbf{D}_0^i$, $\hat{\mathbf{D}}_0^i$ на $\mathbf{D}_t^i$, $\hat{\mathbf{D}}_t^i$, причем тензоры (5) определяются в момент времени t согласно (2), (3) [1] и (1), (2).

Перейдем теперь к получению конструктивных условий оптимальности адаптивных механизмов, основываясь на результатах раздела 3 [1].

3. Условия оптимальности адаптивных механизмов

Обозначим множество оптимальных с точки зрения центра состояний i-го АЭ в периоде t при потенциале системы $\mathbf{p}_t$ через $A_t^i(\mathbf{p}_t)$. При этом $A_t^i(\mathbf{p}_t)=A(\mathbf{p})\cap Y_t^i(\mathbf{p}_t)$, где $A(\mathbf{p})$ определяется согласно (5) [1]. В задачах синтеза механизмов функционирования, обеспечивающих вскрытие внутренних резервов АЭ, естественно предполагать, что это множество имеет ненулевое пересечение с границей множества возможных состояний i-го АЭ:

$$(8)\qquad A_t^i(\mathbf{p}_t)\cap W_t^i(\mathbf{p}_t)\neq\phi,\quad \mathbf{p}_t\in P_t.$$

Последнее имеет место, например, в том случае, когда целевая функция центра $\psi(x, r, y)$ является монотонно возрастающей функцией (см. раздел 3 [1]).

Перейдем к сферической системе координат в пространстве состояний путем замены $y_{jt}^i=\alpha_{jt}^i\rho_t^i$, где $\alpha_t^i=(\alpha_{1t}^i,\ldots,\alpha_{mt}^i)$ — вектор направляющих косинусов состояния $\mathbf{y}_t^i$.

Направляющие косинусы векторов состояний, принадлежащих (8), образуют множество

$$\Pi_t^i(\mathbf{p}_t)=\{\beta_t^i|\rho_t^i\beta_t^i\in(A_t^i(p_t)\cap W_t^i(p_t)),\ \rho_t^i>0,\ \|\beta_t^i\|=1\}.$$

Обозначим множество векторов с наравляющими косинусами $\beta_t^i\in\Pi_t^i(\mathbf{p}_t)$ через $K_t^i(p_t)$:

$$K_t^i(\mathbf{p}_t)=\{\mathbf{z}_t^i|\mathbf{z}_t^i=b\beta_t^i,\ b>0,\ \beta_t^i\in\Pi_t^i(p_t)\}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Адаптивный механизм функционирования $\Sigma=(\pi, Q, f)$ в классе $G_a^{\pi,Q}$ [1] является оптимальным, если

$$\mathbf{D}_t^i\in K_t^i\equiv\bigcap_{p_t\in P_t}K_t^i(p_t)\neq\varnothing.$$

Рассмотрим теперь случай $K_t^i=\phi$. Обозначим $C_t^i(\mathbf{p}_t, \Sigma)=C(\mathbf{p}, \Sigma)\cap\cap Y_t^i(\mathbf{p}_t)$, где $C(\mathbf{p}, \Sigma)$ определяется согласно (9) [1], Σ – механизм функционирования системы. Перейдем к сферическим координатам и обозначим

$$S_t^i(\mathbf{p}_t, \Sigma)=\{\gamma_t^i|\rho_t^i\gamma_t^i\in(C_t^i(\mathbf{p}_t, \Sigma)\cap W_t^i(p_t)),\ \rho_t^i>0,\ \|\gamma_t^i\|=1\},$$

$$M_t^i(\mathbf{p}_t, \Sigma)=\{\mathbf{z}_t^i|\mathbf{z}_t^i=c\gamma_t^i,\ c>0,\ \gamma_t^i\in S_t^i(\mathbf{p}_t, \Sigma)\}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. В классе $G_a^{\pi,Q}$ эффективность механизма функционирования $\Sigma=(\pi, Q, f)$ не ниже эффективности гарантированно правильного механизма функционирования, если и только если

$$\mathbf{D}_t^i\in M_t^i(\Sigma),\quad M_t^i(\Sigma)=\bigcap_{p_t\in P_t}M_t^i(\mathbf{p}_t,\Sigma)\neq\varnothing.$$

Доказательство теоремы 2 основано на использовании теоремы 3 [1] и в основном аналогично доказательству теоремы 1, в связи с чем оно опущено.

Отметим, что элементы тензора U_j^{ni} имеют смысл приростов стимулов (полезностей) для n-го АЭ при увеличении j-го показателя состояния i-го АЭ на единицу. Поэтому его можно назвать тензором предельных полезностей. Аналогично F_a^{nb}, G_{dj}^{ci}, A_{ac}^{bd}, E_{al}^{bk}, R_{gj}^{mi}, L_{lc}^{kd} назовем тензорами предельных штрафов, планов, адаптивных планов, эффективности, ресурсов, адаптивных ресурсов. Теоремы 1, 2 устанавливают ограничения на эти тензоры и соответственно на адаптивные законы планирования, распределения ресурсов и стимулирования, обеспечивающие оптимальность адаптивного механизма функционирования в целом.

При решении задачи ОПСМ выше использовался наименее благоприятный прогноз потенциала системы (4). Очевидно, это предположение не является необходимым для линейных систем (т. е. когда π, Q, f, w^i – линейные функции своих аргументов).

Действительно, в этом случае направление максимального роста целевой функции АЭ совпадает с направлением его максимального гарантированного роста, поскольку в линейном случае $\nabla_{y_t^i}w_t^i=\mathbf{D}_t^i$.

При этом в (7) имеет место равенство, и теоремы 1, 2 в сочетании с леммой дают условия оптимальности адаптивных механизмов в терминах законов планирования, распределения ресурсов и стимулирования.

4. Адаптивные механизмы функционирования систем со скалярными активными элементами

Предположим, что все активные элементы характеризуются скалярными показателями состояний, планов и ресурсов ($m=n=1$). Обозначим матрицы

$$U_t=\|dy_t^if_t^j\|,\ F_t=\|-dx_t^if_t^j\|,\ G_t=\|Gy_t^i\pi_t^j\|,$$

(9)

$$A_t=\|Dx_t^i\pi_t^j\|,\ E_t=\|Dr_t^i\pi_t^j\|,\ R_t=\|Dy_t^iQ_t^j\|,$$

$$L_t=\|Dx_t^iQ_t^i\|,\quad V_{t+\tau}=\|d\varphi_{t+\tau}^{i}w_t^j\|,\quad \tau=\overline{0,T},$$

причем индекс i соответствует номеру строки, а индекс j — номеру столбца матрицы, $i, j=\overline{1, N}$.

Обозначим

$$(10)\qquad M_t=V_tU_t-\sum_{\tau=1}^{T}V_{t+\tau}F_t(A_t+E_tL_t)^{\tau-1}(G_t+E_tR_t).$$

Предположим, что имеет место (8), т. е. $\psi(x, r, y)$ является монотонно возрастающей по y_t^i при любых i, t (что соответствует заинтересованности центра в использовании внутренних ресурсов всех элементов).

Тогда из теоремы 1 вытекает

Следствие. Для оптимальности механизма функционирования $\Sigma=(\pi, Q, f)$ в классе $G_a^{\pi,Q}$ достаточно положительности диагональных элементов матрицы $M_t (M_t^{ii}>0, i=\overline{1, N})$.

Рассмотрим, например, независимый скалярный активный элемент ($N=1$). Тогда матрицы (9) вырождаются в скаляры. Без ограничения общности положим $t=0$ и опустим индекс 0. Предположим, что целевая функция АЭ имеет вид $w=\sum_{\tau=0}^{T}\rho^\tau\varphi_\tau$, ρ — коэффициент дисконтирования, $\rho\leqslant1$ (индекс $i=1$ опущен). Согласно следствию и (10), для оптимальности адаптивного механизма функционирования достаточно (при $\rho(A+EL)\neq1$)

$$(11)\qquad U>\rho F(G+ER)\frac{1-[\rho(A+EL)]^T}{1-\rho(A+EL)}.$$

Например, в классе механизмов с заданными законами стимулирования и распределения ресурсов ($\Sigma\in G_a^{Q,f}$) параметры закона адаптивного планирования G, A должны удовлетворять (11). Содержательно это означает, что при планировании от достигнутого темпы роста плана в каждом периоде по отношению к плану и состоянию в предыдущем периоде не должны быть слишком велики [3].

5. Адаптивное управление с идентификацией структуры

Рассмотрим теперь адаптивное управление с идентификацией структуры на примере скалярных активных элементов. Примем, что уравнения, определяющие потенциалы активных элементов в периоде t, $t\geqslant0$, имеют вид:

$$(12)\qquad p_{t+1}^i=S_t^i(r_t,\mathbf{p}_t),\quad p_0=p^0,\quad \mathbf{p}_t=(p_t^1,\dots,p_t^N),$$

где S_t^i — монотонно возрастающая функция своих аргументов. Показатель состояния y_t^i не может превышать некоторой предельной величины z_t^i, определяемой потенциалом системы

$$(13)\qquad y_t^i\in Y_t^i(p_t)=[0, z_t^i],\ y_t^i\leqslant z_t^i=W_t^i(p_t).$$

Предположим, что целевая функция центра имеет вид

$$(14)\qquad \psi(x, r, y)=H(r, y)-\chi(x, r, y),\ \chi(y, r, y)=0,\ \chi(\cdot)\geqslant0,$$

где $H(r, y)$ — монотонно возрастающая функция y (что соответствует заинтересованности центра в использовании внутренних ресурсов), а χ — функция штрафов за отклонение состояний от планов, $y=(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_t,\dots)$, $\mathbf{y}_t=(y_t^1,\dots,y_t^N)$.

Используя (12), (13), получаем уравнения для предельного состояния АЭ z_{t+1}^i:

$$(15)\qquad z_{t+1}^i=W_{t+1}^i(S_t^i(\mathbf{r}_t, W_t^{-1}(\mathbf{z}_t))).$$

Предположим, что существует идентификатор последнего уравнения (J), такой, что

$$u_{t+1}^{i}=J_{t+1}^{i}(\mathbf{u}_t, \mathbf{r}_t), \quad i=\overline{1, N}, \tag{16}$$

причем если $\mathbf{u}_\tau=\mathbf{z}_\tau$, $\tau\leqslant t$, то

$$\mathbf{u}_{t+1}=\mathbf{z}_{t+1}, \quad t\geqslant 0. \tag{17}$$

Положим

$$\begin{aligned} &r_t^i=\tilde{Q}_t^i(\mathrm{y}_t), \quad Q=\{\tilde{Q}_t^i\},\\ &\tilde{M}_t=V_tU_t-V_{t+1}F_t(G_t+E_tR_t). \end{aligned} \tag{18}$$

Решение задачи оптимального синтеза (4) [1] будем искать в классе механизмов функционирования с заданными законами распределения ресурсов G_a^Q.

Тогда справедлива

Теорема 3. Для оптимальности механизма функционирования $\Sigma=(\pi, Q, f)$ с идентификатором (J) в классе G_a^Q, $Q=\{Q_t^i\}$ достаточно положительности диагональных элементов матрицы $\tilde{M}_t$ ($\tilde{M}_t^{ii}>0$, $i=\overline{1, N}$) при условии

$$\mathbf{x}_{t+1}=\pi_t(\mathbf{y}_t, \mathbf{r}_t)=J_{t+1}(\mathbf{y}_t, \mathbf{r}_t). \tag{19}$$

Проиллюстрируем полученный результат на примере независимого скалярного АЭ. Именно, рассмотрим задачу оптимального синтеза закона стимулирования в классе механизмов с заданными законами планирования и распределения ресурсов на основе идентификации (19) $\Sigma\in G_a^{\pi, Q}$. Вследствие теоремы 3 для оптимальности механизма функционирования достаточно, чтобы

$$U>\rho F(G+ER) \tag{20}$$

(индекс $t=0$ опущен для краткости).

Применительно к организационно-экономическим системам, например, это означает, что с увеличением темпов роста производства (G) и его эффективности (E) либо должно возрастать стимулирование АЭ за перевыполнение планов (U), либо должны уменьшаться штрафы за их невыполнение (F).

Рассмотрим, например, широко используемую на практике [3] кусочно-линейную *процедуру стимулирования, обеспечивающую выполнение* (20):

$$\begin{aligned} &f(x, y)=h(y)-\chi'(x, y),\\ &\chi'(x,y)=\begin{cases} \varkappa(y-x), & \text{если} \quad y>x, \quad \varkappa>0,\\ \mu(x-y), & \text{если} \quad y\leqslant x, \quad \mu>0. \end{cases} \end{aligned} \tag{21}$$

Условие (20) при процедуре (21) имеет вид

$$\varkappa+\rho\mu(G+ER)\leqslant dh(y)/dy.$$

Это неравенство можно рассматривать как ограничение на функцию штрафов $\chi'(x, y)$ (а именно, величины $\varkappa$, μ не должны быть большими).

6. Заключение

В данной работе развивается теория и методология построения оптимальных адаптивных механизмов функционирования активных систем [1] на основе решения задачи оптимизации с прогнозом потенциала, состояния и механизма с целью получения конструктивных результатов в отношении процедур планирования, распределения ресурсов и стимулирования, используемых в адаптивных механизмах функционирования. Найдены достаточные условия оптимальности адаптивного механизма функционирования в зависимости от составляющих его процедур планирования, распределения ресурсов и стимулирования. Получены также необходимые и достаточные условия большой эффективности адаптивных механизмов функционирования по сравнению с правильными в терминах указанных процедур. Полученные результаты направлены на создание системы методов планирования, распределения ресурсов и стимулирования, обеспечивающей наиболее эффективные учет и использование потенциала активных элементов в динамике на стадиях планирования и реализации планов. Такая система необходима при управлении развивающимися организационными системами, например отраслевым циклом «исследование — производство», принципиальной особенностью которого является наличие неопределенности, связанной с научно-техническим прогрессом [2]. В настоящее время ведутся работы по внедрению указанных методов в практику управления циклом «исследование — производство» [3].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. В силу дифференцируемости функций

$$\text{(П.1)}\qquad \frac{dw^i}{dy^i_{j0}}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{\tau=0}^{T}\frac{\partial w^i}{\partial\varphi^n_\tau}\left(\delta_{0\tau}\frac{\partial\varphi^n_0}{\partial y^i_{j0}}+\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{N}\frac{\partial\varphi^n_\tau}{\partial x^b_{a\tau}}\frac{\partial x^b_{a\tau}}{\partial y^i_{j0}}\right),$$

$$\text{(П.2)}\qquad \frac{\partial x^b_{a\tau}}{\partial y^i_{j0}}=\sum_{d=1}^{N}\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{\partial x^b_{a\tau}}{\partial x^d_{c\tau-1}}\frac{\partial x^d_{c\tau-1}}{\partial y^i_{j0}}+\frac{\partial x^b_{a\tau}}{\partial r^d_{c\tau-1}}\frac{\partial r^d_{c\tau-1}}{\partial y^j_{j0}}\right),$$

$$\text{(П.3)}\qquad \frac{\partial r^d_{c\tau}}{\partial y^i_{j0}}=\delta_{0\tau}\frac{\partial r^d_{c0}}{\partial y^i_{j0}}+\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial r^d_{c\tau}}{\partial x^l_{k\tau-1}}\frac{\partial x^l_{k\tau-1}}{\partial y^i_{j0}},\quad \delta_{0\tau}=\begin{cases}1, & \tau=0,\\ 0, & \tau\neq 0,\end{cases}$$

Используя (П.2), (П.3) как рекуррентные соотношения и учитывая монотонность функций π, Q по x, y, r, посредством рассуждений по индукции нетрудно показать, что левые части (П.2), (П.3) неотрицательны. Используя (П.2), (П.3), получаем следующие неравенства (а при линейных π, Q — равенства):

$$\text{(П.4)}\qquad \max_{\Omega_0^t}\frac{\partial x_{a\tau}{}^b}{\partial y_{j0}{}^i}=\sum_{d=1}^{n}\sum_{c=1}^{m}\left(Dx_c{}^d\pi_a{}^b\max_{\Omega_0^t}\frac{\partial x^d_{c\tau-1}}{\partial y_{j0}{}^i}+Dr_c{}^d\pi_a{}^b\max_{\Omega_0^t}\frac{\partial r^d_{c\tau-1}}{\partial y_{j0}{}^i}\right),$$

$$\text{(П.5)}\qquad \max_{\Omega_0^t}\frac{\partial r_{c\tau}{}^d}{\partial y_{j0}{}^i}=\delta_{0\tau}Dy_{j0}{}^iQ_c{}^d+\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}Dx_k{}^lQ_c{}^d\max_{\Omega_0^t}\frac{\partial x^l_{k\tau-1}}{\partial y_{j0}{}^i}.$$

Используя (П.4) как рекуррентное соотношение, путем τ-кратной подстановки (П.5) в (П.4) получаем при $\tau\geqslant 1$:

$$\text{(П.6)}\qquad \max_{\Omega_0^t}\frac{\partial x_{a\tau}{}^b}{\partial y_{j0}{}^i}=(A_{ac}{}^{bd}+E_{al}{}^{bk}L_{lc}{}^{kd})^{\tau-1}(G_{cj}{}^{di}+E_{cf}{}^{dl}R_{fj}{}^{li}),$$

причем в линейном случае имеет место равенство.

Подставим (П.6) в выражение для $D_{j0}{}^i$ (4), получаемое из (П.1). Учитывая, что $\partial\varphi_0{}^n/\partial y_{j0}{}^i>0$, $\partial w^i/\partial\varphi_\tau{}^n>0$, $\partial\varphi_\tau{}^n/\partial x_{a\tau}{}^b<0$, $p_{i\tau}\subset P_\tau$, $Y_{i\tau}(p_\tau)\subset Y_\tau(p_\tau)$, а также определения (6), получаем (7), причем при линейных π, Q, f, w^i в (7) имеет место равенство, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. В соответствии с условиями теоремы $D_t{}^i\in k_t{}^i\neq\phi$ и найдутся $\beta_t{}^i$, $b_t{}^i>0$, такие, что $D_t{}^i=b_t{}^i\beta_t{}^i$, $\beta_t{}^i\in\Pi_t{}^i(p_t)$. С другой стороны, в силу $K_t{}^i\neq\phi$ $A_t{}^i(p_t)\cap W_t{}^i(p_t)\neq\phi$ и найдется $\rho_t{}^i$, такой, что $\rho_t{}^i\beta_t{}^i\in A_t{}^i(p_t)\cap W_t{}^i(p_t)$. Поскольку $W_t{}^i(p_t)$ является границей замкнутого множества $Y_t{}^i(p_t)$, то $d_t{}^ib_t{}^i=\rho_t{}^i$ и $\tilde{y}_t{}^i\in A_t{}^i(p_t)$. Следовательно, в силу (5) $R_t{}^i(\Sigma,\ p_t)\subset A_t{}^i(p_t)$, $p_t\in P_t$. Но последнее условие является, согласно теореме 2 [1], достаточным для оптимальности механизма функционирования в классе $G_a^{\pi,Q}$. Теорема доказана.

Доказательство следствия. В силу (8) и $m=1$ $\Pi_t{}^i(p_t)=1$, $K_t{}^i=\{c_t{}^i\,|\,c_t{}^i>0\}\neq\phi$. Согласно лемме $D_t{}^i\geqslant M_t{}^{ii}$, так что для $D_t{}^i\in K_t{}^i$ достаточно $M_t{}^{ii}>0$. Тогда из теоремы 1 получаем требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 3. Согласно определению 4 [1] и в силу свойств целевой функции центра (14) для любого $\Sigma\in G_a{}^Q$

$$K(\Sigma)\leqslant H(r,\ z)-\chi(z',\ r,\ z),\qquad z'=(x_0,\ z_1,\ z_2,\ldots,z_t,\ldots).$$

Следовательно, для опимальности $\Sigma \in G_a{}^Q$ необходимо и достаточно $\mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{z}_{t+1}$ при любом $t \geqslant 0$. Прежде всего отметим, что в рассмотренном случае $\Sigma \in G_a^{\pi, Q}$, где $\pi = J$ – заданная согласно (19) процедура планирования, $J = \{J_t{}^i\}$. Далее, из (9), (18), (19) следует $A_t = L_t = 0$. Сравнивая (10) и (19), получаем $M_t{}^{ii} = \tilde{M}_t{}^{ii}$, и из условия теоремы $\tilde{M}_t{}^{ii} > 0$. Согласно лемме $D_t{}^i \geqslant M_t{}^{ii} > 0$. Таким образом, если $y_t{}^i \in R_t{}^i(\Sigma, p_t)$, то согласно (6) $y_t{}^i \in W_t{}^i(p_t)$. В силу (13) $y_t{}^i = z_t{}^i$. Полагая $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0$ и используя (19), (16), находим $\mathbf{x}_1 = J_1(\mathbf{y}_0, \mathbf{r}_0) = J_1(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0) = J_1(\mathbf{u}_0, \mathbf{r}_0) = \mathbf{u}_1$. Продолжая рассуждения по индукции, для любого $t \geqslant 0$ получаем $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{u}_{t+1}$. Учитывая (17), имеем $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{z}_{t+1}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н., Цыганов В. В.* Адаптивные механизмы функционирования активных систем. I. Прогрессивность и активная идентификация.– АиТ, 1985, № 9, с. 87–94.
2. *Трапезников В. А., Гореликов Н. И., Бурков В. Н., Зимоха В. А., Толстых А. В., Цыганов В. В., Черкашин А. М.* Комплексный подход к управлению научно-техническим прогрессом в отрасли.– Вести. АН СССР, 1983, № 3, с. 33–43.
3. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В., Цыганов В. В., Черкашин А. М.* Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию
12.VIII.1983

ADAPTIVE FUNCTIONING MECHANISMS OF ACTIVE SYSTEMS.

II. NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS

TSYGANOV V. V.

An optimal adaptive functioning mechanisms is designed for a two-level dynamic active system on the assumption that active elements solve the optimization problem with forecasts of the potential, state, and mechanism. Necessary and sufficient conditions are obtained for optimality in terms of planning, resource allocation, and incentive equations.